ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{o}: ΚΥΜΑΤΑ
ΕΝΟΤΗΤΑ 2: ΕΠΑΛΛΗΛΙΑ ΚΥΜΑΤΩΝ - ΣΥΜΒΟΛΗ ΚΥΜΑΤΩΝ - ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ

11. Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές $\Pi_1,\ \Pi_2$ ταλαντώνονται με το ίδιο πλάτος $A = 0,2\ m$, κάθετα στην ελαστική επιφάνεια ενός υγρού, παράγοντας κύματα με μήκος κύματος $\lambda = 0,6\ m$. Οι πηγές ξεκινούν να ταλαντώνονται τη χρονική στιγμή $t = 0$ με θετική ταχύτητα. Σημείο (Σ) της επιφάνειας απέχει κατά $r_1 = 7,6\ m$ από την πηγή Π_1 και κατά $r_2 = 4,8\ m$ από την πηγή Π_2 . Το (Σ) ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t = 12\ s$.
α) Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης του (Σ) μετά τη συμβολή των κυμάτων σε αυτό.
β) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του (Σ) σε συνάρτηση με το χρόνο, αφού συμβάλλουν σε αυτό τα κύματα.
γ) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του (Σ) τη χρονική στιγμή $t' = \dfrac{707}{16}\ s$.
δ) Να υπολογίσετε το πηλίκο της κινητικής ενέργειας του σημείου Σ προς την ενέργεια ταλάντωσής του, τη χρονική στιγμή t' .

(Θεωρήστε ότι $\pi^2 = 10$)

[A_Σ=0,2m, y_Σ=-0,2ημ2π/3(2t-31) (S.I.), a_Σ=16√2/9 m/s, K/E=1/2]

11α. Σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο το οποίο ταυτίζεται με τον οριζόντιο άξονα x’Ox διαδίδονται ταυτόχρονα δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα με εξισώσεις:
$y_1 = 0,25\eta\mu 2\pi\ (t - x)\ \ (S.I.)$ και $y_2 = 0,25\eta\mu 2\pi\ (t + x)\ \ (S.I.)$. Τα κύματα συμβάλλουν και δημιουργούν στάσιμο κύμα.
α) Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος.
β) Να γράψετε την εξίσωση της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο, των σημείων Α($x_A = 0,5\ m$) και Β($x_B = 1\ m$).
γ) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του τμήματος ΑΔ της χορδής, όπου $\Delta\left(x_\Delta = 1,75\ m\right)$ τη χρονική στιγμή $t_1 = 1,25\ s$ σε κατάλληλα βαθμολογημένο σύστημα αξόνων.
δ) Να υπολογίσετε την απομάκρυνση του σημείου $Z\left(x_Z = \dfrac{5}{6}\ m\right)$ όταν η απομάκρυνση του σημείου Α είναι μέγιστη θετική.
[
$y = 0,5\sigma\upsilon\nu\left(2\pi x\right)\cdot\eta\mu\left(2\pi t\right)\ \ (S.I.)$.
$u_A = \pi\cdot\sigma\upsilon\nu\left(2\pi t + \pi\right)\ \ (S.I.)$
$u_B = \pi\cdot\sigma\upsilon\nu\left(2\pi t\right)\ (S.I.)$.

0,25m]

12. Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1 και Π_2 βρίσκονται στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, της ήρεμης επιφάνειας ενός υγρού και απέχουν κατά $d = 4\ m$. Οι πηγές ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού χωρίς αρχική φάση, δημιουργώντας κύματα μήκους $\lambda = 0,8\ m$ τα οποία διαδίδονται με ταχύτητα $2\ m/s$. Η πηγή Π_1 ισαπέχει από το

σημείο (Σ) της επιφάνειας και από το μέσο Μ του ΑΒ. Στο (Σ) τα κύματα φτάνουν με χρονική διαφορά $\Delta t = 0,8\ s$. Το σημείο Μ ταλαντώνεται με πλάτος $0,8\ m$.
α) Να εξετάσετε το είδος της συμβολής που συμβαίνει στο (Σ).
β) Να υπολογίσετε τις αποστάσεις r_1 και r_2.
γ) Να προσδιορίσετε τις θέσεις των σημείων απόσβεσης μεταξύ των Α και Β.

[Ενίσχυση, r_1=2m, r_2=3,6m, N=10 σημεία (3,8 3,4 3, ... 1, 0,6 0,2)]

12α. Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1 και Π_2 βρίσκονται στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, της ελαστικής επιφάνειας ενός υγρού και απέχουν κατά $AB = 4,4\ m$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ οι πηγές ξεκινούν να ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού, με την απομάκρυνση τους να περιγράφεται από την εξίσωση $y = A\eta\mu(20\pi t)\ (S.I.)$. Τα παραγόμενα κύματα έχουν μήκος κύματος $\lambda = 0,4\ m$. Σημείο (Δ) απέχει κατά $r_1 = 2,8\ m$ από την πηγή Π_1 και κατά $r_2 = 7,2\ m$ από την πηγή Π_2 . Το πλάτος ταλάντωσης του σημείου (Δ) μετά τη συμβολή των κυμάτων σε αυτό ισούται με $A_\Delta = 1\ m$.
α) Να εξετάσετε εάν στο σημείο (Δ) συμβαίνει ενίσχυση ή απόσβεση των κυμάτων.
β) Να υπολογίσετε το πλάτος A των κυμάτων.
γ) Να γράψετε την εξίσωση απομάκρυνσης του σημείου (Δ) σε συνάρτηση με το χρόνο, μετά τη συμβολή των κυμάτων σε αυτό.
δ) Να σχεδιάσετε σε κατάλληλα βαθμολογημένο σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση της ταχύτητας ταλάντωσης σε συνάρτηση με το χρόνο του σημείου (Μ), το οποίο είναι το μέσο του ΑΒ.

[ενίσχυση, 0,5m,
$y_\Delta = \sigma\upsilon\nu(11\pi)\eta\mu 2\pi(10t - 12,5)$]

13. Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1 και Π_2 βρίσκονται στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, της επιφάνειας ενός υγρού. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ οι πηγές ξεκινούν να ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού, με την απομάκρυνση τους να περιγράφεται από την εξίσωση $y = A\eta\mu\omega t\ (S.I.)$. Τα κύματα που δημιουργούν διαδίδονται με ταχύτητα $2\ m/s$. Σημείο (Σ) της επιφάνειας απέχει κατά r_1 από την πηγή Π_1 και κατά $r_2 = 2\ m,\ (r_2 > r_1)$ από την πηγή Π_2 . Εξαιτίας του κύματος που προέρχεται από την πηγή Π_1 το (Σ) εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση $y_{1\Sigma} = 0,4\eta\mu 2\pi\left(2t - 1,75\right)\ (S.I.)$.
α) Να υπολογίσετε την απόσταση r_1.
β) Να γράψετε την εξίσωση της ταχύτητας του σημείου (Σ).
γ) Να υπολογίσετε την ελάχιστη συχνότητα ταλάντωσης των πηγών, ώστε το (Σ) να είναι σημείο απόσβεσης.

