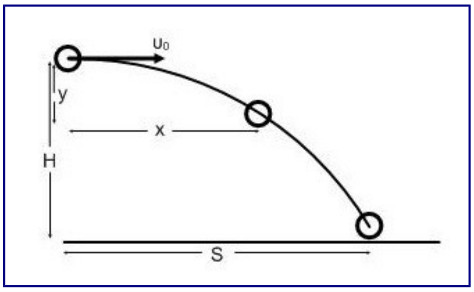
ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΒΟΛΗ – ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ – ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Ένα αεροπλάνο που πετάει οριζόντια σε σταθερό ύψος H = 12500 m από την επιφάνεια του εδάφους, με ταχύτητα μέτρου $υ_0$ = 900 km / h, αφήνει να πέσει ένα κιβώτιο, τη στιγμή που βρίσκεται πάνω από ένα σημείο A του εδάφους.



$Δ_1$. Να εξαχθεί η εξίσωση της τροχιάς που θα διαγράψει το κιβώτιο, ως προς έναν ακίνητο παρατηρητή που βρίσκεται στο έδαφος.

$Δ_2$. Να υπολογιστούν η διάρκεια πτώσης του κιβωτίου καθώς και η απόσταση ανάμεσα στο σημείο A και στο σημείο του εδάφους που θα πέσει το κιβώτιο.

$Δ_3$. Να βρεθεί η ταχύτητα, κατά μέτρο και κατεύθυνση, με την οποία το κιβώτιο φθάνει στο έδαφος.

$Δ_4$. Τι είδους τροχιά θα διαγράψει το κιβώτιο για τον πιλότο του αεροπλάνου και γιατί;

Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g = 10 m / s^2 και η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Λύση

$Δ_1$.

Το κιβώτιο εκτελεί οριζόντια βολή.

Στον άξονα x εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή: $υ_0 = x / t \Rightarrow t = x / υ_0$ …(I)

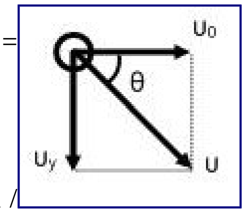
Στον άξονα y εκτελεί ελεύθερη πτώση: $y = ½·g·t^2 \Rightarrow$ με την βοήθεια της σχέσης (I) $\Rightarrow y = ½·g·(x / υ_0)^2 \Rightarrow y = (g / (2·υ_0^2))·x^2$ αυτή είναι η εξίσωση τροχιάς του κιβωτίου, στην περίπτωση μας, πρέπει να μετατρέψουμε την ταχύτητα στο S.I. σύστημα μονάδων: $υ_0$ = 900 Km / h ⇒ $υ_0$ = 900·(1000 m) / (3600 s) ⇒ $υ_0$ = 250 m / s .

Άρα $y = (g / (2·υ_0^2))·x^2 \Rightarrow y = (10 / (2·250^2))·x^2 \Rightarrow y = (1 / 12500)·x^2$.

$Δ_2$.Το μέγιστο ύψος H κατά την ελεύθερη πτώση του κιβωτίου δίνεται:

$H = ½·g·t^2 \Rightarrow t^2 = 2·H / g \Rightarrow t^2 = 2·12500 / 10 \Rightarrow t^2 = 2500 \Rightarrow t = 50$ s , ο ολικός χρόνος κίνησης του κιβωτίου από την στιγμή που αφέθηκε από το αεροπλάνο έως τη στιγμή που συνάντησε το έδαφος.

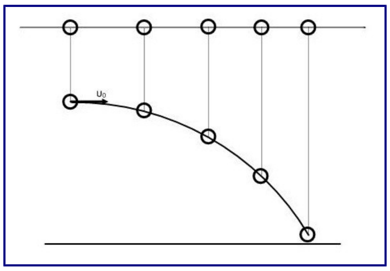
Η μέγιστη οριζόντια απόσταση (βεληνεκές) που διέγραψε το κιβώτιο είναι: $S = υ_0·t \Rightarrow S = 250·50 \Rightarrow S = 12500$ m .



$Δ_3$.Η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας, όταν το κιβώτιο φτάνει στο έδαφος:

$υ_y = g·t \Rightarrow υ_y = 10·50 \Rightarrow υ_y = 500$ m / s .

Το μέτρο της ταχύτητας: $υ^2 = υ_0^2 + υ_y^2 \Rightarrow υ^2 = 250^2 + 500^2 \Rightarrow υ^2 = 312500 \Rightarrow υ = 559$ m / s . Η διεύθυνση της ταχύτητας: $εφ\,θ = υ_y / υ_0 \Rightarrow εφ\,θ = 500 / 250 \Rightarrow εφ\,θ = 2$.

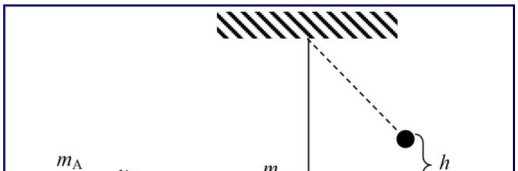


$Δ_4$.Το κιβώτιο θα διαγράψει ελεύθερη πτώση ως προς το κινούμενο σύστημα αναφοράς του πιλότου του αεροπλάνου. Το αεροπλάνο και το κιβώτιο έχουν κάθε στιγμή την ίδια οριζόντια ταχύτητα $υ_0$ όπως φαίνεται στο σχήμα (ο πιλότος όταν αφήνει το κιβώτιο, συνεχίζει να κινείται εκτελώντας ευθύγραμμη ομαλή κίνηση).

Το αεροπλάνο σε όλη την διάρκεια της πτώσης του κιβωτίου θα βρίσκεται πάνω από αυτό. Ο πιλότος θα βλέπει το κιβώτιο να πέφτει κατακόρυφα.

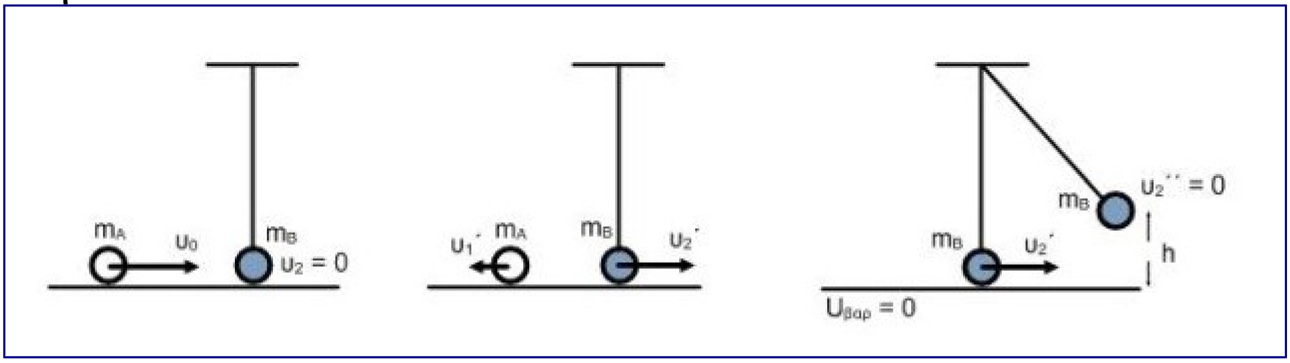
ΑΣΚΗΣΗ 2

Το σώμα A μάζας m_A = 1 kg κινείται με ταχύτητα u_0 = 8 m / s σε λείο οριζόντιο δάπεδο και συγκρούεται μετωπικά με το σώμα B, που έχει μάζα m_B = 3 kg και βρίσκεται στο άκρο αβαρούς και μη εκτατού (που δεν αλλάζει το μήκος του) σχοινιού. Μετά τη σύγκρουση το σώμα B ανυψώνεται κατά h = 0,45 m από την αρχική του θέση.

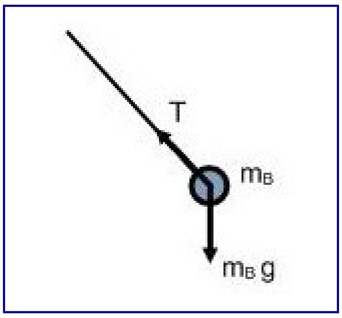


$Δ_1$. Να υπολογιστεί η ταχύτητα του σώματος B, αμέσως μετά την κρούση.

Δ_2. Να υπολογιστεί η μεταβολή της ορμής του σώματος Α κατά την κρούση, λαμβάνοντας ως θετική την αρχική φορά κίνησης του σώματος Α.
Δ_3. Να υπολογιστεί η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος Α πριν και μετά την κρούση.
Δ_4. Να υπολογιστεί το ποσό θερμικής ενέργειας (θερμότητας) που ελευθερώνεται εξ αιτίας της κρούσης των δύο σωμάτων.
Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της γης $g = 10\ m / s^2$. Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.
Λύση



Δ_1. Θα εφαρμόσουμε θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το σώμα Β με μάζα m_B στις θέσεις, αμέσως μετά την κρούση και όταν έχει φτάσει σε ύψος h:
(το παραπάνω θεώρημα ισχύει πάντα , η τάση του νήματος δεν παράγει έργο γιατί είναι συνεχώς κάθετη στη διεύθυνση κίνησης.)



$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_w \Rightarrow 0 - ½\cdot m_B\cdot υ_2΄^2 = - m_B\cdot g\cdot h \Rightarrow υ_2΄^2 = 2\cdot g\cdot h \Rightarrow υ_2΄^2 = 2\cdot 10\cdot 0{,}45 \Rightarrow υ_2΄ = 3\ m / s$.

Εναλλακτικά, μπορεί να λυθεί το ερώτημα με την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για το σώμα Β με μάζα m_B στις θέσεις, αμέσως μετά την κρούση και όταν έχει φτάσει σε ύψος h:
$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow K_{αρχ} + U_{βαρ,αρχ} = K_{τελ} + U_{βαρ,τελ} \Rightarrow ½\cdot m_B\cdot υ_2΄^2 + 0 = 0 + m_B\cdot g\cdot h \Rightarrow$ και η συνέχεια είναι ακριβώς η ίδια.
(Στη περίπτωση αυτή πρέπει να συμπληρώσουμε ότι στο σώμα ασκείται το βάρος που είναι διατηρητική δύναμη και η τάση του νήματος δεν παράγει έργο γιατί είναι συνεχώς κάθετη στη διεύθυνση κίνησης.)

Δ_2. Για την κρούση των σωμάτων ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής:
(διανυσματική σχέση, με θετική φορά προς τα δεξιά)
$P_{ολ,πριν} = P_{ολ,μετά} \Rightarrow m_A\cdot υ_0 = m_A\cdot υ_1΄ + m_B\cdot υ_2΄ \Rightarrow υ_1΄ = (m_A\cdot υ_0 - m_B\cdot υ_2΄) / m_A \Rightarrow υ_1΄ = (1\cdot 8 - 3\cdot 3) / 1 \Rightarrow υ_1΄ = -1\ m / s$ (το μείον δηλώνει ότι η φορά του είναι προς τα αριστερά).
(Να σχολιάσουμε ότι στο σχήμα έχουμε ζωγραφίσει την σωστή φορά του $υ_1΄$ προς τα αριστερά, αλλά αρχικά δεν την γνωρίζουμε, άρα το θεωρούμε προς τα δεξιά και το πρόσημο του θα μας δώσει την απάντηση.)
Η μεταβολή της ορμής του Α:(διανυσματική σχέση)
$ΔP_A = P_{A,μετά} - P_{A,πριν} \Rightarrow ΔP_A = m_A\cdot υ_1΄ - m_A\cdot υ_0 \Rightarrow ΔP_A = m_A\cdot(\cdot υ_1΄ - υ_0) \Rightarrow ΔP_A = 1\cdot((-1) - (+8)) \Rightarrow ΔP_A = -9\ kg\cdot m / s$ (το μείον δηλώνει ότι η φορά του είναι προς τα αριστερά).

Δ_3. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του Α:
$ΔK_A = K_{A,μετά} - K_{A,πριν} \Rightarrow ΔK_A = ½\cdot m_A\cdot υ_1΄^2 - ½\cdot m_A\cdot υ_0^2 \Rightarrow ΔK_A = ½\cdot m_A\cdot(υ_1΄^2 - υ_0^2) \Rightarrow ΔK_A = ½\cdot 1\cdot(1^2 - 8^2) = -31{,}5$ joule .

Δ_4. Q η θερμότητα που απελευθερώνεται κατά την κρούση, ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας:
$K_{ολ,πριν} = K_{ολ,μετά} + Q \Rightarrow Q = K_{ολ,πριν} - K_{ολ,μετά} \Rightarrow Q = ½\cdot m_A\cdot υ_o^2 - (½\cdot m_A\cdot υ_1΄^2 + ½\cdot m_B\cdot υ_2΄^2) \Rightarrow Q = ½\cdot 1\cdot 8^2 - (½\cdot 1\cdot 1^2 + ½\cdot 3\cdot 3^2) \Rightarrow Q = 18$ joule .

ΑΣΚΗΣΗ 3

Ένα σώμα Α μάζας 2 kg κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα μέτρου $υ_1$ = 12 m / s και συγκρούεται με ακίνητο σώμα Β. Μετά την κρούση τα δύο σώματα κινούνται σαν ένα σώμα με την ίδια ταχύτητα. Κατά τη κρούση αυτή, το σώμα Α σώμα χάνει το 75% της κινητικής του ενέργειας.

$Δ_1$. Να υπολογισθεί το μέτρο της ταχύτητας των δύο σωμάτων μετά την κρούση.

$Δ_2$. Να βρεθεί η μάζα του σώματος Β.

$Δ_3$. Να βρεθεί η μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας και το μέτρο της μεταβολής της ορμής του σώματος Α.

$Δ_4$. Αν τα δύο σώματα μετά την κρούση δεν είχαν την ίδια ταχύτητα, αλλά το σώμα Α εκινείτο ομόρροπα με την αρχική κατεύθυνση κίνησής και με ταχύτητα μέτρου $υ_1΄$ = 1 m / s , ποια θα ήταν η ταχύτητα του σώματος Β (μέτρο και κατεύθυνση) ;

Λύση

$Δ_1$. Στην εκφώνηση δίνεται:

$K_{A,μετά} = K_{A,πριν} – (75 / 100)·K_{A,πριν} \Rightarrow K_{A,μετά} = (25 / 100)·K_{A,πριν} \Rightarrow ½·m_A·υ_κ^2 = ¼·½·m_A·υ_1^2 \Rightarrow υ_κ^2 = ¼·υ_1^2 \Rightarrow υ_κ^2 = ¼·12^2 \Rightarrow υ_κ^2 = 36 \Rightarrow υ_κ = 6$ m / s .

Και τα δύο σώματα κινούνται με την $υ_κ$ ταχύτητα συσσωματώματος.

$Δ_2$. Έχουμε πλαστική κρούση άρα ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής:

(μια διανυσματική σχέση που ισχύει σε μονωμένο σύστημα σωμάτων)

$P_{ολ,πριν} = P_{ολ,πριν} \Rightarrow m_A·υ_1 + 0 = (m_A + m_B)·υ_κ \Rightarrow m_A·υ_1 = m_A·υ_κ + m_B·υ_κ \Rightarrow m_B = m_A·(υ_1 - υ_κ) / υ_κ \Rightarrow m_B = 2·(12 – 6) / 6 \Rightarrow m_B = 2$ kg .

$Δ_3$. Η μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας του σώματος Α είναι ίση με:

$Δυ = υ_κ – υ_1 \Rightarrow Δυ = 6 – 12 \Rightarrow Δυ = – 6$ m / s , το μείον οφείλεται στην ελάττωση της ταχύτητας του Α.

Η μεταβολή της ορμής του σώματος Α είναι ίση με:

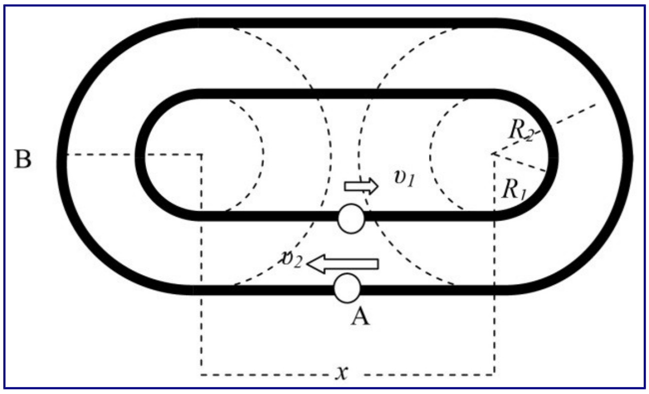
$ΔP = P_{τελ} – P_{αρχ} \Rightarrow ΔP = m_A·υ_κ – m_A·υ_1 \Rightarrow ΔP = 2·6 – 2·12 \Rightarrow ΔP = – 12$ kg·m / s , άρα το μέτρο της μεταβολής της ορμής θα είναι ίσο με $│ΔP│ = + 12$ kg·m / s .

$Δ_4$. Από την αρχή διατήρησης της ορμής προκύπτει:

$P΄_{ολ,πριν} = P΄_{ολ,πριν} \Rightarrow m_A·υ_1 + 0 = m_A·υ_1΄ + m_B·υ_2΄ \Rightarrow υ_2΄ = m_A·(υ_1 – υ_1΄) / m_B \Rightarrow υ_2΄ = 2·(12 – 1) / 2 \Rightarrow υ_2΄ = 11$ m / s . Η φορά της ταχύτητας είναι ίδια με την φορά της $υ_1$ ταχύτητας.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Στο σχήμα φαίνεται η κάτοψη ενός στίβου. Οι στροφές είναι ημιπεριφέρειες κύκλων. Ο αθλητής (1) τρέχει στον εσωτερικό διάδρομο με ταχύτητα μέτρου $υ_1$ = 5 m / s και ο αθλητής (2) στον εξωτερικό διάδρομο με ταχύτητα μέτρου $υ_2$ = 6 m / s. Τα μήκη των ακτίνων των ημιπεριφερειών των κύκλων είναι R_1 = 20 m και R_2 = 30 m. Το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος είναι x = 100 m.



$Δ_1$. Να βρεθεί πόσο χρόνο χρειάζεται ο αθλητής (1) για να διανύσει το τμήμα της μίας ημιπεριφέρειας.

$Δ_2$. Να βρεθεί γωνιακή ταχύτητα του αθλητή (2) καθώς τρέχει στα ημικυκλικά τμήματα της διαδρομής του.

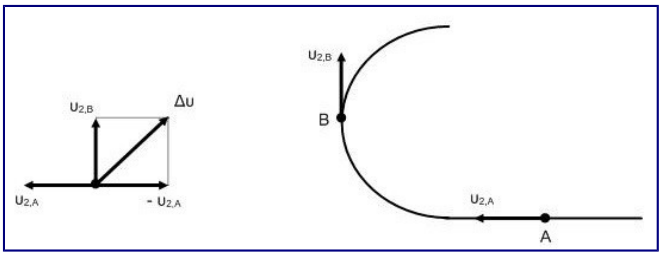
$Δ_3$. Να βρεθεί πόσο χρόνο χρειάζεται κάθε αθλητής για να κάνει μία περιφορά του σταδίου.

$Δ_4$. Να βρεθεί το μέτρο της μεταβολής της ταχύτητας του αθλητή (2) για την μετακίνηση από το σημείο Α στο σημείο Β του διαδρόμου που τρέχει.

