

ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΣΑΜΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 3$.
- α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της f και να βρείτε τις f' και f'' .
 - β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 - γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{\sqrt{x+2} - 2} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

2. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = -2x^3 + \alpha x^2 + 12x + 1$.
- α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της f .
 - β) Να βρείτε την f' και να υπολογίσετε την τιμή του α αν $f'(-2) = f'(1)$.
 - γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
3. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = \alpha \cdot \ln x - x^2$.
- α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της f .
 - β) Να βρείτε την f' και να υπολογίσετε την τιμή του α αν $f'(4) = -6$.
 - γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 - δ) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = f(1) + f(e)$.
4. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^3 - \alpha \cdot x^2 + 3 \cdot \beta \cdot x + 2$.
- α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της f .
 - β) Να βρείτε τις τιμές των α και β αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1, 1)$ και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στη θέση $x = 3$.
 - γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 - δ) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = f(0) + 2 \cdot f(2) - f(3)$.
 - ε) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{\sqrt{x} - 1}$

5. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = \alpha \cdot e^x - \beta \cdot x + 5$.

- α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της f .
- β) Να βρείτε τις τιμές των α και β αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(0, 7)$ και επιπλέον ισχύει ότι $f'(0) = 1$.
- γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- δ) Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x) - f'(x) = 1$.
- ε) Να υπολογίσετε το $k \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει:

$$k^2 \cdot f''(x) - 3 \cdot k \cdot f'(x) + 2 \cdot f''(x) = 3 \cdot k$$

6. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = \alpha \cdot \eta\mu^x + \beta \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x$ με $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

- α) Να βρείτε τις τιμές των α και β αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(\frac{\pi}{6}, -\frac{1}{2})$ και επιπλέον ισχύει ότι $f'(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$.
- β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, \frac{\pi}{2})$.
- γ) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = f'(\frac{\pi}{4}) + f(\frac{\pi}{4}) - f'(\frac{\pi}{3})$.

7. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

- α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της f .
- β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- γ) Να δείξετε ότι $\frac{\ln 3}{3} \leq f(x) \leq \frac{1}{e}$ για κάθε $x \in [e, 3]$.
- δ) Να δείξετε ότι $x^2 \cdot f(x) + x \cdot f(x) = 1$ για κάθε $x > 0$.

8. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = e^x + 3x$.

- α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της f .
- β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- γ) Να συγκρίνετε τις τιμές $f(-5)$ και $f(2)$.
- δ) Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2} + 3x^2 < e^x + 3x$.
- ε) Να δείξετε ότι $e^{3000} + 9000 < e^{4000} + 12000$.

9. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = x \cdot \ln x - \alpha \cdot x$.

- α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της f .
- β) Να υπολογίσετε την τιμή του α αν η f παρουσιάζει ακρότατο για $x = 1$.

- γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- δ) Να δείξετε ότι $x \cdot \ln x - x \geq -1$ για κάθε $x > 0$.
- ε) Να δείξετε ότι $2010 \cdot \ln 2010 - 2010 < 2011 \cdot \ln 2011 - 2011$.

10. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2012$.

- α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της f .
- β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- γ) Να δείξετε ότι $f(x) \leq 2012$ για κάθε $x \in (-\infty, 1]$.
- δ) Να δείξετε ότι $f(2008) < f(2009)$.
- ε) Να συγκρίνετε τα $f(e)$ και $f(\pi)$.

11. Από όλα τα ορθογώνια με περίμετρο 50 m να βρείτε αυτό με το μέγιστο εμβαδόν.

12. Από όλα τα ορθογώνια με εμβαδόν 400 m^2 να βρείτε αυτό με τη μικρότερη περίμετρο.

13. Η θερμοκρασία μιας περιοχής (σε βαθμούς Κελσίου), ως συνάρτηση του χρόνου t σε ώρες δίνεται από τη σχέση:

$$\theta(t) = -t^3 + 9t^2 - 10t + c \quad \text{με} \quad 0 \leq t \leq 8.$$

- α) Να βρείτε το c αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ η θερμοκρασία ήταν 16 C^0 .
- β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας στο τέλος της τέταρτης ώρας.
- γ) Να βρείτε την ώρα με το μέγιστο ρυθμό μεταβολής.

14. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x$.

- α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της f .
- β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

15. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = \alpha \cdot \ln x + x^2 - \beta \cdot x$.

- α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της f .
- β) Να υπολογίσετε τα α και β αν η f παρουσιάζει ακρότατα στις θέσεις $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$.
- γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

δ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x \cdot f'(x)}{\sqrt{x+6} - 3}$$

16. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^3 + \alpha \cdot x^2 - 9 \cdot x + \beta$.

α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να υπολογίσετε τα α και β αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(2, 5)$ και επιπλέον ισχύει ότι $f'(2) = 15$.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

δ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f'(x) + 9}{x^2 - 4}$$