ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

1. Σώμα μάζας $m = 2kg$ κινείται σε οριζόντιο επίπεδο με αρχική ταχύτητα μέτρου 10m/s. Ξαφνικά ασκούμε στο σώμα οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 10N$. Ποια είναι η ταχύτητα του σώματος 20s μετά την άσκηση της δύναμης αν:
α. η δύναμη έχει την ίδια φορά με την ταχύτητα
β. η δύναμη έχει αντίθετη φορά με την ταχύτητα

Λύση:

α. Από το θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής έχουμε:

$F = m \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{F}{m} = \frac{10N}{2kg} = 5 m/s^2$. Άρα κάνει ευθ. ομαλά επιταχ. κίνηση.

Η ταχύτητά του είναι: $\upsilon = \upsilon_0 + \alpha \cdot t = 10 m/s + 5 m/s^2 \cdot 20 s = 110 m/s$

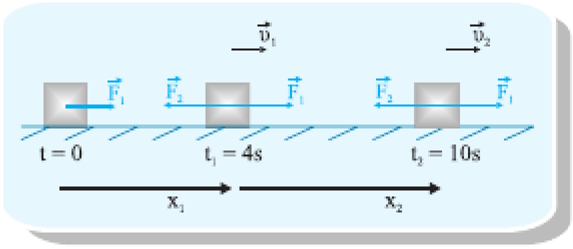
β. Από το θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής έχουμε:

$-F = m \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{-F}{m} = \frac{-10N}{2kg} = -5 m/s^2$. (γιατί ορίσαμε ως θετική φορά προς τα δεξιά). Άρα κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση και η ταχύτητά του θα είναι: $\upsilon = \upsilon_0 + \alpha \cdot t = 10 m/s - 5 m/s^2 \cdot 20 s = -90 m/s$

Δηλαδή το σώμα θα κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα μέτρου 90m/s.

2. Σώμα μάζας $m = 2kg$ ηρεμεί σε οριζόντιο δάπεδο. Στο σώμα ασκούμε με σταθερή οριζόνται δύναμη $F_1 = 20N$ για χρόνο 4s. Στη συνέχεια και για τα επόμενα 6s ασκούμε και άλλη δύναμη F_2 σταθερού μέτρου και αντίθετης κατεύθυνσης από την F_1, οπότε το σώμα αποκτά ταχύτητα μέτρου 70m/s. Να βρείτε το μέτρο της F_2 και το ολικό διάστημα που διανύει το σώμα.

Λύση:



Για την κίνηση από $0-4s$, το σώμα κάνει ευθύγραμμη ομαλή επιταχυνόμενη κίνηση. Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής έχουμε:

$$F_1 = m \cdot \alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{F_1}{m_1} = \frac{20N}{2kg} = 10m/s^2 \text{ είναι: } \upsilon_1 = \alpha_1 \cdot t_1 = 10m/s^2 \cdot 4s = 40m/s$$

και $x_1 = \frac{1}{2}\alpha_1 \cdot t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 10m/s^2 \cdot 4^2 s^2 = 80m$.

Για την κίνηση $4-10s$ το σώμα συνεχίζει την κίνησή του. Η νέα επιτάχυνση

α_2 είναι: $\upsilon_2 = \upsilon_1 + \alpha_2 \cdot t_2 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{t_2} = \frac{70m/s - 40m/s}{6s} = 5m/s^2$

Επομένως συνεχίζει την ευθύγραμμη ομαλή επιταχυνόμενη κίνηση.
Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής έχουμε: $\Sigma F = m \cdot \alpha_2 \Rightarrow \Sigma F = 10N$