Λύση

$Δ_1$. και **$Δ_2$.** Οι αθλητές (1) και (2) εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση στις ημιπεριφέρειες με γραμμική ταχύτητα $υ_1$ και $υ_2$ αντίστοιχα. Σχέση μεταξύ γραμμικής και γωνιακής ταχύτητας: για τον αθλητή (1):

$υ_1 = ω_1 \cdot R_1 \Rightarrow ω_1 = υ_1 / R_1 \Rightarrow ω_1 = 5 / 20 \Rightarrow ω_1 = ¼$ rad / s .
για τον αθλητή (2): $υ_2 = ω_2 \cdot R_2 \Rightarrow ω_2 = υ_2 / R_2 \Rightarrow ω_2 = 6 / 30 \Rightarrow ω_2 = (1 / 5)$ rad / s (το ζητούμενο του $Δ_2$ ερωτήματος.)
Σχέση γωνιακής ταχύτητας και περιόδου:
για τον αθλητή (1): $ω_1 = 2π / T_1 \Rightarrow T_1 = 2π / ω_1 \Rightarrow T_1 = 2π / ¼ \Rightarrow T_1 = 8π$ s .
για τον αθλητή (2): $ω_2 = 2π / T_2 \Rightarrow T_2 = 2π / ω_2 \Rightarrow T_2 = 2π / (1 / 5) \Rightarrow T_2 = 10π$ s .
Κάθε ημιπεριφέρεια είναι το μισό ενός κύκλου, άρα ο ζητούμενος στο $Δ_1$ (ερώτημα) χρόνος t για τον αθλητή (1) είναι: $t = T_1 / 2 \Rightarrow t = 8π / 2 \Rightarrow t = 4π$ s .
$Δ_3$. Οι αθλητές (1) και (2) για να κάνουν μια περιφορά του σταδίου πρέπει να διανύσουν από ένα κύκλο με ακτίνα R_1 και R_2 αντίστοιχα και απόσταση 2x.
Την 2x απόσταση διανύει ο κάθε αθλητής εκτελώντας ευθύγραμμη ομαλή κίνηση σε χρόνο:
ο αθλητής (1) : $υ_1 = 2x / t_1 \Rightarrow t_1 = 2x / υ_1 \Rightarrow t_1 = 2 \cdot 100 / 5 \Rightarrow t_1 = 40$ s .
ο αθλητής (2) : $υ_2 = 2x / t_2 \Rightarrow t_2 = 2x / υ_2 \Rightarrow t_2 = 2 \cdot 100 / 6 \Rightarrow t_1 = 100 / 3$ s .
Ο χρόνος που χρειάζεται κάθε αθλητής για να κάνει μια περιφορά του σταδίου είναι:
ο αθλητής (1) : $t_{ολ,1} = T_1 + t_1 \Rightarrow t_{ολ,1} = 8π + 40$ s .
ο αθλητής (2) : $t_{ολ,2} = T_2 + t_2 \Rightarrow t_{ολ,2} = 10π + 100 / 3$ s .
$Δ_4$.
Το μέτρο της μεταβολής της ταχύτητας του αθλητή (2), για την μετακίνηση από το Α στο σημείο Β του σχήματος: $Δυ = υ_{2,B} – υ_{2,A}$ (διανυσματική σχέση), όπου τα μέτρα των ταχυτήτων είναι ίσα $υ_{2,B} = υ_{2,A} = υ_2$.



Στο σχήμα βλέπουμε το διάνυσμα $υ_{2,A}$, ζωγραφίζουμε το διάνυσμα $– υ_{2,A}$, εφαρμόζουμε τον κανόνα του παραλληλογράμμου στα $υ_{2,B}$ και $– υ_{2,A}$, η διαγώνιος είναι η μεταβολή της ταχύτητας Δυ
Το (ζητούμενο) μέτρο της μεταβολής της ταχύτητας είναι:
$Δυ^2 = υ_{2,B}^2 + (-υ_{2,A})^2 \Rightarrow Δυ^2 = 2 \cdot υ_2^2 \Rightarrow Δυ = υ_2 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow Δυ = 6 \cdot \sqrt{2}$ m / s .

ΑΣΚΗΣΗ 5

Αεροπλάνο κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $υ_1$ = 100 m / s σε ύψος h = 405 m από το έδαφος. Στο έδαφος κινείται αντίρροπα όχημα με ταχύτητα μέτρου $υ_2$, στην ίδια διεύθυνση κίνησης με το αεροπλάνο. Όταν το αεροπλάνο απέχει από το όχημα οριζόντια απόσταση S = 989 m, αφήνεται μια βόμβα. Η βόμβα αστοχεί γιατί το όχημα έχει προσπεράσει το σημείο επαφής της βόμβας με το έδαφος κατά x = 1 m.

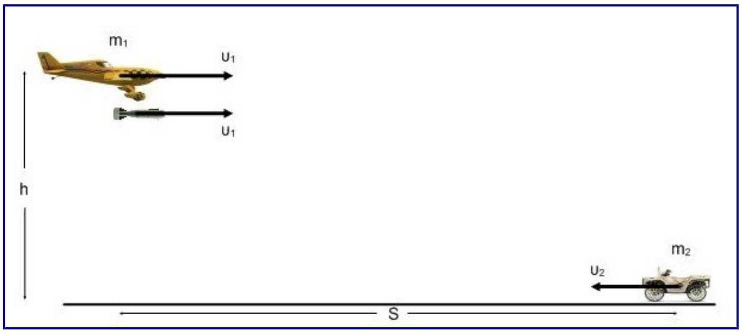
$Δ_1$. Να υπολογισθεί ο χρόνος καθόδου της βόμβας μέχρι το έδαφος.
$Δ_2$. Να υπολογισθεί η ταχύτητα του οχήματος.
$Δ_3$. Να υπολογισθεί το μέτρο της ταχύτητας της βόμβας τη στιγμή της πρόσκρουσης στο έδαφος.
$Δ_4$. Αν το όχημα κινούταν με ταχύτητα ίσου μέτρου με αυτή που υπολογίστηκε στο $Δ_2$. αλλά ομόρροπα με το αεροπλάνο, σε ποια οριζόντια απόσταση s’ έπρεπε ο πιλότος να αφήσει τη βόμβα, ώστε αυτή να πετύχει το όχημα;
Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα. Η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της γης είναι: g = 10 m / s^2.

Λύση

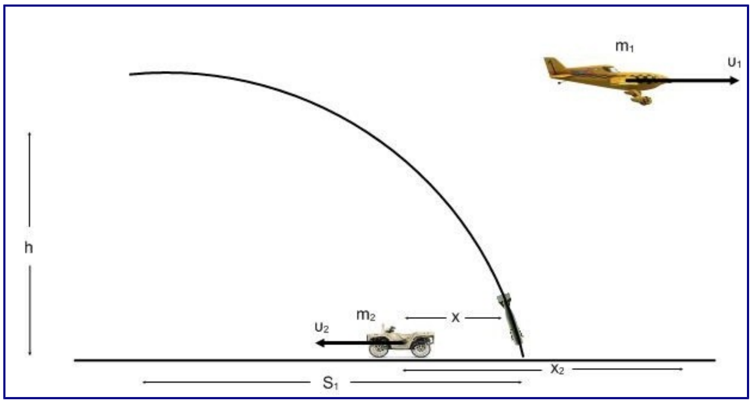
$Δ_1$. Η βόμβα (ή το βλήμα) εκτελούν οριζόντια βολή:

Το μέγιστο ύψος (μέγιστη κατακόρυφη μετατόπιση): $h = ½·g·t^2 \Rightarrow t^2 = 2·h / g \Rightarrow t^2 = 2·405 / 10 \Rightarrow t^2 = 81 \Rightarrow t = 9$ s .

$Δ_2$. Το βεληνεκές (η μέγιστη οριζόντια μετατόπιση) της βόμβας είναι $S_1 = υ_1·t = 100·9 = 900$ m .



Το αυτοκίνητο στον ίδιο χρόνο έχει διανύσει απόσταση (δείτε και τα δύο από τα παραπάνω σχήματα) $x_2 = S – S_1 + x \Rightarrow x_2 = 989 – 900 + 1 \Rightarrow x_2 = 90$ m .

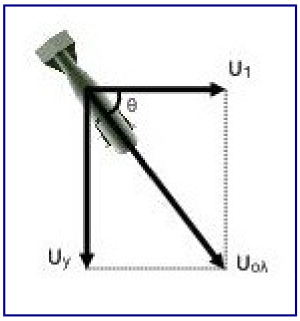


Το αυτοκίνητο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση: $υ_2 = x_2 / t \Rightarrow υ_2 = 90 / 9 \Rightarrow υ_2 = 10$ m / s .

$Δ_3$. Η ταχύτητα της βόμβας τη στιγμή της πρόσκρουσης: $υ_{ολ}^2 = υ_1^2 + υ_y^2$, όπου $υ_y$ η ταχύτητα της βόμβας στο κατακόρυφο άξονα: $υ_y = g·t \Rightarrow υ_y = 10·9 \Rightarrow υ_y = 90$ m / s .

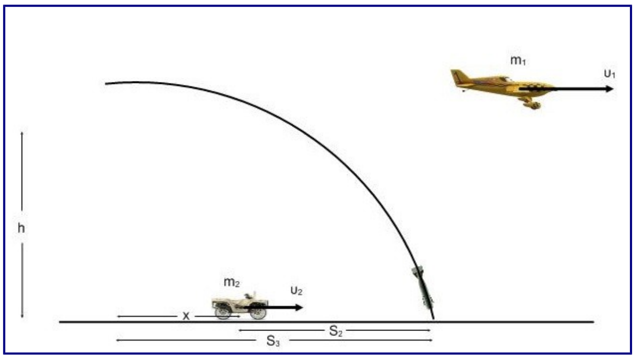
Άρα $υ_{ολ}^2 = υ_1^2 + υ_y^2 \Rightarrow υ_{ολ}^2 = 100^2 + 90^2 \Rightarrow υ_{ολ}^2 = 10000 + 8100 \Rightarrow υ_{ολ}^2 = 18100 \Rightarrow υ_{ολ} = \sqrt{18100}$ m / s .

Μας ζητείται μόνο το μέτρο της ταχύτητας, για αυτό δεν θα υπολογίσουμε την διεύθυνση (δηλαδή την εφ θ του σχήματος).

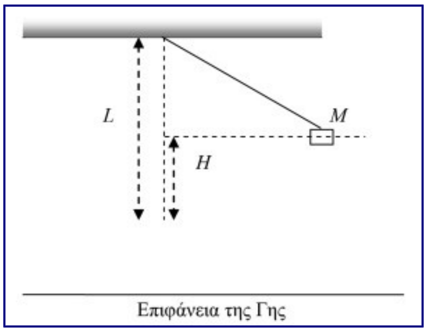


$Δ_4$.

Σύμφωνα με το σχήμα: $S΄ = S_3 – S_2 \Rightarrow S΄ = υ_1·t – υ_2·t \Rightarrow S΄ = (υ_1 – υ_2)·t \Rightarrow S΄ = (100 – 10)·9 \Rightarrow S΄ = 810$ m .



ΑΣΚΗΣΗ 6



Σώμα μάζας Μ = 4 kg είναι δεμένο στην άκρη νήματος μήκους L = 1 m και ισορροπεί κατακόρυφα. Κάποια στιγμή ανυψώνουμε το σώμα, σε κατακόρυφη απόσταση Η = 45 cm από την αρχική του θέση, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, και το αφήνουμε ελεύθερο.

$Δ_1$. Υπολογίστε την ταχύτητα που έχει το σώμα μάζας Μ όταν περνά από την κατακόρυφο.

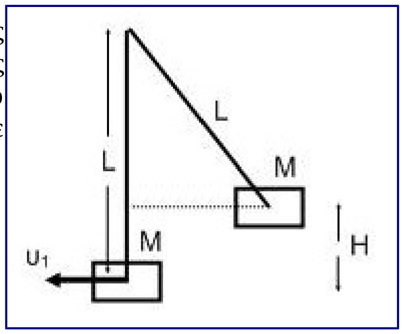
$Δ_2$. Τη στιγμή που το σώμα μάζας Μ διέρχεται από την κατακόρυφο, δεύτερο σώμα μάζας m = 0,5 kg κινούμενο οριζόντια και αντίθετα από το σώμα μάζας Μ σφηνώνεται σε αυτό, με αποτέλεσμα να δημιουργηθεί συσσωμάτωμα. Ποια πρέπει να είναι η ταχύτητα του σώματος μάζας m ώστε το συσσωμάτωμα να παραμείνει ακίνητο αμέσως μετά την κρούση;

$Δ_3$. Υπολογίστε τη μεταβολή του μέτρου της δύναμης που ασκεί το νήμα στο σώμα μάζας Μ και στο συσσωμάτωμα αμέσως πριν και αμέσως μετά την κρούση.

$Δ_4$. Με ποια ταχύτητα θα πρέπει να κινείται το σώμα μάζας m πριν από την κρούση, ώστε το συσσωμάτωμα που θα προκύψει να κινηθεί αμέσως μετά την κρούση στην ίδια κατεύθυνση με αυτή που κινούταν το σώμα μάζας Μ πριν την κρούση και να φθάσει σε θέση που να σχηματίζει με την κατακόρυφο γωνία θ, για την οποία συν θ = 0,8 ;

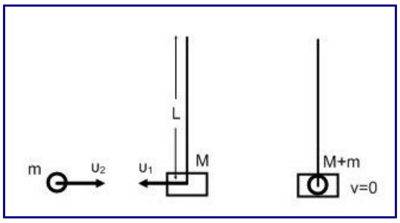
Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης g = 10 m / s^2. Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Λύση



$Δ_1$. Ισχύει η αρχή διατήρησης μηχανικής ενέργειας: (επειδή στο σύστημα επιδρούν διατηρητικές δυνάμεις όπως το βάρος M·g, επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας παίρνουμε την κατώτερη θέση του σώματος (κατακόρυφη θέση). Το έργο της τάσης του νήματος Τ είναι μηδέν δεδομένου ότι είναι κάθετο στη διεύθυνση κίνησης που είναι η εφαπτόμενη σε κάθε σημείο της κυκλικής τροχιάς)

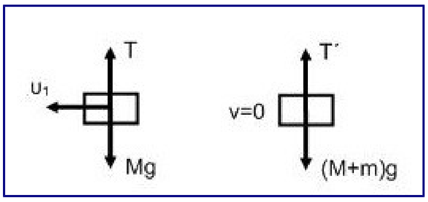
$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow 0 + M\cdot g\cdot H = ½\cdot M\cdot υ_1^2 + 0 \Rightarrow$
$υ_1^2 = 2\cdot g\cdot H \Rightarrow υ_1^2 = 2\cdot 10\cdot 45\cdot 10^{-2} \Rightarrow υ_1^2 = 9 \Rightarrow υ_1 = 3$ m / s .



$Δ_2$. Έχουμε πλαστική κρούση, άρα ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής:
(Ξανά: το σύστημα είναι μονωμένο, η $ΣF_{εξ} = 0$, θετική φορά στο σχήμα η φορά προς τα αριστερά)

$P_{ολ,αρχ} = P_{ολ,τελ} \Rightarrow P_M + P_m = P_M' + P_m' \Rightarrow M\cdot υ_1 – m\cdot υ_2 = 0 \Rightarrow$
$υ_2 = M\cdot υ_1 / m \Rightarrow υ_2 = 4\cdot 3 / ½ \Rightarrow υ_2 = 24$ m / s .

$Δ_3$.

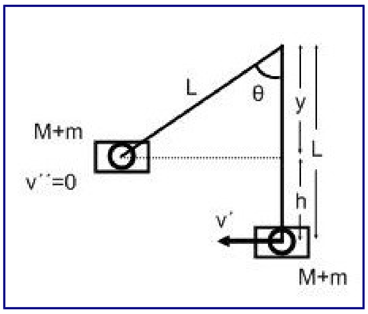


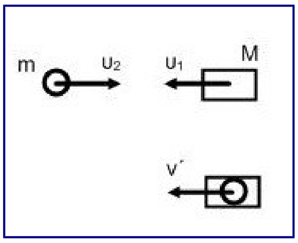
Η κεντρομόλος δύναμη πριν την κρούση, για το σώμα Μ :
$F_κ = T – M\cdot g \Rightarrow M\cdot υ_1^2 / L = T – M\cdot g \Rightarrow T = M\cdot υ_1^2 / L + M\cdot g \Rightarrow$
$T = 4\cdot 9 / 1 + 4\cdot 10 \Rightarrow T = 76$ N .

Η κεντρομόλος δύναμη μετά την κρούση, για το σώμα Μ + m :
$F_κ' = T' – (m + M)\cdot g \Rightarrow 0 = T' – (m + M)\cdot g \Rightarrow T' = (m + M)\cdot g \Rightarrow$
$T' = (4 + ½)\cdot 10 \Rightarrow T' = 45$ N .

Η μεταβολή του μέτρου της δύναμης που ασκεί το νήμα στο σώμα Μ πριν την κρούση, αλλά και στο Μ + m μετά την κρούση είναι:
$ΔT = T' - T \Rightarrow ΔT = 45 – 76 \Rightarrow ΔT = – 31$ N .

$Δ_4$.Θα υπολογίσουμε αρχικά το ύψος h που ανέβηκε το συσσωμάτωμα, όπου η ταχύτητα του σώματος είναι μηδέν (το συσσωμάτωμα στιγμιαία ακινητοποιείται).

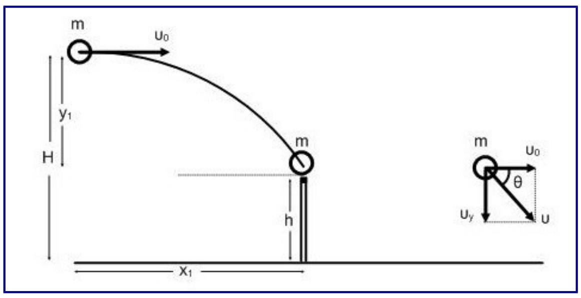




Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε:
το συν θ = y / L ⇒y = L·συν θ και L = h + y ⇒h = L – y ⇒h = L – L·συν θ ⇒h = L·(1 – συν θ) ⇒
h = 1·(1 – 0,8) ⇒h = 0,2 m .
Θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας: (ισχύει παντού, αφορά στη περίπτωση μας το συσσωμάτωμα από την κατακόρυφη θέση , στη θέση όπου η ταχύτητα του μηδενίζεται, το έργο του βάρους είναι αρνητικό γιατί η φορά του βάρους (προς τα κάτω) είναι αντίθετη της φοράς κίνησης (προς τα πάνω))
$ΔK = W_w ⇒K_{τελ} – K_{αρχ} = W_w ⇒0 – ½·(M + m)·v'^2 = – (M + m)·g·h ⇒$
$v'^2 = 2·g·h ⇒v'^2 = 2·10·0,2 ⇒v' = 2$ m / s .
Ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής για την νέα πλαστική κρούση:
$P_{ολ,αρχ}' = P_{ολ,τελ}' ⇒P_M' + P_m' = P_M'' + P_m'' ⇒m·υ_2' = M·υ_1 – (M + m)·v' ⇒$
$υ_2' = (M·υ_1 – (M + m)·v') / m ⇒υ_2' = (4·3 – (4 + ½)·2) / ½ ⇒υ_2' = 6$ m / s .

