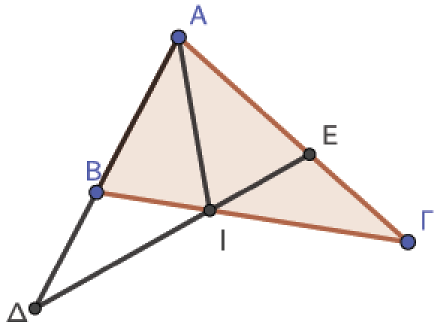
1.



$\varDelta\acute{\iota}\nu o\nu\tau\alpha\iota:$
$\mathrm{A}\varDelta = \mathrm{A\Gamma}(1)$
$\mathrm{AB} = \mathrm{AE}(2)$
$- - - - - - - - - - - - - - -$

$\text{Είναι } \tau\rho\iota\gamma\mathrm{AB\Gamma} = \tau\rho\iota\gamma\mathrm{AE}\varDelta \ (3) \ (\text{λόγω } (1),(2) \text{ και } \varDelta\hat{\mathrm{A}}\Gamma \text{ κοινή}, \ (\varPi - \Gamma - \varPi))$

$\text{άρα λόγω της } (3) \text{ ισχύει } \mathrm{A}\hat{\varDelta}\mathrm{E} = \mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B} \ (4) \text{ και } \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = \mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\varDelta \ (5)$

$\text{όμως θα είναι ίσες και οι παραπληρωματικές γωνίες των ίσων γωνιών της } (5) \text{ δηλαδή } \varDelta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{I} = \mathrm{I}\hat{\mathrm{E}}\Gamma \ (6)$

$\text{ακόμη έχουμε } \mathrm{B}\varDelta = \mathrm{E}\Gamma \ (7) \ (\text{ως διαφορές ίσων τμημάτων } \mathrm{A}\varDelta - \mathrm{AB} \text{ και } \mathrm{A}\Gamma - \mathrm{AE} \text{ αντίστοιχα})$

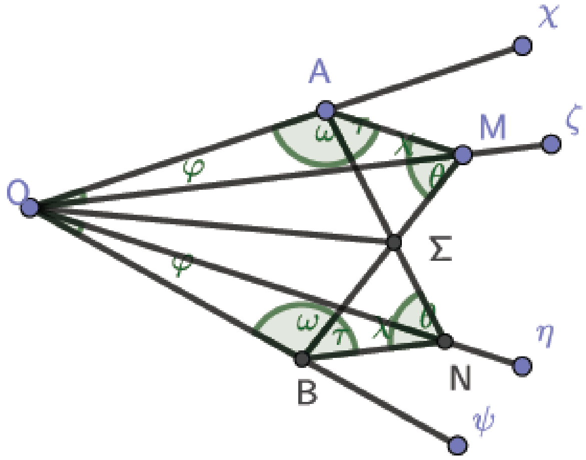
$\text{Έτσι είναι } \tau\rho\iota\gamma\varDelta\mathrm{BI} = \tau\rho\iota\gamma\Gamma\mathrm{EI} \ (8) \ (\text{λόγω } (4),(7) \text{ και } (6) \ (\Gamma - \varPi - \Gamma))$

$\text{Άρα } \mathrm{BI} = \mathrm{IE} \ (9) \ (\text{λόγω της } (8))$

$\text{Τελικά είναι } \tau\rho\iota\gamma\mathrm{ABI} = \tau\rho\iota\gamma\mathrm{AEI} \ (10) \ (\text{λόγω } (9),(2) \text{ και AI κοινή } (\varPi - \varPi - \varPi))$

$\text{οπότε } B\hat{A}I = E\hat{A}I \ (\text{λόγω}(10)) \ \text{ συνεπώς η AI είναι διχοτόμος της } \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma \text{ ό.έ.δ.}$

2.