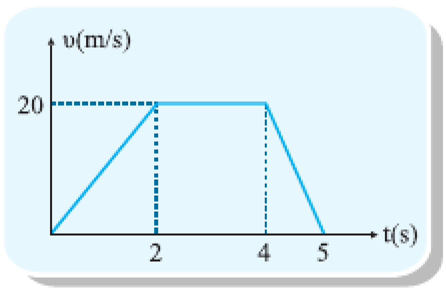
Η F_2 είναι αντίρροπη της F_1 ισχύει:

$$\Sigma F = F_1 - F_2 \Rightarrow F_2 = F_1 - \Sigma F \Rightarrow F_2 = 20N - 10N \Rightarrow F_2 = 10N$$

Το x_2 είναι: $x_2 = \upsilon_1 \cdot t_2 + \frac{1}{2}\alpha_2 \cdot t_2^2 \Rightarrow x_2 = 40m/s \cdot 6s + \frac{1}{2} \cdot 5m/s^2 \cdot 6^2 s^2 = 330m$

Άρα το ολικό διάστημα θα είναι: $x_{ολ} = x_1 + x_2 = 80m + 330m = 410m$

3. Η ταχύτητα σώματος μεταβάλλεται σύμφωνα με το διάγραμμα. Αν το σώμα έχει μάζα $m = 2kg$ για $t = 0$, $x_0 = 0$ να γίνει το διάγραμμα x-t και F-t.



Λύση:

Θα μελετήσουμε το διάγραμμα κατά χρονικά διαστήματα.

Από $0-2s$: Ευθύγραμμη Ομαλά Επιταχυνόμενη Κίνηση

$$\alpha_1=\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}=\frac{20m/s-0m/s}{2s-0s}=10m/s^2 \text{ και } F_1=m\cdot\alpha_1=2kg\cdot 10m/s^2=20N$$

$$x_1\overset{\alpha\rho}{=}E_{\mu\beta(\tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon)}\Rightarrow x_1=\frac{2s\cdot 20m/s}{2}=20m$$

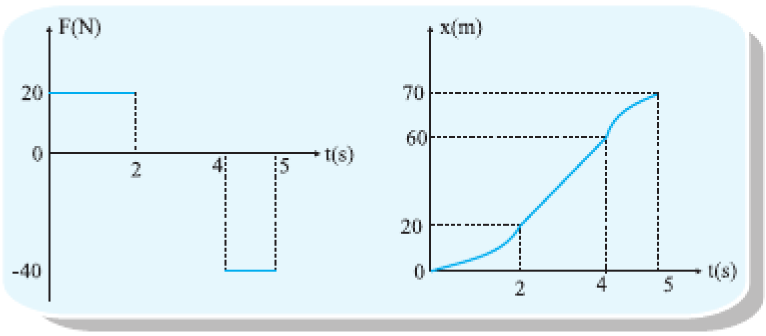
Από $2-4s$: Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση

$$\alpha_2=0,\ F_2=0 \text{ και } x_2\overset{\alpha\rho}{=}E_{(o\rho\theta.)}\Rightarrow x_2=20m/s(4s-2s)=40m$$

Από $4-5s$: Ευθύγραμμη Ομαλή Επιβραδυνόμενη Κίνηση

$$\alpha_3=\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}=\frac{0m/s-20m/s}{5s-4s}=-20m/s^2 \text{ και } F_3=m\cdot\alpha_3=2kg\cdot\left(-20m/s^2\right)=-40N$$

$$x_3\overset{\alpha\rho}{=}E_{(\tau\rho\iota\gamma)}\Rightarrow x_3=\frac{20m/s\cdot(5s-4s)}{2}=10m$$



4. Δύο σώματα με μάζες $m_1=10kg$ και $m_2=20kg$ βρίσκονται στο ίδιο λείο οριζόντιο επίπεδο δίπλα - δίπλα. Στο m_1 ενεργεί δύναμη $F_1=100N$ ενώ στο m_2 δύναμη $F_2=400N$ ομόρροπη στην F_1. Να βρείτε τις ταχύτητές τους όταν απέχουν 125m.