ΑΣΚΗΣΗ 7

Ένας αθλητής του βόλεϊ, εκτελεί σερβίς με άλμα. Το χέρι του αθλητή χτυπά την μπάλα όταν αυτή βρίσκεται στο ανώτερο σημείο, όπου έχει μηδενική ταχύτητα, ασκώντας της μέση οριζόντια δύναμη F = 600 N για χρονικό διάστημα Δt = 0,01 s. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η μπάλα να φεύγει από το χέρι του αθλητή με οριζόντια ταχύτητα $υ_0$, καθώς δεχόμαστε ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας μεταβάλλει ασήμαντα την ταχύτητα στον κατακόρυφο άξονα στο χρονικό διάστημα Δt.
$Δ_1$. Αν η μάζα της μπάλας του βόλεϊ είναι περίπου ίση με 300 g, υπολογίστε την ταχύτητα $υ_0$.
$Δ_2$. Αν θεωρήσετε ότι το ύψος του φιλέ είναι ίσο με 2,5 m και ότι ο αθλητής χτυπά το σερβίς από απόσταση ίση με 10 m πίσω από το φιλέ, υπολογίστε από ποιο ύψος πρέπει να φύγει η μπάλα ώστε να περάσει εφαπτομενικά από το φιλέ.
$Δ_3$. Υπολογίστε την ταχύτητα που έχει η μπάλα τη στιγμή που διέρχεται εφαπτομενικά από το φιλέ του βόλεϊ.
$Δ_4$. Υπολογίστε το έργο της δύναμης του βάρους καθώς και την μέση ισχύ του βάρους από τη στιγμή που η μπάλα φεύγει από το χέρι του αθλητή μέχρι τη στιγμή που διέρχεται εφαπτομενικά από το φιλέ.
Δίνεται g = 10 m / s^2, ενώ θεωρείστε ότι η αντίσταση από τον αέρα είναι αμελητέα.
Λύση
$Δ_1$. 2ος γενικευμένος νόμος Newton:
$ΣF = ΔP / Δt ⇒ F = m·υ_0 – 0 / Δt ⇒ υ_0 = F·Δt / m ⇒ υ_0 = 600·0,01 / 3·10^{-1} ⇒ υ_0 = 20$ m / s .
$Δ_2$. Η μπάλα εκτελεί οριζόντια βολή:

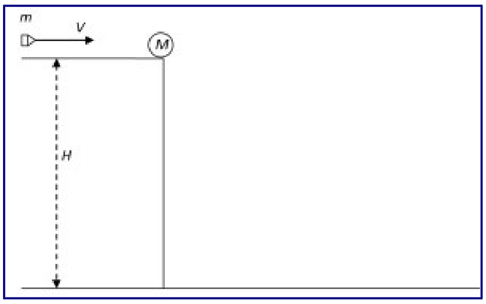


Στον x – άξονα: $x_1 = υ_0·t_1 ⇒ t_1 = x_1 / υ_0 ⇒ t_1 = 10 / 20 ⇒ t_1 = ½$ s .$H = y_1 + h ⇒ H = ½·g·t_1^2 + h ⇒ H = ½·10·¼ + 2,5 ⇒ H = (5 / 4) + 2,5 ⇒ H = 3,75$ m .
$Δ_3$. Η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας:
$υ_y = g·t_1 ⇒ υ_y = 10·½ = 5$ m / s .
Το μέτρο της ταχύτητας:
$υ^2 = υ_0^2 + υ_y^2 ⇒ υ^2 = 20^2 + 5^2 ⇒ υ^2 = 400 + 25 ⇒ υ^2 = 425 ⇒ υ = 5·\sqrt{17}$ m / s .
Η διεύθυνση της ταχύτητας (η ταχύτητα είναι διανυσματικό μέγεθος):
$εφ\ θ = υ_y / υ_0 ⇒ εφ\ θ = 5 / 20 = ¼$.
$Δ_4$. Θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας:
(η μεταβολή της κινητικής ενέργειας της μπάλας, ισούται με το έργο όλων των δυνάμεων που ασκούνται στη μπάλα, ένα θεώρημα που είναι μια άλλη έκφραση της αρχής διατήρησης της ενέργειας και ισχύει πάντα)

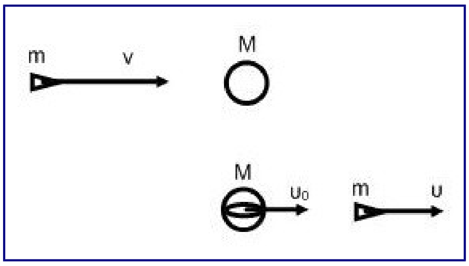
$\Delta K = K_{τελ} - K_{αρχ} = W_w \Rightarrow W_w = ½\cdot m\cdot υ^2 - ½\cdot m\cdot υ_0^2 \Rightarrow W_w = ½\cdot m\cdot(υ^2 - υ_0^2) \Rightarrow W_w = ½\cdot 0{,}3\cdot(425 - 400) \Rightarrow W_w =$ 3,75 joule .
η μέση ισχύς του βάρους :
$P_μ = W_w / \Delta t \Rightarrow P_μ = 3{,}75 / 0{,}5 \Rightarrow P_μ = 7{,}5$ W .
Ή για να ελέγξουμε το αποτέλεσμα η σχέση του έργου του βάρους W_w με την μεταβολή της δυναμικής ΔU ενέργειας :
$W_w = -\Delta U \Rightarrow W_w = -(U_{τελ} - U_{αρχ}) \Rightarrow W_w = -(m\cdot g\cdot h - m\cdot g\cdot H) \Rightarrow W_w = m\cdot g\cdot(H - h) \Rightarrow W_w = 0{,}3\cdot 10\cdot(3{,}75 - 2{,}5\ ) \Rightarrow W_w = 3{,}75$ joule .

ΑΣΚΗΣΗ 8

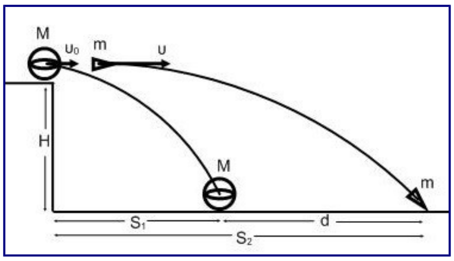
Σώμα μάζας M = 5 kg βρίσκεται στην άκρη ενός επίπλου ύψους H = 1,8 m όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί. Ένα βλήμα μάζας m = 200 g κινείται με οριζόντια ταχύτητα v = 200 m / s και διαπερνά το σώμα M ακαριαία, εξερχόμενο με ταχύτητα υ = 50 m / s.



$Δ_1$. Υπολογίστε την ταχύτητα $υ_0$ που θα αποκτήσει αμέσως μετά τη διάτρηση το σώμα M.
$Δ_2$. Υπολογίστε την απώλεια μηχανικής ενέργειας κατά την διάτρηση του σώματος M από το m.
$Δ_3$. Με τι χρονική διαφορά θα φθάσουν στο έδαφος τα δύο σώματα; Υπολογίστε την διαφορά των οριζόντιων αποστάσεων στις οποίες τα δύο σώματα θα συναντήσουν το έδαφος.
$Δ_4$. Κάποια χρονική στιγμή t_1 η κινητική ενέργεια του σώματος M είναι 1,25 φορές μεγαλύτερη από την κινητική ενέργεια του σώματος M αμέσως μετά τη διάτρηση. Υπολογίστε τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή.
Λύση
$Δ_1$. Ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής:

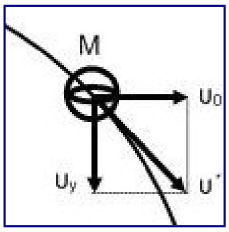


(το σύστημα είναι μονωμένο, θετική φορά έχουμε πάρει προς τα δεξιά στο σχήμα και η κρούση είναι ανελαστική)
$m\cdot v = m\cdot υ + M\cdot υ_0 \Rightarrow M\cdot υ_0 = m\cdot v - m\cdot υ \Rightarrow υ_0 = m\cdot(v - υ) / M \Rightarrow υ_0 = 0{,}2\cdot(200 - 50\ ) / 5 \Rightarrow υ_0 = 6$ m / s .
$Δ_2$. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας: $\Delta K = K_{ολ,αρχ} - K_{ολ,τελ} \Rightarrow \Delta K = ½\cdot m\cdot v^2 - (½\cdot m\cdot υ^2 + ½\cdot M\cdot υ_0^2) \Rightarrow \Delta K = ½\cdot 0{,}2\cdot 200^2 - (½\cdot 0{,}2\cdot 50^2 + ½\cdot 5\cdot 6^2) \Rightarrow \Delta K = 4000 - 340 = 3660$ joule .
Παρατηρήσαμε ότι $K_{ολ,αρχ} > K_{ολ,τελ}$ και βρήκαμε $\Delta K = K_{ολ,αρχ} - K_{ολ,τελ}$. Για να μην υπάρξουν αντιρρήσεις θεωρήστε $\Delta K = |K_{ολ,τελ} - K_{ολ,αρχ}|$.
Επίσης $\Delta E = \Delta K + \Delta U \Rightarrow \Delta E = \Delta K + 0$, όπου ΔΕ είναι η μεταβολή (απώλεια στην άσκηση) της μηχανικής ενέργειας, ΔΚ η μεταβολή της κινητικής ενέργειας και ΔU η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του συστήματος. Στη περίπτωση μας ΔU = 0 δεδομένου ότι αμέσως πριν και αμέσως μετά την διάτρηση τα σώματα M και m βρίσκονται στο ίδιο ύψος.
$Δ_3$. Αφού το ύψος είναι το ίδιο, τα δύο σώματα θα φθάσουν ταυτόχρονα στο έδαφος.
(στην εξίσωση $y = ½\cdot g\cdot t^2$ δεν υπάρχει ούτε η μάζα, ούτε η ταχύτητα του σώματος παράγοντες που αλλάζουν στα δύο σώματα της άσκησης μας)
Το ύψος H στην οριζόντια βολή:



$H = ½\cdot g\cdot t^2 \Rightarrow t^2 = 2\cdot H / g \Rightarrow t^2 = 2\cdot 1{,}8 / 10 \Rightarrow t^2 = 36\cdot 10^{-2} \Rightarrow t = 0{,}6$ s.
(άρα $\Delta t = t - t = 0$)
Το βεληνεκές S_1 για το M και S_2 για το m: $S_1 = υ_0\cdot t \Rightarrow S_1 = 6\cdot 0{,}6 \Rightarrow S_1 = 3{,}6$ m .
$S_2 = υ\cdot t \Rightarrow S_2 = 50\cdot 0{,}6 \Rightarrow S_2 = 30$ m .
Η οριζόντια απόσταση των M και m: $d = S_2 - S_1 \Rightarrow d = 30 - 3{,}6 = 26{,}4$ m .

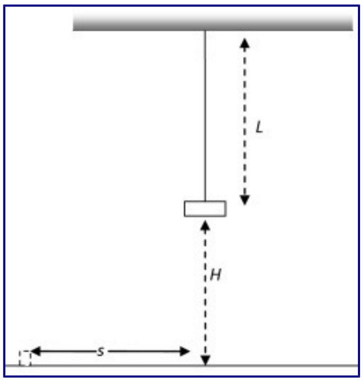
$Δ_4$.Δίνεται η σχέση των κινητικών ενεργειών K_M' και K_M, όπου K_M' η κινητική ενέργεια του σώματος M την χρονική στιγμή $t = t_1$ και K_M η κινητική ενέργεια του M αμέσως μετά την κρούση:



$K_M' = 1{,}25 \cdot K_M \Rightarrow ½ \cdot M \cdot υ'^2 = 1{,}25 \cdot ½ \cdot M \cdot υ_0^2 \Rightarrow υ'^2 = 1{,}25 \cdot υ_0^2 \Rightarrow υ_0^2 + υ_y^2 = 1{,}25 \cdot υ_0^2 \Rightarrow υ_y^2 = υ_0^2 / 4 \Rightarrow υ_y = υ_0 / 2 \Rightarrow g \cdot t_1 = υ_0 / 2 \Rightarrow t_1 = υ_0 / (2 \cdot g) \Rightarrow t_1 = 6 / (2 \cdot 10) \Rightarrow t_1 = 0{,}3$ s .

ΑΣΚΗΣΗ 9

Ένα σώμα μάζας M = 9 kg είναι δεμένο στην άκρη νήματος μήκους L = 2 m και ισορροπεί κατακόρυφα όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί. Το σώμα φέρει έναν εκρηκτικό μηχανισμό, αποτελούμενο από ένα ελατήριο, που όταν ενεργοποιείται διασπά το αρχικό σώμα σε δύο μέρη που το ένα έχει μάζα m_1 = 6 kg και παραμένει δεμένο στην άκρη του νήματος, ενώ το άλλο μάζας m_2, εκτοξεύεται με οριζόντια ταχύτητα. Αν το σώμα M βρίσκεται σε ύψος H = 1,8 m από την επιφάνεια του εδάφους, και μετά την έκρηξη το m_2 φθάνει σε οριζόντια απόσταση s = 6 m από την αρχική θέση να υπολογίσετε:



$Δ_1$. Την ταχύτητα εκτόξευσης του σώματος m_2.

$Δ_2$. Την ταχύτητα με την οποία ξεκινά την κίνησή του, το σώμα μάζας m_1 .

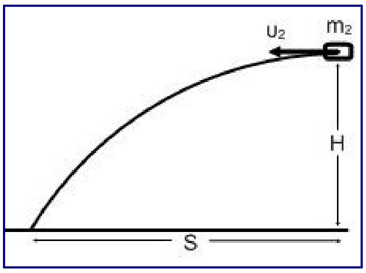
$Δ_3$. Την ενέργεια που απελευθερώθηκε από τον εκρηκτικό μηχανισμό.

$Δ_4$. Να βρεθεί η κεντρομόλος δύναμη που ασκείται στο σώμα.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10$ m / s^2.

Λύση

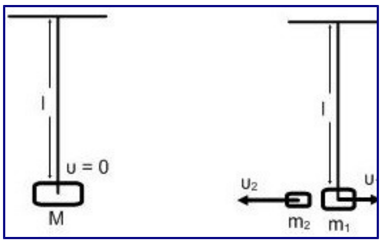
$Δ_1$. Το m_2 εκτελεί οριζόντια βολή από ύψος H: $H = ½ \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow t^2 = 2 \cdot H / g \Rightarrow t^2 = 2 \cdot 1{,}8 / 10 \Rightarrow t^2 = 36 \cdot 10^{-2} \Rightarrow t = 0{,}6$ s .



Το βεληνεκές (μέγιστη οριζόντια απόσταση) του σώματος m_2: $S = υ_2 \cdot t \Rightarrow υ_2 = S / t \Rightarrow υ_2 = 6 / 6 \cdot 10^{-1} \Rightarrow υ_2 = 10$ m / s .

$Δ_2$. Ισχύει $M = m_1 + m_2 \Rightarrow m_2 = M – m_1 \Rightarrow m_2 = 9 – 6 \Rightarrow m_2 = 3$ kg .

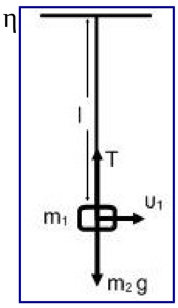
Ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής για το (μονωμένο) σύστημα M και m_2, m_1 έτσι ώστε:



$P_{ολ,αρχ} = P_{ολ,τελ} \Rightarrow 0 = m_1 \cdot υ_1 – m_2 \cdot υ_2 \Rightarrow m_1 \cdot υ_1 = m_2 \cdot υ_2 \Rightarrow υ_1 = υ_2 \cdot (m_2 / m_1) \Rightarrow υ_1 = 10 \cdot (3 / 6) \Rightarrow υ_1 = 5$ m / s .

$Δ_3$. Η αρχή διατήρησης της ενέργειας:

(η γενικότερη μορφή, προσέξτε το Q μπαίνει στο αριστερό μέλος, η $K_{ολ,αρχ}$ είναι μηδέν, το σώμα M αρχικά δεν κινείται. Υπάρχει τελική κινητική ενέργεια και στα δύο σώματα m_1, m_2, τμήματα του αρχικού σώματος M , άρα η ενέργεια αυτή προέκυψε από την έκρηξη)



$Q + K_{ολ,αρχ} = K_{ολ,τελ} \Rightarrow Q = ½ \cdot m_1 \cdot υ_1^2 + ½ \cdot m_2 \cdot υ_2^2 \Rightarrow Q = ½ \cdot 6 \cdot 5^2 + ½ \cdot 3 \cdot 10^2 \Rightarrow Q = 225$ joule .

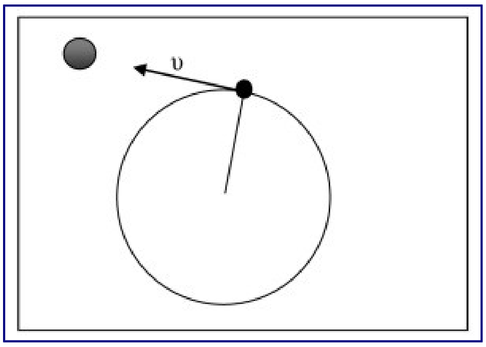
$Δ_4$. Η κεντρομόλος δύναμη που ασκείται στο m_2 :

$F_κ = m_1 \cdot υ_1^2 / l \Rightarrow F_κ = 6 \cdot 5^2 / 2 \Rightarrow F_κ = 75$ N .

Στο τέταρτο ερώτημα θα μπορούσε να ζητάει την τάση του νήματος:

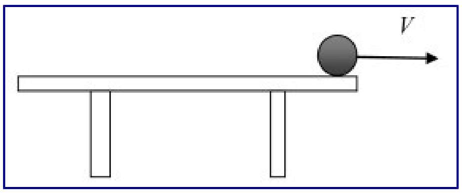
$F_κ = T – m_1 \cdot g \Rightarrow T = F_κ + m_1 \cdot g = 75 + 6 \cdot 10 = 135$ N .

ΑΣΚΗΣΗ 10



Ένα σώμα, μάζας m_1 = 0,2 kg είναι δεμένο στο άκρο νήματος του οποίου το άλλο άκρο είναι στερεωμένο σε σταθερό σημείο, εκτελεί κυκλική κίνηση πάνω σε λείο οριζόντιο τραπέζι (κάτοψη του οποίου βλέπετε στο σχήμα).
Το μήκος του νήματος είναι l = 0,5 m και η γραμμική ταχύτητα του σώματος έχει σταθερό μέτρο υ = 10 m / s.
$Δ_1$. Να βρεθούν η γωνιακή ταχύτητα ω, η περίοδος Τ και η κεντρομόλος επιτάχυνση $α_κ$ του σώματος

Κάποια στιγμή το νήμα κόβεται και το σώμα κινείται ευθύγραμμα. Στην πορεία του συναντάει δεύτερο σώμα από πλαστελίνη μάζας m_2 = 0,8 kg και συγκρούεται με αυτό πλαστικά.



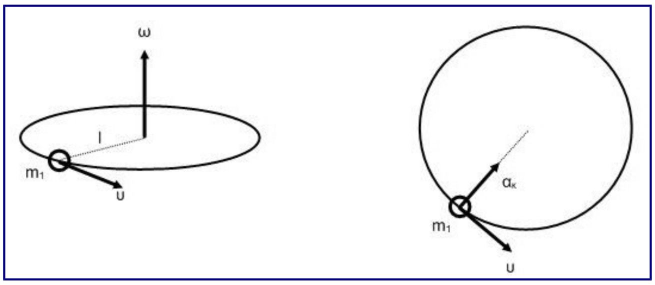
$Δ_2$. Να υπολογιστεί το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του σώματος μάζας m_1 το οποίο έχει το συσσωμάτωμα

Το συσσωμάτωμα, φθάνει στην άκρη του τραπεζιού και εκτελεί οριζόντια βολή.
Η μέγιστη οριζόντια μετατόπιση του συσσωματώματος από το σημείο από το οποίο βάλλεται είναι S = 0,8 m.
$Δ_3$. Να βρεθεί το ύψος του τραπεζιού

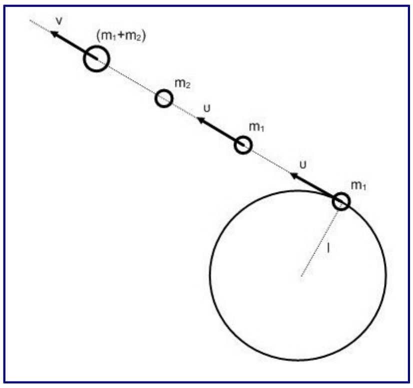
$Δ_4$. Να βρεθεί η χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία η ταχύτητα του συσσωματώματος είναι $υ_σ = v\cdot\sqrt{2}$.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g = 10 m / s^2. Αγνοήστε τριβές και την αντίσταση του αέρα.