Δίνονται: ΟΑ=ΟΒ (1)
ΟΜ=ΟΝ (2)
και οι γωνίες : ∢ΑΟΜ = ∢ΒΟΝ = φ (ίσες και μικρότερες από μισή ∢χΟψ (3)

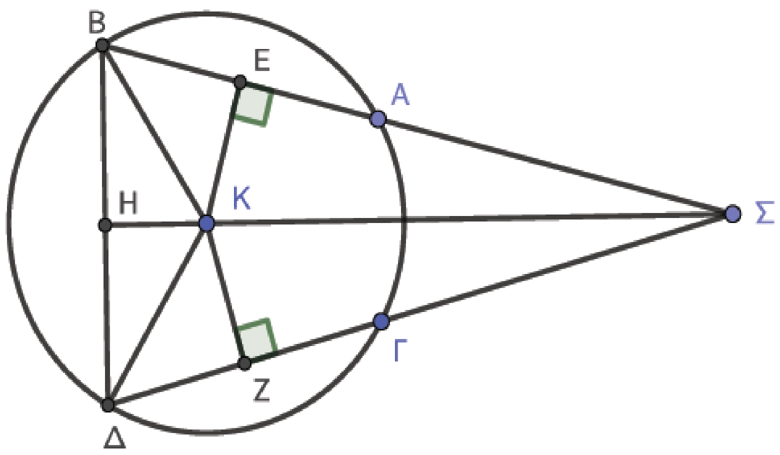
Ι.
Είναι τριγ ΑΟΜ= τριγ ΒΟΝ (4) (λόγω (1), (3) και (2) (Π-Γ-Π))
άρα λόγω της (4) ισχύει ∢ΟΑΜ = ∢ΟΒΝ = ω (5) , ∢ΟΜΑ = ∢ΟΝΒ = χ (6) και ΑΜ=ΒΝ (7)
Ακόμη: ∢ΑΟΝ = ∢ΒΟΜ (8) διότι: ∢ΑΟΝ = ∢ΑΟΜ + ∢ζΟη = φ + ∢ζΟη = ∢ΒΟΝ + ∢ζΟη = ∢ΒΟΜ
Έτσι: τριγ ΑΟΝ= τριγ ΒΟΜ (9) (λόγω (1), (8) και (2) (Π-Γ-Π))
άρα λόγω της (9) ισχύει: ∢ΟΑΝ= ∢ΟΒΜ (10) και ∢ΟΜΒ= ∢ΟΝΑ = θ (11)
Τώρα για τα τρίγωνα ΣΑΜ και ΣΒΝ έχουμε:
Οι γωνίες ∢ΣΑΜ= ∢ΣΒΝ = τ (14) διότι:
∢ΣΑΜ= ∢ΟΑΜ - ∢ΟΑΝ = ω - ∢ΟΑΝ (12)

∢ΣΒΝ= ∢ΟΒΝ - ∢ΟΑΝ= ω - ∢ΟΒΜ (13)
και λόγω της (10) τα δεύτερα μέλη στις (12),(13) είναι ίσα, άρα και τα πρώτα (∢ΣΑΜ= ∢ΣΒΝ).
Οι γωνίες ∢ΣΜΑ= ∢ΣΝΒ (17) διότι:
∢ΣΜΑ= ∢ΟΜΒ + ∢ΟΜΑ (15)
∢ΣΝΒ= ∢ΟΝΒ + ∢ΟΝΑ= (16) και λόγω της (11) και (6) τα δεύτερα μέλη στις (15),(16) είναι ίσα, άρα και τα πρώτα(∢ΣΜΑ=∢ΣΝΒ= χ+θ).
Τελικά λόγω (14), (7) και (17) τα τρίγωνα: ΣΑΜ, ΣΒΝ είναι ίσα (Γ-Π-Γ) (18), ό.έ.δ.

ΙΙ.