[r_1=1,75m, u_Σ=0, $0 \le t \le 0,875$ u_Σ=16π·συνπ(4t-3,5), $0.875 \le t \le 1$,
u_Σ=16√2π·συνπ(4t-3,75), $t \ge 1$s, f_{min}=4Hz]

13α. Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές $\Pi_1,\ \Pi_2$ βρίσκονται στα σημεία Α και Β αντίστοιχα της επιφάνειας ενός υγρού. Οι πηγές απέχουν μεταξύ τους κατά $d = 2\ m$ και ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού, σύμφωνα με την $y_0 = 0,2\eta\mu\left(3\pi t\right)\ (S.I.)$. Τα παραγόμενα κύματα διαδίδονται με ταχύτητα $u = 1,2\ m/s$. Σημείο (Γ) της επιφάνειας του υγρού απέχει απόσταση $r_1 = 3m$ από την Π_1 και $r_2\ (r_2 < r_1)$ από την Π_2 . Στο σημείο (Γ) τα κύματα φτάνουν με χρονική διαφορά $\Delta t = 1\ s$.

α) Να υπολογίσετε την απόσταση r_2 .

β) Να εξετάσετε αν το σημείο (Γ) είναι σημείο ενίσχυσης ή απόσβεσης.

γ) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου (Γ) σε σχέση με το χρόνο και να σχεδιάσετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση σε κατάλληλα βαθμολογημένο σύστημα αξόνων.

δ) Να υπολογίσετε το πλήθος των σημείων ενίσχυσης που βρίσκονται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

ε) Αν (Δ) σημείο του τμήματος ΑΒ, το οποίο ανήκει στην ίδια υπερβολή ενίσχυσης ή απόσβεσης με το σημείο (Γ) και (Ζ) σημείο του ΑΒ το οποίο είναι το πλησιέστερο στην πηγή Π_1 σημείο ενίσχυσης, να υπολογίσετε την απόσταση (ΔΖ).

[1,8m, απόσβεση,

$$y_\Gamma = \begin{cases} 0,\ 0 \le t \le 1{,}5\ s \\ 0{,}2\eta\mu\pi(3t - 4{,}5),\ 1{,}5\ s < t \le 2{,}5\ s \\ 0,\ t > 2{,}5\ s \end{cases}$$

5 υπερβολές ενίσχυσης, 1,4μ]

14. Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1 και Π_2 βρίσκονται στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, της επιφάνειας ενός υγρού. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ οι πηγές ξεκινούν να ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού, με την απομάκρυνση τους να περιγράφεται από την εξίσωση $y = A\eta\mu\omega t\ (S.I.)$. Τα κύματα που δημιουργούν έχουν μήκος κύματος $\lambda = 0,4\ m$. Σημείο (Σ) της επιφάνειας απέχει κατά $r_1 = 2,5\ m$ από την πηγή Π_1 και κατά $r_2 = 4\ m$ από την πηγή Π_2 . Αφού τα κύματα συμβάλλουν στο (Σ), αυτό εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με συχνότητα $5\ Hz$ και πλάτος $1\ m$.

α) Να υπολογίσετε τη χρονική διαφορά άφιξης των κυμάτων στο (Σ) καθώς και τη διαφορά φάσης με την οποία φτάνουν.

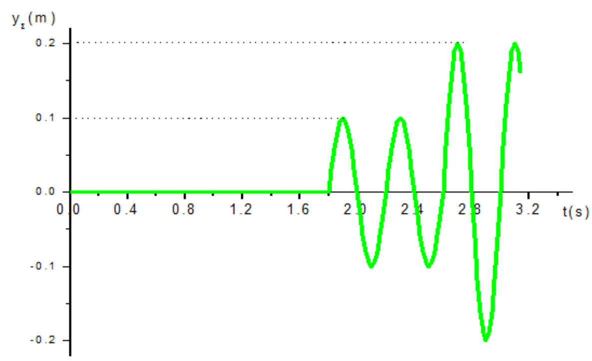
β) Να υπολογίσετε το πλάτος των κυμάτων.

γ) Να γράψετε την εξίσωση απομάκρυνσης του Σ σε συνάρτηση με το χρόνο, μετά τη συμβολή των κυμάτων σε αυτό.

δ) Να υπολογίσετε την ελάχιστη συχνότητα ταλάντωσης των πηγών, ώστε το (Σ) να είναι ακίνητο μετά τη συμβολή των κυμάτων.

[Δt=0,75s, Δφ=0 rad, A=√2/2m, y_Σ=ημπ(10t-16,25) (S.I.), f_{min}=2/3Hz]

14α. Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1 και Π_2 βρίσκονται στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, της ήρεμης επιφάνειας ενός υγρού και απέχουν κατά $d = 0,65\ m$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ οι πηγές ξεκινούν να ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού, με την απομάκρυνση τους να περιγράφεται από την εξίσωση $y = A\eta\mu\omega t$. Τα παραγόμενα κύματα έχουν μήκος κύματος $\lambda = 0,2\ m$. Στο ακόλουθο διάγραμμα παρουσιάζεται η χρονική εξέλιξη της απομάκρυνσης ενός σημείου (Σ) της επιφάνειας, το οποίο



απέχει κατά r_1 από την πηγή Π_1 και κατά r_2 από την πηγή Π_2, με $r_1 > r_2$.
α) Να υπολογίσετε τις αποστάσεις r_1 και r_2.
β) Ένας σημειακός φελλός, μάζας $m = 1\ g$, βρίσκεται στο σημείο Σ της επιφάνειας. Να γράψετε την εξίσωση της δυναμικής ενέργειας του φελλού εξαιτίας της ταλάντωσής του σε συνάρτηση με το χρόνο.
γ) Να υπολογίσετε τον αριθμό υπερβολών ενίσχυσης που τέμνουν το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.
δ) Να υπολογίσετε την απομάκρυνση του σημείου (Σ) από τη θέση ισορροπίας του, τη χρονική στιγμή t' κατά την οποία το σημείο Μ, το οποίο είναι το μέσο του ΑΒ, βρίσκεται σε ακραία αρνητική απομάκρυνση για τέταρτη φορά.
(Θεωρήστε ότι $\pi^2 = 10$).
[1,3m, 0,9m,

$$U_\Sigma = \begin{cases} 0 \ , 0 \le t < 1{,}8\ s \\ 1{,}25 \cdot 10^{-3} \eta\mu^2\left[\pi(5t-9)\right] \ , 1{,}8\ s \le t < 2{,}6\ s\ (S.I.) \\ 5 \cdot 10^{-3} \eta\mu^2\left[\pi(5t-11)\right] \ , t \ge 2{,}6\ s \end{cases}$$