Λύση:

$$F_1=m_1\cdot\alpha_1\Rightarrow\alpha_1=\frac{F_1}{m_1}=10m/s^2 \text{ και } F_2=m_2\cdot\alpha_2\Rightarrow\alpha_2=\frac{F_2}{m_2}=20m/s^2$$

Έχουμε: $\Delta x=x_2-x_1\Rightarrow\Delta x=\frac{1}{2}\alpha_2\cdot t^2-\frac{1}{2}\alpha_1\cdot t^2\Rightarrow$

$$125=\frac{1}{2}\cdot 20\cdot t^2-\frac{1}{2}\cdot 10\cdot t^2 \Rightarrow 125=10t^2-5t^2 \Rightarrow t=5s$$

Άρα $\upsilon_1=\alpha_1\cdot t=10m/s^2\cdot 5s=50m/s$ και $\upsilon_2=\alpha_2\cdot t=20m/s^2\cdot 5s=100m/s$.

5. Σε σώμα μάζας $m=0{,}03kg$, που κινείται ευθύγραμμα και ομαλά με ταχύτητα υ_0 ασκείται μια σταθερή δύναμη $F=0{,}6N$ με κατεύθυνση αντίθετη της ταχύτητας. Παρατηρούμε ότι το σώμα σταματάει μετά από χρόνο $t=5s$ από τη στιγμή που του ασκήθηκε η δύναμη. Να υπολογιστούν:

α. η αρχική ταχύτητα υ_0 του σώματος

β. πότε θα αλλάξει φορά η ταχύτητα

γ. σε ποια θέση θα συμβεί αυτό;

Λύση:

Το σώμα κάνει ευθύγραμμη ομαλή επιβραδυνόμενη κίνηση είναι:

$$F=m\cdot\alpha \Rightarrow \alpha=\frac{F}{m} \Rightarrow \alpha=\frac{0{,}6N}{0{,}03kg} \Rightarrow \alpha=20m/s$$

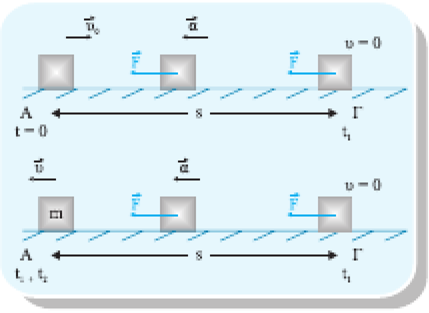
α. Αφού το σώμα σταματά είναι: $(\upsilon=0) \Rightarrow \upsilon=\upsilon_0-\alpha\cdot t \Rightarrow \upsilon_0=100m/s$

β. Η ταχύτητα του σώματος αλλάζει φορά στο σημείο που μηδενίζεται η ταχύτητα στο τέλος του χρόνου $t=5s$.

γ. Το διάστημα που διανύει το σώμα μέχρι να σταματήσει είναι:

$$\upsilon_\tau^2=\upsilon_0^2-2\alpha x \Rightarrow x=\frac{\upsilon^2-\upsilon_0^2}{2\alpha} \Rightarrow x=250m$$

6. Σώμα μάζας $m=1kg$ κινείται με σταθερή ταχύτητα υ_0 πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Ξαφνικά στο σώμα ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F=0{,}2N$, που μετά από 16s το ξαναφέρνει στο σημείο που βρισκόταν τη στιγμή που άρχισε να ασκείται σε αυτό η δύναμη F. Να βρείτε την αρχική ταχύτητα υ_0 του σώματος.



Λύση:

$$F = m \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{F}{m} \Rightarrow \alpha = 0,2\,m/s^2$$

Από το $A \rightarrow \Gamma$: ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με υ_0 και $\upsilon_{τελ} = 0$.

$$\upsilon_{τελ} = \upsilon_0 - \alpha \cdot t_1 \Rightarrow 0 = \upsilon_0 - \alpha \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{\upsilon_0}{\alpha} \quad (1)$$

και $s = \upsilon_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2}\alpha \cdot t_1^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} s = \upsilon_0 \frac{\upsilon_0}{\alpha} - \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{\upsilon_0}{\alpha}\right)^2 \Rightarrow s = \frac{\upsilon_0^2}{2\alpha} \quad (2)$

Από το $\Gamma \rightarrow A$: ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα.

