ΝΟΜΟΙ ΑΕΡΙΩΝ – ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Μία θερμική μηχανή λειτουργεί μεταξύ των θερμοκρασιών $T_h = 400$ K και T_c με $T_c < T_h$. Η μηχανή έχει απόδοση e = 0,2 και αποβάλλει στη δεξαμενή χαμηλής θερμοκρασίας θερμότητα με σταθερό ρυθμό $\Delta Q / \Delta t = -16 \cdot 10^3$ J / s.

Δ_1. Να υπολογιστεί η ωφέλιμη μηχανική ισχύς $P_{\omega\varphi}$ που αποδίδει η μηχανή.

Δ_2. Αν για την απόδοση e της μηχανής ισχύει ότι $e = (2 / 3) \cdot e_c$ όπου e_c είναι η απόδοση της μηχανής Carnot που λειτουργεί μεταξύ των ίδιων θερμοκρασιών, να υπολογιστεί η τιμή της θερμοκρασίας T_c .

Δ_3. Αν ο ρυθμός διατηρηθεί ο ίδιος, ποια θα είναι η ωφέλιμη ισχύς της μηχανής Carnot;

Η θερμική μηχανή θεωρούμε ότι χρησιμοποιεί μία ποσότητα n mol ιδανικού αερίου, το οποίο βρίσκεται σε αρχική κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας (P_0, V_0, T_0). Η κυκλική μεταβολή που εκτελεί το αέριο αποτελείται από τις παρακάτω αντιστρεπτές μεταβολές:

1. Ισόχωρη θέρμανση από P_0 , V_0 σε $2 \cdot P_0$, V_0

2. Ισοβαρή εκτόνωση από $2 \cdot P_0$, V_0 σε $2 \cdot P_0$, $2 \cdot V_0$

3. Ισόχωρη ψύξη από $2 \cdot P_0$, $2 \cdot V_0$ σε P_0 , $2 \cdot V_0$

4. Ισοβαρή συμπίεση από P_0, $2 \cdot V_0$ σε P_0, V_0

Δ_4. Να κατασκευαστούν τα διαγράμματα P – V , P – T γι' αυτήν την κυκλική μεταβολή.

Λύση

Δ_1.

Αρχή διατήρησης της ενέργειας :

$Q_h = W + |Q_c| \Rightarrow W = Q_h - |Q_c| \Rightarrow$

(στη σχέση ενεργειών, παίρνουμε τους ρυθμούς μεταβολής (εκφράζουν το πόσο γρήγορα αλλάζει ένα φυσικό μέγεθος) και στα δύο μέλη, ουσιαστικά παραγωγίζουμε (το Δt είναι μικρό, το dt είναι απειροελάχιστο, το Δ / Δt τότε γίνεται d / dt)

$\Delta W / \Delta t = (\Delta Q_h / \Delta t) - (\Delta |Q_c| / \Delta t) \Rightarrow P_{\omega\varphi} = P_h - |P_c|$ …(I)

Ο συντελεστής απόδοσης μιας θερμικής μηχανής :

$e = W / Q_h \Rightarrow e = (\Delta W / \Delta t) / (\Delta Q_h / \Delta t) \Rightarrow e = P_{\omega\varphi} / P_h \Rightarrow P_h = P_{\omega\varphi} / e$ …(II)

Από την σχέση (I) με την βοήθεια της (II) :

$P_{\omega\varphi} = (P_{\omega\varphi} / e) - |P_c| \Rightarrow |P_c| = (P_{\omega\varphi} / e) - P_{\omega\varphi} \Rightarrow |P_c| = P_{\omega\varphi} \cdot ((1 - e) / e) \Rightarrow P_{\omega\varphi} = (e / (1 - e)) \cdot |P_c| \Rightarrow P_{\omega\varphi} = (0,2 / (1 - 0,2)) \cdot 16 \cdot 10^3 \Rightarrow P_{\omega\varphi} = 4 \cdot 10^3$ joule / s.

Δ_2.

Δίνεται ότι $e = (2 / 3) \cdot e_c \Rightarrow e = (2 / 3) \cdot (1 - (T_c / T_h)) \Rightarrow (3 / 2) \cdot e = 1 - (T_c / T_h) \Rightarrow (T_c / T_h) = 1 - (3 / 2) \cdot e \Rightarrow T_c = (1 - (3 / 2) \cdot e) \cdot T_h \Rightarrow T_c = (1 - (0,6 / 2)) \cdot 400 \Rightarrow T_c = 280$ K .

Δ_3.

Από την σχέση που δίνεται :

$e_c = (3 / 2) \cdot e \Rightarrow e_c = (3 / 2) \cdot 0,2 \Rightarrow e_c = 0,3$.

Η σχέση που υπολογίσαμε για το $P_{\omega\varphi}$: $P_{\omega\varphi} = (e / (1 - e)) \cdot |P_c|$ ισχύει και την μηχανή Carnot το μόνο που αλλάζει είναι ο συντελεστής, δηλαδή αντί το e θα έχουμε e_c :

$P_{\omega\varphi} = (e_c / (1 - e_c)) \cdot |P_c| \Rightarrow P_{\omega\varphi} = (0,3 / (1 - 0,3)) \cdot 16 \cdot 10^3 \Rightarrow P_{\omega\varphi} = (48 / 7) \cdot 10^3$ joule / s .

Δ_4.

Α → Β ισόχωρη θέρμανση ($V_A = V_B$) :

$P_A / T_A = P_B / T_B \Rightarrow T_B = T_A \cdot (P_B / P_A) \Rightarrow T_B = T_0 \cdot (2 \cdot P_0 / P_0) \Rightarrow T_B = 2 \cdot T_0$.

Β → Γ ισοβαρή εκτόνωση ($P_B = P_\Gamma$) :

$V_B / T_B = V_\Gamma / T_\Gamma \Rightarrow T_\Gamma = T_B \cdot (V_\Gamma / V_B) \Rightarrow T_\Gamma = 2 \cdot T_0 \cdot (2 \cdot V_0 / V_0) \Rightarrow T_\Gamma = 4 \cdot T_0$.

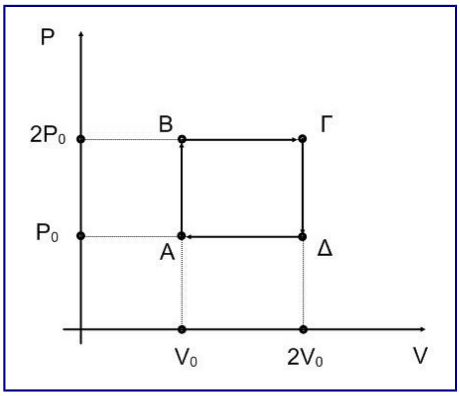
Γ → Δ ισόχωρη ψύξη ($V_\Gamma = V_\Delta$) :

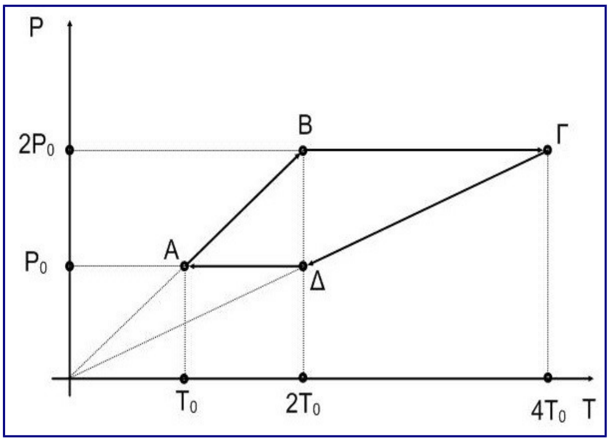
$P_\Gamma / T_\Gamma = P_\Delta / T_\Delta \Rightarrow T_\Delta = T_\Gamma \cdot (P_\Delta / P_\Gamma) \Rightarrow T_\Delta = 4 \cdot T_0 \cdot (P_0 / (2 \cdot P_0)) \Rightarrow T_\Delta = 2 \cdot T_0$.

Με τις παραπάνω τιμές δημιουργούμε τον πίνακα :

	Α	Β	Γ	Δ
P	P_0	$2{\cdot}P_0$	$2{\cdot}P_0$	P_0
V	V_0	V_0	$2{\cdot}V_0$	$2{\cdot}V_0$
T	T_0	$2{\cdot}T_0$	$4{\cdot}T_0$	$2{\cdot}T_0$

Με τις τιμές του πίνακα σχεδιάζουμε τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις :
Το διάγραμμα πίεσης P – όγκου V :
Το διάγραμμα πίεσης P – θερμοκρασίας T :





ΑΣΚΗΣΗ 2

Ορισμένη ποσότητα ιδανικού αερίου, μεταβαίνει αντιστρεπτά από την κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Α ($P_A = 2{\cdot}10^5$ N / m^2, $V_A = 6{\cdot}10^{-3}$ m^3) στην κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Γ ($P_Γ = 4{\cdot}10^5$ N / m^2, $V_Γ = 3{\cdot}10^{-3}$ m^3), περνώντας ενδιάμεσα από μια κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Β. Η μεταβολή από την Α στη Β είναι ισοβαρής ψύξη και ακολουθείται από ισόχωρη θέρμανση, που οδηγεί το αέριο στην κατάσταση Γ.

$Δ_1$. Να παρασταθεί η μεταβολή σε διάγραμμα P – V, με κατάλληλα βαθμολογημένους άξονες.

$Δ_2$. Να δειχθεί ότι η ποσότητα του αερίου μπορεί να μεταβεί από την κατάσταση Γ στην κατάσταση Α υποκείμενη σε μία ισόθερμη εκτόνωση ΓΑ.

$Δ_3$. Να υπολογιστούν, για κάθε μια από τις μεταβολές ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ, η θερμότητα και το έργο που αντάλλαξε το αέριο με το περιβάλλον, καθώς και η μεταβολή της εσωτερικής του ενέργειας.

$Δ_4$. Να υπολογιστεί η απόδοση e της θερμικής μηχανής, το αέριο της οποίας εκτελεί τον αντιστρεπτό κύκλο ΑΒΓΑ (Η απόδοση να εκφραστεί ως κλάσμα).

Δίνεται για το αέριο η γραμμομοριακή ειδική θερμότητα υπό σταθερό όγκο $C_v = 3{\cdot}R / 2$ και ότι ln 2 = 0,7.

Λύση

$Δ_1$.

Α → Β ισοβαρής ψύξη ($P_A = P_B$) :

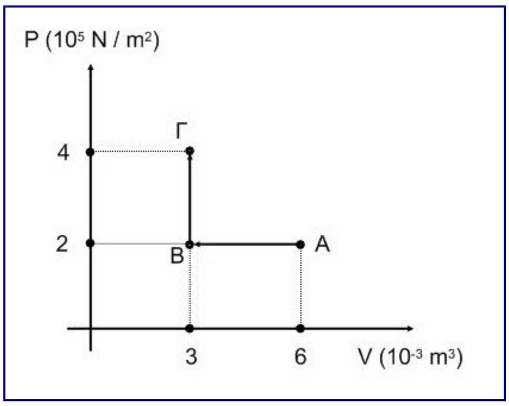
$V_A / T_A = V_B / T_B \Rightarrow T_B = (V_B / V_A){\cdot}T_A \Rightarrow T_B = ((V_A / 2) / V_A){\cdot}T_A \Rightarrow T_B = T_A / 2$.

Β → Γ ισόχωρη θέρμανση ($V_B = V_Γ$) :$V_B / T_B = V_Γ / T_Γ$.

