<u>**ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ**</u>

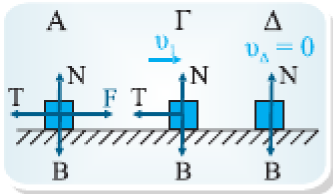
1. Σε κιβώτιο μάζας $m = 10kg$ που αρχικά ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο, α-σκείται οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 100N$ για $t_1 = 5s$ και μετά η δύναμη καταργείται. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και ε-πιπέδου είναι $\mu = 0,1$, να βρεθούν:

α. η ταχύτητα του σώματος τη στιγμή που καταργείται η δύναμη

β. ο ολικός κίνησης του σώματος

γ. το ολικό διάστημα που διανύει.

Δίνεται: $g = 10m/s^2$.



Λύση:

α. Διαδρομή ΑΓ Οι οριζόντιες δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι η $\vec{F}$ και η $\vec{T}$. Από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \Rightarrow F - T = m\alpha \Rightarrow F - \mu \cdot N = m\alpha \Rightarrow F - \mu mg = m\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{F - \mu mg}{m}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 9m/s^2 \text{ και } \upsilon_1 = \alpha_1 t_1 \Rightarrow \upsilon_1 = 9m/s^2 \cdot 5s = 45m/s$$

β. Στη διαδρομή ΓΔ η μόνη οριζόντια δύναμη είναι η $\vec{T}$.

Από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα υπολογίζουμε την επιτάχυνση (επιβράδυνση) $\vec{\alpha}_2$

$$\Sigma\vec{F}_x = \vec{m}\alpha_2 \Rightarrow -T = m(-\alpha_2) \Rightarrow \mu mg = m\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = 1m/s^2$$

Επειδή το σώμα σταματά στο Δ έχουμε:

$$\upsilon_\Delta = \upsilon_1 - \alpha_2 t_{\Gamma\Delta} \Rightarrow 0 = \upsilon_1 - \alpha_2 t_{\Gamma\Delta} \Rightarrow t_{\Gamma\Delta} = \frac{\upsilon_1}{\alpha_1} \Rightarrow t_{\Gamma\Delta} = 45s$$

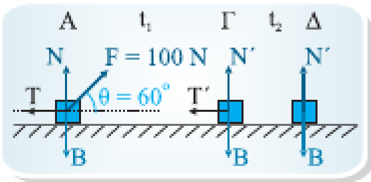
Οπότε $t_{o\lambda} = t_1 + t_{\Gamma\Delta} = 5s + 45s = 50s$

γ. Για το ολικό διάστημα που διανύει το σώμα έχουμε:

$$S_1 = \frac{1}{2}\alpha_1 t_1^2 \Rightarrow S_1 = \frac{1}{2} \cdot 9m/s^2 \cdot 5^2 s^2 \Rightarrow S_1 = 112,5m$$

$$S_{\Gamma\Delta} = \frac{\upsilon_1^2}{2\alpha_2} \Rightarrow S_{\Gamma\Delta} = 1012,5m \text{ οπότε } S_{o\lambda} = S_1 + S_{\Gamma\Delta} = 1125m$$

2. Σώμα μάζας $m = 10\sqrt{3}kg$ κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου $\upsilon = 20m/s$ σε οριζόντιο δρόμο με την επίδραση δύναμης μέτρου $F = 100N$ που σχηματίζει $\theta = 60^o$ με το οριζόντιο επίπεδο προς τα πάνω.



Μετά από $t_1 = 10s$ η $\vec{F}$ καταργείται. Να βρεθούν:

α. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και επιπέδου

β. Ο χρόνος που θα σταματήσει το σώμα μετά την κατάργηση της δύναμης.