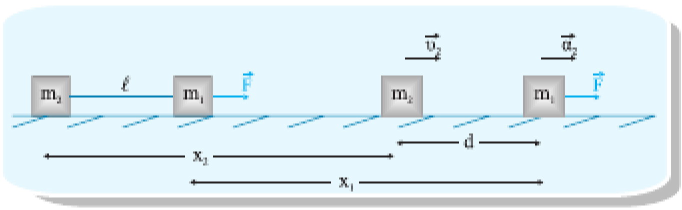
Είναι: $F = m \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = 0,2\,m/s^2$ και $s = \frac{1}{2}\alpha \cdot t_2^2 \quad (3)$

Από τις (2) και (3) $\Rightarrow \frac{\upsilon_0^2}{2\alpha} = \frac{1}{2}\alpha \cdot t_2^2 \Rightarrow t_2 = \frac{\upsilon_0}{\alpha}$

Όμως $t_1 = \frac{\upsilon_0}{\alpha}$ οπότε: $t_1 = t_2 = \frac{t_{ολ}}{2} = 8s$ και $\upsilon_0 = \alpha \cdot t_1 = 0,2m/s^2 \cdot 8s = 1,6\,m/s$

7. Πάνω σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο βρίσκονται δύο μάζες με $m_1 = 1kg$ και $m_2 = 3kg$ που ηρεμούν δεμένες στις άκρες ενός τεντωμένου σχοινιού χωρίς μάζα με μήκος $\ell = 4m$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ στη μάζα m_1 α-σκείται σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 8N$. Αν τη χρονική στιγμή $t_1 = 3s$ το σχοινί σπάει, ενώ η δύναμη συνεχίζει να ασκείται στη μάζα m_1, να βρείτε την απόσταση μεταξύ των μαζών τη χρονική στιγμή $t_2 = 5s$.

Λύση:



Μέχρι τα 3s οι μάζες κινούνται μαζί με $F = m_{ολ} \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{F}{m_1 + m_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = \frac{8N}{4kg} = 2\,m/s^2$ και ταχύτητα $\upsilon_1 = \upsilon_2 = \alpha \cdot t_1 \Rightarrow \upsilon_1 = \upsilon_2 = 6\,m/s$.

Μετά από $t_1 = 3s$ η m_1 κινείται με επιτάχυνση: $F = m_1 \cdot \alpha' \Rightarrow \alpha' = \dfrac{F}{m_1} = 8\,m/s^2$ και η m_2 συνεχίζει με σταθερή ταχύτητα υ_2. Ισχύει: $\Delta t = t_2 - t_1 \Rightarrow \Delta t = 2s$.

Οπότε έχουμε: $d + x_2 = \ell + x_1 \Rightarrow d = \ell + \upsilon_1 \cdot \Delta t + \dfrac{1}{2} \cdot \alpha' \cdot \Delta t^2 - \upsilon_2 \cdot \Delta t \Rightarrow d = 20m$

8. Ένα σώμα εκτοξεύεται από ταράτσα πολυκατοικίας ύψους 25m προς τα πάνω με $\upsilon_0 = 20m/s$. Να βρείτε:

α. το χρόνο ανόδου και το μέγιστο ύψος από την ταράτσα

β. το χρόνο καθόδου και την ταχύτητα επιστροφής στο ύψος της ταράτσας

γ. την ταχύτητα στις χρονικές στιγμές $t_1 = 1s$, $t_2 = 3s$ και $t_3 = 5s$. Που βρίσκεται τότε το σώμα;

Δίνεται $g = 10m/s^2$.