Συμπληρώνουμε τον παρακάτω πίνακα :

	Α	Β	Γ
P (10^5 N / m^2)	2	2	4
V (10^{-3} m^3)	6	3	3
T	T_A	T_A / 2	T_A

Με τις τιμές του πίνακα σχεδιάζουμε το διάγραμμα πίεσης P – όγκου V :



$\mathbf{\Delta_2}$.Υπολογίζουμε τα γινόμενα :

$P_Γ \cdot V_Γ = 4 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \Rightarrow P_Γ \cdot V_Γ = 1200$ joule .

$P_A \cdot V_A = 2 \cdot 10^5 \cdot 6 \cdot 10^{-3} \Rightarrow P_A \cdot V_A = 1200$ joule .

Ισχύει $P_Γ \cdot V_Γ = P_A \cdot V_A$, οι καταστάσεις ισορροπίας A και Γ είναι πάνω στην ίδια ισόθερμη, επειδή $V_Γ < V_A$ από την Γ → A έχουμε ισόθερμη εκτόνωση .

$\mathbf{\Delta_3}$.Η θερμότητα στην AB ισοβαρής ψύξη :

$Q_{AB} = n \cdot C_p \cdot \Delta T_{AB} \Rightarrow Q_{AB} = n \cdot (5 \cdot R / 2) \cdot (T_B - T_A) \Rightarrow Q_{AB} = (5 / 2) \cdot n \cdot R \cdot (- T_A / 2) \Rightarrow Q_{AB} = -(5 / 4) \cdot P_A \cdot V_A \Rightarrow Q_{AB} = -(5 / 4) \cdot 1200 \Rightarrow Q_{AB} = -1500$ joule .

Το έργο στην AB ισοβαρής ψύξη :

$W_{AB} = P_A \cdot (V_B - V_A) \Rightarrow W_{AB} = 2 \cdot 10^5 \cdot (3 \cdot 10^{-3} - 6 \cdot 10^{-3}) \Rightarrow W_{AB} = -600$ joule .

1ος θερμοδυναμικός νόμος :

$Q_{AB} = W_{AB} + \Delta U_{AB} \Rightarrow \Delta U_{AB} = Q_{AB} - W_{AB} \Rightarrow \Delta U_{AB} = -1500 - (-600) \Rightarrow \Delta U_{AB} = -900$ joule .

Η θερμότητα στην BΓ ισόχωρη θέρμανση :

$Q_{BΓ} = n \cdot C_v \cdot \Delta T_{BΓ} \Rightarrow Q_{BΓ} = n \cdot (3 \cdot R / 2) \cdot (T_Γ - T_B) \Rightarrow Q_{BΓ} = (3 / 2) \cdot V_A \cdot (P_Γ - P_B) \Rightarrow Q_{AB} = (3 / 2) \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot (4 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-3}) \Rightarrow Q_{BΓ} = 900$ joule .

Το έργο στην BΓ ισόχωρη θέρμανση :$W_{BΓ} = 0$

1ος θερμοδυναμικός νόμος :$Q_{BΓ} = W_{BΓ} + \Delta U_{BΓ} \Rightarrow \Delta U_{BΓ} = Q_{BΓ} - 0 \Rightarrow \Delta U_{BΓ} = 900$ joule .

Άλλος τρόπος :

Το έργο στην BΓ ισόχωρη θέρμανση :

$W_{BΓ} = 0$

1ος θερμοδυναμικός νόμος :$Q_{BΓ} = W_{BΓ} + \Delta U_{BΓ} \Rightarrow \Delta U_{BΓ} = Q_{BΓ} - 0 \Rightarrow Q_{BΓ} = \Delta U_{BΓ}$.

Ισχύει στην ABΓ :

$\Delta U_{ολ} = \Delta U_{AB} + \Delta U_{BΓ} + \Delta U_{ΓA} \Rightarrow 0 = \Delta U_{AB} + \Delta U_{BΓ} + 0 \Rightarrow \Delta U_{BΓ} = -\Delta U_{AB} \Rightarrow \Delta U_{BΓ} = 900$ joule .

Άρα $Q_{BΓ} = 900$ joule .

Έργο στη ΓA :$W_{ΓA} = n \cdot R \cdot T_A \cdot \ln(V_A / V_Γ) \Rightarrow W_{ΓA} = P_A \cdot V_A \cdot \ln 2 \Rightarrow W_{ΓA} = 2 \cdot 10^5 \cdot 6 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}7 \Rightarrow W_{ΓA} = 840$ joule .

Η ΓA είναι ισόθερμη εκτόνωση, άρα $\Delta U_{ΓA} = 0$.

1ος θερμοδυναμικός νόμος στη ΓA :$Q_{ΓA} = W_{ΓA} + \Delta U_{ΓA} \Rightarrow Q_{ΓA} = W_{ΓA} \Rightarrow Q_{ΓA} = 840$ joule .

$\mathbf{\Delta_4}$.Το ολικό έργο στη διάρκεια της κυκλικής μεταβολής :

$W_{ολ} = W_{AB} + W_{BΓ} + W_{ΓA} \Rightarrow W_{ολ} = -600 + 840 \Rightarrow W_{ολ} = 240$ joule .

Η θερμότητα της θερμής δεξαμενής είναι :

$Q_h = Q_{BΓ} + Q_{ΓA} \Rightarrow Q_h = 900 + 840 \Rightarrow Q_h = 1740$ joule .

Συντελεστής απόδοσης της θερμικής μηχανής :

$e = W / Q_h \Rightarrow e = 240 / 1740 \Rightarrow e = 4 / 29$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Ορισμένη ποσότητα του μονοατομικού ιδανικού αερίου ηλίου (He) βρίσκεται σε δοχείο σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας A καταλαμβάνοντας όγκο 2 L , σε θερμοκρασία 27^o C και πίεση 0,1 N / m^2.

Δ_1. Να υπολογισθεί ο αριθμός των μορίων του αερίου που περιέχονται στο δοχείο.

Στη συνέχεια το αέριο πραγματοποιεί διαδοχικά μια ισόθερμη αντιστρεπτή συμπίεση AB, μέχρι ο όγκος να γίνει 1 L , και μια ισοβαρή θέρμανση BΓ, μέχρι ο όγκος του να γίνει 4 L .

Δ_2. Να υπολογισθεί ο λόγος των ενεργών ταχυτήτων των μορίων του αερίου στις καταστάσεις A και B ($υ_{ενA} / υ_{ενB}$), καθώς και στις καταστάσεις B και Γ ($υ_{ενB} / υ_{ενΓ}$).

Από την κατάσταση Γ με μία ισόχωρη αντιστρεπτή μεταβολή ΓΔ επανέρχεται στην αρχική θερμοκρασία.

Δ_3. Να υπολογισθεί η θερμότητα που ανταλλάσσει το αέριο με το περιβάλλον κατά την μεταβολή ΓΔ.

Από την κατάσταση Δ επανέρχεται στον αρχικό όγκο A με μία ισοβαρή μεταβολή ΔE.

Δ_4. Να υπολογισθεί η θερμότητα που ανταλλάσσει το αέριο με το περιβάλλον κατά την μεταβολή ΔE και να γίνει το διάγραμμα πίεσης και όγκου για όλες τις μεταβολές.

Δίνεται η γραμμομοριακή ειδική θερμότητα του αερίου υπό σταθερό όγκο $C_v = 3·R / 2$, η σταθερά των ιδανικών αερίων $R = 8,314$ J / mol·K , ο αριθμός Avogadro $N_A = 6·10^{23}$ άτομα / mol , και η γραμμοατομική μάζα του He είναι 4 g / mol. Επίσης ότι 1 L = 10^{-3} m^3.

Λύση

Οι μεταβολές :

Α → Β ισόθερμη συμπίεση ($T_A = T_B$) :

$P_A·V_A = P_B·V_B \Rightarrow P_B = P_A·V_A / V_B \Rightarrow P_B = 0,1·2·10^{-3} / 10^{-3} \Rightarrow P_B = 0,2$ N / m² .

Β → Γ ισοβαρής θέρμανση ($P_B = P_Γ$) :

$V_B / T_B = V_Γ / T_Γ \Rightarrow T_Γ = (V_Γ / V_B)·T_B \Rightarrow T_Γ = (4·V_B / V_B)·T_B \Rightarrow T_Γ = 4·T_B \Rightarrow T_Γ = 4·300 \Rightarrow T_Γ = 1200$ K .

Γ → Δ ισόχωρη ψύξη ($V_Γ = V_Δ$) :

$P_Γ / T_Γ = P_Δ / T_Δ \Rightarrow P_Δ = P_Γ ·(T_Δ / T_Γ)·T_B \Rightarrow P_Δ = P_Γ ·(T_A / (4·T_A)) \Rightarrow P_Δ = P_Γ / 4 \Rightarrow P_Δ = 0,2 / 4 \Rightarrow P_Δ = 0,05$ N / m² .

Δ → Ε ισόβαρης ψύξη ($P_Δ = P_E$) :

$V_Δ / T_Δ = V_E / T_E \Rightarrow T_E = (V_E / V_Δ)·T_Δ \Rightarrow T_E = (V_A / V_Γ)·T_Δ \Rightarrow T_E = T_B / 2 \Rightarrow T_E = 300 / 2 \Rightarrow T_Γ = 150$ K .

Με τις παραπάνω τιμές δημιουργούμε τον πίνακα :

	Α	Β	Γ	Δ	Ε
P (N / m^2)	0,1	0,2	0,2	0,05	0,05
V (10^{-3} m^3)	2	1	4	4	2
T (K)	300	300	1200	300	150

$Δ_1$. Καταστατική εξίσωση στην κατάσταση Α :

$P_A·V_A = n·R·T_A \Rightarrow n = P_A·V_A / R·T_A$ …(I)

Ο αριθμός των mol , n :(N ο αριθμός των μορίων και N_A ο αριθμός Avogadro)

$n = N / N_A \Rightarrow N = n·N_A$ …(II)

συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις έχουμε :

(I) και (II) :$N = N_A·(P_A·V_A / R·T_A) \Rightarrow N = 6·10^{23}·(0,1·2·10^{-3} / (8,314·300)) \Rightarrow N = 4,8·10^{16}$ μόρια .

$Δ_2$. Οι ενεργές ταχύτητες στις καταστάσεις Α και Β :

$υ_{εν,A} = \sqrt{(3·R·T_A / M_r)}$ και $υ_{εν,B} = \sqrt{(3·R·T_B / M_r)}$

Διαιρούμε κατά μέλη :

$υ_{εν,A} / υ_{εν,B} = \sqrt{(3·R·T_A / M_r)} / \sqrt{(3·R·T_B / M_r)} \Rightarrow υ_{εν,A} / υ_{εν,B} = \sqrt{(T_A / T_B)} \Rightarrow$

(ισχύει $T_A = T_B$)

$υ_{εν,A} / υ_{εν,B} = 1$

Οι ενεργές ταχύτητες στις καταστάσεις Β και Γ :$υ_{εν,B} = \sqrt{(3·R·T_B / M_r)}$ και $υ_{εν,Γ} = \sqrt{(3·R·T_Γ / M_r)}$

Διαιρούμε κατά μέλη :

$υ_{εν,B} / υ_{εν,Γ} = \sqrt{(3·R·T_B / M_r)} / \sqrt{(3·R·T_Γ / M_r)} \Rightarrow υ_{εν,B} / υ_{εν,Γ} = \sqrt{(T_B / T_Γ)} \Rightarrow υ_{εν,B} / υ_{εν,Γ} = \sqrt{(300 / 1200)} \Rightarrow υ_{εν,B} / υ_{εν,Γ} = ½$.