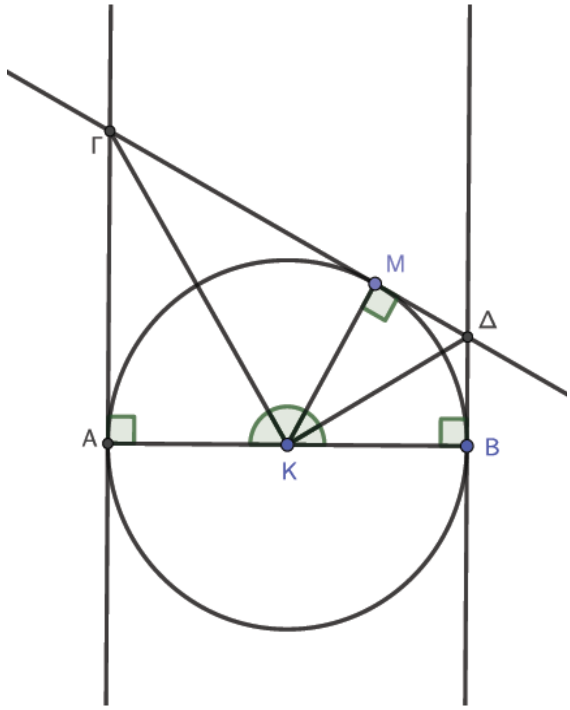
Από (18) έχουμε ΣΑ=ΣΒ (19)
και έτσι τα τρίγωνα ΣΟΑ=ΣΟΒ (λόγω (1), (19) και ΟΣ κοινή πλευρά (Π-Π-Π))
άρα ∢ΣΟΑ= ∢ΣΟΒ, συνεπώς η ΟΣ είναι διχοτόμος της γωνίας χΟψ, ό.έ.δ.

3.



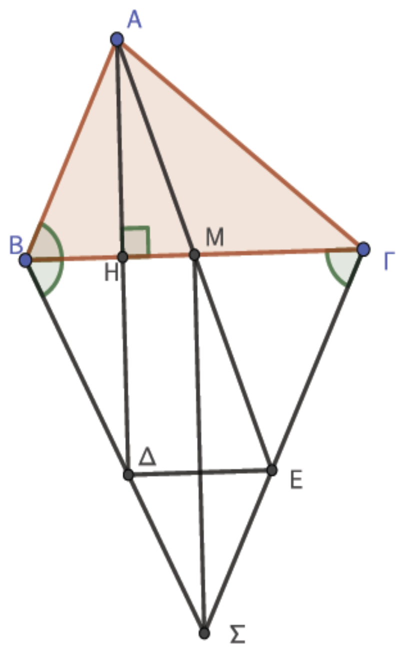
Δίνεται: ΣΒ=ΣΔ (1)
Είναι ΚΒ=ΚΔ (2) (ακτίνες του κύκλου Κ)
Από την (1) έχουμε ότι Σ ανήκει στη μεσοκάθετη του ΒΔ.
Από την (2) έχουμε ότι Κ ανήκει στη μεσοκάθετη του ΒΔ.
Άρα η ΣΚ είναι η μεσοκάθετη του ΒΔ (από δύο σημεία διέρχεται μια και μοναδική ευθεία)
Έστω Η η τομή της ΣΚ με το τμήμα ΒΔ. Δηλαδή στο ισοσκελές τρίγωνο ΣΒΔ το ΣΗ είναι ύψος και διάμεσος, επομένως και διχοτόμος της γωνίας Σ. Όμως γνωρίζουμε ότι κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει απ' τις πλευρές της. Δηλαδή για το κέντρο Κ ισχύει ΚΕ=ΚΖ. Αυτά όμως είναι τα αποστήματα των χορδών ΑΒ και ΓΔ. Επειδή όμως σε ίσα αποστήματα αντιστοιχούν ίσες χορδές θα είναι ΑΒ=ΓΔ (3). Αφαιρώντας τις (1) και (3) κατά μέλη έχουμε : ΣΒ-ΑΒ=ΣΔ-ΓΔ ή ΣΑ=ΣΓ ό.έ.δ.