7 υπερβολές ενίσχυσης, -0.05√2m]

15. Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1 και Π_2 βρίσκονται στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, της επιφάνειας ενός υγρού. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ οι πηγές ξεκινούν να ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού, με την απομάκρυνση τους να περιγράφεται από την εξίσωση $y = 0,2\eta\mu\left(10\pi t\right)\ (S.I.)$. Τα κύματα που δημιουργούν έχουν μήκος κύματος $\lambda = 0,4\ m$. Σημείο (Σ) της επιφάνειας απέχει κατά $r_1 = 2,5\ m$ από την πηγή Π_1 και κατά $r_2 > r_1$ από την πηγή Π_2. Τα δύο κύματα φτάνουν στο (Σ) με χρονική διαφορά $0,3\ s$.
α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων.
β) Να υπολογίσετε την απόσταση r_2.
γ) Να εξετάσετε το είδος της συμβολής που συμβαίνει στο σημείο (Σ).
δ) Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της δύναμης επαναφοράς που δέχεται ένα σημειακό κομμάτι ξύλου μάζας $m = 5\ g$ που αρχικά ισορροπούσε στο σημείο (Σ).
(Θεωρήστε ότι $\pi^2 = 10$)
[u=2m/s, r_2=3,1m, Απόσβεση, $F_{επ}$=-ημ2π(5t-6,25), 1,25≤t≤1,55]

15α. Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1 και Π_2 βρίσκονται στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, της ελαστικής επιφάνειας ενός υγρού και απέχουν κατά $d = 0,4\ m$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ οι πηγές ξεκινούν να ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού, με την απομάκρυνση τους να περιγράφεται από την εξίσωση $y = 0,4\eta\mu 10\pi t\ (S.I.)$. Τα παραγόμενα κύματα έχουν μήκος κύματος $\lambda = 0,1\ m$. Σημείο (Σ) της επιφάνειας απέχει κατά r_1 από την πηγή Π_1 και κατά r_2 από την πηγή Π_2, με $r_1 > r_2$. Τα κύματα φτάνουν στο (Σ) με χρονική διαφορά $\Delta t = 0,7\ s$.
α) Να υπολογίσετε το πλάτος ταλάντωσης του σημείου (Σ) μετά τη συμβολή των κυμάτων σε αυτό.
β) Η υπερβολή σταθερής διαφοράς αποστάσεων στην οποία ανήκει το (Σ) τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που συνδέει τις πηγές σε σημείο (Γ). Να υπολογίσετε την απόσταση του (Γ) από το σημείο (Μ) το οποίο είναι το μέσο του ΑΒ.
γ) Να υπολογίσετε το πλήθος σημείων ενίσχυσης του τμήματος ΜΓ.

δ) Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή κατά την οποία το μέσο Μ φτάνει σε απομάκρυνση $0,4\ m$ για πρώτη φορά.

[0m, 0,175m, 3 υπερβολές ενίσχυσης, 5/12s]

16. Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1 και Π_2 βρίσκονται στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, της επιφάνειας ενός υγρού και απέχουν κατά $d = 2\ m$. Οι πηγές ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού χωρίς αρχική φάση, δημιουργώντας κύματα μήκους κύματος $\lambda = 1,2\ m$ και πλάτους $A = 1\ m$. Σημείο (Λ) του ΑΒ ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t' = 0,2\ s$ και είναι το πλησιέστερο σημείο στην πηγή Π_2 το οποίο μετά τη συμβολή των κυμάτων σε αυτό ταλαντώνεται με μέγιστο πλάτος.
α) Να υπολογίσετε τις αποστάσεις του (Λ) από τις κυματικές πηγές.
β) Να υπολογίσετε την ταχύτητα ταλάντωσης του (Λ) τη στιγμή που τα κύματα συμβάλλουν στο μέσο Μ του ΑΒ.
γ) Να υπολογίσετε την απόσταση (ΚΛ) όπου (Κ) το πλησιέστερο στην Π_1 ακίνητο σημείο του ΑΒ.
δ) Σημείο (Ζ) της επιφάνειας ανήκει στην ίδια υπερβολή απόσβεσης με το (Κ). Αν αυξήσουμε κατά 20 % τη συχνότητα των πηγών, να υπολογίσετε το νέο πλάτος ταλάντωσης του σημείου (Ζ). Δίνεται $\sigma\upsilon\nu\,(4\pi/5) \approx -0,81$.

[x_1=1,6m, x_2=0,4m, u_Λ=-10π/3 m/s, ΚΛ=1,5m, A_Z=1,62m]

17. Οριζόντια ελαστική χορδή μήκους $L = 1,2\ m$ έχει τα άκρα της στερεωμένα σε ακλόνητα εμπόδια. Στη χορδή έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα, ως αποτέλεσμα της ταυτόχρονης διάδοσης στη χορδή δύο αντίρροπα διαδιδόμενων κυμάτων, με το ίδιο πλάτος $A = 0,2\ m$ και το ίδιο μήκος κύματος $\lambda = 0,4\ m$.
α) Πόσες κοιλίες εμφανίζονται στη χορδή;
β) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο της χορδής τη χρονική στιγμή κατά την οποία η πλησιέστερη κοιλία στο αριστερό άκρο της χορδής βρίσκεται σε μέγιστη θετική απομάκρυνση.
γ) Να υπολογίσετε το ποσοστό μεταβολής της συχνότητας των κυμάτων που πρέπει να επιφέρουμε, ώστε στη χορδή να εμφανίζονται 5 κοιλίες.