Δίνεται: $g = 10m/s^2$

Λύση:

α. Διαδρομή ΑΓ: Αναλύουμε την $\vec{F}$ σε δύο συνιστώσες $\vec{F}_x$ και $\vec{F}_y$ με μέτρα

$$F_x = F \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 100N \cdot \frac{1}{2} = 50N \text{ και } F_y = F \cdot \eta\mu\theta = 100N \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}N$$

Επειδή το σώμα κινείται με $\vec{\upsilon} = \sigma\tau\alpha\theta.$

Ισχύει: $\Sigma\vec{F}_x = \vec{0} \Rightarrow F_x - T = 0 \Rightarrow F_x = T \Rightarrow T = 50N$

Από την συνθήκη ισορροπίας στον κατακόρυφο άξονα έχουμε:

$\Sigma\vec{F}_y = \vec{0} \Rightarrow F_y + N - B = 0 \Rightarrow$

$N = B - F_y \Rightarrow N = mg - F \cdot \eta\mu\theta \Rightarrow N = 50\sqrt{3}N$

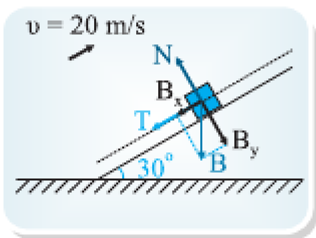
$$T = \mu N \Rightarrow \mu = \frac{T}{N} = \frac{50N}{50\sqrt{3}N} \Rightarrow \mu = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

β. Μετά την κατάργηση της $\vec{F}$ η μόνη οριζόντια δύναμη είναι η τριβή, η οποία επιβραδύνει και τελικά σταματά το σώμα

$$\Sigma\vec{F}_x = m\vec{\alpha} \Rightarrow -T' = m(-\alpha) \Rightarrow \alpha = \frac{T'}{m} \Rightarrow \alpha = \frac{10\sqrt{3}}{3} m/s^2$$

όπου $T' = \mu \cdot N' \Rightarrow T' = \mu \cdot mg \Rightarrow T' = 100N$ και $t_2 = \dfrac{\upsilon_0}{\alpha} \Rightarrow t_2 = 2\sqrt{3}\,s$

3. Σώμα ρίχνεται από τη βάση κεκλιμένου επιπέδου κλίσης $\theta = 30^o$ με $\upsilon = 20m/s$. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και κεκλιμένου επιπέδου είναι $\mu = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$ να βρεθούν:



α. Η απόσταση που διανύει στο κεκλιμένο επίπεδο μέχρι να σταματήσει στιγμιαία.

β. Να εξεταστεί αν θα επιστρέψει στη βάση του κεκλιμένου και αν ναι , σε πόσο χρόνο και με ποια ταχύτητα.

(Δίνεται ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής σώματος και κεκλιμένου επιπέδου $\mu' = \frac{\sqrt{3}}{4}$ και $g = 10 m/s^2$)

Λύση:

α. Η απόσταση που διανύει το σώμα μπορεί να βρεθεί ή με εφαρμογή του νόμου Νεύτωνα ή με το θεώρημα έργου ενέργειας. Γνωρίζουμε επίσης ότι: $B_y = mg\sigma\upsilon\nu\theta$, $B_x = mg\eta\mu\theta$

Οι δυνάμεις ασκούνται στη διεύθυνση κίνησης του σώματος είναι η $\vec{B}_x$ και $\vec{T}$ που επιβραδύνουν το σώμα, οπότε για το διάστημα που διανύει μέχρι να σταματήσει ισχύει: $s = \frac{\upsilon_0^2}{2|\alpha|}$ (1). $\left(\begin{array}{r} \text{Ισχύει στον } yy' : \Sigma\vec{F}_y = 0 \Rightarrow N = B_y = mg\sigma\upsilon\nu\theta \\ T = \mu N \Rightarrow T = \mu mg\sigma\upsilon\nu\theta \end{array}\right)$

Ισχύει: $\Sigma\vec{F}_x = m\vec{\alpha} \Rightarrow -B_x - T = m(-\alpha) \Rightarrow mg\eta\mu\theta + \mu \cdot mg\sigma\upsilon\nu\theta = m\alpha \Rightarrow \alpha = 8 m/s^2$

Από την (1) έχουμε: $s = \frac{\upsilon_0^2}{2|\alpha|} \Rightarrow S = 25m$.

