

ΑΚΤΙΝΕΣ Χ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Η τάση ανάμεσα στη κάθοδο και την άνοδο σε ένα σωλήνα παραγωγής ακτίνων Χ είναι $V = 3,3 \text{ KV}$. Η ένταση του ρεύματος της δέσμης των ηλεκτρονίων ισούται με $I = 16 \text{ mA}$. Δίνονται: η σταθερά του Planck $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$, η ταχύτητα διάδοσης του φωτός στο κενό $c_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ και για το φορτίο του ηλεκτρονίου $|q_e| = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Να υπολογίσετε:

Δ_1 . Το ελάχιστο μήκος κύματος της ακτινοβολίας Χ.

Δ_2 . Τον αριθμό των ηλεκτρονίων που προσπίπτουν στην άνοδο σε κάθε δευτερόλεπτο.

Ποιο από τα ηλεκτρόνια συγκρουόμενο στην άνοδο χάνει το 20% της κινητικής ενέργειας που έχει κατά τη στιγμή της σύγκρουσης. Το ποσοστό αυτό μετατρέπεται σε ενέργεια ενός φωτονίου.

Δ_3 . Να υπολογίσετε τη συχνότητα του φωτονίου που εκπέμπεται.

Κάποια στιγμή πενταπλασιάζουμε τη τάση ανάμεσα στη κάθοδο και την άνοδο του σωλήνα παραγωγής των ακτίνων Χ.

Δ_4 . Να υπολογίσετε το % ποσοστό μεταβολής του ελαχίστου μήκους κύματος της ακτινοβολίας Χ.

Λύση

Δ_1 .

Το ελάχιστο μήκος κύματος των ακτίνων Χ :

$$\lambda_{\min} = c_0 \cdot h / (e \cdot V_{AB}) = \lambda_{\min} = 3 \cdot 10^8 \cdot 6,6 \cdot 10^{-34} / (1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 3,3 \cdot 10^3) = \lambda_{\min} = 3,75 \cdot 10^{-10} \text{ m} .$$

Δ_2 .

Η ένταση του ρεύματος της δέσμης των ακτίνων Χ :

$$I = q / \Delta t \Rightarrow I = N_e \cdot |q_e| / \Delta t \Rightarrow N_e / \Delta t = I / |q_e| \Rightarrow N_e / \Delta t = 16 \cdot 10^{-3} / (1,6 \cdot 10^{-19}) \Rightarrow N_e / \Delta t = 10^{17} \text{ ηλεκτρόνια / s} .$$

Δ_3 .

Η αρχή διατήρησης της ενέργειας :

(η γενικότερη μορφή, $E_{f,x}$ είναι η ενέργεια ενός φωτονίου των ακτίνων Χ, ΔK_e είναι η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του ηλεκτρονίου βλήματος)

$$E_{f,x} = |\Delta K_e| \Rightarrow E_{f,x} = 0,2 \cdot K_e \Rightarrow (\text{Η ενέργεια του φωτονίου } E_{f,x} = h \cdot f_x)$$

$$h \cdot f_x = 0,2 \cdot K_e \Rightarrow f_x = 0,2 \cdot e \cdot V_{AB} / h \Rightarrow f_x = 0,2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 3,3 \cdot 10^3 / (6,6 \cdot 10^{-34}) = f_x = 16 \cdot 10^{16} \text{ Hz} .$$

Δ_4 .

Αν πενταπλασιαστεί η τάση $V_{AB}' = 5 \cdot V_{AB}$, τότε θα παραχθούν σκληρότερες ακτίνες Χ με :

$$\lambda_{\min}' = c_0 \cdot h / (e \cdot V_{AB}') = \lambda_{\min}' = c_0 \cdot h / (e \cdot 5 \cdot V_{AB}) = \lambda_{\min}' = \lambda_{\min} / 5 .$$

Το % ποσοστό μεταβολής του ελαχίστου μήκους κύματος της ακτινοβολίας Χ :

$$(\Delta \lambda_{\min} / \lambda_{\min}) \% = ((\lambda_{\min}' - \lambda_{\min}) / \lambda_{\min}) \cdot 100 \% = (\Delta \lambda_{\min} / \lambda_{\min}) \% = (\lambda_{\min} / 5 - \lambda_{\min}) / \lambda_{\min} \cdot 100 \% = (\Delta \lambda_{\min} / \lambda_{\min}) \% = -80 \% .$$

Όπου το μείον μας δείχνει την μείωση.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Σε σωλήνα παραγωγής ακτίνων Χ τα ηλεκτρόνια επιταχύνονται από τάση 100 kV . Δίνονται: η σταθερά του Planck $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$, η ταχύτητα διάδοσης του φωτός στο κενό $c_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ και για το φορτίο του ηλεκτρονίου $|q_e| = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Να υπολογίσετε :

Δ_1 . την κινητική ενέργεια με την οποία το κάθε ηλεκτρόνιο φτάνει στην άνοδο.