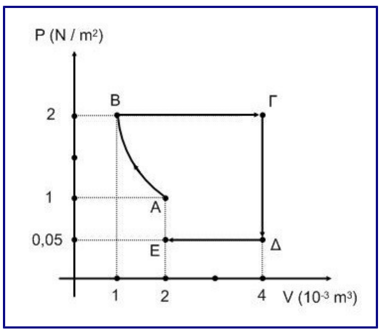
$Δ_3$. $Q_{ΓΔ} = n·C_v·ΔT_{ΓΔ} \Rightarrow Q_{ΓΔ} = n·(3·R / 2)·(T_Δ – T_Γ) \Rightarrow Q_{ΓΔ} = (3 / 2)·V_Γ ·(P_Δ – P_Γ) \Rightarrow Q_{ΓΔ} = (3 / 2)·4·10^{-3}·(5·10^{-2} – 20·10^{-2}) \Rightarrow Q_{ΓΔ} = – 9·10^{-4}$ joule .

$Δ_4$. Ισχύει σε κάθε μεταβολή :

$C_p = C_v + R \Rightarrow C_p = (3·R / 2) + R \Rightarrow C_p = 5·R / 2$.

Η θερμότητα στην ισοβαρή μεταβολή ΔΕ :

$Q_{ΔE} = n·C_p·ΔT_{ΔE} \Rightarrow Q_{ΔE} = n·(5·R / 2)·(T_E – T_Δ) \Rightarrow Q_{ΔE} = (5 / 2)·P_Δ·(V_E – V_Δ) \Rightarrow Q_{ΔE} = (5 / 2)·5·10^{-2}·(2·10^{-3} – 4·10^{-3}) \Rightarrow Q_{ΔE} = – 25·10^{-5}$ joule .



ΑΣΚΗΣΗ 4

Ποσότητα ιδανικού αερίου n = 1 / R mol (όπου το R είναι αριθμητικά ίσο με τη σταθερά των ιδανικών αερίων σε μονάδες του S.I.) καταλαμβάνει όγκο $V_A = 3 \cdot 10^{-3}$ m³ σε πίεση $P_A = 10^5$ N / m². Το αέριο πραγματοποιεί την κυκλική μεταβολή ΑΒΓΔΑ που αποτελείται από τις παρακάτω διαδοχικές αντιστρεπτές μεταβολές.

ΑΒ: ισοβαρής θέρμανση μέχρι τη θερμοκρασία 600 Κ.

ΒΓ: ισόχωρη ψύξη μέχρι τη θερμοκρασία 400 Κ.

ΓΔ: ισοβαρής ψύξη και

ΔΑ: ισόθερμη συμπίεση

$Δ_1$. Να αναπαραστήσετε τις μεταβολές σε διάγραμμα P – V.

$Δ_2$. Να υπολογισθούν οι θερμότητες που ανταλλάσσει το αέριο με το περιβάλλον σε κάθε μεταβολή.

$Δ_3$. Να υπολογισθεί ο συντελεστής απόδοσης της κυκλικής μεταβολής (ο συντελεστής απόδοσης να εκφραστεί ως κλάσμα).

$Δ_4$. Να υπολογισθεί πόσο θα διέφερε ο συντελεστής απόδοσης μιας θερμικής μηχανής Carnot που θα λειτουργούσε μεταξύ των ίδιων ακραίων θερμοκρασιών, από το συντελεστή απόδοσης μιας μηχανής, το αέριο της οποίας λειτουργεί με βάση τον κύκλο ΑΒΓΔΑ.

Δίνεται $C_v = 3 \cdot R / 2$, ln 2 = 0,69 και ln 3 = 1,09 .

Λύση

$Δ_1$.Καταστατική εξίσωση στην κατάσταση Α :

$P_A \cdot V_A = n \cdot R \cdot T_A \Rightarrow T_A = P_A \cdot V_A / n \cdot R \Rightarrow T_A = 10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-3} / ((1 / R) \cdot R) \Rightarrow T_A = 300$ K .

Α → Β ισοβαρής θέρμανση ($P_A = P_B$) :

$V_A / T_A = V_B / T_B \Rightarrow V_B = V_A \cdot (T_B / T_A) \Rightarrow V_B = V_A \cdot (600 / 300) \Rightarrow V_B = 2 \cdot V_A \Rightarrow V_B = 2 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \Rightarrow V_B = 6 \cdot 10^{-3}$ m³ .

Β → Γ ισόχωρη ψύξη ($V_B = V_Γ$) :

$P_B / T_B = P_Γ / T_Γ \Rightarrow P_Γ = P_B \cdot (T_Γ / T_B) \Rightarrow P_Γ = 10^5 \cdot (400 / 600) \Rightarrow P_Γ = (2 / 3) \cdot 10^5$ N / m² .

Γ → Δ ισοβαρής ψύξη ($P_Γ = P_Δ$) :

$V_Γ / T_Γ = V_Δ / T_Δ \Rightarrow V_Δ = V_Γ \cdot (T_Δ / T_Γ) \Rightarrow V_Δ = V_Γ \cdot (300 / 400) \Rightarrow V_Δ = (3 / 4) \cdot V_Γ \Rightarrow V_Δ = (3 / 4) \cdot 6 \cdot 10^{-3} \Rightarrow V_Δ = 4{,}5 \cdot 10^{-3}$ m³ .

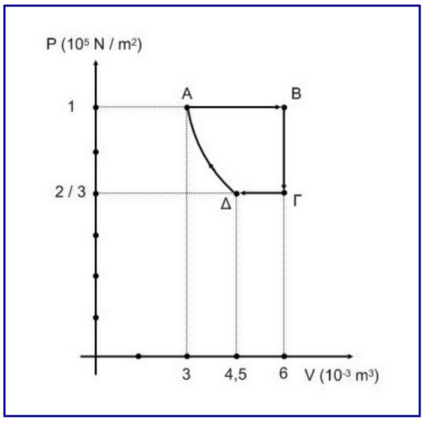
Δ → Α ισόθερμη συμπίεση ($T_Δ = T_A$) :

$P_Δ \cdot V_Δ = P_A \cdot V_A$.

Από τις παραπάνω τιμές συμπληρώνουμε τον πίνακα :

	Α	Β	Γ	Δ
P (10^5 N / m²)	1	1	2 / 3	2 / 3
V (10^{-3} m³)	3	6	6	4,5
T (K)	300	600	400	300

Με τις τιμές του πίνακα σχεδιάζουμε το διάγραμμα πίεσης P – όγκου V :



$Δ_2$.

Η θερμότητα στην ΑΒ ισοβαρή θέρμανση :

$Q_{AB} = n \cdot C_p \cdot ΔT_{AB} \Rightarrow Q_{AB} = n \cdot (5 \cdot R / 2) \cdot (T_B - T_A) \Rightarrow Q_{AB} = (1 / R) \cdot (5 \cdot R / 2) \cdot (600 - 300) \Rightarrow Q_{AB} = 750$ joule .

Η θερμότητα στην ΒΓ ισοβαρή θέρμανση :

$Q_{BΓ} = n \cdot C_v \cdot ΔT_{BΓ} \Rightarrow Q_{BΓ} = n \cdot (3 \cdot R / 2) \cdot (T_Γ - T_B) \Rightarrow Q_{BΓ} = (1 / R) \cdot (3 \cdot R / 2) \cdot (400 - 600) \Rightarrow Q_{BΓ} = -300$ joule .

Η θερμότητα στην ΓΔ ισοβαρή ψύξη :

$Q_{ΓΔ} = n \cdot C_p \cdot ΔT_{ΓΔ} \Rightarrow Q_{ΓΔ} = n \cdot (5 \cdot R / 2) \cdot (T_Δ - T_Γ) \Rightarrow Q_{ΓΔ} = (1 / R) \cdot (5 \cdot R / 2) \cdot (300 - 400) \Rightarrow Q_{ΓΔ} = -250$ joule .

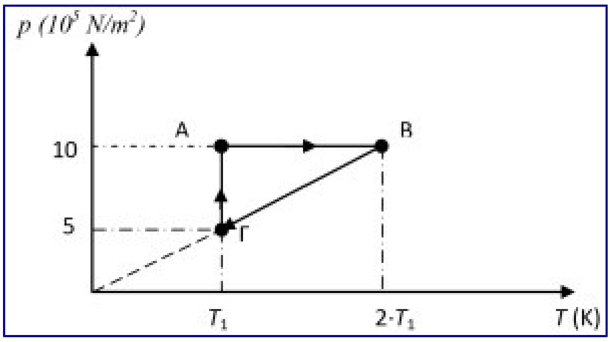
Η θερμότητα στην ΔΑ ισόθερμη συμπίεση :

$Q_{ΔA} = n \cdot R \cdot T_A \cdot \ln (V_A / V_Δ) \Rightarrow Q_{ΔA} = (1 / R) \cdot R \cdot 300 \cdot \ln (3 \cdot 10^{-3} / 4{,}5 \cdot 10^{-3}) \Rightarrow Q_{ΔA} = 300 \cdot (\ln 2 - \ln 3) \Rightarrow Q_{ΔA} = -120$ joule .

$Δ_3$.Η ολική θερμότητα στην κυκλική μεταβολή ΑΒΓΔΑ :

$Q_{ολ} = Q_{AB} + Q_{BΓ} + Q_{ΓΔ} + Q_{ΔA} \Rightarrow Q_{ολ} = 750 – 300 – 250 – 120 \Rightarrow Q_{ολ} = 80$ joule .
1ος θερμοδυναμικός νόμος στην κυκλική μεταβολή ΑΒΓΔΑ :$Q_{ολ} = W + ΔU_{ολ} \Rightarrow$
(σε μια κυκλική μεταβολή $ΔU_{ολ} = 0$)
$W = Q_{ολ} \Rightarrow W = 80$ joule .
Η θερμότητα της θερμής δεξαμενής Q_h :$Q_h = Q_{AB} \Rightarrow Q_h = 750$ joule .
Ορισμός του συντελεστή απόδοσης της θερμικής μηχανής :$e = W / Q_h \Rightarrow e = 80 / 750 \Rightarrow e = 8 / 75$.
$Δ_4$.Ο συντελεστής της θερμικής μηχανής Carnot :
$e_c = 1 – (T_c / T_h) \Rightarrow e_c = 1 – (300 / 600) \Rightarrow e_c = 1 – ½ \Rightarrow e_c = ½$.
Η διαφορά των συντελεστών απόδοσης :
$Δe = e_c – e \Rightarrow Δe = (1 / 2) – (8 / 75) \Rightarrow Δe = 59 / 150$.