β. Για να εξετάσουμε αν θα επιστραφεί στη βάση, σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα για να κινηθεί προς τα κάτω θα πρέπει:

$B_x > T_{\sigma\tau} \Rightarrow mg\eta\mu\theta > \mu_{\sigma\tau} mg\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \eta\mu\theta > \mu_{\sigma\tau}\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{3}{8}$ που ισχύει άρα το σώμα επιστρέφει .

Έχουμε: $\Sigma F_x = m\alpha' \Rightarrow B_x - T = m\alpha' \Rightarrow \alpha' = \frac{B_x - T}{m} \Rightarrow \alpha' = 2 m/s^2$

$S = \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot S}{\alpha}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 25m}{2m/s^2}} \Rightarrow t = 5s$ και $\upsilon_{\varepsilon\pi} = \alpha' t \Rightarrow \upsilon_{\varepsilon\pi} = 10 m/s$

4. Σώμα αφήνεται στο σημείο Α κεκλιμένου επιπέδου σε ύψος $h = 1,25m$ και συνεχίζει την κίνησή του στο οριζόντιο επίπεδο σε απόσταση 10m (σημείο Γ) από τη βάση του κεκλιμένου. Να βρεθεί ο χρόνος κίνησης $t_{A\Gamma}$ (τα επίπεδα θεωρούνται λεία, $\varphi = 30^o$).

Λύση:

$\Sigma F_x = m\alpha \Rightarrow mg\eta\mu\varphi = m\alpha \Rightarrow \alpha = g\eta\mu\varphi \Rightarrow \alpha = 5 m/s^2$

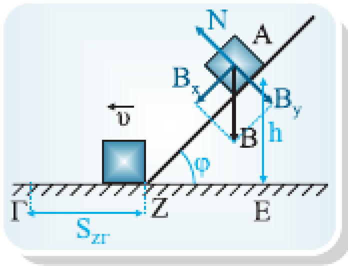
ΤΡΙΓ. ΑΕΖ: $ημφ = \frac{h}{AZ} \Rightarrow AZ = \frac{h}{ημφ} \Rightarrow S_{AZ} = AZ$

$S_{AZ} = \frac{1}{2}αt^2 \Rightarrow \frac{h}{ημφ} = \frac{1}{2}g \cdot ημφ \cdot t^2 \Rightarrow t_1 = 1s$

$υ_Z = α \cdot t_1 \Rightarrow υ_Z = 5m/s$

ΖΓ: ευθύγραμμη ομαλή

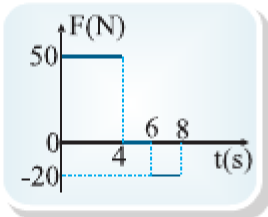
$S_{ZΓ} = υt_2 \Rightarrow t_2 = 2s$ και $t_{ολ} = t_1 + t_2 = 2s$



5. Σε σώμα $m = 2kg$ αρχικά ακίνητο σε λείο οριζόντιο επίπεδο ασκείται οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ της οποίας η αλγεβρική τιμή δείχνεται στο διάγραμμα:

α. Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 8s$

β. Να γίνει το διάγραμμα (υ, t)



Λύση:

α. $0 \to 4s$: Ασκείται στο σώμα σταθερή δύναμη μέτρου $F = 50N$ οπότε κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

$F = mα_1 \Rightarrow α_1 = \frac{F}{m} \Rightarrow α_1 = 25m/s^2$ και $υ_1 = α_1 t \Rightarrow υ_1 = 100m/s$

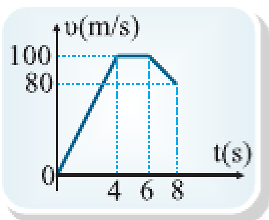
$4 \to 6s$: $F = 0$ και $α_2 = 0$ άρα το σώμα κάνει ευθύγραμμη ομαλή με $υ_2 = υ_1 = 100m/s$

$6 \to 8s$: Ασκείται σταθερή δύναμη μέτρου $F = 20N$ αντίρροπη στην κίνησή του, οπότε το σώμα κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα $υ_0 = υ_2 = 100m/s$.