Δ_2 . Αν θεωρηθεί ότι όλη η κινητική ενέργεια κάθε ηλεκτρονίου μετατρέπεται σε ενέργεια ενός φωτονίου, να υπολογίσετε το ελάχιστο μήκος κύματος των ακτίνων Χ.

Η ένταση του ρεύματος της δέσμης των ηλεκτρονίων είναι 20 mA και η συσκευή λειτουργεί για χρόνο 10 ms . Να υπολογίσετε :

Δ₃. την ισχύ της δέσμης καθώς και την ενέργεια που αυτή μεταφέρει,

Δ₄. τον αριθμό των ηλεκτρονίων που προσπίπτουν στην άνοδο στη χρονική διάρκεια των 10 ms.

Λύση

Δ₁.

Το κάθε ηλεκτρόνιο e ξεκινάει από την κάθοδο με μηδενική αρχική ταχύτητα και φτάνει στην άνοδο έχοντας κινητική ενέργεια K_e . Η ενέργεια που απέκτησε με την μορφή της κινητικής ενέργειας το ηλεκτρόνιο e , δόθηκε με την μορφή της ηλεκτρικής ενέργειας από το πεδίο $W_{Fc} = e \cdot V$.

Θεώρημα της μεταβολής της κινητικής ενέργειας :

(άλλη έκφραση της αρχής διατήρησης της ενέργειας που ισχύει παντού και εφαρμόζεται σε ένα ηλεκτρόνιο e κατά την κίνηση του από την κάθοδο στην άνοδο .)

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{Fc} \Rightarrow K_e - 0 = e \cdot V \Rightarrow K_e = e \cdot 10^5 \text{ V} \Rightarrow K_e = 10^5 e \cdot \text{V} \Rightarrow K_e = 10^5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \Rightarrow K_e = 1,6 \cdot 10^{-14} \text{ J} .$$

Δ₂.

Θεωρούμε ότι όλη η κινητική ενέργεια κάθε ηλεκτρονίου μετατρέπεται σε ενέργεια ενός φωτονίου. Το ελάχιστο μήκος κύματος λ_{min} των ακτίνων X :

$$\lambda_{\text{min}} = c_0 \cdot h / (e \cdot V) \Rightarrow \lambda_{\text{min}} = 3 \cdot 10^8 \cdot 6,6 \cdot 10^{-34} / (1,6 \cdot 10^{-14}) \Rightarrow \lambda_{\text{min}} = 12,375 \cdot 10^{-12} \text{ m} .$$

Δ₃.

Η ισχύς της ηλεκτρονιακής δέσμης P_I (η ηλεκτρική ισχύς) :

$$P_I = V \cdot I \Rightarrow P_I = 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \Rightarrow P_I = 2 \cdot 10^3 \Rightarrow P_I = 2.000 \text{ Watt} .$$

Η ενέργεια W_I που μεταφέρει η ηλεκτρονιακή δέσμη , υπολογίζεται από τον ορισμό της ισχύος :

$$P_I = W_I / \Delta t \Rightarrow W_I = P_I \cdot \Delta t \Rightarrow W_I = 2.000 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \Rightarrow W_I = 20 \text{ J} .$$

Δ₄.

Ο αριθμός των ηλεκτρονίων e που προσπίπτουν στην άνοδο στη χρονική διάρκεια Δt , υπολογίζονται από τον ορισμό της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος :

$$I = q / \Delta t \Rightarrow$$

(το ηλεκτρικό φορτίο είναι κβαντισμένη ποσότητα : $q = N_e \cdot e$)

$$I = N_e \cdot e / \Delta t \Rightarrow N_e = I \cdot \Delta t / e \Rightarrow N_e = 2 \cdot 10^{-2} \cdot 1 \cdot 10^{-2} / (1,6 \cdot 10^{-19}) \Rightarrow N_e = 125 \cdot 10^{13} \text{ ηλεκτρόνια} .$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Σε μια διάταξη παραγωγής ακτίνων X, η ηλεκτρική τάση που εφαρμόζεται μεταξύ της ανόδου και της καθόδου είναι $V = 25 \text{ kV}$. Τα ηλεκτρόνια ξεκινούν από την κάθοδο με μηδενική ταχύτητα, επιταχύνονται και προσπίπτουν στην άνοδο. Η ένταση του ρεύματος της δέσμης των ηλεκτρονίων είναι $I = 20 \text{ mA}$, ενώ ο χρόνος λειτουργίας της διάταξης είναι $t = 0,2 \text{ s}$. Θεωρούμε ότι η θερμοκρασία της καθόδου είναι σταθερή.