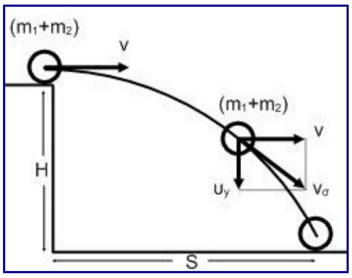
Λύση



$Δ_1$. Το m_1 εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με ακτίνα R = l , τα μέτρα των υ , ω συνδέονται:
$υ = ω\cdot R \Rightarrow ω = υ / l \Rightarrow ω = 10 / ½ \Rightarrow ω = 20$ rad / s .
$ω = 2π / T \Rightarrow T = 2π / ω \Rightarrow T = 2π / 20 \Rightarrow T = π / 10$ s .
Η κεντρομόλος επιτάχυνση έχει διεύθυνση πάνω στην ακτίνα της τροχιάς στο σημείο που βρίσκεται το σώμα m_1 και μέτρο που δίνεται από την σχέση : (ισχύει R = l)
$α_κ = υ^2 / R \Rightarrow α_κ = υ^2 / l \Rightarrow α_κ = 10^2 / ½ \Rightarrow α_κ = 200$ rad / s² .



$Δ_2$. Το νήμα σπάει και το σώμα m_1 κινείται εφαπτομενικά (αφού αυτή είναι η διεύθυνση της ταχύτητας του κάθε στιγμή της ομαλής κυκλικής κίνησης που εκτελεί)
Έχουμε πλαστική (δημιουργία συσσωματώματος) κρούση μεταξύ των m_1 και m_2 και ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής:
(το σύστημα των m_1 και m_2 είναι μονωμένο, δηλαδή $ΣF_{εξ} = 0$, στο σχήμα βλέπετε ότι όλη η κίνηση γίνεται πάνω στην ίδια διεύθυνση)
$P_{ολ,αρχ} = P_{ολ,τελ} \Rightarrow P_1 + P_2 = P_1' + P_2' \Rightarrow m_1\cdot υ_1 = (m_1 + m_2)\cdot v \Rightarrow v = m_1\cdot υ_1 / (m_1 + m_2) \Rightarrow v = 0{,}2\cdot 10 / (0{,}2 + 0{,}8) \Rightarrow v = 2$ m / s .
Μας ζητείται το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του m_1 που απέκτησε το συσσωμάτωμα $(m_1 + m_2)$:
$(K_{συσ} / K_1)\% = (½\cdot(m_1 + m_2)\cdot v^2 / ½\cdot m\cdot υ^2)\cdot 100\% \Rightarrow (K_{συσ} / K_1)\% = ((m_1 + m_2)\cdot v^2 / (m\cdot υ^2))\cdot 100\% \Rightarrow (K_{συσ} / K_1)\% = (1\cdot 2^2 / (0{,}2\cdot 10^2))\cdot 100\% \Rightarrow (K_{συσ} / K_1)\% = 20\%$.

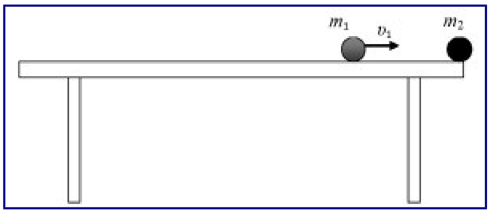


$Δ_3$. Το σώμα m_1 εκτελεί οριζόντια βολή .
Το βεληνεκές (η μέγιστη απομάκρυνση κατά τον οριζόντιο άξονα x):
$S = v\cdot t \Rightarrow t = S / v \Rightarrow t = 0{,}8 / 2 = 0{,}4$ s .
Το μέγιστο ύψος Η :
$H = ½\cdot g\cdot t^2 \Rightarrow H = ½\cdot 10\cdot (4\cdot 10^{-1})^2 \Rightarrow H = 0{,}8$ m .

Δ_4. Μας ζητείται η χρονική στιγμή t_1 όπου η ταχύτητα του συσσωματώματος θα είναι $v_\sigma = v\cdot\sqrt{2}$: $v_\sigma^2 = v^2 + \upsilon_y^2 \Rightarrow 2\cdot v^2 = v^2 + \upsilon_y^2 \Rightarrow \upsilon_y^2 = 2\cdot v^2 - v^2 \Rightarrow \upsilon_y^2 = v^2 \Rightarrow \upsilon_y = v = 2$ m / s .
(η λύση $\upsilon_y = -v$ δεν έχει νόημα, δεδομένου ότι ψάχνουμε το μέτρο της κατακόρυφης συνιστώσας της ταχύτητας)
Η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας:
$\upsilon_y = g\cdot t_1 \Rightarrow t_1 = \upsilon_y / g \Rightarrow t_1 = 2 / 10 \Rightarrow t_1 = 0{,}2$ s .

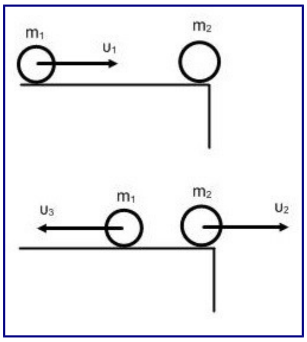
ΑΣΚΗΣΗ 11

Μία μεταλλική σφαίρα μάζας $m_1 = 0{,}5$ kg κινείται προς τα δεξιά στην οριζόντια επιφάνεια ενός λείου τραπεζιού με ταχύτητα, μέτρου $\upsilon_1 = 2$ m / s. Συγκρούεται με άλλη σφαίρα μάζας $m_2 = 1{,}5$ kg που βρίσκεται στην άκρη του τραπεζιού και επιστρέφει με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_3 = 1$ m / s και κατεύθυνσης αντίθετης από την αρχική κατεύθυνση κίνησης.

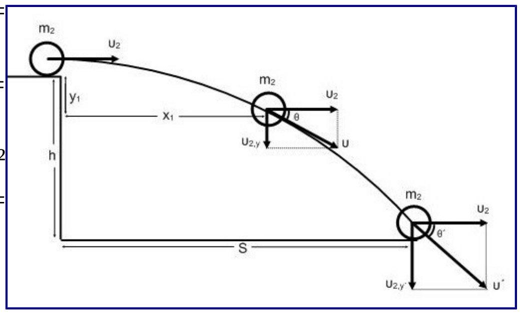


Δ_1. Να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας υ_2 που θα αποκτήσει η σφαίρα μάζας m_2 μετά την κρούση.
Η σφαίρα μάζας m_2 εκτελεί οριζόντια βολή.
Δ_2. Να βρεθεί η χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία το μέτρο της οριζόντιας μετατόπισης είναι ίσο με το μέτρο της κατακόρυφης μετατόπισης.
Δ_3. Να βρεθεί η μέγιστη οριζόντια απόσταση (βεληνεκές) στην οποία φτάνει η σφαίρα όταν συναντά το οριζόντιο δάπεδο, αν το ύψος του τραπεζιού από το δάπεδο είναι $h = 0{,}8$ m, καθώς και το μέτρο της ταχύτητας υ με την οποία φθάνει η σφαίρα στο έδαφος.
Δ_4. Σε ποια χρονική στιγμή t_2 η ταχύτητα της σφαίρας που εκτελεί οριζόντια βολή είναι $\upsilon_2\cdot\sqrt{2}$; Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10$ m / s^2. Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.
Λύση

Δ_1. Το σύστημα είναι μονωμένο ($\Sigma F_{\varepsilon\xi} = 0$) και ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής, έχουμε πάρει θετική φορά προς τα δεξιά):
$P_1 + P_2 = P_1' + P_2' \Rightarrow m_1\cdot\upsilon_1 + 0 = -m_1\cdot\upsilon_3 + m_2\cdot\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_2 = m_1\cdot(\upsilon_1 + \upsilon_3) / m_2 \Rightarrow \upsilon_2 = ½\cdot(2 + 1) / 1{,}5 \Rightarrow \upsilon_2 = 1$ m / s .



Δ_2. Η m_2 εκτελεί οριζόντια βολή,
για $t = t_1$ έχει διανύσει μετατόπιση στον κατακόρυφο άξονα: $y_1 = ½\cdot g\cdot t_1^2$ και μετατόπιση στον οριζόντιο άξονα: $x_1 = \upsilon_2\cdot t_1$, όπως βλέπουμε στο σχήμα.
Μας δίνεται : $y_1 = x_1 \Rightarrow \upsilon_2\cdot t_1 = ½\cdot g\cdot t_1^2 \Rightarrow t_1 = 2\cdot\upsilon_2 / g \Rightarrow t_1 = 2\cdot 1 / 10 = 0{,}2$ s .
Δ_3. Το ύψος (η μέγιστη κατακόρυφη μετατόπιση) : $h = ½\cdot g\cdot t^2 \Rightarrow t^2 = 2\cdot h / g \Rightarrow t^2 = 2\cdot 0{,}8 / 10 \Rightarrow t^2 = 16\cdot 10^{-2} \Rightarrow t = 0{,}4$ s .
Το βεληνεκές (η μέγιστη οριζόντια μετατόπιση): $S = \upsilon_2\cdot t \Rightarrow S = 1\cdot 0{,}4 = 0{,}4$ m .
Η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας: $\upsilon_{2,y}' = g\cdot t \Rightarrow \upsilon_{2,y}' = 10\cdot 0{,}4 = 4$ m / s .
Το μέτρο της ταχύτητας: $\upsilon'^2 = \upsilon_2^2 + \upsilon_{2,y}'^2 \Rightarrow \upsilon'^2 = 1^2 + 4^2 = 17 \Rightarrow \upsilon' = \sqrt{17}$ m / s .
Δ_4. Μας δίνετε $\upsilon_v = \upsilon_2\cdot\sqrt{2}$, το μέτρο της ταχύτητας: $\upsilon_v^2 = \upsilon_2^2 + \upsilon_{2,y}^2 \Rightarrow 2\cdot\upsilon_2^2 = \upsilon_2^2 + \upsilon_{2,y}^2 \Rightarrow \upsilon_{2,y}^2 = \upsilon_2^2 \Rightarrow \upsilon_{2,y} = \upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_{2,y} = 1$ m / s .
Ισχύει $\upsilon_{2,y} = g\cdot t_2 \Rightarrow t_2 = \upsilon_{2,y} / g \Rightarrow t_2 = 1 / 10 = 0{,}1$ s .



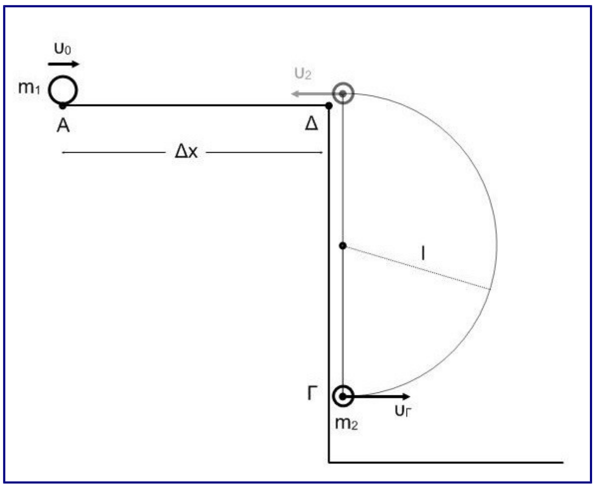
ΑΣΚΗΣΗ 12

Δύο μοτοσυκλέτες αγώνων, με μάζες m_1 και m_2, μαζί με τους αναβάτες, κινούνται σε κυκλική πίστα ακτίνας $R = 400 / \pi$ m με ταχύτητες σταθερού μέτρου $\upsilon_1 = 40$ m / s και $\upsilon_2 = 50$ m / s αντίστοιχα.
Δ_1. Να υπολογιστούν οι περίοδοι περιστροφής των δύο μοτοσυκλετών T_1 και T_2.

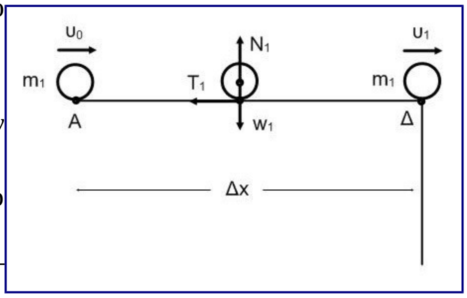
$Δ_2$. Να βρεθεί το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών συναντήσεων των μοτοσυκλετών, δεδομένου ότι κινούνται κατά την ίδια φορά.
Ξαφνικά η μοτοσυκλέτα με τη μεγαλύτερη ταχύτητα ξεφεύγει από την πορεία της και κινούμενη ευθύγραμμα προσκρούει κάθετα στον προστατευτικό ελαστικό τοίχο της πίστας και γυρίζει προς τα πίσω με ταχύτητα μέτρου $υ_3$ = 2 m / s. Αν η μοτοσυκλέτα μαζί με τον αναβάτη έχει μάζα m_2 = 300 kg και η πρόσκρουση διαρκεί Δt = 2 s, να υπολογιστούν:
$Δ_3$. Η μέση δύναμη κατά μέτρο διεύθυνση και φορά που δέχθηκε η μοτοσυκλέτα από τον προστατευτικό τοίχο της πίστας κατά την πρόσκρουση,
$Δ_4$. το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που μετατράπηκε σε θερμική ενέργεια (θερμότητα) κατά την πρόσκρουση.
Λύση
$Δ_1$. Η μοτοσυκλέτα m_1 από την σχέση ταχύτητας υ με την περιόδο Τ και την ακτίνα R:
$υ = 2π·R / T$
Οι περίοδοι περιστροφής των δύο μοτοσυκλετών:
$υ_1 = 2π·R / T_1 ⇒ T_1 = 2π·R / υ_1 ⇒ T_1 = 2π·(400 / π) / 40 ⇒ T_1 = 20$ s ,
$υ_2 = 2π·R / T_2 ⇒ T_2 = 2π·R / υ_2 ⇒ T_2 = 2π·(400 / π) / 50 ⇒ T_2 = 16$ s .
$Δ_2$. Οι δύο μοτοσυκλέτες εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση αλλά η γρηγορότερη η m_2 θα διαγράψει μεγαλύτερο τόξο. Οι μοτοσυκλέτες θα συναντηθούν, και η m_1 θα έχει διαγράψει $ΔS_1 = ΔS$ ενώ η m_2 θα έχει διαγράψει $ΔS_2 = 2π·R + ΔS$, άρα: $υ_1 = ΔS_1 / Δt ⇒ ΔS = υ_1·Δt$ …(I)
και $υ_2 = ΔS_2 / Δt ⇒ ΔS_2 = υ_2·Δt ⇒ 2π·R + ΔS = υ_2·Δt$ …(II) ,
με την βοήθεια της (I) η (II) γίνεται: $2π·R + υ_1·Δt = υ_2·Δt ⇒ 2π·R = υ_2·Δt – υ_1·Δt ⇒ 2π·R = (υ_2 – υ_1)·Δt ⇒ Δt = 2π·R / (υ_2 – υ_1) ⇒ Δt = 2π·(400 / π) / (50 – 40) ⇒ Δt = 80$ s .
Επιπλέον η άσκηση θα μπορούσε να ζητάει το τόξο που έχουν διαγράψει τα δύο οχήματα:
Η μοτοσυκλέτα m_1 έχει διαγράψει, από την σχέση (I) : $ΔS = υ_1·Δt ⇒ ΔS = 40·80 = 320$ m ,
Η μοτοσυκλέτα m_2 έχει διαγράψει: $ΔS_2 = 2π·R + ΔS ⇒ ΔS_2 = 2π·(400 / π) + 320 ⇒ ΔS_2 = 800 + 320 = 1120$ m.
$Δ_3$. Η m_2 μοτοσυκλέτα κινείται γρηγορότερα,άρα η μεταβολή της ορμής της είναι:
$ΔP = m_2·υ_3 – (– m_2·υ_2) ⇒ ΔP = m_2·(υ_3 + υ_2) ⇒ ΔP = 300·(2 + 50) = 15600$ kg·m / s .
2ος γενικευμένος νόμος του Newton: $ΣF = ΔP / Δt ⇒ ΣF = 15600 / 2 = 7800$ N .
$Δ_4$. Η αρχική κινητική ενέργεια της μοτοσυκλέτας: $K_{2,αρχ} = ½·m_2·υ_2^2 ⇒ K_{2,αρχ} = ½·300·50^2 = 375000$ joule .
Η τελική κινητική ενέργεια της μοτοσυκλέτας: $K_{2,τελ} = ½·m_2·υ_3^2 ⇒ K_{2,τελ} = ½·300·2^2 = 600$ joule .
Αρχή διατήρησης της ενέργειας (η γενικότερη σχέση,όση ενέργεια είχαμε τόση ενέργεια πρέπει να έχουμε):
$K_{2,αρχ} = Q + K_{2,τελ} ⇒ Q = K_{2,αρχ} – K_{2,τελ} ⇒ Q = 375000 – 600 = 374400$ joule .
Το ζητούμενο ποσοστό είναι: $Q / K_{2,αρχ}$ % = (374400 / 375000)·100% = 99,84 % .

ΑΣΚΗΣΗ 13

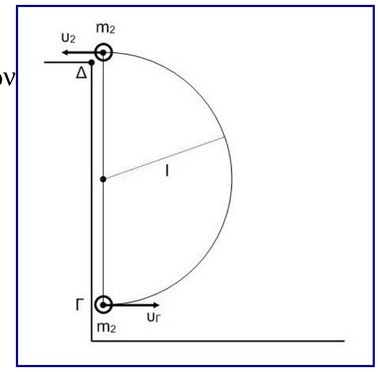
Σώμα μάζας m_1 = 2 kg βρίσκεται στη θέση Α οριζόντιου μη λείου επιπέδου με αρχική ταχύτητα $υ_0$ = 7 m / s . Το σώμα m_1 διανύει την διαδρομή ΑΔ μήκους Δx = 2,16 m , όπου Δ είναι το άκρο του οριζόντιου επιπέδου . Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης του σώματος m_1 με το οριζόντιο δάπεδο είναι μ = 0,3 .
Σώμα μάζας m_2 = 2 kg βρίσκεται στη θέση Γ δεμένο στο άκρο λεπτού νήματος μήκους l = 1,6 m . Το σώμα m_2 έχει στη θέση Γ ταχύτητα $υ_Γ$ και εκτελεί κυκλική όχι ομαλή κίνηση , διαγράφοντας ένα ημικύκλιο και καταλήγει στο σημείο Δ με ταχύτητα $υ_2$ = 4 m / s και φορά προς τα αριστερά .



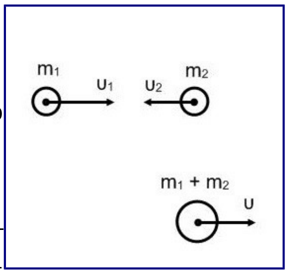
Θεωρούμε ότι τα σώματα m_1 και m_2 φτάνουν ταυτόχρονα στο σημείο Δ και συγκρούονται πλαστικά , ενώ το λεπτό νήμα κόβεται . Από την πλαστική κρούση τους δημιουργείται συσσωμάτωμα που εκτελεί οριζόντια βολή .
Δίνεται $g = 10\ m / s^2$ και $6 \cdot 2{,}16 \cong 13$.
Να υπολογίσετε :
$Δ_1$. Την ταχύτητα του σώματος m_1 στη θέση Δ .
$Δ_2$. Την ταχύτητα του σώματος m_2 στη θέση Γ , για να φτάσει στη θέση Δ με ταχύτητα $υ_2$.
$Δ_3$. Την ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την πλαστική κρούση των m_1 και m_2 .
$Δ_4$. Την οριζόντια απόσταση που διανύει το συσσωμάτωμα και την ταχύτητα του όταν συναντάει το οριζόντιο επίπεδο .
Να θεωρήσουμε ότι το νήμα δεν λυγίζει σε όλη την διάρκεια της κυκλικής κίνησης .
Λύση
$Δ_1$.