4.



Τα τρίγωνα ΓΑΚ και ΓΜΚ είναι ίσα. (ορθογώνια, ΓΚ κοινή και ΓΑ=ΓΜ ως εφαπτόμενα τμήματα)
Άρα ∢ΓΚΑ= ∢ΓΚΜ ή ∢ΓΚΜ= ∢ΑΚΜ/2 (1)
Τα τρίγωνα ΔΜΚ και ΔΒΚ είναι ίσα. (ορθογώνια, ΔΚ κοινή και ΔΜ=ΔΒ ως εφαπτόμενα τμήματα)
Άρα ∢ΔΚΒ= ∢ΔΚΜ ή ∢ΔΚΜ= ∢ΒΚΜ/2 (2)
Προσθέτουμε τις (1) και (2) κατά μέλη ∢ΓΚΜ + ∢ΔΚΜ = ∢ΑΚΜ/2 + ∢ΒΚΜ/2 ή
∢ΓΚΔ = ∢ΑΚΒ/2 ή ∢ΓΚΔ = 180^o/2 = 90^o , ό.έ.δ.

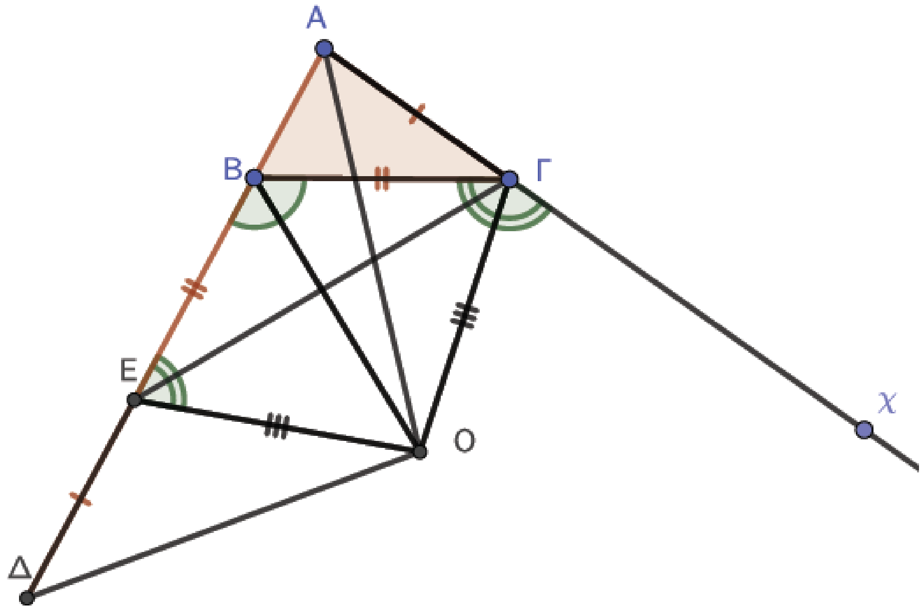
5.



α) τριγ ΑΒΜ=τριγ ΓΕΜ (ΒΜ=ΜΓ, ΑΜ=ΜΕ, ∢Μ κατά κορυφή (Π-Γ-Π)) άρα ∢ΑΒΜ = ∢ΜΓΕ (1) και ΑΒ=ΓΕ (2) . Στο τριγ ΑΒΔ η ΒΗ είναι ύψος και διάμεσος άρα και διχοτόμος και το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Αυτό σημαίνει ότι ∢ΑΒΗ = ∢ΗΒΔ (3) και ΑΒ=ΒΔ (4). Οι (1) και (3) δίνουν ∢ΔΒΓ = ∢ΕΓΒ (5) ό.έ.δ. και
β) οι (2) και (4) δίνουν ΒΔ=ΓΕ (6) ό.έ.δ.