Δίνονται: η ταχύτητα του φωτός στο κενό $c_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ m / s}$, η σταθερά του Planck $h = (20 / 3) \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ και για το φορτίο του ηλεκτρονίου $|q| = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Δ₁. Να υπολογίσετε το ελάχιστο μήκος κύματος των ακτίνων X που παράγονται.

Δ₂. Να υπολογίσετε την ισχύ και την ενέργεια που μεταφέρει η δέσμη των ηλεκτρονίων κατά τη λειτουργία της διάταξης.

Δ₃. Να υπολογίσετε τον αριθμό των ηλεκτρονίων που προσπίπτουν στην άνοδο κατά τη λειτουργία της διάταξης.

Μεταβάλλουμε την ηλεκτρική τάση μεταξύ της ανόδου και της καθόδου, έτσι ώστε η μέγιστη συχνότητα των ακτίνων X, που παράγονται από τη παραπάνω διάταξη, να υποτετραπλασιαστεί.

Δ₄. Να υπολογίσετε τη μεταβολή της ηλεκτρικής τάσης μεταξύ της ανόδου και της καθόδου της διάταξης.

Λύση

Δ₁.

Το ελάχιστο μήκος κύματος των ακτίνων X που παράγονται :

$$\lambda_{\text{min}} = c_0 \cdot h / (e \cdot V) \Rightarrow \lambda_{\text{min}} = 3 \cdot 10^8 \cdot (20 / 3) \cdot 10^{-34} / (1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 25 \cdot 10^3) \Rightarrow \lambda_{\text{min}} = 5 \cdot 10^{-11} \text{ m} .$$

Δ₂.

Η ισχύ που μεταφέρει η δέσμη των ηλεκτρονίων κατά τη λειτουργία της διάταξης :

$$P = V \cdot I \Rightarrow P = 25 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \Rightarrow P = 500 \text{ Watt} .$$

Η ενέργεια που μεταφέρει η δέσμη των ηλεκτρονίων κατά τη λειτουργία της διάταξης :

$$P = W / t \Rightarrow W = P \cdot t \Rightarrow W = 500 \cdot 2 \cdot 10^{-1} \Rightarrow W = 100 \text{ joule .}$$

Δ_3 .

Η ένταση του ρεύματος ορίζεται :

$$I = q / t \Rightarrow (\text{το φορτίο είναι κβαντισμένο : } q = N \cdot e)$$

$$I = N \cdot e / t \Rightarrow N = I \cdot t / e \Rightarrow N = 2 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-1} / (1,6 \cdot 10^{-19}) \Rightarrow N = 2,5 \cdot 10^{16} \text{ ηλεκτρόνια .}$$

Δ_4 .

$$f_{\max}' = (1/4) \cdot f_{\max} \Rightarrow h \cdot f_{\max}' = (1/4) \cdot h \cdot f_{\max} \Rightarrow (\text{από την αρχή διατήρησης της ενέργειας : } h \cdot f_{\max} = e \cdot V)$$

$$e \cdot V' = (1/4) \cdot e \cdot V \Rightarrow V' = (1/4) \cdot V .$$

Η ποσοστιαία μεταβολή της τάσης μεταξύ της ανόδου και της καθόδου της διάταξης :

$$(\Delta V / V) \% = ((V' - V) / V) \cdot 100 \% \Rightarrow (\Delta V / V) \% = (((1/4) \cdot V - V) / V) \cdot 100 \% \Rightarrow (\Delta V / V) \% = - (3/4) \cdot 100 \% \Rightarrow (\Delta V / V) \% = - 75 \% .$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Σε μία συσκευή παραγωγής ακτίνων X τα ηλεκτρόνια επιταχύνονται από τάση $V = 66 \text{ KV}$, ενώ η ισχύς που μεταφέρει η δέσμη των ηλεκτρονίων είναι $P = 132 \text{ W}$. Δίνονται: η ταχύτητα του φωτός στο κενό $c_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, η σταθερά του Planck $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$, για το για το στοιχειώδες φορτίο του ηλεκτρονίου $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$, $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, και ότι $\sqrt{8,25} = 2,9$.

Δ_1 . Να βρείτε το μικρότερο μήκος κύματος των ακτίνων X που εκπέμπονται.