[6 κοιλίες, 16,7%]

17α. Δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα ίδιου πλάτους $A = 0,2\ m$ και ίδιου μήκους κύματος $\lambda = 0,4\ m$ διαδίδονται με αντίθετες κατευθύνσεις και ταχύτητα $2\ m/s$ σε χορδή η οποία ταυτίζεται με τον οριζόντιο άξονα x΄Ox. Τα κύματα συμβάλλουν και δημιουργούν στάσιμο κύμα με κοιλία στο σημείο $O(x = 0)$.
α) Να γράψετε τις εξισώσεις των κυμάτων που δημιούργησαν το στάσιμο κύμα.
β) Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος.
γ) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο, των σημείων $A(x_A = 1,2\ m)$ και $B(x_B = 1,9\ m)$.
δ) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του τμήματος ΑΒ της χορδής τις χρονικές στιγμές $t_0 = 0$ και $t_1 = 0,15\ s$.
[

$$\begin{cases} y_1 = 0,2\eta\mu 5\pi(2t - x) \\ y_2 = 0,2\eta\mu 5\pi(2t + x) \end{cases} \quad \text{(S.I.)}$$

$y = 0,4συν(5πx)ημ(10πt)$ (S.I.)

$y_B = 0$ *(δεσμός)*

]

18. Δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα με το ίδιο πλάτος και την ίδια συχνότητα διαδίδονται με αντίθετες κατευθύνσεις σε γραμμικό ελαστικό μέσο το οποίο ταυτίζεται με τον οριζόντιο άξονα x΄Ox. Τα κύματα συμβάλλουν και δημιουργούν στάσιμο κύμα με κοιλία στο σημείο $O(x=0)$.
Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι: $y = 0,4συν\left(2,5πx\right)ημ\left(20πt\right)\ (S.I.)$.
α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης των οδεύοντων κυμάτων.
β) Να γράψετε τις εξισώσεις των οδεύοντων κυμάτων.
γ) Να υπολογίσετε την οριζόντια απόσταση μεταξύ του 3ου δεσμού του θετικού ημιάξονα και της 2ης κοιλίας του θετικού ημιάξονα η οποία βρίσκεται σε συμφωνία φάσης με την κοιλία που σχηματίζεται στο σημείο $O(x=0)$.
δ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου $Z\left(x_Z > 0\right)$ του οποίου η απόσταση από το $O(x=0)$ είναι μεγαλύτερη από την απόσταση του 2ου δεσμού του θετικού ημιάξονα από το $O(x=0)$ κατά $d = 1/3\ m$.

[u=8m/s, y=0,2ημπ(20t±2,5x) (S.I.), d=0,6m, u_Z=4π m/s]

18α. Σε μία οριζόντια ελαστική χορδή (ΟΛ) μήκους L , έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα, ως αποτέλεσμα της συμβολής δύο εγκάρσιων αρμονικών κυμάτων με το ίδιο πλάτος και την ίδια συχνότητα, που διαδίδονται όμως σε αντίθετες κατευθύνσεις στη χορδή. Το δεξί άκρο (Λ) της χορδής είναι στερεωμένο σε ακλόνητο εμπόδιο, ενώ το αριστερό άκρο $O(x_o = 0)$ είναι ελεύθερο και ταλαντώνεται με πλάτος $0,2\ m$. Μεταξύ των σημείων (Ο) και (Λ) εμφανίζονται 3 ακίνητα σημεία, ενώ η μέγιστη οριζόντια απόσταση μεταξύ δύο κοιλιών της χορδής ισούται με $1,2\ m$.
α) Να υπολογίσετε το μήκος L της χορδής.
β) Να προσδιορίσετε τις θέσεις των ακίνητων σημείων.
γ) Να υπολογίσετε την ελάχιστη οριζόντια απόσταση μεταξύ δύο σημείων της χορδής, τα οποία ταλαντώνονται με πλάτος $0,1\ m$.
δ) Έστω ότι μεταβάλλουμε τη συχνότητα ταλάντωσης του Ο, με αποτέλεσμα μεταξύ των (Ο) και (Λ) να εμφανίζονται 6 ακίνητα σημεία. Να υπολογίσετε το ποσοστό μεταβολής της συχνότητας.

[1,4m, 0,2m, 0,6, 1m, 1,4m 2/15m, 85,71%]

19. Δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα με πλάτος A , μήκος κύματος $λ = 0,4\ m$ και συχνότητα $1\ Hz$ διαδίδονται με αντίθετες κατευθύνσεις σε χορδή η οποία ταυτίζεται με τον οριζόντιο άξονα x΄Ox. Τα κύματα συμβάλλουν δημιουργώντας στάσιμο κύμα το οποίο στη θέση $O(x=0)$ της χορδής εμφανίζει κοιλία. Το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης των σημείων του μέσου ισούται με $1,6\ cm$.

α) Να γράψετε την εξίσωση του δημιουργούμενου στάσιμου κύματος.
β) Αν Δ $\left(x_Δ = \dfrac{8}{15}\ m\right)$ υλικό σημείο της χορδής με μάζα $m = 2\ g$, να υπολογίσετε τη μέγιστη δύναμη επαναφοράς που δέχεται το Δ κατά την ταλάντωσή του.

γ) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σημείου Α $(x_A = 4,25\ m)$ τη στιγμή που το σημείο Β $(x_B = 4,65\ m)$ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα.
(Δίνεται $\pi^2 = 10$)

[y=0,016συν(5πx)ημ(2πt) (S.I.), $F_{επ(max)}$=64·10^{-5}N, u_{max}=0,016√2πm/s]

19α. Δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα πλάτους A και μήκους κύματος λ διαδίδονται με αντίθετες κατευθύνσεις σε γραμμικό ελαστικό μέσο το οποίο ταυτίζεται με τον οριζόντιο άξονα x΄Ox. Το κάθε κύμα αναγκάζει το σημείο $O(x = 0)$ σε ταλάντωση της μορφής $y = A\eta\mu\omega t$.
Τα κύματα συμβάλλουν και δημιουργούν στάσιμο κύμα με εξίσωση
$y = 0,4\sigma\upsilon\nu(10\pi x)\eta\mu(40\pi t)$.

α) Να γράψετε τις εξισώσεις των κυμάτων που δημιούργησαν το στάσιμο.

β) Να γράψετε την εξίσωση της ταχύτητας του υλικού σημείου $\Delta(x_\Delta > 0)$ της χορδής σε συνάρτηση με το χρόνο, αν το Δ είναι κοιλία και μεταξύ του Ο και του Δ παρεμβάλλονται τρείς δεσμοί.

γ) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του τμήματος ΟΔ της χορδής, τη χρονική στιγμή $t = 0$.

δ) Να εξετάσετε αν το σημείο Δ και το υλικό σημείο $\Gamma(x_\Gamma = 0,125\ m)$ βρίσκονται σε συμφωνία ή αντίθεση φάσης.