ΑΣΚΗΣΗ 5

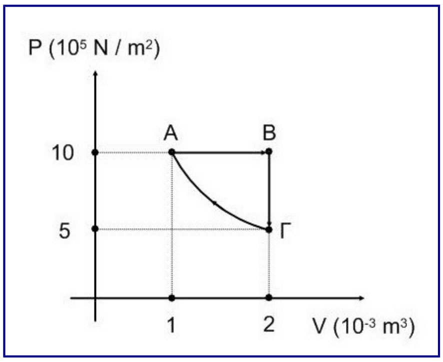


Θερμική μηχανή υφίσταται την κυκλική μεταβολή που παριστάνεται στο παραπάνω διάγραμμα P – T.
$Δ_1$. Να παραστήσετε την παραπάνω μεταβολή σε διάγραμμα P – V, εάν δίνεται ότι V_A = 1 L, και να υπολογίσετε για κάθε επιμέρους μεταβολή, τη θερμότητα Q, το έργο W και τη μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας ΔU του αερίου.
$Δ_2$. Να υπολογίσετε τον συντελεστή απόδοσης της θερμικής αυτής μηχανής καθώς επίσης και τον συντελεστή απόδοσης μιας μηχανής Carnot που θα λειτουργούσε μεταξύ των ίδιων ακραίων θερμοκρασιών της παραπάνω κυκλικής μεταβολής.
$Δ_3$. Εάν η μηχανή πραγματοποιεί 120 κύκλους σε 1 λεπτό να υπολογίσετε την μηχανική ισχύ που αποδίδει η μηχανή.
$Δ_4$. Εάν αυτή η θερμική μηχανή κινεί όχημα μάζας m = 300 kg, πόσα λίτρα βενζίνης θα καταναλώσει το όχημα ξεκινώντας από την ακινησία μέχρι να αποκτήσει ταχύτητα μέτρου 72 km / h; Να θεωρήσετε ότι όλη η μηχανική ενέργεια που αποδίδει η μηχανή μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια του οχήματος χωρίς απώλειες.
Δίνονται: $C_v = 3·R / 2$, ln 2 = 0,7, θερμότητα που παράγεται κατά την καύση της βενζίνης ανά μονάδα μάζας είναι $4·10^6$ J / kg και η πυκνότητα βενζίνης $ρ = 800$ kg / m^3.
Λύση
$Δ_1$.
Από το διάγραμμα που δίνεται ονομάζουμε τις μεταβολές και γράφουμε τους νόμους του ιδανικού αερίου :
Α → Β ισοβαρής θέρμανση (ή εκτόνωση) ($P_A = P_B$) :
$V_A / T_A = V_B / T_B \Rightarrow V_B = V_A·(T_B / T_A) \Rightarrow V_B = V_A·(2·T_A / T_A) \Rightarrow V_B = 2·V_A$.
Β → Γ ισόχωρη ψύξη ($V_B = V_Γ$) :
$P_B / T_B = P_Γ / T_Γ$.
Γ → Α ισόθερμη συμπίεση ($T_Γ = T_A$) :
$P_Γ ·V_Γ = P_A ·V_A \Rightarrow V_Γ = V_A·P_A / P_Γ \Rightarrow V_Γ = V_A·10·10^5 / 5·10^5 \Rightarrow V_Γ = 2·V_A$.
Δίνεται το έργο στη ΓΑ ισόθερμη :
$W_{ΓA} = n·R·T_A·\ln (V_A / V_Γ) \Rightarrow W_{ΓA} = P_Γ ·V_Γ ·\ln (V_A / V_Γ) \Rightarrow – 700 = 5·10^5·V_Γ ·\ln (V_A / 2·V_A) \Rightarrow – 700 = – 5·10^5·V_Γ ·\ln 2 \Rightarrow V_Γ = 2·10^{-3}$ m³ .
Με τις παραπάνω τιμές συμπληρώνουμε τον πίνακα :

	Α	Β	Γ
P ($·10^5$ N / m^2)	10	10	5
V ($·10^{-3}$ m^3)	1	2	2
T	T_1	$2·T_2$	T_1

Με τις τιμές του πίνακα σχεδιάζουμε την γραφική παράσταση :

Η θερμότητα στην ΑΒ :
(Ισχύει $C_p = C_v + R \Rightarrow C_p = (3{\cdot}R / 2) + R \Rightarrow C_p = 5{\cdot}R / 2$)
$Q_{AB} = n{\cdot}C_p{\cdot}\Delta T_{AB} \Rightarrow Q_{AB} = n{\cdot}(5{\cdot}R / 2){\cdot}(T_B - T_A) \Rightarrow Q_{AB} = (5 / 2){\cdot}(P_B{\cdot}V_B - P_A{\cdot}V_A) \Rightarrow Q_{AB} = (5 / 2){\cdot}P_B{\cdot}(V_B - V_A) \Rightarrow Q_{AB} = (5 / 2){\cdot}10{\cdot}10^5{\cdot}(2{\cdot}10^{-3} - 1{\cdot}10^{-3}) \Rightarrow Q_{AB} = 2500$ joule .



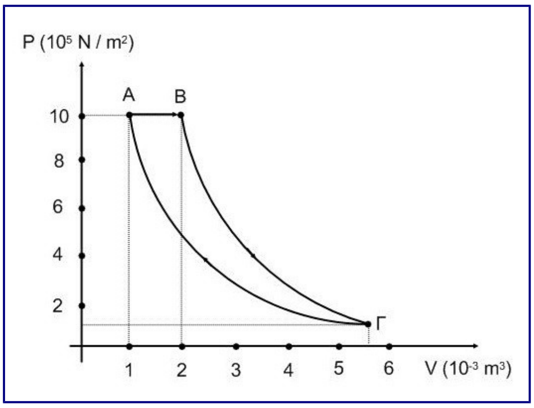
Το έργο στην ΑΒ :
(μια επιλογή είναι W_{AB} = εμβαδό P – V = $(2 - 1){\cdot}10^{-3}{\cdot}(10 - 5){\cdot}10^5 \Rightarrow W_{AB} = 1000$ joule)
$W_{AB} = P_A{\cdot}(V_B - V_A) \Rightarrow W_{AB} = 10{\cdot}10^5{\cdot}(2 - 1){\cdot}10^{-3} \Rightarrow W_{AB} = 1000$ joule .
1ος θερμοδυναμικός νόμος στην ΑΒ :
$Q_{AB} = \Delta U_{AB} + W_{AB} \Rightarrow \Delta U_{AB} = Q_{AB} - W_{AB} \Rightarrow \Delta U_{AB} = 2500 - 1000 \Rightarrow \Delta U_{AB} = 1500$ joule .
Το έργο στην ΒΓ μεταβολή :
$W_{B\Gamma} = 0$, η ΒΓ είναι ισόχωρη μεταβολή .
Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας στη ΒΓ :
$\Delta U_{B\Gamma} = n{\cdot}C_v{\cdot}\Delta T_{B\Gamma} \Rightarrow \Delta U_{B\Gamma} = n{\cdot}(3{\cdot}R / 2){\cdot}(T_\Gamma - T_B) \Rightarrow \Delta U_{B\Gamma} = (3 / 2){\cdot}(P_\Gamma{\cdot}V_\Gamma - P_B{\cdot}V_B) \Rightarrow \Delta U_{B\Gamma} = (3 / 2){\cdot}V_\Gamma{\cdot}(P_\Gamma - P_B) \Rightarrow \Delta U_{B\Gamma} = (3 / 2){\cdot}2{\cdot}10^{-3}{\cdot}(5{\cdot}10^5 - 10{\cdot}10^5) \Rightarrow \Delta U_{B\Gamma} = -1500$ joule .
1ος θερμοδυναμικός νόμος στη ΒΓ μεταβολή :
$Q_{B\Gamma} = W_{B\Gamma} + \Delta U_{B\Gamma} \Rightarrow Q_{B\Gamma} = 0 - 1500$ joule $\Rightarrow Q_{B\Gamma} = -1500$ joule .
1ος θερμοδυναμικός νόμος στη ΒΓ μεταβολή :
($\Delta U_{\Gamma A} = 0$, η ΓΑ είναι ισόθερμη μεταβολή .)
$Q_{\Gamma A} = W_{\Gamma A} + \Delta U_{\Gamma A} \Rightarrow Q_{\Gamma A} = W_{\Gamma A} + 0 \Rightarrow Q_{\Gamma A} = -700$ joule .
Δ_2.Η θερμότητα της θερμής δεξαμενής είναι :
$Q_h = Q_{AB} \Rightarrow Q_h = 2500$ joule .
Η θερμότητα της ψυχρής δεξαμενής είναι :
$Q_c = Q_{B\Gamma} + Q_{\Gamma A} \Rightarrow Q_c = -1500 - 700 \Rightarrow Q_c = -2200$ joule .
Ο συντελεστής απόδοσης της θερμικής μηχανής :
$e = 1 - (|Q_c| / Q_h) \Rightarrow e = 1 - (2200 / 2500) \Rightarrow e = 1 - 0{,}88 \Rightarrow e = 0{,}12$.
Ο συντελεστής απόδοσης της μηχανής Carnot :
$e_c = 1 - (T_c / T_h) \Rightarrow e_c = 1 - (T_1 / 2{\cdot}T_1) \Rightarrow e_c = 1 / 2$.
Δ_3.
Το ωφέλιμο έργο σε κάθε κύκλο είναι :

ΑΣΚΗΣΗ 6

Ορισμένη ποσότητα ιδανικού αερίου μιας θερμικής μηχανής εκτελεί κυκλική αντιστρεπτή μεταβολή ΑΒΓΑ, η οποία αποτελείται από τις παρακάτω επιμέρους αντιστρεπτές μεταβολές:
– από την κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Α με $P_A = 10{\cdot}10^5$ N / m^2 και $V_A = 1$ L, εκτονώνεται ισοβαρώς στην κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Β με $V_B = 2$ L,
– από την κατάσταση Β εκτονώνεται αδιαβατικά στην κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Γ με $V_\Gamma = 4{\cdot}\sqrt{2}$ L,
– και τέλος από την κατάσταση Γ επανέρχεται ισόθερμα στην κατάσταση Α.
Δ_1. Να απεικονίσετε την κυκλική μεταβολή σε διάγραμμα P – V σημειώνοντας τα δεδομένα για την πίεση και τον όγκο.
Δ_2. Να υπολογίσετε, για κάθε επιμέρους μεταβολή, τη θερμότητα Q, το έργο W και τη μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας ΔU του αερίου.
Δ_3. Να υπολογίσετε τον συντελεστή απόδοσης της θερμικής αυτής μηχανής, καθώς επίσης και τον συντελεστή απόδοσης μιας μηχανής Carnot που θα λειτουργούσε μεταξύ των ίδιων ακραίων θερμοκρασιών της παραπάνω κυκλικής μεταβολής.

Δίνονται: $\gamma = 5 / 3$, $\ln 2 = 0{,}7$, $\ln (4\sqrt{2}) = (5 / 2)\cdot 0{,}7$.
Λύση
$Δ_1$.
Οι μεταβολές του ιδανικού αερίου :
Α → Β ισοβαρής θέρμανση (ή εκτόνωση) ($P_A = P_B$) :
$V_A / T_A = V_B / T_B \Rightarrow T_B = (T_A\cdot V_B) / V_A \Rightarrow T_B = (T_A\cdot 2\cdot 10^{-3}) / 1\cdot 10^{-3} \Rightarrow T_B = 2\cdot T_A$.
Β → Γ αδιαβατική εκτόνωση ($Q_{AB} = 0$) :
$P_B\cdot V_B^{\gamma} = P_Γ\cdot V_Γ^{\gamma}$.
Γ → Α ισόθερμη συμπίεση ($T_A = T_B$) :
$P_Γ\cdot V_Γ = P_A\cdot V_A \Rightarrow P_Γ = P_A\cdot V_A / V_Γ \Rightarrow P_Γ = (10\cdot 10^5\cdot 1\cdot 10^{-3}) / (4\cdot\sqrt{2}\cdot 10^{-3}) \Rightarrow P_Γ = (5 / 4)\cdot\sqrt{2}\cdot 10^5$ N / m² .
Με τις τιμές δημιουργούμε τον πίνακα :

	A	B	Γ
P	$10\cdot 10^5$	$10\cdot 10^5$	$(5 / 4)\cdot\sqrt{2}\cdot 10^5$
V	$1\cdot 10^{-3}$	$2\cdot 10^{-3}$	$4\cdot\sqrt{2}\cdot 10^{-3}$
T	T_A	$2\cdot T_A$	T_A



Με τις τιμές του πίνακα σχεδιάζουμε την γραφική παράσταση πίεσης P – όγκου V :

$Δ_2$. Θεωρούμε γνωστά τα $C_v = (3 / 2)\cdot R$ και $C_p = (5 / 2)\cdot R$.
Η θερμότητα στην ΑΒ αδιαβατική εκτόνωση :
$Q_{AB} = n\cdot C_p\cdot ΔT_{AB} \Rightarrow Q_{AB} = (5 / 2)\cdot n\cdot R\cdot ΔT_{AB} \Rightarrow Q_{AB} = (5 / 2)\cdot(n\cdot R\cdot T_B - n\cdot R\cdot T_A) \Rightarrow Q_{AB} = (5 / 2)\cdot(P_B\cdot V_B - P_A\cdot V_A) \Rightarrow Q_{AB} = (5 / 2)\cdot P_A\cdot(V_B - V_A) \Rightarrow Q_{AB} = (5 / 2)\cdot 10\cdot 10^5\cdot(2\cdot 10^{-3} - 10^{-3}) \Rightarrow Q_{AB} = 2500$ joule .
Το έργο στην ΑΒ :
$W_{AB} = P_A\cdot(V_B - V_A) \Rightarrow W_{AB} = 10\cdot 10^5\cdot(2\cdot 10^{-3} - 10^{-3}) \Rightarrow W_{AB} = 1000$ joule .
1ος θερμοδυναμικός νόμος στην ΑΒ :
(μια άλλη έκφραση της αρχής διατήρησης της ενέργειας)
$Q_{AB} = W_{AB} + ΔU_{AB} \Rightarrow ΔU_{AB} = Q_{AB} - W_{AB} \Rightarrow ΔU_{AB} = 2500 - 1000 \Rightarrow ΔU_{AB} = 1500$ joule .