Δ_2 . Να υπολογίσετε την ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος της δέσμης των ηλεκτρονίων.

Δ_3 . Να υπολογίσετε τον αριθμό των ηλεκτρονίων που φθάνουν στην άνοδο σε χρόνο 2min.

Δ_4 . Να βρεθεί η ηλεκτρεγερτική δύναμη πηγής, εσωτερικής αντίστασης $r = 4\Omega$ η οποία όταν συνδεθεί σε αντιστάτη αντίστασης $R = 16 \Omega$ αυτός θα αποδώσει θερμική ισχύ διπλάσια από την ισχύ της δέσμης των ηλεκτρονίων της συσκευής παραγωγής ακτίνων X.

ΛΥΣΗ

Δ_1 .

Το ελάχιστο μήκος κύματος των ακτίνων X :

$$\lambda_{\min} = (h \cdot c_0) / (e \cdot V) \Rightarrow \lambda_{\min} = (6,6 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8) / (1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 66 \cdot 10^3) \Rightarrow \lambda_{\min} = 1,875 \cdot 10^{-11} \text{ m} .$$

Δ_2 .

Η ισχύς που μεταφέρει η δέσμη των ηλεκτρονίων είναι :

$$P = V \cdot I \Rightarrow I = P / V \Rightarrow I = (132 / 66) \cdot 10^3 \Rightarrow I = 2 \cdot 10^{-3} \text{ A} \text{ ή } I = 2 \text{ mA} .$$

Δ_3 .

Ο αριθμός των ηλεκτρονίων e που προσπίπτουν στην άνοδο στη χρονική διάρκεια $t = 2 \text{ min} = 120 \text{ s}$, υπολογίζονται από τον ορισμό της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος :

$$I = q / \Delta t \Rightarrow$$

(το ηλεκτρικό φορτίο είναι κβαντισμένη ποσότητα : $q = N_e \cdot e$)

$$I = (N_e \cdot e) / t \Rightarrow N_e = (I \cdot t) / e \Rightarrow N_e = (2 \cdot 10^{-3} \cdot 120) / (1,6 \cdot 10^{-19}) \Rightarrow N_e = 150 \cdot 10^{16} \Rightarrow N_e = 1,5 \cdot 10^{18} \text{ ηλεκτρόνια .}$$

Δ_4 .

Θερμική ισχύς που αποδίδει ο αντιστάτης αντίστασης R:

$$P_\theta = I_\kappa^2 \cdot R \text{ όπου } I_\kappa \text{ η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα .}$$

Οπότε θέλουμε :

$$P_\theta = 2 \cdot P \Rightarrow I_\kappa^2 \cdot R = 2 \cdot P \Rightarrow I_\kappa = \sqrt{(2 \cdot P) / R} \Rightarrow I_\kappa = \sqrt{(2 \cdot 132) / 16} \Rightarrow I_\kappa = \sqrt{(2 \cdot 8,25)} \Rightarrow I_\kappa = 2,9 \cdot \sqrt{2} \text{ A} .$$

Νόμος του Ohm σε κλειστό κύκλωμα :

$$I_\kappa = E / R_{\text{ολ}} \Rightarrow E = I_\kappa \cdot R_{\text{ολ}} \Rightarrow E = I_\kappa \cdot (R+r) \Rightarrow E = I_\kappa = 2,9 \cdot \sqrt{2} \text{ A} \cdot 20 \Omega \Rightarrow E = 58 \cdot \sqrt{2} \text{ V} \text{ η ηλεκτρεγερτική δύναμη πηγής .}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Μία συσκευή παραγωγής ακτίνων X παράγει φωτόνια με μέγιστη συχνότητα $f_{\max} = 3 \cdot 10^{18} \text{ Hz}$.

Να υπολογίσετε:

Δ_1 . το ελάχιστο μήκος κύματος λ_{\min} των φωτονίων,

Δ_2 . την τάση που επιταχύνει τα ηλεκτρόνια που πέφτουν στην άνοδο της συσκευής,

Δ_3 . την ένταση I του ρεύματος της δέσμης των ηλεκτρονίων, αν η ισχύς της ηλεκτρονικής δέσμης είναι $P = 4,5 \text{ kW}$, καθώς και τον αριθμό των ηλεκτρονίων που πέφτουν στην άνοδο ανά δευτερόλεπτο.

Η τάση μεταξύ ανόδου και καθόδου μεταβάλλεται έτσι ώστε να τετραπλασιαστεί το ελάχιστο μήκος κύματος ($\lambda'_{\min} = 4 \cdot \lambda_{\min}$).