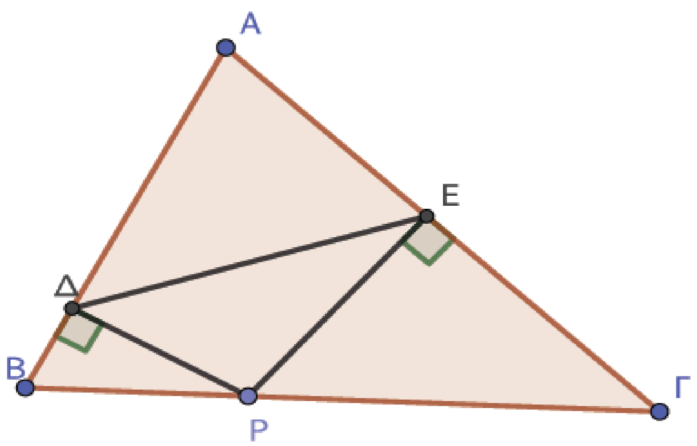
γ) Το τριγ ΒΣΓ λόγω (5) είναι ισοσκελές δηλαδή ΣΒ=ΣΓ (7) και η ΣΜ διάμεσος στη βάση ΒΓ άρα και ύψος δηλαδή κάθετη ό.έ.δ. αλλά και διχοτόμος της γωνίας Σ (8). Το τρίγωνο ΔΣΕ έχει ΔΣ=ΕΣ ως διαφορές ίσων τμημάτων ((7) – (6)) και ως ισοσκελές σε συνδυασμό με την (8) έπεται ότι ΣΜ είναι και μεσοκάθετος της βάσης του ΔΕ, ό.έ.δ.

6.



ΒΟ η εξωτερική διχοτόμος της ⋗Β, άρα ⋗ΕΒΟ = ⋗ΓΒΟ (1)
ΓΟ η εξωτερική διχοτόμος της ⋗Γ, άρα ⋗ΒΓΟ = ⋗ΟΓχ (2)
Έστω ΒΕ=ΒΓ (3) και ΕΔ= ΑΓ (4) κι έτσι πήραμε ΒΔ=ΒΓ+ΑΓ
Είναι τριγ ΒΕΟ=τριγ ΒΓΟ (από (3) , (1) και ΒΟ κοινή (Π-Γ-Π)) οπότε έχουμε ΟΕ=ΟΓ (5) και ⋗ΒΕΟ = ⋗ΒΓΟ η οποία λόγω της (2) γράφεται ⋗ΒΕΟ = ⋗ΟΓχ και αφού είναι αυτές ίσες θα είναι και οι παραπληρωματικές τους, δηλαδή ⋗ΔΕΟ = ⋗ΑΓΟ (6).
Τελικά είναι τριγ ΔΕΟ = τριγ ΑΓΟ (από (4), (6) και (5) (Π-Γ-Π)) οπότε ΟΔ=ΟΑ, ό.έ..δ.

7.



Στο ορθογώνιο τριγ ΒΔΡ ισχύει : ΡΔ < ΒΡ (1) (πλευρά ΒΡ απέναντι από μεγαλύτερη γωνία (ορθή))
Στο ορθογώνιο τριγ ΡΕΓ ισχύει : ΡΕ< ΡΓ (2) (πλευρά ΡΓ απέναντι από μεγαλύτερη γωνία (ορθή))
Προσθέτω (1) και (2) κατά μέλη κι έχω : ΡΔ+ΡΕ<ΒΡ+ΡΓ ή ΡΔ+ΡΕ< ΒΓ (3)
Στο τριγ ΔΕΡ η τριγωνική ανισότητα μου δίνει : ΔΕ< ΡΔ+ΡΕ (4) δηλαδή ισχύει η διπλή ανισότητα ((4) και (3)) : ΔΕ< ΡΔ+ΡΕ < ΒΓ, ό.έ.δ.