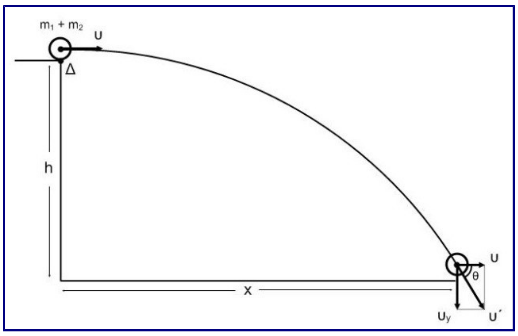
Η τριβή (ολίσθησης) μεταξύ του σώματος m_1 και του οριζοντίου επίπεδου είναι :
$T = μ \cdot N_1 \Rightarrow T = μ \cdot m_1 \cdot g$.
Θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το σώμα m_1 κατά την κίνηση του από το Α στο Δ :
(άλλη έκφραση της γενικότερης αρχής διατήρησης της ενέργειας που ισχύει παντού)
$ΔK_{ΔA} = W_{ΣF} \Rightarrow K_Δ - K_A = - T \cdot Δx \Rightarrow ½ \cdot m_1 \cdot υ_1^2 - ½ \cdot m_1 \cdot υ_0^2 = - μ \cdot m_1 \cdot g \cdot Δx \Rightarrow υ_1^2 = υ_0^2 - μ \cdot g \cdot Δx \Rightarrow υ_1 = \sqrt{(υ_0^2 - μ \cdot g \cdot Δx)} \Rightarrow υ_1 = \sqrt{(7^2 - 0{,}3 \cdot 10 \cdot 2{,}16)} \Rightarrow υ_1 = 6\ m / s$.



$Δ_2$.Αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για το σώμα m_2 μεταξύ των θέσεων Γ και Δ :
$E_Γ = E_Δ \Rightarrow K_Γ + U_Γ = K_Δ + U_Δ \Rightarrow ½ \cdot m_2 \cdot υ_Γ^2 + 0 = ½ \cdot m_2 \cdot υ_2^2 + m_2 \cdot g \cdot (2 \cdot R) \Rightarrow$
(όπου R = l)
$υ_Γ^2 = υ_2^2 + 4 \cdot g \cdot l \Rightarrow υ_Γ = \sqrt{(4^2 + 4 \cdot g \cdot l)} \Rightarrow υ_Γ = \sqrt{(16 + 64)} \Rightarrow υ_Γ = \sqrt{80} \Rightarrow υ_Γ = 4 \cdot \sqrt{5}\ m / s$.

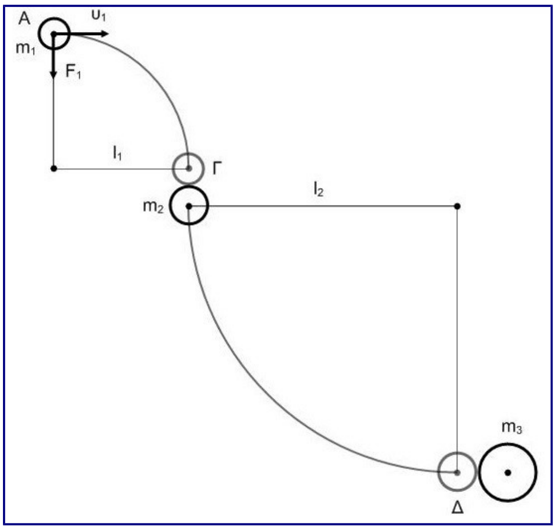


$Δ_3$.Αρχή διατήρησης της ορμής :
(διανυσματική σχέση που ισχύει στο μονωμένο σύστημα των m_1 και m_2)
$P_{ολ,πριν} = P_{ολ,μετά} \Rightarrow$
$m_1 \cdot υ_1 - m_2 \cdot υ_2 = (m_1 + m_2) \cdot υ \Rightarrow υ = m_1 \cdot υ_1 - m_2 \cdot υ_2 / (m_1 + m_2) \Rightarrow υ = (2 \cdot 6 - 2 \cdot 4) / (2 + 2) \Rightarrow υ = 1\ m / s$.



$Δ_4$.Το συσσωμάτωμα εκτελεί οριζόντια βολή :
(από ύψος h = 2·l)
$h = ½ \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow t^2 = 2 \cdot h / g \Rightarrow t = \sqrt{(2 \cdot h / g)} \Rightarrow t = \sqrt{(2 \cdot 3{,}2 / 10)} \Rightarrow t = 0{,}8\ s$.
Παρατηρούμε ότι η μάζα του συσσωματώματος δεν επηρεάζει την χρονική διάρκεια της οριζόντιας βολής .
Η ταχύτητα του συσσωματώματος στον άξονα y λίγο πριν συναντήσει το οριζόντιο επίπεδο :
$υ_y = g \cdot t \Rightarrow υ_y = 10 \cdot 0{,}8 \Rightarrow υ_y = 8\ m / s$.
Το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος λίγο πριν συναντήσει το οριζόντιο επίπεδο :
$υ΄ = \sqrt{(υ^2 + υ_y^2)} \Rightarrow υ΄ = \sqrt{(1^2 + 8^2)} \Rightarrow υ΄ = \sqrt{65}\ m / s$.
Η διεύθυνση της ταχύτητας του συσσωματώματος :
$εφ\ θ = υ_y / υ \Rightarrow εφ\ θ = 8 / 1 \Rightarrow εφ\ θ = 8$.

ΑΣΚΗΣΗ 14



Σώμα μάζας m_1 = 1 kg βρίσκεται στη θέση Α , είναι δεμένο στο άκρο νήματος μήκους l_1 και εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με ταχύτητα υ_1 = 10 m / s . Η κεντρομόλος δύναμη που ασκείται πάνω στο σώμα μάζας m_1 είναι F_1 = 40 N .

Να υπολογίσετε :

Δ_1. Το μήκος του νήματος l_1 .

Δ_2. Τον χρόνο που απαιτείται για να διαγράψει το σώμα m_1 το τεταρτοκύκλιο από την θέση Α στη θέση Γ .

Δ_3. την μεταβολή της ορμής του σώματος m_1 μεταξύ των θέσεων Α και Γ .

Στη θέση Γ βρίσκεται ακίνητο σώμα μάζας m_2 = 3 kg που και αυτό είναι δεμένο στο άκρο νήματος μήκους $l_2 = 2\cdot l_1$. Τα δύο σώματα m_1 και m_2 συγκρούονται ανελαστικά και η ταχύτητα του m_1 μετά την κρούση είναι $\upsilon_1{'}$ = 4 m / s με φορά ίδια με την φορά που είχε το σώμα m_1 πριν την κρούση . Να υπολογίσετε :

Δ_4. Την ταχύτητα του σώματος m_2 μετά την κρούση και την κεντρομόλο δύναμη που ασκείται σε αυτό .

Το σώμα m_2 διαγράφει επίσης τεταρτοκύκλιο και φτάνει στη θέση Δ , όπου βρίσκεται ακίνητο σώμα μάζας m_3 = 9 kg . Το σώμα m_2 συγκρούεται πλαστικά με το σώμα m_3 . Να υπολογίσετε :

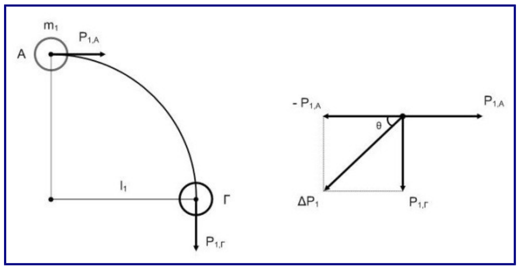
Δ_5. Την ταχύτητα του συσσωματώματος που δημιουργείται από την πλαστική κρούση των m_2 και m_3 .

Δ_6. Να υπολογιστεί το ποσό της ενέργειας που γίνεται θερμική ενέργεια κατά την πρώτη και κατά την δεύτερη κρούση .

Όλα τα σώματα και όλες οι κινήσεις πραγματοποιούνται πάνω σε ένα οριζόντιο λείο επίπεδο .

Λύση

Δ_1.



Η κεντρομόλος δύναμη δίνεται :

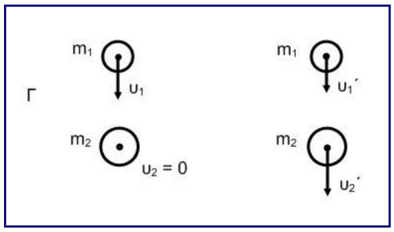
(που είναι η τάση του νήματος 1)$F_1 = m_1\cdot\upsilon_1^2 / l_1 \Rightarrow l_1 = m_1\cdot\upsilon_1^2 / F_1 \Rightarrow l_1 = 1\cdot10^2 / 40 \Rightarrow l_1 = 2{,}5$ m .

Δ_2.Η σχέση του μέτρου της ταχύτητας στην κυκλική κίνηση με την ακτίνα και την περίοδο :

$\upsilon_1 = 2\cdot\pi\cdot l_1 / T_1 \Rightarrow T_1 = 2\cdot\pi\cdot l_1 / \upsilon_1 \Rightarrow T_1 = 2\cdot\pi\cdot2{,}5 / 10 \Rightarrow T_1 = \pi / 2$ s .

Τον χρόνο που απαιτείται για να διαγράψει το σώμα m_1 το τεταρτοκύκλιο :$t_1 = T_1 / 4 \Rightarrow t_1 = (\pi / 2) / 4 \Rightarrow$

$t_1 = \pi / 8$ s .

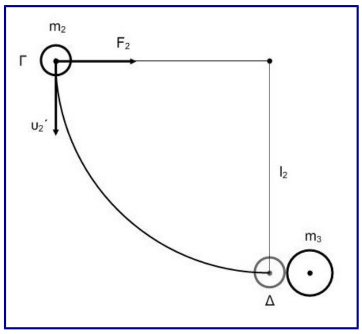


Δ_3.$\Delta P_1 = P_{1,\Gamma} - P_{1,A}$.Η σχέση είναι διανυσματική .

Το μέτρο της ΔP_1 είναι :$\Delta P_1 = \sqrt{(m_1\cdot\upsilon_1)^2 + (m_1\cdot\upsilon_1)^2} \Rightarrow \Delta P_1 = \sqrt{2\cdot(m_1\cdot\upsilon_1)^2} \Rightarrow \Delta P_1 = (m_1\cdot\upsilon_1)\cdot\sqrt{2} \Rightarrow \Delta P_1 = (1\cdot10)\cdot\sqrt{2} \Rightarrow \Delta P_1 = 10\cdot\sqrt{2}$ kg·m / s .

Η διεύθυνση της ΔP_1 είναι :

εφ θ = $P_{1,\Gamma} / P_{1,A} \Rightarrow$ εφ θ = $m_1\cdot\upsilon_1 / m_1\cdot\upsilon_1 \Rightarrow$ εφ θ = 1 $\Rightarrow$ θ = 45° .



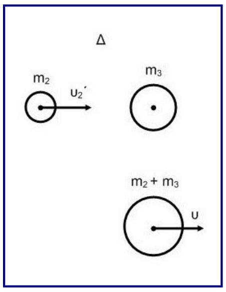
Δ_4.Αρχή διατήρηση της ορμής :

(διανυσματική σχέση που ισχύει στο μονωμένο σύστημα των m_1 και m_2)

$P_{\text{ολ,πριν}} = P_{\text{ολ,μετά}} \Rightarrow m_1\cdot\upsilon_1 = m_1\cdot\upsilon_1{'} + m_2\cdot\upsilon_2{'} \Rightarrow m_2\cdot\upsilon_2{'} = m_1\cdot\upsilon_1 - m_1\cdot\upsilon_1{'} \Rightarrow \upsilon_2{'} = (m_1\cdot\upsilon_1 - m_1\cdot\upsilon_1{'}) / m_2 \Rightarrow \upsilon_2{'} = m_1\cdot(\upsilon_1 - \upsilon_1{'}) / m_2 \Rightarrow \upsilon_2{'} = 1\cdot(10 - 4) / 3 \Rightarrow \upsilon_2{'} = 2$ m / s .

Η διεύθυνση της $\upsilon_2{'}$ είναι ίδια με την διεύθυνση της υ_1 πριν την κρούση .

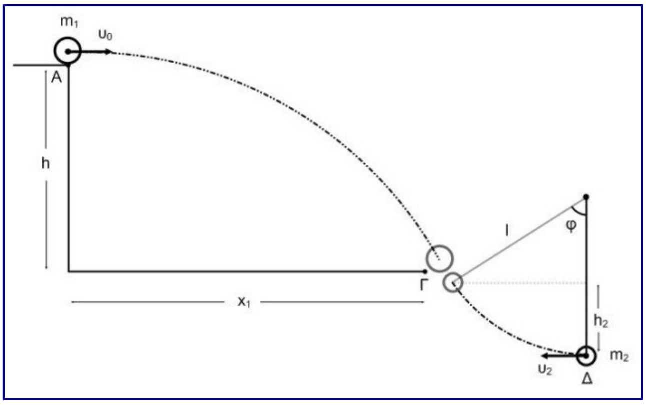
Η κεντρομόλος δύναμη που ασκείται στο σώμα m_2 :
(που είναι η τάση του νήματος 2)
$F_2 = m_2 \cdot \upsilon_2{'}^2 / l_2 \Rightarrow F_2 = 3 \cdot 2^2 / 5 \Rightarrow F_2 = 2{,}4$ N .



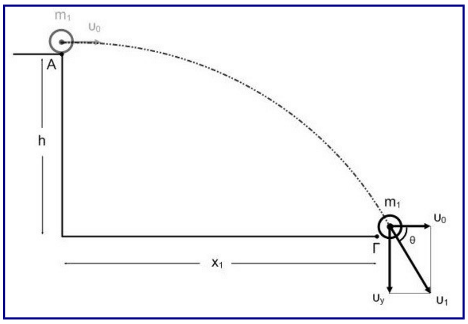
Δ$_5$Αρχή διατήρηση της ορμής :
(διανυσματική σχέση που ισχύει στο μονωμένο σύστημα των m_2 και m_3)
$P_{ολ,πριν}{'} = P_{ολ,μετά}{'} \Rightarrow m_2 \cdot \upsilon_2{'} = (m_2 + m_3) \cdot \upsilon \Rightarrow \upsilon = m_2 \cdot \upsilon_2{'} / (m_2 + m_3) \Rightarrow \upsilon = 3 \cdot 2 / (3 + 9) \Rightarrow \upsilon = ½$ m / s .
Η διεύθυνση της υ είναι ίδια με την διεύθυνση της $\upsilon_2{'}$ στο σημείο Δ .

Δ$_6$.
Αρχή διατήρηση της ενέργειας κατά την πρώτη κρούση μεταξύ των m_1 και m_2 :
(η γενικότερη σχέση που ισχύει σε όλο το σύμπαν)
$K_{ολ,αρχ} = Q + K_{ολ,τελ} \Rightarrow Q = K_{ολ,αρχ} - K_{ολ,τελ} \Rightarrow Q = ½ \cdot m_1 \cdot \upsilon_1{}^2 - (½ \cdot m_1 \cdot \upsilon_1{'}^2 + ½ \cdot m_2 \cdot \upsilon_2{'}^2) \Rightarrow$
$Q = ½ \cdot 1 \cdot 10^2 - (½ \cdot 1 \cdot 4^2 + ½ \cdot 3 \cdot 2^2) \Rightarrow Q = 50 - (8 + 6) \Rightarrow Q = 36$ joule .
Αρχή διατήρηση της ενέργειας κατά την δεύτερη κρούση μεταξύ των m_2 και m_3 :
$K_{ολ,αρχ}{'} = Q' + K_{ολ,τελ}{'} \Rightarrow Q' = K_{ολ,αρχ}{'} - K_{ολ,τελ}{'} \Rightarrow Q' = ½ \cdot m_2 \cdot \upsilon_2{'}^2 - [½ \cdot (m_2 + m_3) \cdot \upsilon^2] \Rightarrow Q' = ½ \cdot 3 \cdot 2^2 - [½ \cdot (9 + 3) \cdot (½)^2] \Rightarrow Q' = 6 - (3 / 2) \Rightarrow Q' = 4{,}5$ joule .

ΑΣΚΗΣΗ 15



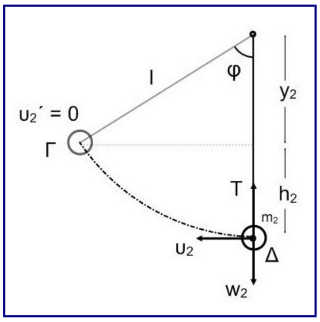
Σώμα μάζας $m_1 = 4$ kg φτάνει στο άκρο Α υψώματος και εκτελεί οριζόντια βολή διανύοντας οριζόντια απόσταση $x_1 = 1{,}2$ m σε χρόνο $t_1 = 0{,}4$ s και καταλήγει στο σημείο Γ άκρο του οριζόντιου τμήματος .
Σώμα μάζας $m_2 = 1$ kg είναι δεμένο στο άκρο νήματος μήκους l και εκτελεί κυκλική κίνηση. Το σώμα m_2 στο κατώτερο σημείο της τροχιάς του Δ έχει ταχύτητα $\upsilon_2 = 2$ m / s , διαγράφει τμήμα κύκλου ΔΓ και καταλήγει στο σημείο Γ με μηδενική ταχύτητα ταυτόχρονα με το σώμα m_1 . Η γωνία που σχηματίζει το νήμα στο σημείο Γ με την κατακόρυφο είναι φ = 60° .
Τα σώματα m_1 και m_2 συγκρούονται πλαστικά στο σημείο Γ .
Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g = 10 m / s² .
Να υπολογιστούν :
Δ$_1$. Η ταχύτητα υ_0 που έχει το σώμα m_1 στο σημείο Α και το ύψος h που διανύει .
Δ$_2$. Η ταχύτητα υ_1 του σώματος m_1 στο σημείο Γ .
Δ$_3$. Το μήκος του νήματος l .
Δ$_4$. Η τάση του νήματος στη θέση Δ .
Δ$_5$. Την ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση .
Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g = 10 m / s² .
Λύση
Δ$_1$.



Το σώμα m_1 εκτελεί οριζόντια βολή ,στον άξονα x εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση :
(η διεύθυνση της υ_0 είναι οριζόντια)
$x_1 = \upsilon_0 \cdot t_1 \Rightarrow \upsilon_0 = x_1 / t_1 \Rightarrow \upsilon_0 = 1{,}2 / 0{,}4 \Rightarrow \upsilon_0 = 3$ m / s .
στον άξονα y εκτελεί ελεύθερη πτώση :$h = ½ \cdot g \cdot t_1{}^2 \Rightarrow h = ½ \cdot 10 \cdot 0{,}4^2 \Rightarrow h = 0{,}8$ m .
Δ$_2$.Η ταχύτητα του σώματος στον άξονα y :
(η υ_y έχει κατακόρυφη διεύθυνση και φορά προς τα κάτω)

$\upsilon_y = g \cdot t_1 \Rightarrow \upsilon_y = 10 \cdot 0{,}4 \Rightarrow \upsilon_y = 4$ m / s .
Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος στη θέση Γ :
$\upsilon_1 = \sqrt{(\upsilon_0^2 + \upsilon_y^2)} \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{(3^2 + 4^2)} \Rightarrow \upsilon_1 = 5$ m / s .
Η διεύθυνση της ταχύτητας του σώματος στη θέση Γ :
$\varepsilon\varphi\ \theta = \upsilon_y / \upsilon_0 \Rightarrow \varepsilon\varphi\ \theta = 4 / 3$.