Μια διαφορετική αντιμετώπιση για τη μεταβολή ΒΓ:
Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας στη διάρκεια του κυκλικής μεταβολής :
$ΔU_{ολ} = 0 \Rightarrow ΔU_{AB} + ΔU_{BΓ} + ΔU_{ΓΔ} = 0 \Rightarrow$
(Όμως το $ΔU_{ΓA} = 0$, η μεταβολή ΓΑ είναι ισόθερμη)
$\Rightarrow ΔU_{AB} + ΔU_{BΓ} + 0 = 0 \Rightarrow ΔU_{BΓ} = - ΔU_{AB} \Rightarrow ΔU_{BΓ} = - 1500$ joule , λογικό αφού επιστρέφει στην ίδια θερμοκρασία .
και 1ος θερμοδυναμικός στην ΒΓ :
$Q_{BΓ} = W_{BΓ} + ΔU_{BΓ} \Rightarrow$
($Q_{BΓ} = 0$, η μεταβολή ΒΓ είναι αδιαβατική) $W_{BΓ} = - ΔU_{BΓ} \Rightarrow W_{BΓ} = + 1500$ joule .

$Δ_3$. Η θερμότητα της θερμής και της ψυχρής δεξαμενής Q_c και Q_h :
$Q_c = Q_{ΓA}$ και $Q_h = Q_{AB}$.
Ο συντελεστής απόδοσης θερμικής μηχανής :
$e = 1 - (|Q_c| / Q_h) \Rightarrow e = 1 - (1750 / 2500) \Rightarrow e = 0{,}3$.
Ο συντελεστής απόδοσης της μηχανής Carnot :
($T_c = T_A$ και $T_h = T_B$)
$e_c = 1 - (T_c / T_h) \Rightarrow e = 1 - (T_A / 2\cdot T_A) \Rightarrow e = 0{,}5$.

ΑΣΚΗΣΗ 7

Ορισμένη ποσότητα μονατομικού ιδανικού αερίου που βρίσκεται στην κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας A (P_0, V_0, T_0), υπόκειται στην παρακάτω αντιστρεπτή κυκλική μεταβολή:

ΑΒ ισοβαρής εκτόνωση μέχρι να τετραπλασιαστεί ο όγκος του,

ΒΓ αδιαβατική μεταβολή μέχρι τη θερμοκρασία T_0,

ΓΑ ισόθερμη μεταβολή.

$Δ_1$. Να γίνει η γραφική παράσταση των μεταβολών σε άξονες P – V, όπου θα φαίνονται οι τιμές της πίεσης, του όγκου και της θερμοκρασίας του αερίου στις καταστάσεις A, B, και Γ, συναρτήσει των P_0, V_0, T_0. (Οι τιμές της θερμοκρασίας θα σημειωθούν πάνω στις ισόθερμες καμπύλες).

$Δ_2$. Να υπολογιστεί ο λόγος των έργων που ανταλλάσσεται μεταξύ αερίου και περιβάλλοντος για τις μεταβολές ΒΓ και ΑΒ, $W_{ΒΓ} / W_{ΑΒ}$.

$Δ_3$. Να υπολογιστεί ο λόγος των θερμοτήτων που ανταλλάσσεται μεταξύ αερίου και περιβάλλοντος για τις μεταβολές ΑΒ και ΓΑ, $Q_{ΑΒ} / Q_{ΓΑ}$.

$Δ_4$. Να υπολογίσετε την απόδοση μηχανής Carnot που λειτουργεί μεταξύ των ακραίων θερμοκρασιών του παραπάνω κύκλου καθώς και την απόδοση θερμικής μηχανής που λειτουργεί σύμφωνα με την παραπάνω αντιστρεπτή κυκλική μεταβολή (οι αποδόσεις να εκφραστούν ως κλάσματα).

Δίνονται η γραμμομοριακή ειδική θερμότητα του αερίου υπό σταθερό όγκο $C_v = 3 \cdot R / 2$, ln 2 = 0,7 και ο αδιαβατικός συντελεστής γ = 5 / 3.

Λύση

$Δ_1$.

Οι μεταβολές του ιδανικού αερίου :

A → B ισοβαρής εκτόνωση ($P_A = P_B$) :

$V_A / T_A = V_B / T_B \Rightarrow T_B = T_A \cdot (V_B / V_A) \Rightarrow T_B = T_0 \cdot (4 \cdot V_0 / V_0) \Rightarrow T_B = 4 \cdot T_0$.

B → Γ αδιαβατική εκτόνωση ($Q_{ΒΓ} = 0$) :

$(V_B)^{γ-1} \cdot T_B = (V_Γ)^{γ-1} \cdot T_Γ \Rightarrow (4 \cdot V_0)^{(5/3)-1} \cdot 4 \cdot T_0 = (V_Γ)^{(5/3)-1} \cdot T_0 \Rightarrow 4^{2/3} \cdot 4 \cdot V_0 = V_Γ \Rightarrow V_Γ = 32 \cdot V_0$.

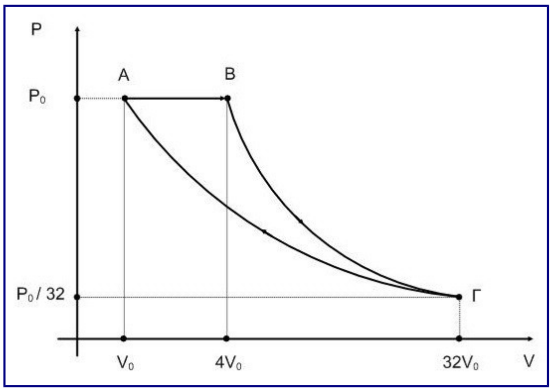
Γ → A ισόθερμη συμπίεση ($T_Γ = T_A$) :

$P_Γ \cdot V_Γ = P_A \cdot V_A \Rightarrow P_Γ \cdot 32V_0 = P_0 \cdot V_0 \Rightarrow P_Γ = P_0 / 32$.

Με τις σχέσεις που υπολογίσαμε συμπληρώνουμε τον πίνακα :

	A	B	Γ
P	P_0	P_0	$P_0 / 32$
V	V_0	$4 \cdot V_0$	$32 \cdot V_0$
T	T_0	$4 \cdot T_0$	T_0

Με τις τιμές του πίνακα σχεδιάζουμε την γραφική παράσταση πίεσης P – όγκου V :



$Δ_2$. Το έργο στη μεταβολή ΒΓ :

$W_{ΒΓ} = (P_Γ \cdot V_Γ – P_B \cdot V_B) / (1 – γ) \Rightarrow W_{ΒΓ} = (P_0 \cdot V_0 – 4 \cdot P_0 \cdot V_0) / (1 – (5/3)) \Rightarrow W_{ΒΓ} = (9/2) \cdot P_0 \cdot V_0$.

Το έργο στη μεταβολή ΑΒ :

$W_{AB} = P_A \cdot (V_B – V_A) \Rightarrow W_{AB} = P_0 \cdot (4 \cdot V_0 – V_0) \Rightarrow W_{AB} = 3 \cdot P_0 \cdot V_0$.

Το πηλίκο των δύο έργων :

$W_{ΒΓ} / W_{AB} = (9/2) \cdot P_0 \cdot V_0 / 3 \cdot P_0 \cdot V_0 \Rightarrow W_{ΒΓ} / W_{AB} = 3 / 2$.

$Δ_3$. Η θερμότητα στην μεταβολή ΑΒ :

(ισχύει στη σχολική ύλη $C_p = C_v + R \Rightarrow C_p = (3/2) \cdot R + R \Rightarrow C_p = (5/2) \cdot R$)

$Q_{AB} = n \cdot C_p \cdot ΔT_{AB} \Rightarrow Q_{AB} = n \cdot (5/2) \cdot R \cdot (T_B – T_A) \Rightarrow Q_{AB} = (5/2) \cdot P_0 \cdot (4 \cdot V_0 – V_0) \Rightarrow Q_{AB} = (15/2) \cdot P_0 \cdot V_0$.

Η θερμότητα στην μεταβολή ΓΑ :

$Q_{ΓA} = n \cdot R \cdot T_0 \cdot \ln (V_A / V_B) \Rightarrow Q_{ΓA} = P_0 \cdot V_0 \cdot \ln (V_0 / 32 \cdot V_0) \Rightarrow Q_{ΓA} = P_0 \cdot V_0 \cdot \ln 2^{-5} \Rightarrow Q_{ΓA} = – 5 \cdot P_0 \cdot V_0 \cdot \ln 2 \Rightarrow Q_{ΓA} = – 3{,}5 \cdot P_0 \cdot V_0$.

Το πηλίκο των θερμοτήτων $Q_{AB} / Q_{BΓ} = -(7{,}5 \cdot P_0 \cdot V_0) / (3{,}5 \cdot P_0 \cdot V_0) \Rightarrow Q_{AB} / Q_{BΓ} = -15 / 7$.

Το μείον οφείλεται στο γεγονός ότι $Q_{ΓA} < 0$.

$Δ_4$.Ο συντελεστής απόδοσης μιας μηχανής Carnot :

$e_c = 1 - (T_c / T_h) \Rightarrow e_c = (T_h - T_c) / T_h \Rightarrow e_c = (4 \cdot T_0 - T_0) / (4 \cdot T_0) \Rightarrow e_c = 3 / 4$.

Ο συντελεστής απόδοσης μιας θερμικής μηχανής :

$e = 1 - (\left| Q_c \right| / Q_h) \Rightarrow e = (Q_{AΓ} - \left| Q_{ΓA} \right|) / Q_{AB} \Rightarrow e = (7{,}5 \cdot P_0 \cdot V_0 - 3{,}5 \cdot P_0 \cdot V_0) / (7{,}5 \cdot P_0 \cdot V_0) \Rightarrow e = 8 / 15$.

