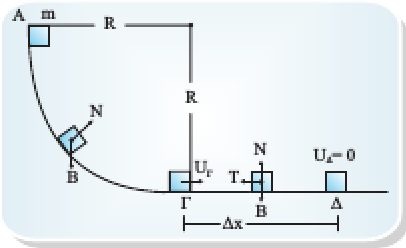
ΕΡΓΟ ΕΝΕΡΓΕΙΑ - ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

1. **Σώμα μάζας $m = 1kg$ βρίσκεται στο ανώτερο σημείο Α του τεταρτοκυκλίου που είναι λείο. Αν το αφήσουμε ελεύθερο, φθάνοντας στο κατώτερο σημείο του τεταρτοκυκλίου Γ, συνεχίζει την κίνησή του σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,2$.**



Αν η ακτίνα του τεταρτοκυκλίου είναι $R = 1m$ να βρείτε:

α. την ταχύτητα του σώματος όταν διέρχεται από το κατώτερο σημείο Γ του τεταρτοκυκλίου.

β. τη μετατόπιση του σώματος πάνω στο οριζόντιο επίπεδο

γ. μετατροπές ενέργειας που έχουμε κατά τη διάρκεια της κίνησης του σώματος.

Λύση:

α. ΘΜΚΕ $A \to \Gamma$: $\Sigma W_F = \Delta K \Rightarrow W_B + W_N = K_\Gamma - K_A \Rightarrow W_B = K_\Gamma \Rightarrow$

$$m \cdot g \cdot R = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_\Gamma^2 \Rightarrow \upsilon_\Gamma = \sqrt{2g \cdot R} \Rightarrow \upsilon_\Gamma = \sqrt{20} \ \text{m/s}$$

β. ΘΜΚΕ $A \to \Delta$: $\Sigma W_F = \Delta K \Rightarrow W_T + W_B = K_\Delta - K_A \Rightarrow W_T + W_B = 0$

$$-\mu \cdot m \cdot g \cdot \Delta x + m \cdot g \cdot R = 0 \Rightarrow \Delta x = \frac{R}{\mu} = \frac{1m}{0,2} \Rightarrow \Delta x = 5m$$

γ. $W_N = 0$ ($\vec{N}$ πάντοτε κάθετη στη μετατόπιση), $K_A = 0$ ($\upsilon_0 = 0$)

$K_\Delta = 0$ (στο σημείο Δ το σώμα σταματάει)

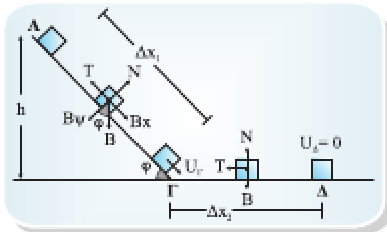
$T = \mu N \ (\Sigma Fy = 0 \Rightarrow N - B = 0 \Rightarrow N = B \Rightarrow N = m \cdot g)$

Η αρχική δυναμική ενέργεια στο σημείο Α ($U_A = mgR$) μετατρέπεται αρχικά μέσω του έργου του βάρους σε κινητική ενέργεια στο σημείο Γ: $\left(K_\Gamma = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_\Gamma^2\right)$. Κατόπιν μετατρέπεται σε θερμότητα (μέσω του έργου της τριβής) στη διαδρομή ΓΔ πάνω στο οριζόντιο επίπεδο.

2. **Σώμα μάζας $m = 1kg$ αφήνεται στο σημείο Α κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης $\varphi = 60^o$ που βρίσκεται σε ύψος $h = 1m$ από το οριζόντιο επίπεδο. Όταν το σώμα φθάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου συνεχίζει σε οριζόντιο επίπεδο μέχρις ότου σταματήσει.**
Αν το σώμα παρουσιάζει τον ίδιο συντελεστή τριβής και στα δύο επίπεδα $\mu = \frac{\sqrt{3}}{4}$ να βρεθούν:

α. Η ταχύτητα του σώματος στη βάση Γ του κεκλιμένου επιπέδου.
β. Η μετατόπιση του σώματος πάνω στο οριζόντιο επίπεδο.
γ. Τις μετατροπές ενέργειας που έχουμε κατά τη διάρκεια της κίνησης.
δ. Το ποσοστό της αρχικής δυναμικής ενέργειας που γίνεται θερμότητα στη κίνηση πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο.