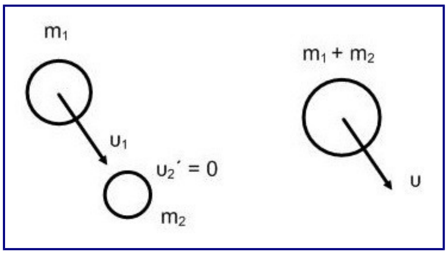
Δ_3.Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας :



(άλλη έκφραση της γενικότερης αρχής διατήρησης της ενέργειας, η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι η δύναμη του βάρους του σώματος m_2 , οι θέσεις είναι η Δ και η Γ)
$E_\Delta = E_\Gamma \Rightarrow K_\Delta + U_\Delta = K_\Gamma + U_\Gamma \Rightarrow ½ \cdot m_2 \cdot \upsilon_2^2 + 0 = 0 + m_2 \cdot g \cdot h_2 \Rightarrow h_2 = \upsilon_2^2 / (2 \cdot g) \Rightarrow h_2 = 2^2 / (2 \cdot 10) \Rightarrow h_2 = 0{,}2$ m .
Ισχύει :
$\sigma\upsilon\nu\ \varphi = y_2 / l \Rightarrow y_2 = l \cdot \sigma\upsilon\nu\ \varphi$.
επίσης :
$h_2 = l – y_2 \Rightarrow h_2 = l – l \cdot \sigma\upsilon\nu\ \varphi \Rightarrow h_2 = l \cdot (1 – \sigma\upsilon\nu\ \varphi) \Rightarrow l = h_2 / (1 – \sigma\upsilon\nu\ 60°) \Rightarrow$
$l = 0{,}2 / (1 – ½) \Rightarrow l = 0{,}4$ m .

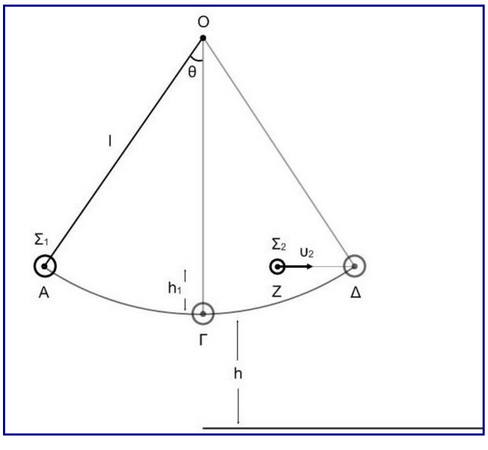
Δ_4.
Η κεντρομόλος δύναμη στη θέση Δ :(η κεντρομόλος έχει την διεύθυνση της ακτίνας και φορά προς το κέντρο)
$F_\kappa = T – w_2$.
Η σχέση της κεντρομόλου και της ταχύτητας στην κυκλική κίνηση:$F_\kappa = m_2 \cdot \upsilon_2^2 / l \Rightarrow T – w_2 = m_2 \cdot \upsilon_2^2 / l \Rightarrow T = m_2 \cdot \upsilon_2^2 / l + m_2 \cdot g \Rightarrow T = 1 \cdot 2^2 / 0{,}4 + 1 \cdot 10 \Rightarrow T = 20$ N .

Δ_5.Ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής :



(μια διανυσματική σχέση)
$P_{ολ,πριν} = P_{ολ,μετά} \Rightarrow m_1 \cdot \upsilon_1 + 0 = (m_1 + m_2) \cdot \upsilon \Rightarrow$
$\upsilon = m_1 \cdot \upsilon_1 / (m_1 + m_2) \Rightarrow \upsilon = 4 \cdot 5 / (4 + 1) \Rightarrow$
$\upsilon = 4$ m / s .
Η διεύθυνση της υ είναι ίδια με την διεύθυνση της υ_1 .

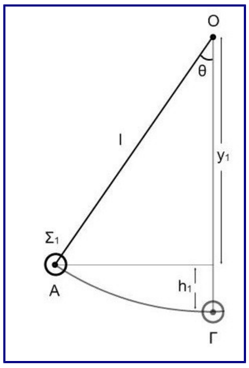
ΑΣΚΗΣΗ 16



Σώμα Σ_1 μάζας m_1 = 200 gr είναι δεμένο στο άκρο νήματος μήκους l . Το σώμα Σ_1 αφήνεται στην θέση Α που βρίσκεται σε ύψος h_1 = 0,25 m από την θέση Γ με το νήμα να σχηματίζει γωνία θ = 60^o με την κατακόρυφο .
Το σώμα Σ_1 περνάει από την κατώτερη θέση Γ της τροχιάς του και συνεχίζει μέχρι την θέση Δ όπου η ταχύτητα του Σ_1 στιγμιαία μηδενίζεται .
Σώμα Σ_2 μάζας m_2 = 100 gr κινείται στη διεύθυνση ΖΔ με φορά προς το Δ με ταχύτητα υ_2 = 3 m / s και συγκρούεται πλαστικά με το σώμα Σ_1 στο σημείο Δ την στιγμή που η ταχύτητα του Σ_1 είχε μηδενιστεί . Το νήμα κατά την πλαστική κρούση κόβεται και το συσσωμάτωμα που δημιουργήθηκε εκτελεί οριζόντια βολή και βρίσκει το οριζόντιο δάπεδο σε (οριζόντια) απόσταση S = 0,6 m από το σημείο Δ .
Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g = 10 m / s^2 .
Να υπολογίσετε :
Δ_1. Το μήκος l του νήματος .
Δ_2. Την ταχύτητα του σώματος μάζας m στη θέση Γ.
Δ_3. Την τάση του νήματος T στην θέση Γ .
Δ_4. Την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την πλαστική κρούση .
Δ_5. Το ύψος που βρίσκεται το σημείο Γ σε σχέση με το οριζόντιο δάπεδο .

Λύση

$Δ_1$. Δίνεται $θ = 60°$ ⇒ συν $θ = ½$.



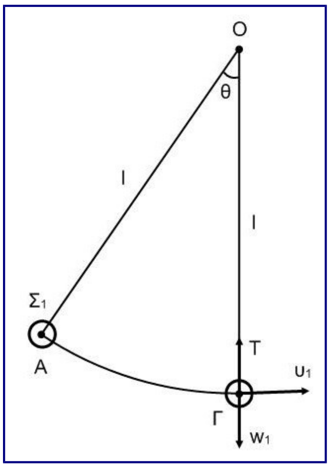
Ισχύει , ενώ βλέπουμε το σχήμα : συν $θ = y_1 / l ⇒ y_1 = l·$συν $θ$.

Ισχύει $l = h_1 + y_1 ⇒ h_1 = l – y_1 ⇒ h_1 = l – l·$συν $θ ⇒ h_1 = l·(1 –$ συν $θ) ⇒$

$l = h_1 / (1 –$ συν $θ) ⇒ l = ¼·(1 – ½) ⇒ l = ½$ m .

$Δ_2$.

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για το σώμα $Σ_1$ μεταξύ της θέσης Α και Γ :



(άλλη έκφραση της αρχής διατήρησης της ενέργειας)

$E_{ολ,αρχ} = E_{ολ,τελ} ⇒ K_A + U_A = K_Γ + U_Γ ⇒ 0 + m_1·g·h_1 = ½·m_1·υ_1^2 + 0 ⇒$

$υ_1^2 = 2·g·h_1 ⇒ υ_1 = \sqrt{2·g·h_1} ⇒ υ_1 = \sqrt{2·10·¼} ⇒ υ_1 = \sqrt{5}$ m / s .

Σχόλιο : θα μπορούσε να λυθεί το ερώτημα να λυθεί με το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας .

$Δ_3$. Η κεντρομόλος δύναμη στην κατώτερη θέση είναι :

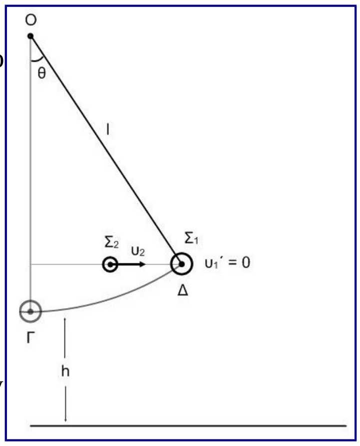
$F_κ = T – w_1 ⇒ m_1·υ_1^2 / l = T – w_1 ⇒ T = m_1·υ_1^2 / l + m_1·g ⇒$

$T = 0{,}2·(\sqrt{5})^2 / ½ + 0{,}2·10 ⇒ T = 2 + 2 ⇒ T = 4$ N .

$Δ_4$.

Το σώμα $Σ_1$ φτάνει στη θέση Δ και στιγμιαία μηδενίζεται η ταχύτητα του.

Το σώμα $Σ_2$ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή και συγκρούεται πλαστικά με το σώμα $Σ_1$.



Αρχή διατήρησης της ορμής :

(διανυσματική σχέση που ισχύει σε μονωμένο σύστημα σωμάτων)

$P_{ολ,αρχ} = P_{ολ,τελ} ⇒ m_2·υ_2 = (m_1 + m_2)·υ ⇒ υ = m_1·υ_1 / (m_1 + m_2) ⇒$

$υ = 0{,}1·3 / (0{,}1 + 0{,}2) ⇒ υ = 1$ m / s .

$Δ_5$.

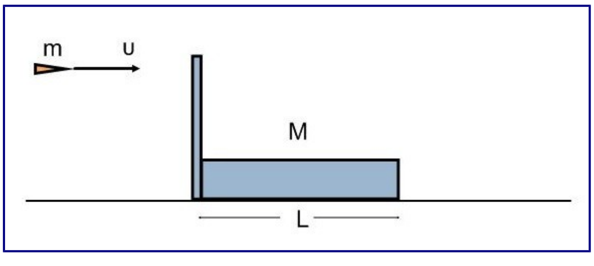
Το νήμα κόβεται κατά την κρούση και το συσσωμάτωμα εκτελεί οριζόντια βολή : $υ = S / t ⇒ t = S / υ ⇒ t = 0{,}6 / 1 ⇒ t = 0{,}6$ s .

Το ύψος y που απέχει το σημείο Δ από το οριζόντιο δάπεδο : $y = ½·g·t^2 ⇒ y = ½·10·(0{,}6)^2 ⇒ y = 1{,}8$ m .

Αν h το ύψος που απέχει το σημείο Γ από το οριζόντιο δάπεδο , ισχύει : $y = h_1 + h ⇒ h = y – h_1 ⇒ h = 1{,}8 – 0{,}25 ⇒ h = 1{,}55$ m .

ΑΣΚΗΣΗ 17

Βλήμα όλμου έχει μάζα m = 2 kg και οριζόντια ταχύτητα μέτρου υ = 200 m / s λίγο πριν χτυπήσει και διαπεράσει την πλευρική κατακόρυφη επιφάνεια πλατφόρμας – στόχου που ηρεμεί στην επιφάνεια λίμνης . Η πλατφόρμα έχει μάζα M = 20 kg και μήκος L = 3,75 m .



Η μεταβολή της ορμής του βλήματος εξαιτίας της κρούσης είναι $ΔP_β = – P_β / 4$.

Μετά την κρούση η πλατφόρμα κινείται ευθύγραμμα στην κατεύθυνση της κίνησης του βλήματος πάνω στην επιφάνεια της λίμνης και δέχεται οριζόντια δύναμη αντίστασης από το νερό που την θεωρούμε σταθερή και έχει μέτρο F_A = 200 N .

Τη στιγμή που σταματά η κίνηση της πλατφόρμας – στόχου το βλήμα συναντά την επιφάνεια του νερού της λίμνης .

Ο χρόνος της κρούσης είναι πολύ μικρός και κατά την διάρκεια της κρούσης η πλατφόρμα δεν αλλάζει θέση. Δίνεται g = 10 m / s² .

Να υπολογίσετε :

Δ_1. Τις ταχύτητες βλήματος και πλατφόρμας ακριβώς μετά την κρούση .

Δ_2.Την απώλεια ενέργειας κατά την κρούση .

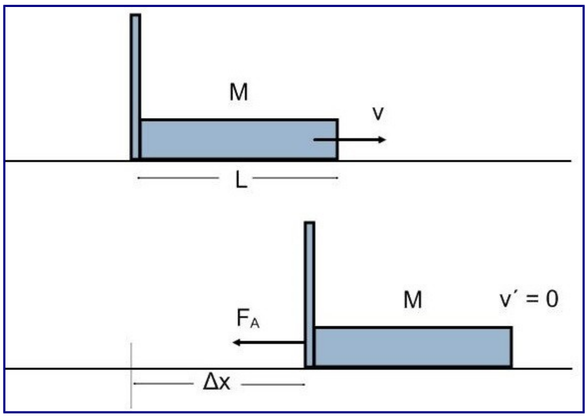
Δ_3. Την μετατόπιση της πλατφόρμας μέσα στη λίμνη .

Δ_4. Την απόσταση που απέχει το πλησιέστερο άκρο της πλατφόρμας από το σημείο στο οποίο το βλήμα συνάντησε το νερό.

Δ_5. Το ύψος από την επιφάνεια της λίμνης στο οποίο έγινε η κρούση .

Λύση

Δ_1.



Από την μεταβολή της ορμής του βλήματος έχουμε :

$\Delta P_\beta = P_\beta{'} - P_\beta \Rightarrow P_\beta{'} - P_\beta = -\ (P_\beta / 4) \Rightarrow P_\beta{'} = P_\beta - (P_\beta / 4) \Rightarrow m\cdot\upsilon{'} = (3 / 4)\cdot P_\beta \Rightarrow$

$m\cdot\upsilon{'} = (3 / 4)\cdot m\cdot\upsilon \Rightarrow \upsilon{'} = (3 / 4)\cdot 200 \Rightarrow \upsilon{'} = 150$ m / s (για το βλήμα) .

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για την κρούση :

(διανυσματική σχέση που ισχύει σε μονωμένο σύστημα σωμάτων)

$P_{\text{ολ,αρχ}} = P_{\text{ολ,τελ}} \Rightarrow P_\beta = P_\beta{'} + P_{\pi\lambda} \Rightarrow m\cdot\upsilon - m\cdot\upsilon{'} = M\cdot v \Rightarrow$

$v = m\cdot(\upsilon - \upsilon{'}) / M \Rightarrow v = 2\cdot(200 - 150) / 20 \Rightarrow v = 5$ m / s .

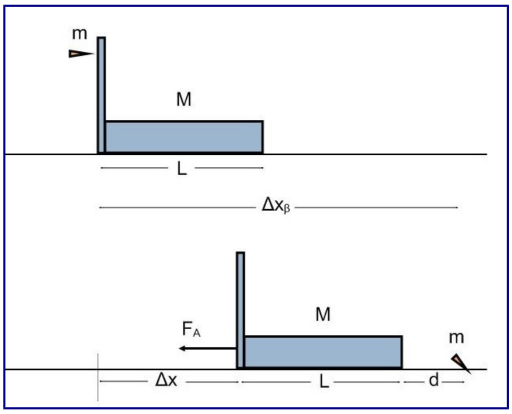
Δ_2.

Η απώλεια της ενέργειας κατά την κρούση :$\Delta E_{\alpha\pi} = K_{\text{ολ,αρχ}} - K_{\text{ολ,τελ}} \Rightarrow \Delta E_{\alpha\pi} = ½\cdot m\cdot\upsilon^2 - (½\cdot m\cdot\upsilon{'}^2 + ½\cdot M\cdot v^2) \Rightarrow$

$\Delta E_{\alpha\pi} = 40.000 - (22.500 + 250) \Rightarrow \Delta E_{\alpha\pi} = 17.250$ joule .

Δ_3.

Κινηματική λύση



Η πλατφόρμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση για χρόνο t .

Από την εξίσωση της ταχύτητας :

$v{'} = v - \alpha\cdot t$ για $v{'} = 0$, $\alpha\cdot t = v \Rightarrow t = v / \alpha$.

Για το μέτρο της επιτάχυνσης (επιβράδυνσης) εφαρμόζουμε τον 2° νόμο του Newton :

$\Sigma F = m\cdot\alpha \Rightarrow F_A = M\cdot\alpha \Rightarrow \alpha = F_A / M \Rightarrow \alpha = 200 / 20 \Rightarrow \alpha = 10$ m / s² .

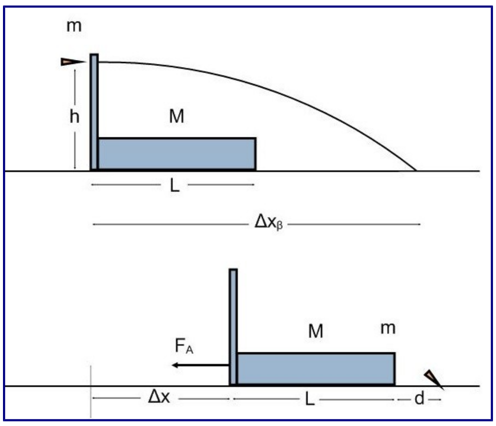
Επομένως $t = v / \alpha \Rightarrow t = 5 / 10 \Rightarrow t = 0{,}5$ s .

Για την μετατόπιση $\Delta x = v\cdot t - ½\cdot\alpha\cdot t^2 \Rightarrow \Delta x = 5\cdot 0{,}5 - ½\cdot 10\cdot(0{,}5)^2 \Rightarrow \Delta x = 1{,}25$ m .

Ενεργειακή λύση (άλλος τρόπος)

Θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας :

(άλλη έκφραση της αρχής διατήρησης της ενέργειας που ισχύει παντού)



$\Delta K = W_F \Rightarrow K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_F \Rightarrow 0 - ½\cdot M\cdot v^2 = -F_A\cdot\Delta x \Rightarrow \Delta x = M\cdot v^2 / (2\cdot F_A) \Rightarrow$

$\Delta x = 20\cdot 5^2 / (2\cdot 200) \Rightarrow \Delta x = 1{,}25$ m .

Δ_4.

Σε χρόνο t = 0,5 s το βλήμα μετατοπίζεται οριζόντια μετά την κρούση κατά Δx_β . Στον ίδιο χρόνο η πλατφόρμα έχει κινηθεί κατά Δx . Η απόσταση του πλησιέστερου άκρου της πλατφόρμας από το σημείο πτώσης του βλήματος στο νερό είναι d .

$\Delta x + L + d = \Delta x_\beta \Rightarrow d = \Delta x_\beta - (\Delta x + L) \Rightarrow d = \upsilon{'}\cdot t - (\Delta x + L) \Rightarrow$

$d = 150\cdot 0{,}5 - (1{,}25 + 3{,}75) \Rightarrow d = 70$ m .

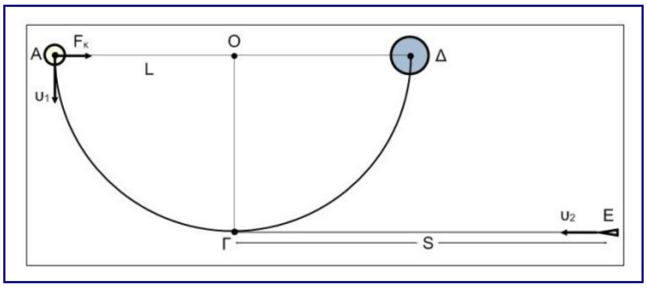
Δ_5.

Το ύψος του σημείου από την επιφάνεια του νερού της λίμνης είναι :

$h = ½·g·t^2$, όπου $t = 0,5$ s (το υπολογίσαμε στο ερώτημα $Δ_3$)
άρα :
$h = ½·10·(0,5)^2 ⇒ h = 1,25$ m .

ΑΣΚΗΣΗ 18

Σώμα $Σ_1$ μάζας $m_1 = 2$ kg βρίσκεται πάνω σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο και είναι δεμένο στο άκρο νήματος μήκους L = 5 m . Το σώμα $Σ_1$ την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ περνάει από το σημείο Α εκτελώντας ομαλή κυκλική κίνηση με την επίδραση κεντρομόλου δύναμης μέτρου 10 Ν . Ταυτόχρονα με το σώμα $Σ_1$ σφαίρα $Σ_2$ μάζας $m_2 = 10$ gr βάλλεται από όπλο που βρίσκεται στη θέση Ε και αφού διανύσει απόσταση S = 628 m (το βλήμα έχει μικρό βάρος και το βάρος του θεωρούμε ότι δεν καμπυλώνει την κίνηση του), η σφαίρα $Σ_2$ περνάει μέσα από το σώμα $Σ_1$ ανελαστικά στη θέση Γ .