Λύση:

α. $\upsilon = \upsilon_0 - g \cdot t_{\alpha\nu} \Rightarrow 0 = \upsilon_0 - g \cdot t_{\alpha\nu} \Rightarrow \upsilon_0 = g \cdot t_{\alpha\nu} \Rightarrow t_{\alpha\nu} = \dfrac{20m/s}{10m/s^2} \Rightarrow t_{\alpha\nu} = 2s$

$h_{max} = \upsilon_0 \cdot t_{\alpha\nu} - \dfrac{1}{2} g \cdot t_{\alpha\nu}^2 = 20m/s \cdot 2s - \dfrac{1}{2} \cdot 10m/s^2 \cdot 2^2 s^2 = 20m$

β. $t_{\kappa\alpha\theta} = t_{\alpha\nu} = 2s$ άρα $t_{o\lambda} = t_{\alpha\nu} + t_{\kappa\alpha\theta} = 4s$

$\upsilon_{\varepsilon\pi\iota\sigma\tau\rho} = \upsilon_0 - g \cdot t_{o\lambda} = 20m/s - 10m/s^2 \cdot 4s = -20m/s$

γ. Για $t_1 = 1s$

$\upsilon_1 = \upsilon_0 - g \cdot t_{\alpha\nu} = 20m/s - 10m/s^2 \cdot 1s \Rightarrow \upsilon_1 = 10m/s$

$y_1 = \upsilon_0 \cdot t_1 - \dfrac{1}{2} y \cdot t_1^2 = 20m/s \cdot 1s - \dfrac{1}{2} \cdot 10m/s^2 \cdot 1^2 s^2 \Rightarrow y_1 = 15m$

Για $t_2 = 3s$

$\upsilon_2 = \upsilon_0 - g \cdot t_2 = 20m/s - 10m/s^2 \cdot 3s \Rightarrow \upsilon_2 = -10m/s$ το σώμα κατέρχεται.

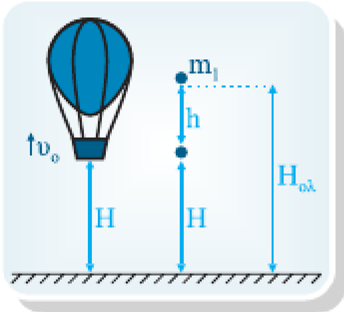
$y_2 = \upsilon_0 \cdot t_2 - \dfrac{1}{2} y \cdot t_2^2 = 20m/s \cdot 3s - \dfrac{1}{2} \cdot 10m/s^2 \cdot 3^2 s^2 \Rightarrow y_2 = 15m$

Για $t_3 = 5s$

$\upsilon_3 = \upsilon_0 - g \cdot t_3 = 20m/s - 10m/s^2 \cdot 5s \Rightarrow \upsilon_3 = -30m/s$ το σώμα κατέρχεται.

$y_3 = \upsilon_0 \cdot t_3 - \dfrac{1}{2} y \cdot t_3^2 = 20m/s \cdot 5s - \dfrac{1}{2} \cdot 10m/s^2 \cdot 5^2 s^2 \Rightarrow y_3 = -25m$ το σώμα βρίσκεται 25m κάτω από το σημείο που εκτοξεύθηκε (στο έδαφος) .

9. Αερόστατο ανέρχεται κατακόρυφα με ταχύτητα $\upsilon_0 = 20 m/s$. Κάποια στιγμή που το αερόστατο βρίσκεται σε ύψος $H = 300m$ αφήνεται από αυτό ελεύθερα να πέσει ένα μικρό σώμα. Να υπολογιστούν:



α. το μέγιστο ύψος του σώματος από το έδαφος

β. μετά από πόσο χρόνο το σώμα φτάνει στο έδαφος

γ. η θέση του αερόστατου όταν το σώμα φτάσει στο έδαφος

δ. η ταχύτητα του σώματος όταν χτυπήσει το έδαφος.