ΑΣΚΗΣΗ 8

Ορισμένη ποσότητα ιδανικού αερίου,που βρίσκεται στην κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Α (P_0, V_0, T_0), υπόκειται στην παρακάτω αντιστρεπτή κυκλική μεταβολή:

ΑΒ: ισοβαρής εκτόνωση μέχρι να τετραπλασιαστεί ο όγκος του,

ΒΓ: ισόχωρη μεταβολή μέχρι τη θερμοκρασία T_0,

ΓΑ: ισόθερμη μεταβολή.

$Δ_1$. Να γίνει η γραφική παράσταση των μεταβολών σε άξονες P – V , όπου θα φαίνονται οι τιμές της πίεσης, του όγκου και της θερμοκρασίας του αερίου στις καταστάσεις Α, Β, και Γ, συναρτήσει των P_0, V_0, T_0. (Οι τιμές της θερμοκρασίας να σημειωθούν πάνω στις ισόθερμες καμπύλες).

$Δ_2$. Να υπολογιστεί η θερμότητα που αποβάλλει το αέριο στην κυκλική μεταβολή συναρτήσει των P_0, V_0, T_0 .

$Δ_3$. Να υπολογιστεί το ολικό έργο στην κυκλική μεταβολή συναρτήσει των P_0, V_0, T_0 .

$Δ_4$. Να υπολογίσετε την απόδοση μηχανής Carnot που λειτουργεί μεταξύ των ακραίων ισόθερμων του παραπάνω κύκλου, καθώς και την απόδοση θερμικής μηχανής που λειτουργεί σύμφωνα με την παραπάνω αντιστρεπτή κυκλική μεταβολή (οι αποδόσεις να εκφραστούν ως κλάσματα).

Δίνονται η γραμμομοριακή ειδική θερμότητα του αερίου υπό σταθερό όγκο $C_v = 3 \cdot R / 2$ και ότι ln 2 = 0,7 .

Λύση

$Δ_1$.

Οι μεταβολές :

Α → Β ισοβαρής εκτόνωση ($P_A = P_B$) :

$V_A / T_A = V_B / T_B \Rightarrow V_0 / T_0 = 4 \cdot V_0 / T_B \Rightarrow T_B = 4 \cdot T_0$.

Β → Γ ισόχωρη ψύξη ($V_B = V_Γ$) :

$P_B / T_B = P_Γ / T_Γ \Rightarrow P_0 / (4 \cdot T_0) = P_Γ / T_0 \Rightarrow P_Γ = P_0 / 4$.

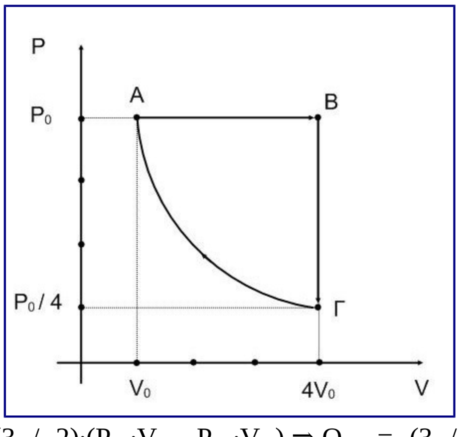
Γ → Α ισόθερμη συμπίεση ($T_Γ = T_A$) :

$P_Γ \cdot V_Γ = P_Δ \cdot V_Δ$.

Οι παραπάνω τιμές δημιουργούν τον πίνακα :

	Α	Β	Γ
P	P_0	P_0	$P_0 / 4$
V	V_0	$4 \cdot V_0$	$4 \cdot V_0$
T	T_0	$4 \cdot T_0$	T_0

Με τις τιμές του πίνακα σχεδιάζουμε την γραφική παράσταση πίεσης P – όγκου V :



$Δ_2$.Η θερμότητα $Q_c = Q_{BΓ} + Q_{ΔA}$.

Η θερμότητα στη ΒΓ :

$Q_{BΓ} = n \cdot C_v \cdot ΔT_{BΓ} \Rightarrow Q_{BΓ} = n \cdot (3 \cdot R / 2) \cdot (T_Γ - T_B) \Rightarrow Q_{BΓ} = (3 / 2) \cdot (P_Γ \cdot V_Γ - P_B \cdot V_B) \Rightarrow Q_{BΓ} = (3 / 2) \cdot ((P_0 / 4) \cdot 4 \cdot V_0 - P_0 \cdot 4 \cdot V_0) \Rightarrow Q_{BΓ} = -4{,}5 \cdot P_0 \cdot V_0$.

Στη ΓΑ ισόθερμη μεταβολή $ΔU_{ΓA} = 0$,

1ος θερμοδυναμικός νόμος στη ΓΑ :

$Q_{ΓA} = W_{ΓA} + ΔU_{ΓA} \Rightarrow Q_{ΓA} = W_{ΓA} + 0 \Rightarrow Q_{ΓA} = W_{ΓA} \Rightarrow Q_{ΓA} = n \cdot R \cdot T_Γ \cdot \ln (V_A / V_Γ) \Rightarrow Q_{ΓA} = P_Γ \cdot V_Γ \cdot \ln (V_A / V_Γ) \Rightarrow Q_{ΓA} = (P_0 / 4) \cdot 4 \cdot V_0 \cdot \ln (V_0 / 4 \cdot V_0) \Rightarrow Q_{ΓA} = P_0 \cdot V_0 \cdot \ln (¼) \Rightarrow Q_{ΓA} = P_0 \cdot V_0 \cdot (-\ln 2^2) \Rightarrow Q_{ΓA} = -1{,}4 \cdot P_0 \cdot V_0$.

Η θερμότητα $Q_c = Q_{ΒΓ} + Q_{ΔΑ} \Rightarrow Q_c = -4{,}5 \cdot P_0 \cdot V_0 - 1{,}4 \cdot P_0 \cdot V_0 \Rightarrow Q_c = -5{,}9 \cdot P_0 \cdot V_0$.

$Δ_3$.Το έργο στην ΑΒ ισοβαρή μεταβολή :

$W_{ΑΒ} = P_Α \cdot (V_Β - V_Α) \Rightarrow W_{ΑΒ} = P_0 \cdot (4 \cdot V_0 - V_0) \Rightarrow W_{ΑΒ} = 3 \cdot P_0 \cdot V_0$.

Το έργο στην ΒΓ μεταβολή :

$W_{ΒΓ} = 0$, η ΒΓ είναι ισόχωρη .

Το έργο στην ΓΑ μεταβολή :$W_{ΓΑ} = -1{,}4 \cdot P_0 \cdot V_0$, έχει ήδη υπολογιστεί .

$W_{ολ} = W_{ΑΒ} + W_{ΒΓ} + W_{ΓΑ} \Rightarrow W_{ολ} = 3 \cdot P_0 \cdot V_0 + 0 - 1{,}4 \cdot P_0 \cdot V_0 \Rightarrow W_{ολ} = 1{,}6 \cdot P_0 \cdot V_0$.

$Δ_4$.

Η απόδοση της μηχανής Carnot :

$e_c = 1 - (T_c / T_h) \Rightarrow e_c = 1 - (T_0 / 4 \cdot T_0) \Rightarrow e_c = 1 - ¼ \Rightarrow e_c = ¾$.

Ισχύει :$C_p = C_v + R \Rightarrow C_p = (3 / 2) \cdot R + R \Rightarrow C_p = 5 \cdot R / 2$.

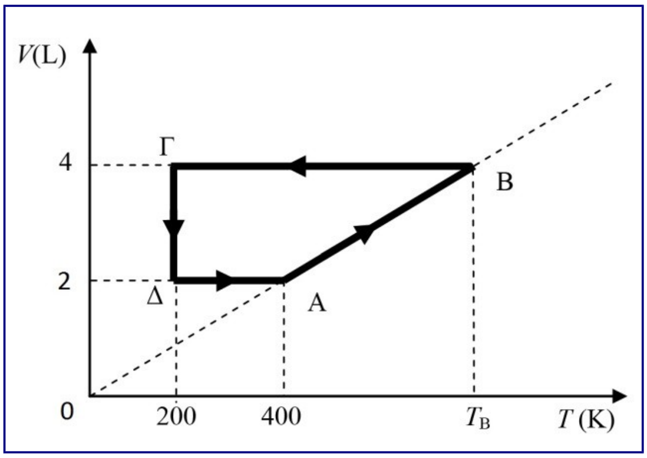
Η θερμότητα στη μεταβολή ΑΒ, η θερμότητα Q_h : $Q_{ΑΒ} = n \cdot C_p \cdot ΔT_{ΑΒ} \Rightarrow Q_{ΑΒ} = n \cdot (5 \cdot R / 2) \cdot (T_Β - T_Α) \Rightarrow Q_{ΑΒ} = (5 / 2) \cdot (P_Β \cdot V_Β - P_Α \cdot V_Α) \Rightarrow Q_{ΑΒ} = (5 / 2) \cdot (P_0 \cdot 4 \cdot V_0 - P_0 \cdot V_0) \Rightarrow Q_{ΑΒ} = 7{,}5 \cdot P_0 \cdot V_0$.

Η απόδοση θερμικής μηχανής :

$e = 1 - |Q_c| / Q_h \Rightarrow e = 1 - (5{,}9 \cdot P_0 \cdot V_0 / 7{,}5 \cdot P_0 \cdot V_0) \Rightarrow e = 16 / 75$.

ΑΣΚΗΣΗ 9

Ένα ιδανικό αέριο εκτελεί την κυκλική μεταβολή ΑΒΓΔΑ του σχήματος. Αν $P_Α = 4$ atm, $V_Α = 2$L,$T_Α = 400$ K, $V_Β = 4$ L, $T_Γ = 200$ K .



$Δ_1$. Να υπολογίσετε τις πιέσεις $P_Γ$ και $P_Δ$ και τη θερμοκρασία $T_Β$.

$Δ_2$. Να ονομάσετε κάθε μια από τις αντιστρεπτές μεταβολές του σχήματος και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της κυκλικής μεταβολής σε βαθμολογημένους άξονες P – V και P – T .

$Δ_3$. Να υπολογίσετε τη μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας στις μεταβολές ΓΔ, ΔΑ και ΑΒ.

$Δ_4$. Να υπολογίσετε το συντελεστή απόδοσης μια μηχανής Carnot που θα λειτουργούσε μεταξύ των ακραίων θερμοκρασιών της πιο πάνω κυκλικής μεταβολής.

Δίνεται ότι 1 atm = 10^5 N / m^2, ln 2 = 0,7 και ότι $C_v = 3 \cdot R / 2$.

Λύση

$Δ_1$.

Οι μεταβολές είναι:

Α → Β ισοβαρής θέρμανση (ή εκτόνωση) ($P_Α = P_Β$) :

$V_Α / T_Α = V_Β / T_Β \Rightarrow T_Β = T_Α \cdot (V_Β / V_Α) \Rightarrow T_Β = 400 \cdot (4 \cdot 10^{-3} / 2 \cdot 10^{-3}) \Rightarrow T_Β = 800$ K .

Β → Γ ισόχωρη ψύξη ($V_Β = V_Γ$) :

$P_Β / T_Β = P_Γ / T_Γ \Rightarrow P_Γ = P_Β \cdot (T_Γ / T_Β) \Rightarrow P_Γ = 1 \cdot 10^5 \cdot (200 / 800) \Rightarrow P_Γ = 1 \cdot 10^5$ N / m² .

Γ → Δ ισόθερμη συμπίεση ($T_Γ = T_Δ$) :

$P_Γ \cdot V_Γ = P_Δ \cdot V_Δ \Rightarrow P_Δ = P_Γ \cdot (V_Γ / V_Δ) \Rightarrow P_Δ = 1 \cdot 10^5 \cdot (4 \cdot 10^{-3} / 2 \cdot 10^{-3}) \Rightarrow P_Δ = 2 \cdot 10^5$ N / m² .