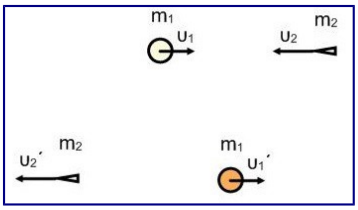
Μετά την έξοδο της σφαίρας $Σ_2$ από το σώμα $Σ_1$ η κινητικής της ενέργεια είναι το ένα τέταρτο της αρχικής .
Το νήμα μετά την κρούση δεν χαλαρώνει και παραμένει τεντωμένο και η σφαίρα $Σ_1$ συνεχίζει να εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση και στη θέση Δ ενώνεται πλαστικά με ακίνητη σφαίρα $Σ_3$ μάζας $m_2 = 6$ kg .
Δίνεται ότι η ΑΟ σχηματίζει ορθή γωνία με την ΟΓ και η ΟΓ με την ΟΔ .
Να υπολογιστούν :
$Δ_1$. Ο χρόνος που χρειάζεται το σώμα $Σ_1$ για να φτάσει από την θέση Α στη θέση Γ και η ταχύτητα του στη θέση Γ πριν την κρούση.
$Δ_2$. Η ταχύτητα του σώματος $Σ_2$ πριν και μετά την ανελαστική κρούση στη θέση Γ .
$Δ_3$. Η ταχύτητα του σώματος $Σ_1$ μετά την ανελαστική κρούση στη θέση Γ.
$Δ_4$. Ο χρόνος που χρειάζεται το σώμα $Σ_1$ μετά την ανελαστική κρούση για να φτάσει από την θέση Γ στη θέση Δ και η μεταβολή της ορμής του μεταξύ των σημείων Γ μετά την ανελαστική κρούση και Δ .
$Δ_5$. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την πλαστική κρούση και τον ρυθμό μεταβολής της ορμής στο σώμα $Σ_1$ και στο σώμα $Σ_3$, κατά το χρονικό διάστημα διάρκειας της κρούσης Δt = 0,01 s , τι παρατηρείτε ;

Λύση

$Δ_1$.
Η κεντρομόλος δύναμη δίνεται :
(η ακτίνα r είναι το μήκος του νήματος L)
$F_κ = m_1·υ_1^2 / L ⇒ υ_1^2 = F_κ·L / m_1 ⇒ υ_1 = \sqrt{(F_κ·L / m_1)} ⇒ υ_1 = \sqrt{(10·5 / 2)} ⇒ υ_1 = \sqrt{25} ⇒ υ_1 = 5$ m / s .
Η σχέση της ταχύτητας και της περιόδου στην ομαλή κυκλική κίνηση :
$υ_1 = 2·π·L / T ⇒ T = 2·π·L / υ_1 ⇒ T = 2·π·5 / 5 ⇒ T = 2·π$ s .
Το σώμα $Σ_1$ διαγράφει τεταρτοκύκλιο σε χρόνο t_1 , άρα ο χρόνος t_1 είναι το ένα τέταρτο της περιόδου :
$t_1 = T / 4 ⇒ t_1 = 2·π / 4 ⇒ t_1 = π / 2 ⇒ t_1 = 1,57$ s .

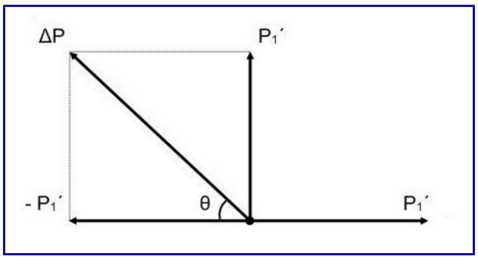
$Δ_2$.
Το σώμα $Σ_2$ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση :$υ_2 = S / t_1 ⇒ υ_2 = 628 / 1,57 ⇒ υ_2 = 400$ m / s .
Η κινητική ενέργεια της σφαίρας μετά την έξοδο της είναι το ένα τέταρτο της αρχικής :
$K_2΄ = ¼·K_2 ⇒ ½·m_2·υ_2΄^2 = ¼·(½·m_2·υ_2^2) ⇒ υ_2΄^2 = ¼·υ_2^2 ⇒ υ_2΄ = ½·υ_2 ⇒ υ_2΄ = ½·400 ⇒ υ_2΄ = 200$ m / s .

$Δ_3$.
Η μάζα $m_2 = 10$ gr $⇒ m_2 = 0,01$ kg .Ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής :
(διανυσματική σχέση που ισχύει στο μονωμένο σύστημα σωμάτων, θεωρούμε θετική φορά προς τα δεξιά)
$P_{ολ,αρχ} = P_{ολ,τελ} ⇒ m_1·υ_1 – m_2·υ_2 = m_1·υ_1΄ – m_2·υ_2΄ ⇒ m_1·υ_1΄ = m_1·υ_1 – m_2·υ_2 + m_2·υ_2΄ ⇒ υ_1΄ = (m_1·υ_1 – m_2·υ_2 + m_2·υ_2΄) / m_1 ⇒$



$υ_1΄ = (2·5 – 0,01·400 + 0,01·200) / 2 ⇒ υ_1΄ = 4$ m / s .

$Δ_4$.Το σώμα $Σ_1$ συνεχίζει να εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με ταχύτητα $υ_1΄$:



(λόγω της αλλαγής του μέτρου της ταχύτητας ,αλλάζει και η περίοδος της κίνησης)

$υ_1΄ = 2·π·L / Τ΄ ⇒ Τ΄ = 2·π·L / υ_1΄ ⇒ Τ΄ = 2·π·5 / 4 ⇒ Τ΄ = 2,5·π$ s .

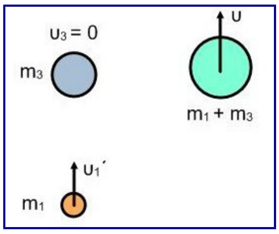
Το σώμα $Σ_1$ διαγράφει και άλλο ένα τεταρτοκύκλιο σε χρόνο t_2 :

$t_2 = Τ΄ / 4 ⇒ t_2 = 2,5·π / 4 ⇒ t_2 = 1,96 ≅ 2$ s .

Το μέτρο της μεταβολής της ορμής του σώματος $Σ_1$ για την θέση Γ μετά την ανελαστική κρούση και Δ , είναι :

$ΔΡ = \sqrt{(Ρ_1΄^2 + Ρ_1΄^2)} ⇒ ΔΡ = \sqrt{[(m_1·υ_1΄)^2 + (m_1·υ_1΄)^2]} ⇒ ΔΡ = \sqrt{[(2·4)^2 + (2·4)^2]} ⇒ ΔΡ = \sqrt{(8^2 + 8^2)} ⇒ ΔΡ = \sqrt{(2·8^2)} ⇒ ΔΡ = 8·\sqrt{2}$ kg·m / s .

Η διεύθυνση της μεταβολής της ορμής του σώματος $Σ_1$ για την θέση Γ μετά την ανελαστική κρούση και Δ, είναι :



εφ $θ = Ρ_1΄ / Ρ_1΄ ⇒$ εφ $θ = m_1·υ_1΄ / (m_1·υ_1΄) ⇒$ εφ $θ = υ_1΄ / υ_1΄ ⇒$ εφ $θ = 1 ⇒ θ = 45^o$.

$Δ_5$.Ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής στη πλαστική κρούση :

(διανυσματική σχέση που ισχύει στο μονωμένο σύστημα σωμάτων)

$P_{ολ,αρχ}΄ = P_{ολ,τελ}΄ ⇒ m_1·υ_1΄ = (m_1 + m_2)·υ ⇒ υ = m_1·υ_1΄ / (m_1 + m_2) ⇒ υ = 2·4 / 8 ⇒ υ = 1$ m / s .

$(ΔΡ / Δt)_1 = (Ρ_1΄΄ – Ρ_1΄) / Δt ⇒ (ΔΡ / Δt)_1 = (m_1·υ – m_1·υ_1΄) / Δt ⇒ (ΔΡ / Δt)_1 = (2·1 – 2·4) / 0,01 ⇒ (ΔΡ / Δt)_1 = –60$ N .

$(ΔΡ / Δt)_3 = (Ρ_3΄ – Ρ_3) / Δt ⇒ (ΔΡ / Δt)_3 = (m_3·υ – 0) / Δt ⇒ (ΔΡ / Δt)_3 = (6·1) / 0,01 ⇒ (ΔΡ / Δt)_3 = + 60$ N .

Παρατηρούμε ότι :

$(ΔΡ / Δt)_1 = – (ΔΡ / Δt)_3$. Λογικό το αποτέλεσμα γιατί :

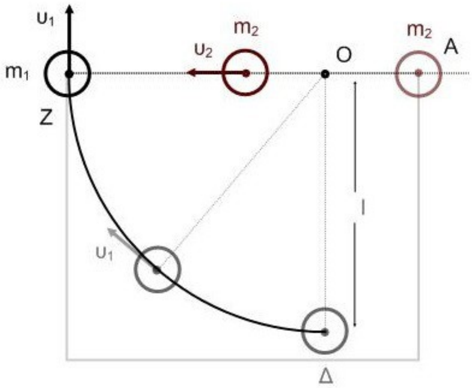
α. $(ΔΡ / Δt)_1 = F_1$ είναι η δύναμη που ασκείται στο σώμα $Σ_1$ από το σώμα $Σ_3$ και$(ΔΡ / Δt)_3 = F_3$ είναι η δύναμη που ασκείται στο σώμα $Σ_3$ από το σώμα $Σ_1$.

Οι δυνάμεις F_1 και F_3 είναι δυνάμεις δράσης – αντίδρασης .

β. Ισχύει σε κάθε κρούση $ΔΡ_1 = – ΔΡ_3$ άρα και $(ΔΡ / Δt)_1 = – (ΔΡ / Δt)_3$.

ΑΣΚΗΣΗ 19

Σφαιρικό σώμα μάζας m_1 = 1 kg εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, δεμένο στο άκρο νήματος μήκους l = 6 m, πάνω στο λείο τμήμα του οριζοντίου επιπέδου ενός τραπεζιού. Το σώμα m_1 εκτελεί τεταρτοκύκλιο και φτάνει στο σημείο Ζ σε χρόνο $Δt_1$ = π / 2 s.



Σφαιρικό σώμα μάζας m_2 = 2 kg βρίσκεται στη θέση Α και με αρχική ταχύτητα $υ_{0,2}$ = 20 m / s, πάνω στη μη λεία ακμή ΟΖ του ίδιου τραπεζιού. Ο συντελεστής της τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος μάζας m_2 και της μη λείας ακμής του τραπεζίου ΟΖ είναι μ = 0,4. Το σώμα μάζας m_2 φτάνει στη θέση Ζ σε χρονικό διάστημα $Δt_2$ = 4 s.

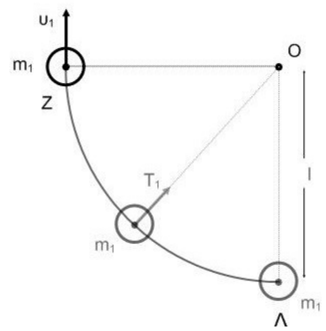
Στο σημείο Ζ τα σώματα m_1 και m_2 συγκρούονται και τους ασκούνται πολύ μεγάλες δυνάμεις για πολύ μικρό χρονικό διάστημα, με αποτέλεσμα την δημιουργία συσσωματώματος.

Το συσσωμάτωμα που δημιουργείται ελάχιστα μετά την κρούση, εκτελεί οριζόντια βολή από την γωνία Α του τραπεζιού, ύψους h και καταλήγει στο έδαφος που απέχει απόσταση S = 4 / 3 m. Το S είναι η οριζόντια μετατόπιση του συσσωματώματος κατά την οριζόντια βολή του, γιατί το συσσωμάτωμα πέφτει με γωνία θ σε σχέση με την ακμή του τραπεζιού ΟΖ.

Να υπολογίσετε:

$Δ_1$. Τον χρόνο που θα χρειαστεί το σώμα μάζας m_1 για να εκτελέσει μια πλήρη περιστροφή και την ταχύτητα που θα έχει το σώμα στο σημείο Ζ.
$Δ_2$. Την κεντρομόλο επιτάχυνση, την κεντρομόλο δύναμη καθώς και το έργο της δύναμης αυτής κατά μήκος του τεταρτοκυκλίου.
$Δ_3$. Την ταχύτητα του σώματος μάζας m_2 στο σημείο Ζ, την μετατόπιση του και το έργο της συνισταμένης των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα.
$Δ_4$. Την ορμή του συσσωματώματος ελάχιστα μετά την κρούση καθώς και την θερμική ενέργεια που έδωσε το σύστημα των δύο σωμάτων m_1 και m_2 κατά την διάρκεια της κρούσης.
$Δ_5$. Το ύψος του τραπεζιού από το έδαφος και την μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος κατά την οριζόντια του βολή.
Τα σφαιρικά σώματα μάζας m_1 και μάζας m_2 θεωρούνται υλικά σημεία.

Λύση



$Δ_1$.

Ισχύει:

$Δt_1 = T_1 / 4 \Rightarrow T_1 = 4·Δt_1 \Rightarrow T_1 = 4·(π / 2) \Rightarrow T_1 = 2·π$ s.

Η ταχύτητα του σώματος μάζας m_1:

$υ_1 = (2·π·R) / T_1 \Rightarrow (R = l = 6\text{ m})υ_1 = (2·π·6) / (2·π) \Rightarrow υ_1 = 6$ m / s.

$Δ_2$.

Η κεντρομόλος επιτάχυνση $α_κ$ του σώματος μάζας m_1, είναι:

$α_κ = υ_1^2 / R \Rightarrow (R = l = 6\text{ m})α_κ = 6^2 / 6 = 6$ m / s².

Η κεντρομόλος δύναμη $F_κ$ του σώματος μάζας m_1, είναι:

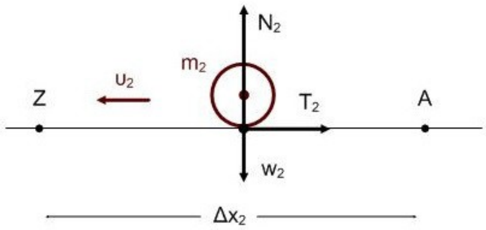
$F_κ = m_1·α_κ \Rightarrow F_κ = (m_1·υ_1^2) / R \Rightarrow F_κ = (1· 6^2) / 6 \Rightarrow F_κ = 6$ N.

Η κεντρομόλος δύναμη στην περίπτωση μας είναι η τάση του νήματος T_1 η δύναμη που ασκεί το νήμα στο σώμα μάζας m_1. $F_κ = T_1$.

Το έργο της κεντρομόλου δύναμης κατά μήκος του τεταρτοκυκλίου (και σε κάθε τμήμα της κυκλικής του τροχιάς):

$W_{Fκ} = 0$, γιατί η κεντρομόλος δύναμη είναι κάθετη κάθε χρονική στιγμή, στην διεύθυνση της τροχιάς (εφαπτομενική σε κάθε σημείο της κυκλικής τροχιάς).

$Δ_3$. Το σώμα μάζας m_2 εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με την επίδραση της τριβής ολίσθησης T_2.



Το σώμα μάζας m_2 ισορροπεί στον άξονα y:

$ΣF2,y = 0 \Rightarrow N_2 – w_2 = 0 \Rightarrow N_2 = w_2 = m_2·g$.

Η τριβή ολίσθησης T_2:

$T_2 = μ·N_2 \Rightarrow T_2 = μ·m_2·g$.

2ος νόμος του Νεύτωνα:

$ΣF2,x = m_2·α_2 \Rightarrow T2 = m_2·α_2 \Rightarrow μ·m_2·g = m_2·α_2 \Rightarrow α_2 = μ·g \Rightarrow α_2 = 0,4·10 \Rightarrow α_2 = 4$ m / s².

Η ταχύτητα του σώματος μάζας m_2 δίνεται:

$υ_2 = υ_{0,2} – α_2·Δt_2 \Rightarrow υ_2 = 20 – 4·4 \Rightarrow υ_2 = 4$ m / s.

Η μετατόπιση του σώματος μάζας m_2 δίνεται:

$Δx_2 = υ_{0,2}·Δt_2 – (1 / 2)·α_2·Δt_2^2 \Rightarrow Δx_2 = 20·4 – (1 / 2)·4·4^2 \Rightarrow Δx_2 = 48$ m.

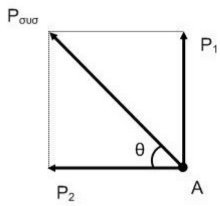
Η τριβή ολίσθησης T_2:

$T_2 = μ·m_2·g \Rightarrow T_2 = 0,4·2·10 \Rightarrow T_2 = 8$ N.

Η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα μάζας m_2 είναι η τριβή ολίσθησης T_2. Το έργο της τριβής ολίσθησης:

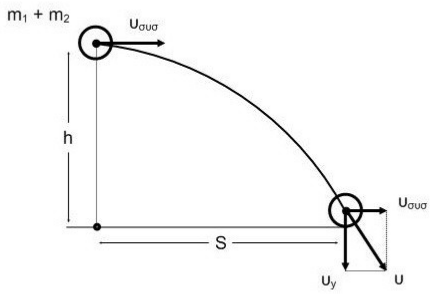
$W_T = – T_2·Δx_2 \Rightarrow W_T = – 8·48 \Rightarrow W_T = – 384$ J.

Δ$_4$. Τα σώματα m_1 και m_2 συγκρούονται και τους ασκούνται πολύ μεγάλες δυνάμεις για πολύ μικρό χρονικό διάστημα, άρα ισχύει η

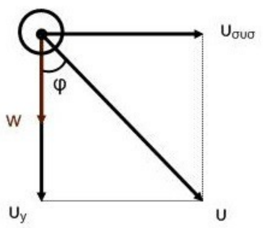


Αρχή Διατήρησης της Ορμής:
(διανυσματική σχέση που ισχύει στο μονωμένο σύστημα σωμάτων m_1 και m_2 όπου $ΣF_{εξ} = 0$)
$P_{ολ,πριν} = P_{ολ,μετά} \Rightarrow P_1 + P_2 = P_{συσ} \Rightarrow P_{συσ} = \sqrt{(P_1^2 + P_2^2)} \Rightarrow P_{συσ} = \sqrt{[(m_1 \cdot υ_1)^2 + (m_2 \cdot υ_2)^2]} \Rightarrow P_{συσ} = \sqrt{[(1 \cdot 6)^2 + (2 \cdot 4)^2]} \Rightarrow P_{συσ} = 10$ kg·m / s, το μέτρο της ορμής του συσσωματώματος.
Υπολογίζουμε την διεύθυνση του συσσωματώματος:
$εφ\, θ = P_1 / P_2 \Rightarrow εφ\, θ = (m_1 \cdot υ_1) / (m_2 \cdot υ_2) \Rightarrow εφ\, θ = (1 \cdot 6) / (2 \cdot 4) \Rightarrow εφ\, θ = 3 / 4$.
Η ορμή του συσσωματώματος:
$P_{συσ} = (m_1 + m_2) \cdot υ_{συσ} \Rightarrow υ_{συσ} = P_{συσ} / (m_1 + m_2) \Rightarrow υ_{συσ} = 10 / (1 + 2) \Rightarrow υ_{συσ} = 10 / 3$ m / s.
Η θερμική ενέργεια Q που απελευθερώνεται κατά την κρούση υπολογίζεται από την
Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας
(η γενικότερη μορφή, με ισχύ σε όλο το σύμπαν)
$K_{ολ,πριν} = Q + K_{ολ,μετά} \Rightarrow$
(αρχικά τα σώματα m_1 και m_2 έχουν κινητική ενέργεια, μετά την κρούση το συσσωμάτωμα έχει κινητική ενέργεια και υπάρχει θερμική ενέργεια Q)
$Q = K_{ολ,πριν} – K_{ολ,μετά} \Rightarrow Q = [(1 / 2) \cdot m_1 \cdot υ_1^2 + (1 / 2) \cdot m_2 \cdot υ_2^2] – (1 / 2) \cdot (m_1 + m_2) \cdot υ_{συσ}^2 \Rightarrow Q = [(1 / 2) \cdot 1 \cdot 6^2 + (1 / 2) \cdot 2 \cdot 4^2] – (1 / 2) \cdot (1 + 2) \cdot (10 / 3)^2 \Rightarrow Q = 17{,}33$ J.