Δίνεται: $g = 10 m/s^2$

Λύση:

Το σώμα όταν το αφήσουμε ελεύθερο έχει την ταχύτητα του αερόστατου υ_0. Επομένως θα κινηθεί κατακόρυφα προς τα πάνω και θα φτάσει σε ύψος h:

$$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 - 2gh \Rightarrow 0 = \upsilon_0^2 - 2gh \Rightarrow h = \frac{\upsilon_0^2}{2g} \Rightarrow h = 20m$$

ο χρόνος υπολογίζετε από $\upsilon = \upsilon_0 - gt_1 \Rightarrow 0 = \upsilon_0 - gt_1 \Rightarrow t_1 = \frac{\upsilon_0}{g} \Rightarrow t_1 = 2s$

α. Άρα το μέγιστο ύψος του σώματος από το έδαφος είναι:

$H_{ολ} = H + h = 300m + 20m = 320m$

β. Ο χρόνος που το σώμα φτάνει στο έδαφος είναι: $t_{ολ} = t_1 + t_2 \quad (1)$

Από το ύψος $H + h$ το σώμα πέφτει ελεύθερα χωρίς αρχική ταχύτητα σε χρόνο t_2, οπότε έχουμε:

$H + h = \frac{1}{2}gt_2^2 \Rightarrow t_2^2 = \frac{2(H+h)}{g} \Rightarrow t_2^2 = 64s^2 \Rightarrow t_2 = 8s$. Άρα $t_{ολ} = 2s + 8s = 10s$.

γ. Το αερόστατο ανέρχεται με σταθερή ταχύτητα, επομένως σε χρόνο $t_{ολ}$ αυτό θα έχει ανέβει κατά $h_1 = \upsilon_0 \cdot t_{ολ} = 20m/s \cdot 10s \Rightarrow h_1 = 200m$.

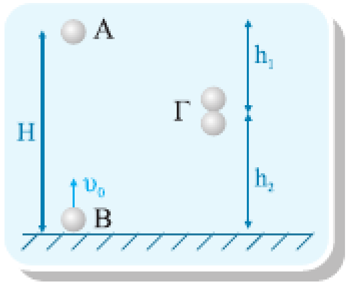
Άρα η θέση του αερόστατου από το έδαφος όταν το σώμα φτάνει σε αυτό είναι: $H_{αερ} = H + h_1 = 300m + 200m \Rightarrow H_{αερ} = 500m$.

δ. Η ταχύτητα του σώματος στο έδαφος είναι:

$\upsilon = g \cdot t_2 = 10m/s^2 \cdot 8s = 80m/s$.

10. **Από ύψος $H=100$ αφήνουμε ένα σώμα να πέσει ελεύθερο. Από το έδαφος και στην ίδια κατακόρυφο εκτοξεύουμε ταυτόχρονα ένα άλλο σώμα προς τα πάνω με $\upsilon_0=50\,m/s$. Να βρείτε που και πότε θα συναντηθούν; Δίνεται: $g=10\,m/s^2$.**

Λύση:



Έστω ότι θα συναντηθούν στο σημείο Γ.

Για το πρώτο σώμα: $h_1=\frac{1}{2}g\cdot t^2$

Για το δεύτερο σώμα: $h_2=\upsilon_0\cdot t-\frac{1}{2}g\cdot t^2$

Όμως: $H=h_1+h_2\Rightarrow H=\frac{1}{2}gt^2+\upsilon_0 t-\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow$

$$H=\upsilon_0 t\Rightarrow t=\frac{H}{\upsilon_0}=\frac{100m}{50m/s}\Rightarrow t=2s$$

Οπότε: $h_2=\upsilon_0\cdot t-\frac{1}{2}g\cdot t^2\Rightarrow h_2=80m$

Θα συναντηθούν μετά από 2s σε ύψος 80m από το έδαφος.