

Άλγεβρα Β' λυκείου

Εργασία 2^η: «Συναρτήσεις»

13 Οκτώβρη 2016

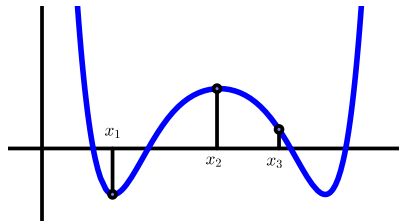
Ερωτήσεις Θεωρίας

1. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι *γνησίως άξουσα* σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι *γνησίως φθίνουσα* σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι *γνησίως μονότονη* σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
4. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A παρουσιάζει (ολικό) *ελάχιστο* στο σημείο $x_0 \in A$; Πώς λέγεται το x_0 και πώς συμβολίζεται;
5. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A παρουσιάζει (ολικό) *μέγιστο* στο σημείο $x_0 \in A$; Πώς λέγεται το x_0 και πώς συμβολίζεται;
6. Τί λέμε *ακρότατα* μιας συνάρτησης f ;
7. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A είναι *περιττή* και ποιά είναι η γεωμετρική ερμηνεία;
8. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A είναι *άρτια* και ποιά είναι η γεωμετρική ερμηνεία;
9. Τί μορφή πρέπει να έχει το πεδίο ορισμού A μιας συνάρτησης f ώστε να είναι *άρτια* ή *περιττή*;
10. Με ποιά μετατόπιση προκύπτει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x) = f(x) + c$ με $c > 0$;
11. Με ποιά μετατόπιση προκύπτει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x) = f(x) - c$ με $c > 0$;
12. Με ποιά μετατόπιση προκύπτει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x) = f(x + c)$ με $c > 0$;
13. Με ποιά μετατόπιση προκύπτει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x) = f(x - c)$ με $c > 0$;

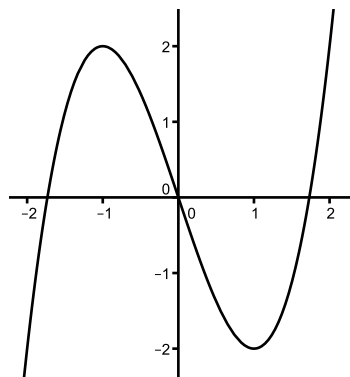
Βασικές Ασκήσεις - Τράπεζα Θεμάτων

1. Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία $A(5, 2)$ και $B(4, 9)$. Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της f δικαιολογώντας την απάντησή σας και στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση $f(5 - 3x) < 2$.
2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f(x) \leq 1$. Είναι το 1 η μέγιστη τιμή της συνάρτησης; Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας. Στη συνέχεια να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι *άρτια* ή *περιττή*.

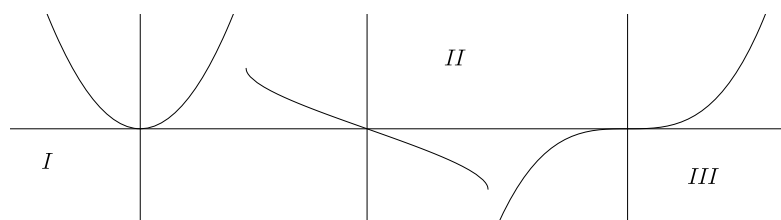
3. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} .



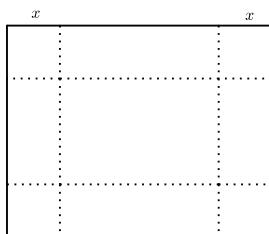
- α) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους $f(x_1), f(x_2)$ και $f(x_3)$. (10 μ)
- β) Είναι η συνάρτηση f γνησίως μονότονη στο \mathbb{R} ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (10 μ)
- γ) Παρουσιάζει η f μέγιστο στο σημείο x_2 ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (5 μ)
4. Έστω γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από τα σημεία $A(2, 3)$ και $B(4, 5)$.
- α) Να προσδιορίσετε το είδος μονοτονίας της f . (13 μ)
- β) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $\Gamma(-2, 0)$, να δείξετε ότι $f(0) > 0$. (12 μ)
5. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 3x$, $x \in (-2, 2)$.