Λύση:



$B_x = B\eta\mu\varphi = m \cdot g \cdot \eta\mu\varphi$, $B_y = B\sigma\upsilon\nu\varphi = m \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$

$$\eta\mu\varphi = \frac{h}{\Delta x_1} \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{h}{\eta\mu\varphi}$$

α. ΘΜΚΕ $A \to \Gamma$: $\Sigma W_F = \Delta K \Rightarrow$

$$W_{B_x} + W_{B_y} + W_T + W_N = K_\Gamma - K_A \Rightarrow$$

$$W_{B_x} + W_T = K_\Gamma \Rightarrow B_x \cdot \Delta x_1 - T_1 \cdot \Delta x_1 = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_\Gamma^2 \Rightarrow$$

$$m \cdot g \cdot \eta\mu\varphi \frac{h}{\eta\mu\varphi} - \mu \cdot m \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \frac{h}{\eta\mu\varphi} = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_\Gamma^2 \Rightarrow$$

$$\upsilon_\Gamma = \sqrt{2(g \cdot h - \mu \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \frac{h}{\eta\mu\varphi})} \Rightarrow \upsilon_\Gamma = \sqrt{2g \cdot h\left(1 - \mu \frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{\eta\mu\varphi}\right)} \Rightarrow \upsilon_\Gamma = \sqrt{15} m/s$$

$W_N = 0$, $W_{B_y} = 0$ και $K_A = 0$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - B_y = 0 \Rightarrow N = B_y \Rightarrow N = B\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow N = m \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$$

β. Στο οριζόντιο επίπεδο ισχύει: $K_\Delta = 0$ και $W_B = 0$,

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - B = 0 \Rightarrow N = B \Rightarrow N = m \cdot g$$

ΘΜΚΕ $\Gamma \to \Delta$: $\Sigma W_F = \Delta K \Rightarrow$

$$W_B + W_N + W_T = K_\Delta - K_\Gamma \Rightarrow \Delta x_2 = \frac{\upsilon_\Gamma^2}{2\mu \cdot g} \Rightarrow \Delta x_2 = \sqrt{3} m$$

γ. Η αρχική Δυναμική ενέργεια στο Α μέσω του έργου του βάρους μετατρέπεται σε κινητική στο Γ και μέσω του έργου της τριβής μετατρέπεται σε θερμότητα μέχρι το Γ. Μετά όλη η κινητική στο Γ θα μετατραπεί μέσο του έργου της τριβής σε θερμότητα έως το Δ.

δ. $U_\beta = m \cdot g \cdot h = 10J$, $K = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_\Gamma^2 \Rightarrow K = 2,5J$

άρα $Q = U_\beta - K = 10J - 2,5J = 7,5\ J$, επομένως: $\frac{Q}{U_\beta} = \frac{7,5\ J}{10\ J} = 0,75$ ή 75%

3. Σφαιρίδιο μάζας $m_1 = 2kg$ είναι δεμένο στο άκρο κατακόρυφου νήματος μήκους $L = 0,8m$. Εκτρέπουμε το σφαιρίδιο ώστε το νήμα να γίνει οριζόντιο και το αφήνουμε ελεύθερο. Όταν το νήμα γίνει πάλι κατακόρυφο το σφαιρίδιο συναντά σώμα $m_2 = 6kg$ που ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Αν το σφαιρίδιο μετά την κρούση επιστέφει με ταχύτητα μισή της ταχύτητας πριν την κρούση να βρεθούν:

α. η ταχύτητα του σφαιριδίου με την οποία συναντά το σώμα

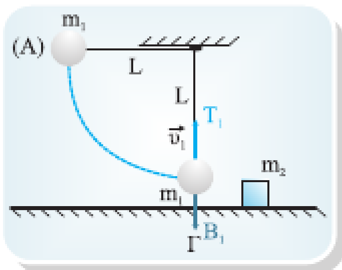
β. την τιμή της τάσης του νήματος λίγο πριν το σφαιρίδιο συναντήσει το σώμα

γ. την ταχύτητα του σώματος μετά τη συνάντηση

δ. το διάστημα που θα διανύσει το σώμα m_2 έως ότου σταματήσει είναι $S = 2m$, να βρεθεί ο συντελεστής τριβής μεταξύ σώματος και επιπέδου

ε. σε τι ύψος θα ξαναφθάσει το m_1 στιγμιαία;

Λύση:



α. Θ.Μ.Κ.Ε. : $\Sigma W_F = \Delta K \Rightarrow W_B + W_T = K_\Gamma - K_A$

Επειδή $W_T = 0,\ K_A = 0$ ισχύει: $m \cdot g \cdot L = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2$