[

$$\begin{cases} y_1 = 0,2\eta\mu 2\pi(20t - 5x) \\ y_2 = 0,2\eta\mu 2\pi(20t + 5x) \end{cases} (S.I.)$$

$u_\Delta = \omega A_\Delta \sigma\upsilon\nu(40\pi t + \pi)$ συμφωνία φάσης]

20. Δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα με πλάτος $A = 0,4\ m$, μήκος κύματος $\lambda = 0,4\ m$ και συχνότητα $f = 4\ Hz$ διαδίδονται με αντίθετες κατευθύνσεις σε ελαστική χορδή η οποία ταυτίζεται με τον οριζόντιο άξονα x΄Ox. Τα κύματα συμβάλλουν και δημιουργούν στάσιμο κύμα το οποίο στη θέση $O(x = 0)$ εμφανίζει κοιλία. Τα σημεία Α και Β της χορδής ταλαντώνονται με πλάτος $A' = 0,8\ m$ και μεταξύ τους παρεμβάλλονται 3 δεσμοί.

α) Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος.

β) Να υπολογίσετε την απόσταση ΑΒ.

γ) Να υπολογίσετε την απομάκρυνση και την ταχύτητα του σημείου Α όταν η απομάκρυνση του σημείου Β είναι $y_B = 0,2\sqrt{7}\ m$ και η ταχύτητα του θετική.

δ) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του τμήματος ΑΒ τη χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + T/4$, όπου t_1 χρονική στιγμή κατά την οποία το σημείο Α διέρχεται από τη θέση ισορροπίας με θετική ταχύτητα.

[y=0,8συν(5πx)ημ(8πt) (S.I.), AB=0,6m, y_A=-0,2√7m, u_A=-4,8π m/s]

21. Δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα με το ίδιο πλάτος και την ίδια συχνότητα διαδίδονται με αντίθετες κατευθύνσεις σε γραμμικό ελαστικό μέσο το οποίο ταυτίζεται με τον οριζόντιο άξονα x΄Ox. Τα κύματα συμβάλλουν και δημιουργούν στάσιμο κύμα το οποίο στη θέση $O(x = 0)$ εμφανίζει κοιλία. Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι: $y = 0,4\sigma\upsilon\nu\,(2,5\pi x)\,\eta\mu\,(20\pi t)$

α) Να προσδιορίσετε τη θέση του δεσμού $A(x_A)$ του θετικού ημιάξονα μεταξύ του οποίου και του $O(x=0)$ παρεμβάλλονται 2 ακόμα δεσμοί.

β) Να γράψετε την εξίσωση ταλάντωσης του σημείου Β $(x_B = 3,2\ m)$.

γ) Να υπολογίσετε το πλήθος των δεσμών μεταξύ των Α και Β.

[x_A=1m, y_B=0,4ημ(20πt) (S.I) N=5 δεσμοί]

22. Δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα με πλάτος $0,8\ m$ και συχνότητα $5\ Hz$ διαδίδονται με αντίθετες κατευθύνσεις σε γραμμικό ελαστικό μέσο το οποίο ταυτίζεται με τον οριζόντιο άξονα x΄Οx. Το κάθε κύμα εξαναγκάζει το σημείο $O(x=0)$ σε ταλάντωση της μορφής $y_0 = A\eta\mu\omega t$. Τα κύματα συμβάλλουν και δημιουργούν στάσιμο κύμα όπου δύο διαδοχικές κοιλίες απέχουν κατά $0,2\ m$.

α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης των οδεύοντων κυμάτων.

β) Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος.

γ) Να υπολογίσετε το πλήθος των ακίνητων σημείων του τμήματος ΟΔ, όπου Δ $(x_\Delta = 0,8\ m)$.

δ) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του τμήματος ΟΔ της χορδής τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,35\ s$.

[u=2m/s, y=1,6συν(5πx)ημ(10πt) (S.I), N=4 σημεία]

23. Σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο το οποίο ταυτίζεται με τον οριζόντιο άξονα xΌx, διαδίδονται τα: $\begin{cases} y_1 = -0,2\eta\mu 2\pi\,(t-2,5x) \\ y_2 = 0,2\eta\mu 2\pi\,(t+2,5x) \end{cases}$ $(S.I.)$

Τα κύματα συμβάλλουν και δημιουργούν στάσιμο κύμα.

α) Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος.

β) Να γράψετε τη συνθήκη κοιλιών και τη συνθήκη δεσμών.

γ) Να υπολογίσετε το πλήθος των δεσμών μεταξύ του σημείου $O(x=0)$ και του σημείου $A\,(x_A = 5\ m)$.

[y=0,4ημ(5πx)συν(2πt) (S.I), κοιλίες x=2k+1/10, δεσμοί x=k/5 k=0,±1, N=24 σημεία]

24. Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1 και Π_2 βρίσκονται στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, της επιφάνειας ενός υγρού. Τη χρονική στιγμή $t=0$ οι πηγές ξεκινούν να ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού, με την απομάκρυνση τους να περιγράφεται από την εξίσωση $y = 0,2\eta\mu 4\pi t\ (S.I.)$. Τα παραγόμενα κύματα έχουν μήκος κύματος $\lambda = 0,1\ m$. Σημείο (Σ) της επιφάνειας απέχει κατά $r_1 = 0,3\ m$ από την πηγή Π_1 και κατά $r_2 = 0,8\ m$ από την πηγή Π_2.

α) Να γράψετε τις εξισώσεις των επιμέρους ταλαντώσεων που υποχρεώνεται να εκτελέσει το σημείο (Σ), εξαιτίας των δύο κυμάτων που φτάνουν σε αυτό από κάθε πηγή.

β) Να υπολογίσετε το πλάτος ταλάντωσης του σημείου (Σ), μετά τη συμβολή των κυμάτων σε αυτό.

γ) Να γράψετε την εξίσωση επιτάχυνσης του υλικού σημείου (Σ) σε συνάρτηση με το χρόνο για $t \geq 0$.