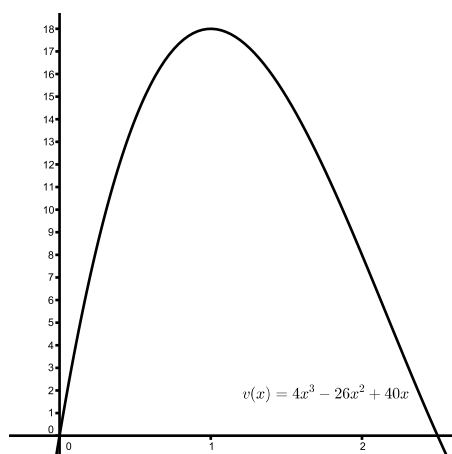
- α) Είναι η f άρτια ή περιττή; Να αποδείξετε αλγεβρικά τον ισχυρισμό σας. (7 μ)
- β) Χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση της f , να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της. (6 μ)
- γ) Να βρείτε τις θέσεις των ακρότατων της f . (12 μ)
6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{8-x} - \sqrt{8+x}$.
- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (5 μ)
- β) Εξετάστε αν η f είναι άρτια ή περιττή. (8 μ)
- γ) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της, να επιλέξετε ποια από τις παρακάτω τρεις προτεινόμενες, είναι η γραφική της παράσταση και στη συνέχεια να υπολογίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της. (7 μ)



- δ) Να αιτιολογήσετε γραφικά ή αλγεβρικά, γιατί οι συναρτήσεις $f(x) = g(x) - 3$ και $h(x) = f(x + 3)$ δεν είναι ούτε άρτιες ούτε περιττές. (5 μ)
7. Η περιβαλλοντική ομάδα ενός σχολείου παρέλαβε συρματόπλεγμα μήκους 40m για να περιφράξει, χρησιμοποιώντας όλο το συρματόπλεγμα, έναν ορθογώνιο κήπο για καλλιέργεια λαχανικών. Οι μαθητές της περιβαλλοντικής ομάδας θέλουν να επιλέξουν ένα κήπο που να έχει όσο το δυνατόν μεγαλύτερο εμβαδόν.
- α) Να δώσετε τις διαστάσεις τριών διαφορετικών ορθογώνιων κήπων με περίμετρο 40m. Να εξετάσετε αν οι τρεις λαχανόκηποι έχουν το ίδιο εμβαδόν. (7 μ)
- β) Αν συμβολίσουμε με x το πλάτος και με E το εμβαδόν ενός λαχανόκηπου με περίμετρο 40m, να εκφράσετε το E ως συνάρτηση του x . (8 μ)
- γ) Να δείξετε ότι $E(x) = -(x - 10)^2 + 100$. Χρησιμοποιώντας την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -x^2$, να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της $E(x)$. Από τη γραφική παράσταση της $E(x)$ να βρείτε τις διαστάσεις του λαχανόκηπου με το μεγαλύτερο εμβαδόν. (7 μ)
8. Για να κατασκευάσουμε ένα ανοικτό κουτί από ένα ορθογώνιο χαρτόνι με διαστάσεις 5 dm και 8 dm κόβουμε ίσα τετράγωνα, πλευράς x , από κάθε γωνία του και γυρίζουμε προς τα πάνω τις πλευρές του όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

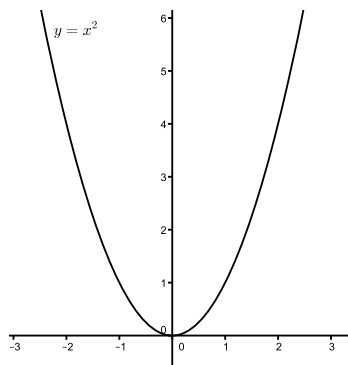


- α) Να δείξετε ότι ο όγκος V του κουτιού δίνεται από τον τύπο $V(x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x$. (6 μ)
- β) Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει το x στο πλαίσιο του προβλήματος. (5 μ)
- γ) Να βρείτε τις διαστάσεις (εκφρασμένες σε dm με ακέραιους αριθμούς) του κουτιού αν γνωρίζουμε ότι ο όγκος του είναι 8 dm^3 . (7 μ)
- δ) Παρακάτω δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $V(x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x$ για $x \in (0, 2.5)$. Χρησιμοποιώντας το σχήμα να βρείτε ποιος είναι ο μεγαλύτερος όγκος που μπορεί να έχει το κουτί. Στη συνέχεια να υπολογίσετε αλγεβρικά τις διαστάσεις του κουτιού με το μεγαλύτερο όγκο. (7 μ)