$\upsilon_1 = \sqrt{2g \cdot L} \Rightarrow \upsilon_1 = 4m/s$

β. $\Sigma F_R = m_1 \frac{\upsilon_1^2}{L} \Rightarrow T_1 - B_1 = m_1 \frac{\upsilon_1^2}{L} \Rightarrow$

$T_1 = m_1 \cdot g + m_1 \frac{\upsilon_1^2}{L} \Rightarrow T_1 = m_1 \left(g + \frac{\upsilon_1^2}{L} \right) \Rightarrow T_1 = 60N$

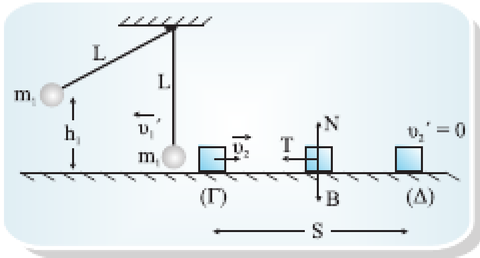
γ. Α.Δ.Ο.: $\vec{P}_{\text{ολ, πριν}} = \vec{P}_{\text{ολ, μετα}} \Rightarrow m_1 \upsilon_1 = -m_1 \frac{\upsilon_1}{2} + m_2 \upsilon_2 \Rightarrow m_1 \upsilon_1 + m_1 \frac{\upsilon_1}{2} = m_2 \upsilon_2 \Rightarrow$

$3m_1 \frac{\upsilon_1}{2} = m_2 \upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_2 = \frac{3m_1 \upsilon_1}{2m_2} \Rightarrow \upsilon_2 = 2m/s$

δ. Θ.Μ.Κ.Ε. $\Gamma \to \Delta$: $\Sigma W_F = \Delta K$

$$W_{N=0} + W_{B=0} + W_T = K_{\Delta=0} - K_\Gamma$$

$$-\mu m_2 g \cdot S = -\frac{1}{2} m_2 \upsilon_2^2 \Rightarrow \mu = \frac{\upsilon_2^2}{2 \cdot g \cdot S} = 0{,}1$$



ε. Α.Δ.Μ.Ε.: $K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ}$

Επειδή $U_{αρχ} = 0,\ K_{τελ} = 0$

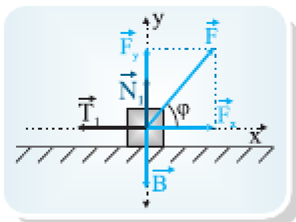
$$\frac{1}{2} m_1 \left(\frac{\upsilon_1}{2}\right)^2 = m_1 \cdot g \cdot h_1 \Rightarrow h_1 = \frac{\upsilon_1^2}{8g} \Rightarrow h_1 = 0{,}2\text{m}$$

4. Σώμα μάζας $m = 4\text{kg}$ που ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο δέχεται δύναμη $F = 20\text{N}$ υπό γωνία φ ως προς αυτό και αφού το μετατοπίσει κατά $\Delta x_1 = 5\text{m}$ παύει να ασκείται. Το σώμα συνεχίζει να κινείται και σταματάει λόγο τριβών. Αν ο συντελεστής μεταξύ σώματος και επιπέδου είναι $\mu = 0{,}2$, να βρεθούν:
α. η ταχύτητα του σώματος όταν παύει να ασκείται η δύναμη
β. η συνολική μετατόπιση του σώματος.
Δίνεται: $ημφ = 0{,}8,\ συνφ = 0{,}6,\ \upsilon_0 = 0$

Λύση:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 + F_y - B = 0 \Rightarrow N_1 = B - F_y \Rightarrow$$

$$N_1 = m \cdot g - Fημφ \Rightarrow T_1 = \mu N_1 = \mu(m \cdot g - fημφ)$$

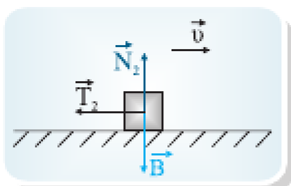


α. Θ.Μ.Κ.Ε. $\Sigma W_f = \Delta K$

$$WF_x + WF_y + W_B + W_{N=0} + W_\Gamma = K_\Gamma = K_{A=0}$$

$$Fσυνφ \cdot \Delta x_1 - \mu(m \cdot g - Fημφ)\Delta x_1 = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 \Rightarrow \upsilon = 3\sqrt{2}\text{m/s}$$