Δ → Α ισόχωρη θέρμανση ($V_Δ = V_Α$) :

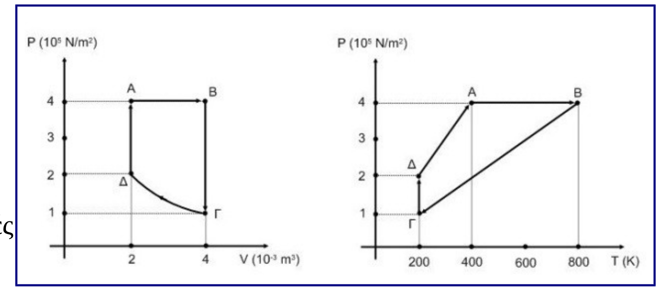
$P_Δ / T_Δ = P_Α / T_Α$.

$Δ_2$.

Με τις τιμές δημιουργούμε τον πίνακα :

	Α	Β	Γ	Δ
P	$4·10^5$	$4·10^5$	$1·10^5$	$2·10^5$
V	$2·10^{-3}$	$4·10^{-3}$	$4·10^{-3}$	$2·10^{-3}$
T	400	800	200	200

Με τις τιμές του πίνακα σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις :



$Δ_3$.Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας στη ΓΔ :

$ΔU_{ΓΔ} = 0$, είναι ισόθερμη μεταβολή .

Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας στη ΔΑ :

$ΔU_{ΔΑ} = n·C_v·ΔT_{ΔΑ} \Rightarrow ΔU_{ΔΑ} = n·(3·R / 2)·(T_Α – T_Δ) \Rightarrow ΔU_{ΔΑ} = (3 / 2)·(P_Α·V_Α – P_Δ·V_Δ) \Rightarrow ΔU_{ΔΑ} = (3 / 2)·(4·10^5·2·10^{-3} – 2·10^5·2·10^{-3}) \Rightarrow ΔU_{ΔΑ} = 600$ joule .

Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας στη ΑΒ :

$ΔU_{ΑΒ} = n·C_v·ΔT_{ΑΒ} \Rightarrow ΔU_{ΑΒ} = n·(3·R / 2)·(T_Β – T_Α) \Rightarrow ΔU_{ΑΒ} = (3 / 2)·(P_Β·V_Β – P_Α·V_Α) \Rightarrow ΔU_{ΑΒ} = (3 / 2)·(4·10^5·4·10^{-3} – 4·10^5·2·10^{-3}) \Rightarrow ΔU_{ΑΒ} = 1200$ joule .

$Δ_4$.Ο συντελεστής απόδοσης μιας μηχανής Carnot :

$e_c = 1 – (T_c / T_h) \Rightarrow e_c = 1 – (200 / 800) \Rightarrow e_c = 1 – ¼ \Rightarrow e_c = ¾$.

ΑΣΚΗΣΗ 10

Ορισμένη ποσότητα ιδανικού αερίου που βρίσκεται σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας με όγκο V_1 = 2 L θερμοκρασία $θ_1$ = 20 ^oC θερμαίνεται αντιστρεπτά υπό σταθερή πίεση P = 2 atm, οπότε η απόλυτη θερμοκρασία του αερίου αυξάνεται κατά 50 %.

$Δ_1$. Να βρεθεί ο νέος όγκος του V_2.

$Δ_2$. Να παρασταθεί γραφικά, σε άξονες P – V η μεταβολή και να υπολογιστεί το έργο που παράγεται κατά την εκτόνωση του αερίου.

$Δ_3$. Να υπολογιστεί η επί της εκατό (%) μεταβολή της μέσης κινητικής ενέργειας των μορίων του αερίου.

Όταν αυξηθεί η θερμοκρασία ενός άλλου ιδανικού αερίου, το οποίο είναι κλεισμένο σε δοχείο σταθερού όγκου, κατά 150 ^oC η πίεσή του αυξάνεται κατά 40% . Θεωρούμε και αυτή τη νέα μεταβολή της ποσότητας του άλλου ιδανικού αερίου αντιστρεπτή.

$Δ_4$. Να υπολογιστούν η αρχική και η τελική θερμοκρασία του αερίου σε ^{0} C.

Δίνεται ότι: 1 atm = 10^5 N / m^2 και 1 L = 10^{-3} m^3 .

Λύση

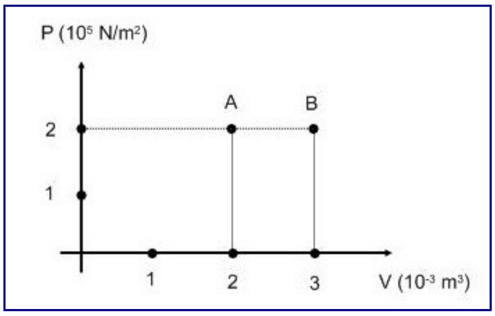
$Δ_1$. Μετατρέπουμε τις θερμοκρασίες κελσίου σε απόλυτες θερμοκρασίες:

$T_1 = θ_1 + 273 \Rightarrow T_1 = 20 + 273 = 293$ K

Δίνεται $T_2 = T_1 + (50 / 100)·T_1 \Rightarrow T_2 = 1{,}5·T_1 \Rightarrow T_2 = 1{,}5·293 = 439{,}5$ K .

Α → Β ισοβαρής θέρμανση ($P_1 = P_1$) : $V_1 / T_1 = V_2 / T_2 \Rightarrow V_2 = V_1·(T_2 / T_1) \Rightarrow V_2 = 2·10^{-3}·(1{,}5·T_1 / T_1) \Rightarrow V_2 = 3·10^{-3}$ m³ .

$Δ_2$. Το P – V διάγραμμα είναι:Το έργο είναι το εμβαδό στο P – V διάγραμμα: W = εμβαδό στο P – V = $(3 – 2)·10^{-3}·2·10^5$ = 200 joule .



$Δ_3$. Η μέση κινητική ενέργεια: $K = (3 / 2)·k·T$.

Θα υπολογίσουμε το ποσοστό μείωσης της μέσης κινητικής ενέργειας :

$(ΔK / K_1)\ \% = ((K_2 – K_1) / K_1)·100\% \Rightarrow (ΔK / K_1)\ \% = ((T_2 – T_1) / T_1)·100\% \Rightarrow (ΔK / K_1)\ \% = (1{,}5·T_1) / T_1)·100\% \Rightarrow (ΔK / K_1)\ \% = 50\%$.

Δ_4. Δίνεται το $\Delta\theta = 150\ °C$ άρα $\Delta T = 150\ K$

(Ας το αποδείξουμε: $\Delta T = T_{τελ} – T_{αρχ} \Rightarrow \Delta T = (273 + \theta_{τελ}) – (273 + \theta_{αρχ}) \Rightarrow \Delta T = \theta_{τελ} – \theta_{αρχ} \Rightarrow \Delta T = \Delta\theta$)

$\Delta P = 40\%\cdot P_{αρχ} \Rightarrow \Delta P = (40 / 100)\cdot P_{αρχ} \Rightarrow P_{τελ} – P_{αρχ} = 0,4\cdot P_{αρχ} \Rightarrow P_{τελ} = 1,4\cdot P_{αρχ}$.

Η μεταβολή είναι ισόχωρη :

$P_{τελ} / T_{τελ} = P_{αρχ} / T_{αρχ} \Rightarrow T_{τελ} = T_{αρχ}\cdot(P_{τελ} / P_{αρχ}) \Rightarrow T_{τελ} = T_{αρχ}\cdot(1,4\cdot P_{αρχ} / P_{αρχ}) \Rightarrow T_{τελ} = 1,4\cdot T_{αρχ}$.

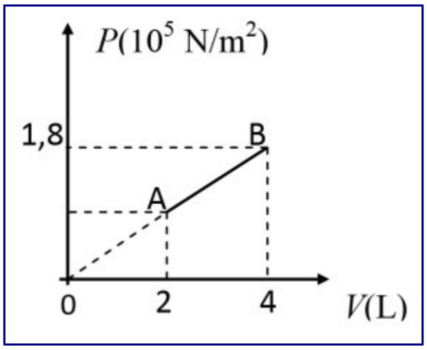
$\Delta T = T_{τελ} – T_{αρχ} \Rightarrow \Delta T = 1,4\cdot T_{αρχ} – T_{αρχ} \Rightarrow \Delta T = 0,4\cdot T_{αρχ} \Rightarrow T_{αρχ} = \Delta T / 0,4 \Rightarrow T_{αρχ} = 150 / 0,4 \Rightarrow T_{αρχ} = 375\ K$

Ισχύει $T_{αρχ} = \theta_{αρχ} + 273 \Rightarrow \theta_{αρχ} = T_{αρχ} – 273 \Rightarrow \theta_{αρχ} = 375 – 273 = 102\ °C$.

Ισχύει $T_{τελ} = \theta_{τελ} + 273 \Rightarrow \theta_{τελ} = T_{τελ} – 273 \Rightarrow \theta_{τελ} = 525 – 273 = 252\ °C$.

ΑΣΚΗΣΗ 11

Ορισμένη ποσότητα ιδανικού αερίου πραγματοποιεί την αντιστρεπτή μεταβολή ΑΒ του σχήματος από την κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Α στην κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Β. Δ_1. Να βρεθεί η πίεση του αερίου στην κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Α.



Δ_2. Να υπολογισθεί το παραγόμενο έργο.

Δ_3. Να υπολογισθεί η θερμότητα που ανταλλάσσει το αέριο με το περιβάλλον.

Δ_4. Να βρεθεί πόσες φορές είναι μεγαλύτερη η μέση κινητική ενέργεια των μορίων στην κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Β από την αντίστοιχη στην κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Α.

Δίνεται ότι: $C_v = 3\cdot R / 2$, όπου R είναι η σταθερά των ιδανικών αερίων και $1\ L = 10^{-3}\ m^3$.

Λύση

Δ_1. τα ποσά είναι ανάλογα, άρα: $P_A / V_A = P_B / V_B \Rightarrow P_A = P_B \cdot V_A / V_B \Rightarrow P_A = 1,8\cdot 10^5\cdot(2\cdot 10^{-3} / 4\cdot 10^{-3}) \Rightarrow P_A = 0,9\cdot 10^5\ N / m^2$.

Δ_2. Το έργο της Α → Β μεταβολής μπορούμε να το υπολογίσουμε από το εμβαδό στο P – V διάγραμμα: W_{AB} = εμβαδό τραπεζίου = $½\cdot(1,8 + 0,9)\cdot 10^5\cdot (4 – 2)\cdot 10^{-3} \Rightarrow W_{AB} = 270$ joule .

Δ_3. Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας στην Α → Β :

$\Delta U_{AB} = n\cdot C_v\cdot\Delta T_{AB} \Rightarrow \Delta U_{AB} = n\cdot(3\cdot R / 2)\cdot(T_B – T_A) \Rightarrow \Delta U_{AB} = (3 / 2)\cdot(n\cdot R\cdot T_B – n\cdot R\cdot T_A) \Rightarrow \Delta U_{AB} = (3 / 2)\cdot(P_B\cdot V_B – P_A\cdot V_A) \Rightarrow \Delta U_{AB} = (3 / 2)\cdot(1,8\cdot 10^5\cdot 4\cdot 10^{-3} – 0,9\cdot 10^5\cdot 2\cdot 10^{-3}) \Rightarrow \Delta U_{AB} = 810$ joule .