Δ_4 . Ποιο είναι το ποσοστό (%) μεταβολής της ταχύτητας των ηλεκτρονίων που φθάνουν τώρα στην άνοδο; Δίνονται:

Στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ Ταχύτητα του φωτός στο κενό $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ Σταθερά του Planck $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Να θεωρήσετε ότι : $19,89 / 1,6 \approx 12,43$, $4,5 / 12,43 \approx 0,362$ και $0,362 / 1,6 \approx 0,226$.

Λύση

Δ_1 .

Από την θεμελιώδη κυματική εξίσωση :

$$c_0 = \lambda \cdot f \Rightarrow c_0 = \lambda_{\min} \cdot f_{\max} \Rightarrow \lambda_{\min} = c_0 / f_{\max} \Rightarrow \lambda_{\min} = (3 \cdot 10^8) / (3 \cdot 10^{18}) = \lambda_{\min} = 10^{-10} \text{ m}.$$

Δ_2 .

Φωτόνια ακτίνων X με μέγιστη συχνότητα παράγονται όταν τα ηλεκτρόνια που έχουν επιταχυνθεί από τη τάση ανόδου καθόδου χάνουν όλη τη κινητική τους ενέργεια κατά τη πρόσκρουση τους στην άνοδο.

Τα ηλεκτρόνια εκτελούν ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα μέσα στο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο τάσης V_{AB} .

Θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας :

(άλλη έκφραση της αρχής διατήρησης της ενέργειας που ισχύει παντού και εφαρμόζεται για τα ηλεκτρόνια της δέσμης από την αρχική κατάσταση όπου αυτά ηρεμούν στην τελική κατάσταση όπου κινούνται με ταχύτητα u)

$$K_e - 0 = W_{\eta\lambda} \Rightarrow K_e = e \cdot V_{AB}.$$

Αρχή διατήρησης της ενέργειας :

(η γενικότερη αρχή που ισχύει παντού, στη περίπτωση μας η ενέργεια των φωτονίων γίνεται κινητική ενέργεια στα ηλεκτρόνια της δέσμης)

$$E_{\phi, \max} = K_e \Rightarrow h \cdot f_{\max} = e \cdot V_{AB} \Rightarrow V_{AB} = h \cdot f_{\max} / e = (6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{18}) / (1,6 \cdot 10^{-19}) = 19,89 / (1,6 \cdot 10^3) \Rightarrow V_{AB} = 12,43 \cdot 10^3 = 12.430 \text{ V}.$$

Δ_3 .

Η ηλεκτρική ισχύς :

$$P_{\eta\lambda} = V_{AB} \cdot I \Rightarrow I = P_{\eta\lambda} / V_{AB} \Rightarrow I = (12,43 \cdot 10^3) / (4,5 \cdot 10^3) \Rightarrow I = 0,36 \text{ A}.$$

Η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος ορίζεται : $I = q / t \Rightarrow q = I \cdot t \Rightarrow$

(το φορτίο είναι κβαντισμένο : $q = N_e \cdot e$) $N_e \cdot e = I \cdot t \Rightarrow N_e = I \cdot t / e = 0,362 \cdot 1 / (1,6 \cdot 10^{-19}) \Rightarrow N_e = 226 \cdot 10^{16}$ ηλεκτρόνια .

Δ_4 .

Η σχέση μεταξύ των ελάχιστων μηκών κυμάτων γίνεται :

$$\lambda'_{\min} = 4 \cdot \lambda_{\min} \Rightarrow c_0 / f'_{\max} = 4 \cdot c_0 / f_{\max} \Rightarrow f'_{\max} = f_{\max} / 4 \Rightarrow E'_{\phi, \max} = (1 / 4) \cdot E_{\phi, \max} \Rightarrow K'_e = (1 / 4) \cdot K_e \Rightarrow$$

(η κινητική ενέργεια ορίζεται : $K = \frac{1}{2} \cdot m \cdot u^2$)

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot u'^2 = (1 / 4) \cdot (1 / 2) \cdot m \cdot u^2 \Rightarrow u'^2 = (1 / 4) \cdot u^2 \Rightarrow u' = (1 / 2) \cdot u.$$

Το ποσοστό Π_v (%) μεταβολής της ταχύτητας των ηλεκτρονίων που φθάνουν τώρα στην άνοδο :

$$\Pi_v \cdot 100 \% = [(u' - u) / u] \cdot 100 \% = [(u / 2) - u] / u \cdot 100 \% = - (1 / 2) \cdot 100 \% = - 50 \% .$$