Μετά $\Delta x = 5\text{m}$



β. $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_2 - B = 0 \Rightarrow N_2 = B \Rightarrow N_2 = m \cdot g$

$T_2 = \mu N_2 = \mu m \cdot g$. Επειδή $\Sigma W_F = \Delta K$

$$W_{T_2} + W_{N_2} + W_B = K_\Delta - K_\Gamma \Rightarrow -\mu \cdot m \cdot g \cdot \Delta x_2 = -\frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2$$

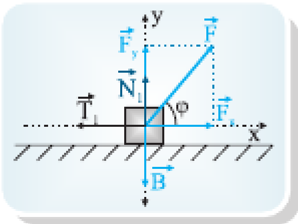
$$\Delta x_2 = \frac{\upsilon^2}{2\mu \cdot g} = 4{,}5\text{m}\ .\ \ \Delta x_{ολ} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 5\text{m} + 4{,}5\text{m} = 9{,}5\text{m}$$

5. **Σώμα μάζας $m = kg$ ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Δύναμη $F = 20N$ ασκείται στο σώμα υπό γωνία φ, για χρόνο $t = 5s$ και στη συνέχεια παύει να ασκείται. Το σώμα συνεχίζει να κινείται και σταματάει λόγω τριβών. Αν ο συντελεστής τριβής μεταξύ σώματος ή επιπέδου είναι $\mu = 0,2$ να βρεθεί:**

α. η ταχύτητα του σώματος όταν παύει να ασκείται η δύναμη

β. η μετατόπιση του κατά τη διάρκεια όλης της κίνησης

Λύση:



α. $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 + F\eta\mu\varphi - B = 0 \Rightarrow N_1 = B - F\eta\mu\varphi \Rightarrow$

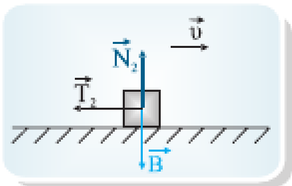
$N_1 = m\cdot g - F\eta\mu\varphi \ (1)$, $T_1 = \mu N_1 \overset{(1)}{=} \mu(m\cdot g - F\eta\mu\varphi) \ (2)$

$\Sigma F_x = m\cdot\alpha \Rightarrow F\sigma\upsilon\nu\varphi - T_1 = m\cdot\alpha_1 \overset{(2)}{\Rightarrow}$

$F\sigma\upsilon\nu\varphi - \mu(m\cdot g - F\eta\mu\varphi) = m\cdot\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = 1{,}8m/s^2$

$\upsilon = \alpha_1\cdot t_1 = 9m/s \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{1}{2}\alpha_1\cdot t_1^2 = 22{,}5m$

Μετά $t = 5s$



β. $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_2 - B = 0 \Rightarrow N_2 = B \Rightarrow N_2 = m\cdot g \quad (3)$

$\Sigma F_x = m\cdot\alpha \Rightarrow T_2 = m\cdot\alpha \Rightarrow \mu N_2 = m\cdot\alpha_2 \overset{(3)}{\Rightarrow}$

$\mu m\cdot g = m\cdot\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = \mu\cdot g \Rightarrow \alpha_2 = 2m/s^2$

$\upsilon = \upsilon_0 - \alpha_2\cdot t_2 \Rightarrow 2t = 9s \Rightarrow t = 4{,}5s$

$\Delta x_2 = \upsilon_0\cdot t_2 - \frac{1}{2}\alpha_2 t_2^2 \Rightarrow \Delta x_2 = 20{,}25m$

$\Delta x_{o\lambda} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 22{,}5m + 20{,}25m = 42{,}25m$

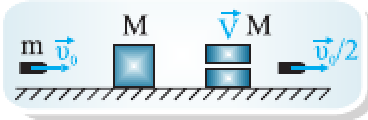
6. **Σώμα μαζας $M = 5kg$ ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0{,}1$. Βλήμα κινούμενο οριζόντια με ταχύτητα $\upsilon_0 = 100m/s$ και μάζας $m = 0{,}1kg$ διαπερνά το σώμα και η ταχύτητα του γίνεται $\upsilon_0/2$. Να βρεθούν:**

α. Η ταχύτητα του σώματος Μ μετά την έξοδο του βλήματος.

β. Η μεταβολή της ορμής του σώματος Μ από τη στιγμή που ηρεμούσε μέχρι την έξοδο του βλήματος.

γ. Η μέση δύναμη που δέχεται το σώμα κατά τη διάρκεια της "κρούσης" αν αυτή διαρκεί Δt = 0,01 s.