Άρα $F = mα_3 \Rightarrow α_3 = \frac{F}{m} \Rightarrow α_3 = 10m/s^2$

και $υ_3 = υ_0 - α_3 t \Rightarrow υ_3 = 80m/s$ είναι η ταχύτητά του στο τέλος των 8s

β. Διάγραμμα (υ, t)



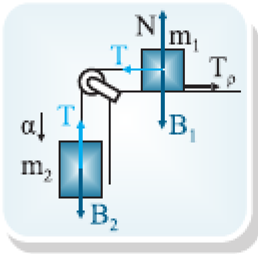
6. Όταν το σύστημα του σχήματος αφεθεί ελεύθερο να βρεθούν:

α. Το διάστημα που διανύει η m_1 σε 2s

β. Η ταχύτητα του m_2 σε 2s

γ. Η τάση του νήματος

Δίνονται: $m_1 = m_2 = 5kg$, $g = 10m/s^2$ και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης του m_1 με το δάπεδο $\mu = 0{,}25$. (Η τροχαλία θεωρείται αβαρής)



Λύση:

Εφαρμόζουμε το 2ο Νόμο του Νεύτωνα για κάθε σώμα χωριστά με τις δυνάμεις που φαίνονται στο σχήμα: για το m_1: $\Sigma F = m_1\alpha \Rightarrow T - T_\rho = m_1\alpha \Rightarrow T - \mu m_1 g = m_1\alpha$ (1)

για το m_2: $\Sigma F = m_2\alpha \Rightarrow B_2 - T = m_2\alpha \Rightarrow m_2 g - T = m_2\alpha$ (2)

$$(1)+(2) \Rightarrow m_2 g - \mu m_1 g = m_1\alpha + m_2\alpha \Rightarrow \alpha = 3{,}75\,m/s^2$$

α. Για το διάστημα που διανύει το m_1 σε $t = 2s$ έχουμε: $S_1 = \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow S_1 = 7{,}5m$

β. $\upsilon_2 = \alpha \cdot t \Rightarrow \upsilon_2 = 7{,}5\,m/s$

γ. $(1) \Rightarrow T = m_1\alpha + \mu m_1 g \Rightarrow T = 31{,}25N$

(Επειδή τα δύο σώματα συνδέονται με τεντωμένο νήμα κάθε στιγμή έχουν την ίδια ταχύτητα οπότε και οι μεταβολές των ταχυτήτων τους στη μονάδα του χρόνου είναι ίσες, άρα έχουν και ίσες επιταχύνσεις $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$)

7. Σ' έναν κυκλικό στίβο ακτίνας $R = \frac{200}{\pi}m$ ξεκινούν από το ίδιο σημείο δύο δρομείς Α και Β με ταχύτητες μέτρων $\upsilon_A = 3m/s$ και $\upsilon_B = 2m/s$ αντίστοιχα. Μετά από πόσο χρόνο θα συναντηθούν για τρίτη φορά όταν:

α. κινούνται με την ίδια φορά

β. κινούνται με αντίθετες φορές

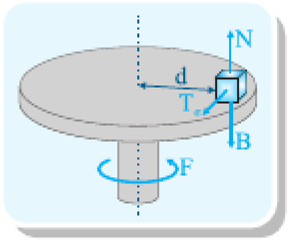
Λύση:

α. Οι δυο δρομείς όταν θα συναντηθούν για πρώτη φορά θα έχουν διατρέξει διαστήματα: $S_A = \upsilon_A \cdot t = 3t$, $S_B = \upsilon_B \cdot t = 2t$ αλλά ο πρώτος που έχει μεγαλύτερη ταχύτητα θα έχει διαγράψει ένα κύκλο (2πR) περισσότερο. Έτσι μετά από την τρίτη φορά θα έχει διαγράψει τρεις κύκλους περισσότερους, δηλ.

$$S_A = S_B + 3(2\pi R) \Rightarrow 3t = 2t + 6\pi\frac{200}{\pi}s \Rightarrow t = 1200s$$

β. Όταν κινούνται με αντίθετες φορές έχουν διαγράψει έναν κύκλο για κάθε φορά που συναντιώνται. $S_A + S_B = 3(2\pi R) \Rightarrow 3t + 2t = 6\pi\frac{200}{\pi}s \Rightarrow t = 240s$

8. Ο οριζόντιος δίσκος του σχήματος περιστρέφεται με συχνότητα $f = 0{,}1Hz$. Για να ισορροπεί ένα σώμα πάνω στο δίσκο, πρέπει να υπάρχει τριβή μεταξύ τους. Αν $\mu_\sigma = 0{,}2$ να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει η απόσταση d, ώστε το σώμα να ισορροπεί πάνω στο δίσκο. Δίνονται $g = 10m/s^2$ και $\pi^2 = 10$.



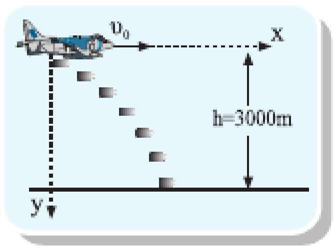
Λύση:

Για να ισορροπεί το σώμα πρέπει να υπάρχει στατική τριβή η οποία να παίζει το ρόλο της απαραίτητης κεντρομόλου δύναμης.

Ισορροπεί όταν: $T_{\sigma max} \geq F_\kappa \Rightarrow \mu_\sigma \cdot mg \geq \frac{m\upsilon^2}{d} \Rightarrow$

$\mu_\sigma \cdot mg \geq 4\pi^2 f^2 dm \Rightarrow d \leq \frac{\mu_\sigma g}{4\pi^2 f^2}$ ή $d \leq 5m$

9. Ένα βομβαρδιστικό αεροπλάνο ενώ πετάει οριζόντια με ταχύτητα 275 m/s ως προς το έδαφος σε ύψος 3000m πάνω από μια επίπεδη επιφάνεια, ρίχνει μια βόμβα.



α. Σε ποια οριζόντια απόσταση από τη θέση από την οποία αφέθηκε, η βόμβα θα προσκρούσει στο έδαφος.

β. Αν το αεροπλάνο διατηρεί την αρχική του ταχύτητα και πορεία, που θα βρίσκεται κατά τη στιγμή που η βόμβα θα προσκρούσει στο έδαφος;

Δίνεται: $g = 10m/s^2$

Λύση:

α. Ο χρόνος πτώσης της βόμβας είναι: $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3000m}{10m/s^2}} \Rightarrow t = 24{,}5s$

η οριζόντια μετατόπιση της βόμβας είναι:

$x = \upsilon_0 t \Rightarrow x = 275m/s \cdot 24{,}5s \Rightarrow x = 6737{,}5m$

β. Η κίνηση του αεροπλάνου είναι ευθύγραμμη ομαλή, οπότε σε χρόνο $t = 24{,}5s$ θα έχει διανύσει απόσταση $x_{\alpha\varepsilon\rho} = \upsilon_0 t \Rightarrow x_{\alpha\varepsilon\rho} = 275m/s \cdot 24{,}5s \Rightarrow x_{\alpha\varepsilon\rho} = 6737{,}5m$ ίση με το βεληνεκές της βόμβας.

Βρίσκεται κατακόρυφα πάνω απ' το σημείο στο οποίο προσέκρουσε η βόμβα.