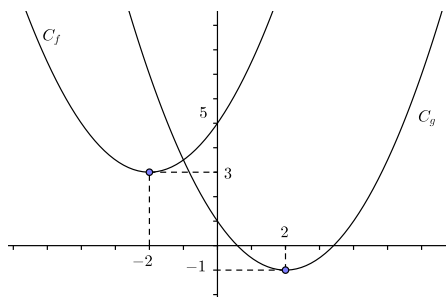


9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f γράφεται στη μορφή $f(x) = (x - 2)^2 + 1$. (12 μ)
 β) Στο σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f , μετατοπίζοντας κατάλληλα την $y = x^2$. (13 μ)



10. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι παραβολές C_f και C_g που είναι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} . Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση

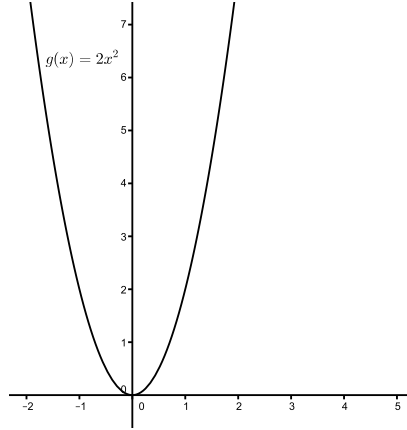


της f με οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση. Παρατηρώντας το σχήμα:

- α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας, το είδος του ακρότατου της f και την τιμή του. (10 μ)
 β) Να βρείτε μέσω ποιων μετατοπίσεων της C_f προκύπτει η C_g . (15 μ)

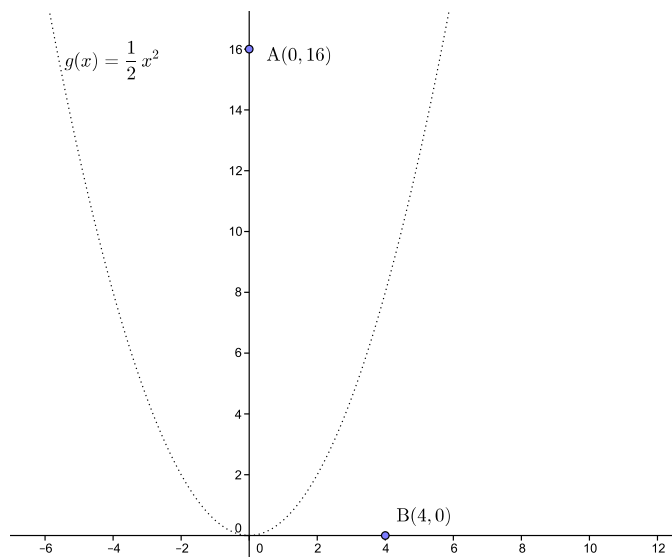
11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 12x + 19$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f γράφεται στη μορφή $f(x) = 2(x - 3)^2 + 1$. (10 μ)
β) Παρακάτω δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 2x^2$. Στο ίδιο σύστημα αξόνων, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και να εξηγήσετε πώς αυτή προκύπτει μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της g . (15 μ)



12. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{1}{2}(x - c)^2 - d$, με $x \in \mathbb{R}$ και c, d θετικές σταθερές, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από τα σημεία $A(0, 16)$ και $B(4, 0)$.

- α) Με βάση τα δεδομένα, να κατασκευάσετε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους τους και να υπολογίσετε την τιμή τους. (10 μ)
β) Θεωρώντας γνωστό ότι $c = 6$ και $d = 2$,
i. να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες. (3 μ)
ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και να εξηγήσετε πώς αυτή σχετίζεται με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{2}x^2$. (6 μ)



iii. Με βάση την παραπάνω γραφική παράσταση, να βρείτε το ακρότατο της συνάρτησης f , τα διαστήματα στα οποία η f είναι μονότονη, καθώς και το είδος της μονοτονίας της σε καθένα από αυτά τα διαστήματα. (6 μ)

13. Δίνεται η (γραμμική) συνάρτηση: $f(x) = \alpha x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(5, 8)$, να δείξετε ότι $\alpha = \frac{3}{2}$ και $\beta = \frac{1}{2}$. (8 μ)

β) Αν $g(x)$ είναι η συνάρτηση που προκύπτει από τη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f οριζόντια κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά και κατακόρυφα κατά 3 μονάδες προς τα κάτω, να βρείτε τον τύπο της g . (9 μ)

γ) Αν $h(x) = \frac{3}{2}(x - 1)$ είναι η συνάρτηση που προκύπτει από τη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f οριζόντια κατά k μονάδες προς τα δεξιά και κατακόρυφα κατά $\frac{k}{2}$ μονάδες κάτω, να βρείτε το $k > 0$. (8 μ)