(Θεωρήστε ότι $\pi^2 = 10$)

y=0,2ημ2π(2t±3) (S.I) $A_Σ$=0.4m, $a_{Σ=}$-32ημ2π(2t-3) 1,5≤t≤4,
$a_Σ$=64ημ2π(2t-5,5) t≥4,]

25. Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1 και Π_2 βρίσκονται στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, της επιφάνειας ενός υγρού. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ οι πηγές ξεκινούν να ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού, με την απομάκρυνση τους να περιγράφεται από την εξίσωση $y = 0,2\eta\mu 10\pi t\ (S.I.)$. Σημείο (Σ) της επιφάνειας απέχει κατά $r_1 = 4,2\ m$ από την πηγή Π_1 και κατά $r_2 > r_1$ από την πηγή Π_2. Το (Σ) ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_1 = 1,05\ s$ ενώ από τη χρονική στιγμή $t_2 = 1,55\ s$ και έπειτα σταματά να κινείται.
α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα των κυμάτων και την απόσταση r_2.
β) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του (Σ) σε συνάρτηση με το χρόνο και της ταχύτητας ταλάντωσης του σε συνάρτηση με το χρόνο.
γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της αλγεβρικής τιμής της επιτάχυνσης του (Σ) ως συνάρτηση του χρόνου σε κατάλληλα βαθμολογημένο σύστημα αξόνων.
δ) Να υπολογίσετε την ελάχιστη συχνότητα των κυμάτων που μπορούμε να προκαλέσουμε ώστε στο σημείο (Σ) να υπάρχει ενίσχυση των κυμάτων.
(Θεωρήστε ότι $\pi^2 = 10$)

[u=4m/s, r_2=6,2m, y=0,2ημπ(10t-10,5), u=2πσυν2π(5t-5,25), 1,05≤t≤1,55
a_Σ=-200ημ2π(5t-5,25) 1,05≤t≤1,55, f_{min}=2Hz]

26. Δύο σύγχρονες πηγές Π_1 και Π_2 βρίσκονται στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, της ελαστικής επιφάνειας ενός υγρού και απέχουν κατά $d = 5\ m$. Οι πηγές ξεκινούν τη χρονική στιγμή t = 0 να ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού χωρίς αρχική φάση με συχνότητα $f = 5\ Hz$ και ίδιο πλάτος δημιουργώντας κύματα, τα οποία συμβάλλουν στην επιφάνεια του υγρού. Σημείο (Σ) απέχει κατά $r_{1(\Sigma)} = 3\ m$ από την πηγή Π_1 και κατά $r_{2(\Sigma)} > r_{1(\Sigma)}$ από την πηγή Π_2. Μετά τη συμβολή των κυμάτων σε αυτό, το (Σ) ταλαντώνεται σύμφωνα με την εξίσωση: $y_\Sigma = 0,1\eta\mu\pi\left(10t - \dfrac{35}{3}\right),\ (S.I.)$.

Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων στην επιφάνεια του υγρού είναι $u = 3\ m/s$.
α) Να υπολογίσετε την απόσταση του (Σ) από την Π_2.
β) Να υπολογίσετε το πλήθος των σημείων ενίσχυσης που βρίσκονται πάνω στο τμήμα ΑΒ.
γ) Να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου (Κ) το οποίο βρίσκεται επί του ΑΒ και ανήκει στην ίδια υπερβολή με το (Σ).
δ) Να γράψετε την εξίσωση απομάκρυνσης του σημείου (Κ) σε συνάρτηση με το χρόνο.

[r_2=4m, N=17 σημεία, x_{1K}=2m, x_{2K}=3m, y=0,4ημ2π(5t-20/3) 4/3≤t≤2
y=0,4ημ2π(5t-25/3) t≥2s]

27. Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1 και Π_2 βρίσκονται στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, της επιφάνειας υγρού και απέχουν κατά $d = 4,8\ m$. Οι πηγές ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού χωρίς αρχική φάση, δημιουργώντας κύματα μήκους κύματος $\lambda = 0,8\ m$ και πλάτους $A = 0,5\ m$, τα οποία και συμβάλλουν στην επιφάνεια του υγρού. Σημείο (Σ) της επιφάνειας απέχει κατά $r_{1(\Sigma)}$ από την πηγή Π_1 και κατά $r_{2(\Sigma)} > r_{1(\Sigma)}$ από την πηγή Π_2. Το (Σ) ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_1 = 1,1\ s$ και τη χρονική στιγμή t_2 αφού εκτελέσει 2,5 ταλαντώσεις ακινητοποιείται. Το κύμα από την Π_2 φτάνει στην Π_1 επίσης τη χρονική στιγμή t_2.
α) Να υπολογίσετε τις αποστάσεις $r_{1(\Sigma)}$ και $r_{2(\Sigma)}$.

β) Να υπολογίσετε το πλήθος των σημείων του τμήματος ΑΣ που είναι ακίνητα τη χρονική στιγμή t_1.
γ) Να γράψετε την εξίσωση απομάκρυνσης του σημείου (Σ) σε συνάρτηση με το χρόνο.
δ) Να υπολογίσετε το πλήθος των υπερβολών ενίσχυσης που τέμνουν το τμήμα ΑΣ μετά τη συμβολή των κυμάτων στο (Σ).

[$r_{1Σ}$=2,8m, r_{2S}=4,8m, N=7 σημεία, $y_Σ$=0,5ημ7π(10t/11-1) 1,1≤t≤66/35 N=3]

28. Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1 και Π_2 βρίσκονται στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, της ελαστικής επιφάνειας ενός υγρού και ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού, σύμφωνα με τις:

$$\begin{cases} y_1 = 0,2\eta\mu\left(10\pi t + \dfrac{\pi}{3}\right) \\ y_2 = 0,2\eta\mu\left(10\pi t\right) \end{cases} \quad (S.I.)$$

Τα δημιουργούμενα κύματα διαδίδονται με ταχύτητα $2m/s$.
α) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης ενός σημείου (Σ) της επιφάνειας το οποίο απέχει κατά r_1 από την πηγή Π_1 και κατά r_2 από την πηγή Π_2, αφού συμβάλλουν τα κύματα σε αυτό.
β) Να γράψετε τη συνθήκη ενίσχυσης για το (Σ).
γ) Αν $r_1 = r_2$ ποιο είναι το πλάτος ταλάντωσης του (Σ) μετά τη συμβολή;
δ) Αν $r_1 = r_2$ ποιά θα έπρεπε να είναι η αρχική φάση της y_1, ώστε το (Σ) να είναι σημείο απόσβεσης;

[y=0,4συνπ((r_1-r_2)/0,4 +1/6)ημπ(2t/T – (r_1+r_2)/0,4 +1/6) (S.I), r_1-r_2=(6N-1)/15 N=0, ±1, ..
$A_Σ$=0,2√3m, $φ_0$=π rad]

29.

Δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα με εξισώσεις $\begin{cases} y_1 = 0,2\eta\mu 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\lambda}\right) \\ y_2 = 0,2\eta\mu 2\pi\left(\dfrac{t}{T} + \dfrac{x}{\lambda}\right) \end{cases} \quad (S.I.)$

διαδίδονται με αντίθετες κατευθύνσεις σε γραμμικό ελαστικό μέσο το οποίο ταυτίζεται με τον οριζόντιο άξονα x΄Οx. Τα κύματα συμβάλλουν και δημιουργούν στάσιμο κύμα το οποίο στη θέση $O(x=0)$ εμφανίζει κοιλία. Στο σημείο Α $(x_A = 0,45\ m)$ είναι ο πέμπτος δεσμός του θετικού ημιάξονα. Το σημείο Β $(x_B = 1,025\ m)$ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του ανά $0,2\ s$.
α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων.
β) Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος.
γ) Να υπολογίσετε την απομάκρυνση του σημείου Γ $(x_\Gamma = 13/30\ m)$ τη χρονική στιγμή που το σημείο Δ $(x_\Delta = 0,2\ m)$ βρίσκεται σε ακραία θετική απομάκρυνση.
δ) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του τμήματος ΑΒ της χορδής τη χρονική στιγμή που η απομάκρυνση του Ο ισούται με $y_0 = 0,4\ m$.

[u=0,5m/s, y=0,4συν(10πx)ημ(5πt) (S.I), $y_Γ$=+0,2m]

30. Οριζόντια ελαστική χορδή μήκους $L = 1\ m$ έχει το δεξί άκρο της Α $(x_A = 1\ m)$ στερεωμένο σε ακλόνητο εμπόδιο. Το αριστερό άκρο Ο $(x = 0)$ είναι ελεύθερο να κινηθεί. Στη χορδή έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα, με το Ο να είναι κοιλία, η οποία ταλαντώνεται με πλάτος $A_0 = 1,6\ m$. Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης του Ο ισούται με $u_{max(O)} = 16\pi\ m/s$, ενώ μεταξύ των Ο και Α εμφανίζονται δύο δεσμοί.

α) Να υπολογίσετε το μήκος κύματος των κυμάτων των οποίων η συμβολή παρήγαγε το στάσιμο.

β) Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος.

γ) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο της χορδής τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,325\ s$.

δ) Να υπολογίσετε την απομάκρυνση του υλικού σημείου Β(xΒ=0,9m) τη στιγμή που το υλικό σημείο Ο βρίσκεται σε ακραία αρνητική απομάκρυνση.

[λ=0,8m, y=1,6συν(5πx/2)ημ(10πt) (SI), y_B=-0,8√2m]

31. Δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα με το ίδιο πλάτος και την ίδια συχνότητα διαδίδονται με αντίθετες κατευθύνσεις σε γραμμικό ελαστικό μέσο το οποίο ταυτίζεται με τον οριζόντιο άξονα x΄Ox. Το κάθε κύμα εξαναγκάζει το σημείο $O(x=0)$ σε ταλάντωση της μορφής $y_0 = A\eta\mu\omega t$. Τα κύματα συμβάλλουν και δημιουργούν στάσιμο κύμα με εξίσωση: $y = 2A\sigma\upsilon\nu\,(5\pi x)\,\eta\mu\,(8\pi t)\ \ (S.I.)$. Το υλικό σημείο Γ $\left(x_\Gamma = \dfrac{7}{15}\ m\right)$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $A_\Gamma = 0,5\ m$.

α) Να γράψετε τις εξισώσεις των οδεύοντων κυμάτων.

β) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του υλικού σημείου Γ, τη στιγμή που το $O(x=0)$ βρίσκεται στη μέγιστη θετική του απομάκρυνση.

γ) Υλικό σημείο Δ του θετικού ημιάξονα έχει εξίσωση ταχύτητας $u_\Delta = -4\sqrt{2}\pi\sigma\upsilon\nu\,(8\pi t)\ \ (S.I.)$. Αν το σημείο Δ βρίσκεται μεταξύ της 6ης κοιλίας και του 6ου δεσμού του θετικού ημιάξονα, να προσδιορίσετε τη συντεταγμένη της θέσης του Δ.

δ) Να υπολογίσετε το πλήθος των σημείων του τμήματος ΟΔ της χορδής, τα οποία κάθε χρονική στιγμή έχουν ίση απομάκρυνση και ίση ταχύτητα με το Δ.

[

$$\begin{cases} y_1 = 0,5\eta\mu\pi(8t-5x) \\ y_2 = 0,5\eta\mu\pi(8t+5x) \end{cases} (S.I.) \qquad u_\Gamma = 0 . \quad 1,05\ m .$$

5 σημεία]