Ο 1ος θερμοδυναμικός νόμος στην Α → Β μεταβολή:

(ο 1ος θερμοδυναμικός νόμος είναι μια άλλη έκφραση της αρχής διατήρησης της ενέργειας, η ενέργεια μεταφέρεται και μετασχηματίζεται αλλά ούτε δημιουργείται ούτε καταστρέφεται)

$Q_{AB} = W_{AB} + \Delta U_{AB} \Rightarrow Q_{AB} = 2700 + 8100 \Rightarrow Q_{AB} = 1080$ joyle.

Δ_4. Μας ζητάει να συγκρίνουμε την μέση κινητική ενέργεια των μορίων στην κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Β με την αντίστοιχη στην κατάσταση Α.

$K_μ = (3 / 2)\cdot k\cdot T$ η μέση κινητική ενέργεια (εξαρτάται μόνο από την θερμοκρασία), άρα στις καταστάσεις Α και Β θα δίνεται:

$K_{μ,A} = (3 / 2)\cdot k\cdot T_A$ και $K_{μ,B} = (3 / 2)\cdot k\cdot T_B$,

(όταν θέλουμε να συγκρίνουμε δύο μεγέθη στη φυσική, τα διαιρούμε μεταξύ τους)

$K_{μ,B} / K_{μ,A} = (3 / 2)\cdot k\cdot T_B / (3 / 2)\cdot k\cdot T_A \Rightarrow K_{μ,B} / K_{μ,A} = T_B / T_A$.

Από την καταστατική εξίσωση $P_A \cdot V_A = n\cdot R\cdot T_A \Rightarrow T_A = P_A \cdot V_A / n\cdot R$ ανάλογα $T_B = P_B \cdot V_B / n\cdot R$, άρα

$K_{μ,B} / K_{μ,A} = T_B / T_A \Rightarrow K_{μ,B} / K_{μ,A} = (P_B \cdot V_B / n\cdot R) / (P_A \cdot V_A / n\cdot R) \Rightarrow K_{μ,B} / K_{μ,A} = P_B \cdot V_B / P_A \cdot V_A \Rightarrow K_{μ,B} / K_{μ,A} = 1,8\cdot 10^5\cdot 4\cdot 10^{-3} / 0,9\cdot 10^5\cdot 2\cdot 10^{-3} \Rightarrow K_{μ,B} / K_{μ,A} = 4 \Rightarrow K_{μ,B} = 4\cdot K_{μ,A}$.

ΑΣΚΗΣΗ 12

Μια ποσότητα n = 10 mol ιδανικού αερίου μιας θερμικής μηχανής, βρίσκεται στην κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Α όπου P_A = 10 atm και V_A = 4,1 L. Το αέριο υφίσταται κυκλική μεταβολή αποτελούμενη από μια ισοβαρή θέρμανση ΑΒ, στο τέλος της οποίας είναι V_B = 8,2 L, μια ισόθερμη εκτόνωση ΒΓ, μετά το πέρας της οποίας είναι $P_Γ$ = 5 atm, μια ισοβαρή ψύξη ΓΔ και μια ισόθερμη συμπίεση ΔΑ. Όλες οι μεταβολές είναι αντιστρεπτές και το αέριο διέρχεται μόνο από καταστάσεις θερμοδυναμικής ισορροπίας.

$Δ_1$. Να σχεδιαστεί ποιοτικά (χωρίς αριθμούς) η κυκλική μεταβολή σε άξονες P – V και P – T.

$Δ_2$. Να υπολογίσετε τις απόλυτες θερμοκρασίες στις οποίες πραγματοποιούνται οι ισόθερμες μεταβολές.

$Δ_3$. Να υπολογίσετε το συνολικό έργο της κυκλικής μεταβολής .

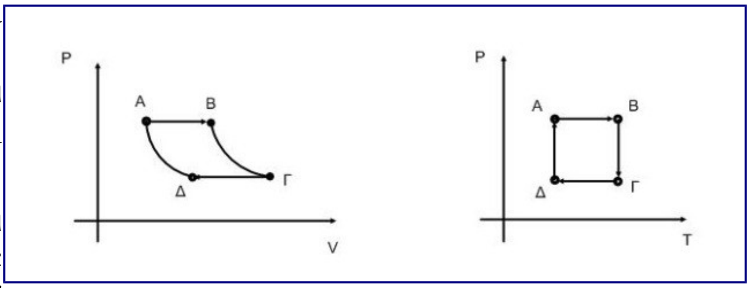
$Δ_4$. Να υπολογίσετε το συντελεστή απόδοσης της θερμικής μηχανής

Δίνονται η γραμμομοριακή ειδική θερμότητα υπό σταθερό όγκο C_v = 3·R / 2, η σταθερά των ιδανικών αερίων R = 0,082 L·atm / (mole·K) = 8,314 J / (mole·K) ότι 1 L·atm = 101 J και ln 2 = 0,7.

Λύση

$Δ_1$. Από τις μεταβολές που περιγράφονται στην εκφώνηση: ισοβαρή θέρμανση Α → Β, ισόθερμη εκτόνωση Β → Γ, ισοβαρή ψύξη Γ → Δ και ισόθερμη συμπίεση Δ → Α

Σχεδιάζουμε τα ποιοτικά διαγράμματα P – V και P – T :



$Δ_2$. Καταστατική εξίσωση στην Α κατάσταση ισορροπίας του αερίου όπου αντικαθιστούμε την σταθερά των ιδανικών αερίων με την τιμή R = 0,082 L·atm / (mole·K) .

$P_A·V_A = n·R·T_A ⇒ T_A = P_A·V_A / n·R ⇒ T_A = (10·4,1) / (10·0,082) ⇒ T_A = 50$ K .

Εφαρμόζουμε τους νόμους των ιδανικών αερίων σε κάθε μεταβολή:

Α → Β : ισοβαρής θέρμανση ($P_A = P_B$): $V_A / T_A = V_B / T_B ⇒ T_B = T_A·(V_B / V_A) ⇒ T_B = 50·(8,2 / 4,1) = 100$ K .

Β → Γ : ισόθερμη εκτόνωση ($T_B = T_Γ$): $P_B·V_B = P_Γ·V_Γ ⇒ V_Γ = V_B·(P_B / P_Γ) ⇒ V_Γ = 8,2·(10 / 5) ⇒ V_Γ = 16,4$ L .

Γ → Δ : ισοβαρής ψύξη ($P_Γ = P_Δ$): $V_Γ / T_Γ = V_Δ / T_Δ$.

Δ → Α : ισόθερμη συμπίεση ($T_Δ = T_A$): $P_Δ·V_Δ = P_A·V_A ⇒ V_Δ = V_A·(P_A / P_Δ) ⇒ V_Δ = 4,1·(10 / 5) = 8,2$ L .

Οι παραπάνω τιμές δημιουργούν τον παρακάτω πίνακα:

	Α	Β	Γ	Δ
P	10	10	5	5
V	4,1	8,2	16,4	8,2
T	50	100	100	50

Οι ζητούμενες θερμοκρασίες βρίσκονται στον πίνακα.

$Δ_3$. Θα υπολογίσουμε το έργο σε κάθε μεταβολή:

$W_{AB} = P_A·(V_B – V_A) ⇒ W_{AB} = 10·(8,2 – 4,1)·101 = 4141$ joule.

$W_{BΓ} = n·R·T_B·\ln (V_Γ / V_B) ⇒ W_{BΓ} = P_B·V_B·\ln (V_Γ / V_B) ⇒ W_{BΓ} = 10·8,314·100·\ln (16,4 / 8,2) ⇒ W_{BΓ} = 8314·\ln 2 = 5819,8$ joule .

$W_{ΓΔ} = P_Γ·(V_Δ – V_Γ) ⇒ W_{ΓΔ} = 5·(8,2 – 16,4)·101 = -4141$ joule .

$W_{ΔA} = n·R·T_Δ·\ln (V_A / V_Δ) ⇒ W_{ΔA} = P_Δ·V_Δ·\ln (V_A / V_Δ) ⇒ W_{ΔA} = 10·8,314·50·\ln (4,1 / 8,2) ⇒ W_{ΔA} = 4157·\ln (1 / 2) = – 2909,9$ joule .

Το συνολικό έργο της κυκλικής μεταβολής είναι:

$W_{ολ} = W_{AB} + W_{BΓ} + W_{ΓΔ} + W_{ΔA} ⇒ W_{ολ} = 4141 + 5819,8 – 4141 – 2909,9 ⇒ W_{ολ} = 2909,9$ joule .

Να τονίσουμε ότι στα έργα W_{AB} και $W_{ΓΔ}$ έχουμε τα γινόμενα P·V αλλά η πίεση δίνεται σε atm και ο όγκος σε L, πρέπει λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε την σχέση μετατροπής που δίνεται: 1 L·atm = 101 J , για να βρούμε το έργο σε joule . Το R αντικαθίσταται με 8,314 J / (mole·K) για τον ίδιο λόγο.

Δ₄. Ο συντελεστής απόδοσης της θερμικής μηχανής: $e = 1 - |Q_c| / Q_h$, όπου Q_h : η θερμότητα της θερμής δεξαμενής και Q_c : η θερμότητα της ψυχρής δεξαμενής .
$Q_h = Q_{AB} + Q_{B\Gamma}$ και $Q_c = Q_{\Gamma\Delta} + Q_{\Delta A}$.
Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας στην Α → Β μεταβολή: $\Delta U_{AB} = n \cdot C_v \cdot \Delta T_{AB} \Rightarrow \Delta U_{AB} = n \cdot (3 \cdot R / 2) \cdot (T_B - T_A) \Rightarrow \Delta U_{AB} = 10 \cdot (3 \cdot 8{,}314 / 2) \cdot (100 - 50) = 6235{,}5$ joule .
Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας στις ισόθερμες μεταβολές ΒΓ και ΔΑ είναι μηδέν.
Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας σε μια κυκλική μεταβολή: $\Delta U_{ολ} = \Delta U_{AB} + \Delta U_{B\Gamma} + \Delta U_{\Gamma\Delta} + \Delta U_{\Delta A} \Rightarrow 0 = \Delta U_{AB} + 0 + \Delta U_{\Gamma\Delta} + 0 \Rightarrow \Delta U_{\Gamma\Delta} = -\Delta U_{AB} \Rightarrow \Delta U_{\Gamma\Delta} = -6235{,}5$ joule .
Ο 1ος θερμοδυναμικός νόμος στις μεταβολές:
$Q_{AB} = W_{AB} + \Delta U_{AB} \Rightarrow Q_{AB} = 4141 + 6235{,}5 = 10376{,}5$ joule .
$Q_{B\Gamma} = W_{B\Gamma} + \Delta U_{B\Gamma} \Rightarrow Q_{B\Gamma} = 5819{,}8 + 0 = 5819{,}8$ joule .
$Q_{\Gamma\Delta} = W_{\Gamma\Delta} + \Delta U_{\Gamma\Delta} \Rightarrow Q_{\Gamma\Delta} = -4141 - 6235{,}5 = -10376{,}5$ joule .
$Q_{\Delta A} = W_{\Delta A} + \Delta U_{\Delta A} \Rightarrow Q_{\Delta A} = -2909{,}9$ joule .
Άρα
$Q_h = Q_{AB} + Q_{B\Gamma} \Rightarrow Q_h = 10376{,}5 + 5819{,}8 = 16196{,}3$ joule .
$Q_c = Q_{\Gamma\Delta} + Q_{\Delta A} \Rightarrow Q_c = -10376{,}5 - 2909{,}9 = -13286{,}4$ joule .
Η ζητούμενη απόδοση:
$e = 1 - |Q_c| / Q_h \Rightarrow e = 1 - (13286{,}4 / 16196{,}3) \Rightarrow e = 1 - 0{,}82 = 0{,}18$.