δ. Η θερμότητα που παράγεται κατά την κίνηση του σώματος Μ πάνω στο οριζόντιο επίπεδο, καθώς και η μετατόπιση μέχρι να σταματήσει το σώμα μάζας Μ..



Λύση:

α. Α.Δ.Ο.

$$\vec{p}_{ολ,πριν} = \vec{p}_{ολ,μετα} \Rightarrow m\cdot\upsilon_0 = M\cdot V + m\frac{\upsilon_0}{2} \Rightarrow m\cdot\upsilon_0 - m\frac{\upsilon_0}{2} = M\cdot V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\frac{\upsilon_0}{2} = M\cdot V \Rightarrow V = \frac{m\cdot\upsilon_0}{2M} \Rightarrow V = 1m/s$$

β. $\Delta\vec{p}_M = \vec{p}_{μετά} - \vec{p}_{πριν} \Rightarrow \Delta p_M = M\cdot V - 0 \Rightarrow \Delta p_M = 5kg\cdot 1m/s = 5kgm/s$

γ. $\vec{F}_M = \frac{\Delta\vec{p}_M}{\Delta t} \Rightarrow F_M = \frac{\Delta p_M}{\Delta t} \Rightarrow F_M = \frac{5kgm/s}{0,01s} = 500N$

δ. $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - B = 0 \Rightarrow N = B \Rightarrow N = M\cdot g \Rightarrow T = \mu\cdot N = \mu\cdot M\cdot g$

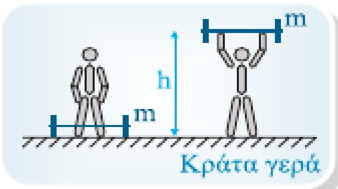
Από Θ.Μ.Κ.Ε.: $\Sigma W_F = \Delta K \Rightarrow W_B + W_N + W_T = K_Γ - K_A$

Επειδή $W_B = W_N = K_Γ = 0$ τότε

$$-\mu\cdot M\cdot g\cdot \Delta x = -\frac{1}{2}\cdot M\cdot V^2 \Rightarrow \Delta x = \frac{V^2}{2\mu\cdot g} \Rightarrow \Delta x = 0,5m$$

$$Q = |W_T| \Rightarrow Q = \mu\cdot M\cdot g\cdot \Delta x \Rightarrow Q = 2,5J$$

7. Στην Ολυμπιάδα του Σύδνεϋ το 2000 ο αρσιβαρίστας μας Πύρρος Δήμας σήκωσε στο αρασέ μάζα $m = 250kg$ σε ύψος $h = 1,8m$.



Να βρεθούν:

α. το έργο της δύναμης που έβαλε ο Πύρρος για να σηκώσει τα βάρη

β. το έργο του βάρους

γ. τη δυναμική ενέργεια που έχουν τα βάρη στο ύψος h

δ. την ισχύ του Πύρρου αν σηκώσει τα βάρη σε $t = 5s$

ε. όταν τα αφήνει ο Πύρρος από το ύψος h, να βρεθεί η ταχύτητα με την οποία προσπίπτουν στο δάπεδο.

Θεωρούμε ότι ο Πύρρος σηκώνει τα βάρη με σταθερή ταχύτητα και $g = 10 m/s^2$

Λύση

α. $W_F = F \cdot h = B \cdot h = m \cdot g \cdot h \Rightarrow W = 250kg \cdot 10\frac{m}{s^2} \cdot 1,8m \Rightarrow W = 4500J$

επειδή υ = σταθερή, $\Sigma F = 0 \Rightarrow F - B = 0 \Rightarrow F = B$

β. $W_B = -m \cdot g \cdot h \Rightarrow W_B = -250kg \cdot 10m/s^2 \cdot 1,8m \Rightarrow W_B = -4500J$

γ. $W_B = -\Delta U \Rightarrow W_B = -\left(U_{\tau\varepsilon\lambda} - U_{\alpha\rho\chi}\right) \Rightarrow W_B = -U_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow U_{\tau\varepsilon\lambda} = 4500J$

δ. $P = \frac{W_F}{t} = \frac{4500J}{5s} = 900W$

ε. Α.Δ.Μ.Ε.

$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda}$

Επειδή $K_{\alpha\rho\chi} = 0,\ U_{\tau\varepsilon\lambda} = 0$

$$U_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2U_{\alpha\rho\chi}}{m}} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2 \cdot 4500J}{250kg}} \Rightarrow \upsilon = 6m/s$$