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. [$T=4s$, $A=0,4m$ $\lambda=8m$, $y=0,4\eta\mu2\pi(t/4-x/8)$]
2. [$A=0,04m$, $T=2s$, $\lambda=0,4m$, $t=1,5s$, $\varphi=\pi/2rad$, $y=0,04m$, $y=0,04\eta\mu2\pi(t/2-0,2/0,4)$, $\Delta x=0,6m$]
3. [$t_1=1,8s$, $d=5,4m$, $E=4\pi^2 10^{-2}j$, $K\Lambda=0,5m$]
4. [$A=0,04m$, $x_A=12m$, $x_B=24m$, $a_{maxA}=2,5\cdot10^{-2}m/s^2$, $\varphi=3\pi/2rad$]
5. [$A=0,06m$, $T=1s$, $\lambda=0,2m$, $u=0,2m/s$, $u_\Sigma=12\pi\cdot10^{-2}\sigma\upsilon\nu2\pi(t-2)$, $t\geq2s$, (S.I.) $K=72\pi^2 10^{-7}\sigma\upsilon\nu^2 2\pi(t-2)$, $t\geq2$ (S.I), $d=1/60m$]
6. [$\omega=\pi$ rad/s, $u_{max}=\pi10^{-4}m/s$, $u=2m/s$, $t=5,5s$, $u_\Lambda=-\pi10^{-4}m/s$]
7. [$T=16s$, $\lambda=48cm$, $y=0,1\eta\mu2\pi(t/16-25x/12)$, $U=7,81\cdot10^{-8}\pi^2 j$]
8. [$T=8s$, $\lambda=4cm$, $y=2\cdot10^{-2}\eta\mu2\pi(t/8-25x)$ (S.I.), $t_1=18s$]
9. [$y=4\cdot10^{-3}\eta\mu2\pi(t/2-25x)$ (S.I.), $\varphi=3\pi$ rad, $K=8\pi^2\cdot10^{-9}\sigma\upsilon\nu^2 2\pi(4,5/2-25x)$, $x\leq9\cdot10^{-2}m$ (S.I.)]
10. [$x_K=12m$, $A=4\cdot10^{-2}m$, $\lambda=16m$, $y=4\cdot10^{-2}\eta\mu2\pi(t/8-x/16)$ (S.I.), $U_M=10^{-6}\eta\mu^2 2\pi(t/8-16/16)$, $t\geq8s$]
11. [$A_\Sigma=0,2m$, $y_\Sigma=-0,2\eta\mu2\pi/3(2t-31)$ (S.I.), $a_\Sigma=16\sqrt{2}/9$ m/s, $K/E=1/2$]
12. [Ενίσχυση, $r_1=2m$, $r_2=3,6m$, N=10 σημεία (3,8 3,4 3, ... 1, 0,6 0,2)]
13. [$r_1=1,75m$, $u_\Sigma=0$, $0\leq t\leq0,875$ $u_\Sigma=16\pi\cdot\sigma\upsilon\nu\pi(4t-3,5)$, $0.875\leq t\leq1$, $u_\Sigma=16\sqrt{2}\pi\cdot\sigma\upsilon\nu\pi(4t-3,75)$, $t\geq1s$, $f_{min}=4Hz$]
14. [$\Delta t=0,75s$, $\Delta\varphi=0$ rad, $A=\sqrt{2}/2m$, $y_\Sigma=\eta\mu\pi(10t-16,25)$ (S.I.), $f_{min}=2/3Hz$]
15. [$u=2m/s$, $r_2=3,1m$, Απόσβεση, $F_{\varepsilon\pi}=-\eta\mu2\pi(5t-6,25)$, $1,25\leq t\leq1,55$]
16. [$x_1=1,6m$, $x_2=0,4m$, $u_\Lambda=-10\pi/3$ m/s, $K\Lambda=1,5m$, $A_Z=1,62m$]
17. [6 κοιλίες, 16,7%]
18. [$u=8m/s$, $y=0,2\eta\mu\pi(20t\pm2,5x)$ (S.I.), $d=0,6m$, $u_Z=4\pi$ m/s]
19. [$y=0,016\sigma\upsilon\nu(5\pi x)\eta\mu(2\pi t)$ (S.I.), $F_{\varepsilon\pi(max)}=64\cdot10^{-5}N$, $u_{max}=0,016\sqrt{2}\pi m/s$]
20. [$y=0,8\sigma\upsilon\nu(5\pi x)\eta\mu(8\pi t)$ (S.I.), $AB=0,6m$, $y_A=-0,2\sqrt{7}m$, $u_A=-4,8\pi$ m/s]
21. [$x_A=1m$, $y_B=0,4\eta\mu(20\pi t)$ (S.I) N=5 δεσμοί]
22. [$u=2m/s$, $y=1,6\sigma\upsilon\nu(5\pi x)\eta\mu(10\pi t)$ (S.I), N=4 σημεία]
23. [$y=0,4\eta\mu(5\pi x)\sigma\upsilon\nu(2\pi t)$ (S.I), κοιλίες $x=2k+1/10$, δεσμοί $x=k/5$ $k=0,\pm1$, N=24 σημεία]
24. $y=0,2\eta\mu2\pi(2t\pm3)$ (S.I) $A_\Sigma=0.4m$, $a_{\Sigma=}-32\eta\mu2\pi(2t-3)$ $1,5\leq t\leq4$, $a_\Sigma=64\eta\mu2\pi(2t-5,5)$ $t\geq4$,]
25. [$u=4m/s$, $r_2=6,2m$, $y=0,2\eta\mu\pi(10t-10,5)$, $u=2\pi\sigma\upsilon\nu2\pi(5t-5,25)$, $1,05\leq t\leq1,55$ $a_\Sigma=-200\eta\mu2\pi(5t-5,25)$ $1,05\leq t\leq1,55$, $f_{min}=2Hz$]
26. [$r_2=4m$, N=17 σημεία, $x_{1K}=2m$, $x_{2K}=3m$, $y=0,4\eta\mu2\pi(5t-20/3)$ $4/3\leq t\leq2$

$y=0,4ημ2π(5t-25/3)$ $t≥2s$]

27. [$r_{1Σ}=2,8m$, $r_{2S}=4,8m$,   N=7 σημεία, $y_Σ=0,5ημ7π(10t/11-1)$ $1,1≤t≤66/35$ N=3]
28. [$y=0,4συνπ((r_1-r_2)/0,4 +1/6)ημπ(2t/T-(r_1+r_2)/0,4 +1/6)$ (S.I), $r_1-r_2=(6N-1)/15$ N=0, ±1, ..
    $A_Σ=0,2\sqrt{3}m$, $φ_0=π$ rad]
29. [u=0,5m/s, $y=0,4συν(10πx)ημ(5πt)$ (S.I), $y_Γ=+0,2m$]
30. [λ=0,8m, $y=1,6συν(5πx/2)ημ(10πt)$ (SI), $y_B=-0,8\sqrt{2}m$]
31.
32. [$u=2,5\cdot10^8m/s$, $λ_0=600nm$, $B=2\cdot10^{-10}ημπ(10^{15}t-4\cdot10^6x)$ (S.I), $E=2,5\cdot10^{-6}V/m$]
33. [λ=500nm, $u=3\cdot10^8m/s$, $B=2\cdot10^{-11}ημ2π(6\cdot10^{14}t-2\cdot10^6x)$ (S.I), $B=\sqrt{3}\cdot10^{-11}T$]
34. [$u=5\cdot10^7m/s$, $k=800π\ m^{-1}$, $B=10^{-12}ημ2π(2\cdot10^{10}t-400x)$ (S.I), $E=24\cdot10^{-5}ημ400π(10^8t-x/3)$]
35. [f=100MHz, $E_{max}=1,5\cdot10^{-2}V/m$, $E=1,5\cdot10^{-2}ημ2π(10^8t-x/3)$ (S.I), $C=2,5\cdot10^{-12}F$]
36. [$u=2\cdot10^8m/s$, $B=2\cdot10^{-10}ημ2π/3\cdot10^7(2\cdot10^8t-x)$ (S.I), $λ_0=450nm$,
    $E=6,12\cdot10^{-2}ημ4π/3\cdot10^7(10^8t-x/3]$
37. [$θ_ε=15^o$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}/2$]
38. [8/10,   -20%, 60^o,   250nm]
39. [αέρας → υλικό, 60^o, 30^o,   500nm, $500\sqrt{3}/3$nm]
40. [$1,5\sqrt{2}\cdot10^8m/s$, 30^0,   -30%,   -32,14%]
41. [$\sqrt{2}$,   700nm, 45^o, 45^o]
42. [$\sqrt{2}/1$, 30^o, $36\cdot10^{-11}s$, 45^o]
43. [$3/7\cdot10^{15}Hz$, $7/5≈\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}/2\cdot10^8m/s$, 45^o]

[3/2, $3\sqrt{3}/3$,   15%,   500nm]