Δ$_5$. Το συσσωμάτωμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση κατά τον οριζόντιο άξονα (x άξονα της οριζόντιας βολής του, άξονας που σχηματίζει γωνία με θ με την ΑΖ ακμή του τραπεζιού) :



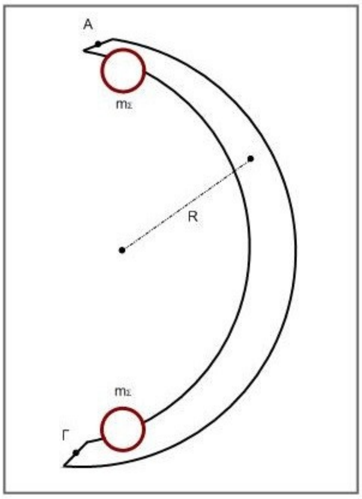
$υ_{συσ} = x / t \Rightarrow$(για x = S ο χρόνος $t = t_{ολ}$)
$υ_{συσ} = S / t_{ολ} \Rightarrow t_{ολ} = S / υ_{συσ} \Rightarrow t_{ολ} = (4 / 3) / (10 / 3) \Rightarrow t_{ολ} = 0{,}4$ s.
Το συνολικό ύψος που διανύει το συσσωμάτωμα μέχρι να φτάσει στο έδαφος, το ύψος του τραπεζιού):
$y = (1 / 2) \cdot g \cdot t_{ολ}^2 \Rightarrow y = (1 / 2) \cdot 10 \cdot 0{,}4^2 \Rightarrow y = 0{,}8$ m.
Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος κατά την οριζόντια του βολή υπολογίζεται:
Ενεργειακή λύση
Εφαρμόζουμε το
Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας για την οριζόντια βολή του συσσωματώματος



(άλλη έκφραση της γενικότερης Αρχής Διατήρησης της Ενέργειας που ισχύει πάντα)
$ΔK = W_w \Rightarrow ΔK = + (m_1 + m_2) \cdot g \cdot h \Rightarrow ΔK = + (1 + 2) \cdot 10 \cdot 0{,}8 \Rightarrow ΔK = + 24$ J.
Η΄εφαρμόζουμε τηνΑρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας
(άλλη έκφραση της γενικότερης Αρχής Διατήρησης της Ενέργειας που ισχύει στο σύστημα συσσωματώματος – Γης εφόσον ασκείται στο συσσωμάτωμα μόνο η δύναμη του βάρους, μια διατηρητική δύναμη)
$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow K_{τελ} – K_{αρχ} = U_{αρχ} – U_{τελ} \Rightarrow ΔK = (m_1 + m_2) \cdot g \cdot (h – 0)$.
Φτάσαμε στο ίδιο αποτέλεσμα.
Κινηματική λύση
Η ταχύτητα του συσσωματώματος ελάχιστα πριν έρθει σε επαφή με το έδαφος,
το μέτρο της ταχύτητας:$υ = \sqrt{(υ_{συσ}^2 + υ_y^2)} \Rightarrow$(η συνιστώσα της ταχύτητας στον y άξονα $υ_y = g \cdot t_{ολ} = 10 \cdot (0{,}4) = 4$ m / s)
$υ = \sqrt{[(10 / 3)^2 + 4^2]} \Rightarrow υ = \sqrt{[(100 / 9) + 16]}$.
Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος κατά την οριζόντια βολή:
$ΔK = (1 / 2) \cdot (m_1 + m_2) \cdot υ^2 – (1 / 2) \cdot (m_1 + m_2) \cdot υ_{συσ}^2 \Rightarrow ΔK = (1 / 2) \cdot (1 + 2) \cdot [(100 / 9) + 16] – (1 / 2) \cdot (1 + 2) \cdot (100 / 9) \Rightarrow ΔK = + 24$ J.
Καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.

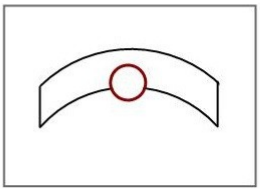
ΑΣΚΗΣΗ 20

Σφαίρα μάζας m_1= 3 Kg εκτελεί τμήμα ομαλής κυκλικής κίνησης περιόδου T πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, με την βοήθεια λείας ημικυλινδρικής επιφάνειας με κατακόρυφο άξονα ακτίνας R = 4 m, με την οποία η σφαίρα είναι σε επαφή .Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας της σφαίρας m_1 είναι $υ_1$ = 2 m / s .



(Το σχήμα είναι μια κάτοψη, βλέπουμε δηλαδή το σχήμα από ψηλά. Η σφαίρα μάζας m_1 κινείται πάνω στο οριζόντιο επίπεδο και βρίσκεται σε επαφή με την ημικυλινδρική επιφάνεια, που είναι κάθετη στο οριζόντιο επίπεδο.

Στο παραπάνω σχήμα βλέπετε την μάζα m_1 από μπροστά)



Τη στιγμή που η σφαίρα m_1 εξέρχεται από την κατακόρυφη ημικυλινδρική επιφάνεια συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά μα σφαίρα μάζας m_2 = 1 Kg και ταχύτητας μέτρου $υ_2$ που κινείται πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο .

Το συσσωμάτωμα που προκύπτει κινείται πάνω στην διάμετρο της ημικυλινδρικής επιφάνειας και φτάνει στην απέναντι άκρη της σε χρόνο T / π s μετά την κρούση .

Να υπολογιστούν :

$Δ_1$. Το χρονικό διάστημα όπου η σφαίρα m_1 είναι σε επαφή την κατακόρυφη ημικυλινδρική επιφάνεια .

$Δ_2$. Η ταχύτητα του συσσωματώματος $υ_Σ$.

$Δ_3$. Η ταχύτητα της σφαίρας m_2.

$Δ_4$. Το μέτρο της μεταβολής της ορμής της σφαίρας m_1 , εξαιτίας της κρούσης.

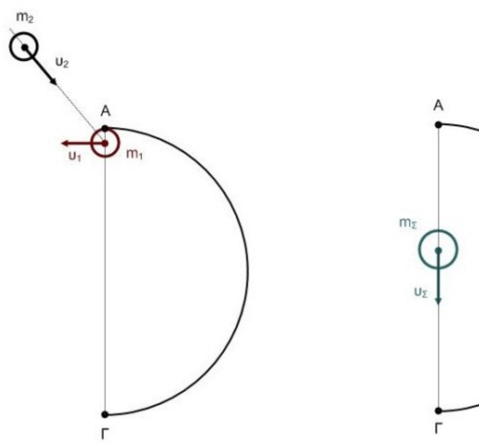
$Δ_5$. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος των δύο σφαιρών κατά την κρούση.

Λύση

$Δ_1$.Το χρονικό διάστημα $Δt_1$ όπου η σφαίρα είναι σε επαφή με την ημικυλινδρική επιφάνεια είναι:$Δt_1$ = T / 2,

όπου T είναι η περίοδος της ομαλής κυκλικής κίνησης.

Η σχέση της ταχύτητας με την ακτίνα και την περίοδο:$υ_1 = 2·π / T ⇒ T = 2·π / υ_1$.



Άρα:

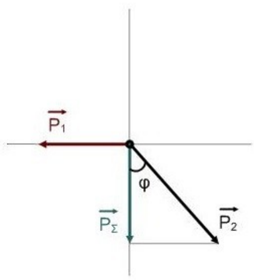
$Δt_1 = T / 2 ⇒ Δt_1 = (1 / 2)·(2·π·R / υ_1)] ⇒ Δt_1 = π·R / υ_1 ⇒ Δt_1 = π·4 / 2 ⇒ Δt_1 = 2·π$ s.

$Δ_2$.Το συσσωμάτωμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση πάνω στην διάμετρο.

Επομένως:$υ_Σ = Δx_Σ / Δt_Σ ⇒ υ_Σ = [2·R / (T / π)] ⇒ υ_Σ = (2·π·R) / T$

Ισχύει $υ_Σ = υ_1$ = 2 m / s.

Η κατεύθυνση της $υ_Σ$ είναι κάθετη στη διεύθυνση της ταχύτητας $υ_1$ της σφαίρας m_1 ελάχιστα πριν την κρούση.



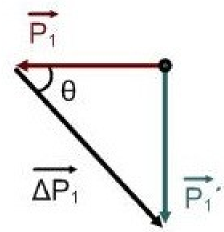
$Δ_3$.Το μέτρο της ορμής της σφαίρας m_1 ελάχιστα πριν την κρούση, είναι:$P_1 = m_1·υ_1 ⇒ P_1$ = 3·2 = 6 kg·m / s.

Το μέτρο της ορμής της σφαίρας m_2 ελάχιστα πριν την κρούση, είναι:$P_2 = m_2·υ_2$.

Το μέτρο της ορμής του συσσωματώματος $m_Σ$ ελάχιστα μετά την κρούση, είναι:$P_Σ = m_Σ·υ_Σ$ ⇒(ισχύει $m_Σ = m_1 + m_2$)$P_Σ = (m_1 + m_2)·υ_Σ ⇒ P_Σ = (3 + 1)·2 = 8$ kg·m / s.
Για την πλαστική κρούση ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Ορμής:(για κάθε μονωμένο σύστημα σωμάτων, μια διανυσματική σχέση)
$P_{ολ,πριν} = P_{ολ,μετά} ⇒ P_1 + P_2 = P_Σ$.

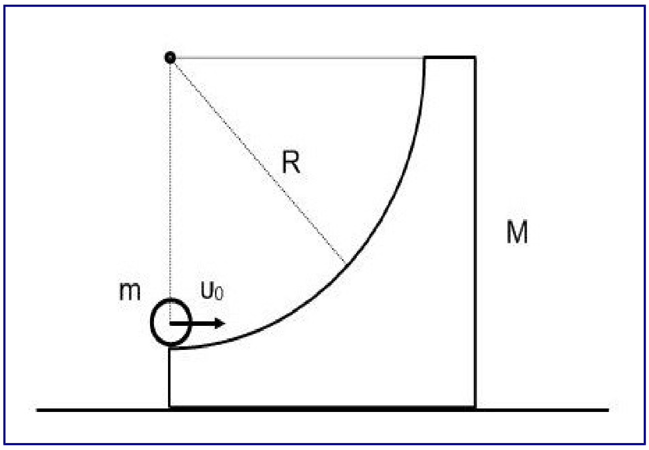
Από το σχήμα, ισχύει για το μέτρο της P_2 η σχέση:
$P_2 = \sqrt{P_1^2 + P_Σ^2} ⇒ m_2·υ_2 = \sqrt{P_1^2 + P_Σ^2} ⇒ υ_2 = \sqrt{P_1^2 + P_Σ^2} / m_2 ⇒ υ_2 = \sqrt{6^2 + 8^2} / 1 ⇒ υ_2 = 10$ m / s.
Από το σχήμα, ισχύει για την διεύθυνση της P_2 η σχέση:
εφ φ = $P_1 / P_Σ$ ⇒εφ φ = 6 / 8 = 3 / 4.

$Δ_4$.
Το μέτρο της ορμής της σφαίρας m_1 ελάχιστα μετά την κρούση, είναι:
$P_1' = m_1·υ_Σ ⇒ P_1' = 3·2 = 6$ kg·m / s.
Για το μέτρο της μεταβολής της ορμής της σφαίρας m_1, έχουμε:
$ΔP_1 = \sqrt{P_1^2 + P_1'^2} ⇒ ΔP_1 = P_1·\sqrt{2} ⇒ ΔP_1 = 6·\sqrt{2}$ kg·m / s.
Και η γωνία θ (προσδιορισμός της διεύθυνσης) είναι:θ = π /4 rad.

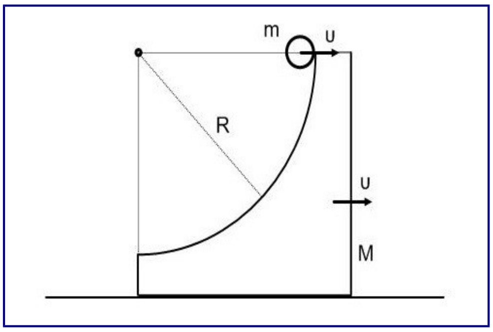


$Δ_5$.
Για την μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος των δύο σωμάτων, έχουμε:
$ΔK = K_{ολ,τελ} – K_{ολ,αρχ}$ ⇒
$ΔK = (1 / 2)·(m_1 + m_2)·υ_Σ^2 – [(1 / 2)·m_1·υ_1^2 + (1 / 2)·m_2·υ_2^2] ⇒ ΔK = (1 / 2)·(3 + 1)·2^2 – [(1 / 2)·3·2^2 + (1 / 2)·1·10^2] ⇒ ΔK = – 48$ J.

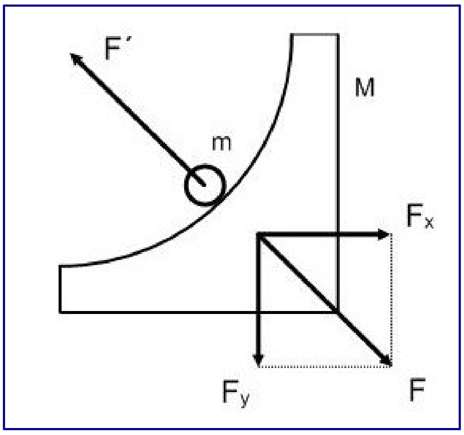
ΑΣΚΗΣΗ 21
Πάνω σε οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί σώμα μάζας M που μπορεί να κινηθεί . Στο πάνω μέρος του σώματος σχηματίζεται τεταρτοκύκλιο , όπως φαίνεται στο σχήμα . Από την βάση του τεταρτοκυκλίου , που έχει ακτίνα R , εκτοξεύεται οριζόντια μια μικρή σφαίρα μάζας m , με ταχύτητα μέτρου $υ_0$.



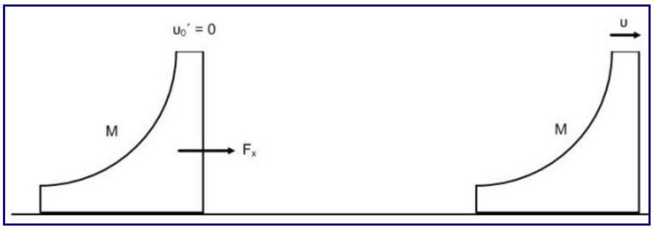
Να υπολογίσετε :
$Δ_1$. Την ελάχιστη τιμή του μέτρου της $υ_0$, ώστε η σφαίρα να φτάσει στην κορυφή του τεταρτοκυκλίου .
$Δ_2$. Το έργο της δύναμης επαφής που δέχεται ο οδηγός από τη σφαίρα .
Δίνεται : g , R , m , M ενώ τριβές δεν υπάρχουν . Θεωρήστε πως το σώμα είναι συνεχώς σε επαφή με το τεταρτοκύκλιο .
Λύση
$Δ_1$.
Στην κορυφή του τεταρτοκυκλίου , το σώμα m δεν έχει κατακόρυφη συνιστώσα ταχύτητας στο πάνω μέρος του οδηγού , για να έχουμε την ελάχιστη τιμή για το $υ_0$.
Οριζόντια το σώμα θα έχει την ίδια ταχύτητα με το τεταρτοκύκλιο .
Εφαρμόζουμε Α.Δ.Ο. στον άξονα x :
(διανυσματική σχέση που ισχύει στο μονωμένο σύστημα των σωμάτων M , m)
$P_{ολ,αρχ} = P_{ολ,τελ} ⇒ m·υ_0 = (M + m)·υ$ ⇒
(τα m , M κινούνται σαν ένα σώμα με ταχύτητα υ)
$υ = m·υ_0 / (M + m)$.



Εφαρμόζουμε αρχή διατήρησης μηχανικής ενέργειας για το σώμα μάζας m , με αρχική την θέση στη βάση του τεταρτοκυκλίου και τελική την θέση όταν φτάνει στην κορυφή του τεταρτοκυκλίου :
(μια έκφραση της γενικότερης αρχής διατήρησης της ενέργειας που ισχύει σε σύστημα που παράγουν έργο διατηρητικές μόνο δυνάμεις , όπως στη περίπτωση μας το βάρος)
$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow ½·m·υ_0^2 + 0 = ½·(M + m)·υ^2 + m·g·R \Rightarrow m·υ_0^2 = (M + m)·(m^2·υ_0^2) / (M + m)^2 + 2·m·g·R \Rightarrow (M + m)·υ_0^2 – m·υ_0^2 = 2·g·R·(M + m) \Rightarrow M·υ_0^2 = 2·g·R·(M + m) \Rightarrow υ_0 = \sqrt{[2·g·R·(M + m) / M]}$.



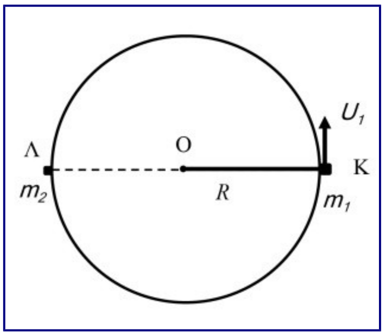
$Δ_2$.
Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το σώμα μάζας Μ με αρχική την θέση ηρεμίας του (η ταχύτητα του είναι μηδέν) και τελική την θέση όπου το σώμα m έχει φτάσει στην κορυφή του τεταρτοκυκλίου και το σύστημα του σώματος m και του σώματος Μ κινούνται με την ίδια ταχύτητα .
Το σώμα m δέχεται από το σώμα Μ δύναμη F΄ . Το σώμα Μ δέχεται από το σώμα m δύναμη F . Οι δυνάμεις F , F΄ είναι δυνάμεις δράσης – αντίδρασης και έχουν την διεύθυνση και φορά που δίνονται στο σχήμα .Η δύναμη F που ασκεί το m στο Μ αναλύεται στην F_x οριζόντια συνιστώσα και F_y κατακόρυφη συνιστώσα , όπως φαίνεται στο σχήμα .
Το σώμα μάζας Μ κινείται οριζόντια με την επίδραση της οριζόντιας συνιστώσας F_x της δύναμης που δέχεται από το σώμα μάζας m , η οποία παράγει έργο . Αντίθετα η κατακόρυφη δύναμη F_y που δέχεται το Μ δεν παράγει έργο .



$ΔK = W_F \Rightarrow W_F = K_{τελ} – K_{αρχ} \Rightarrow$
$W_F = ½·M·υ^2 \quad 0 \Rightarrow W_F = ½·M·[m^2·υ_0^2 / (M + m)^2]$
$\Rightarrow W_F = M·m^2·υ_0^2 / [2·(M + m)^2]$.

ΑΣΚΗΣΗ 22

Μια ράβδος μήκους R = 1 m και αμελητέας μάζας βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από το σημείο Ο. Στο άλλο άκρο της είναι στερεωμένο σώμα $Σ_1$ μάζας m_1 = 2 kg το οποίο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με γραμμική ταχύτητα μέτρου $υ_1$ = 20 m / s, ξεκινώντας από το σημείο Κ. Στο σημείο Λ (αντιδιαμετρικό του Κ) βρίσκεται ακίνητο σώμα $Σ_2$ μάζας m_2 = 1 kg.



$Δ_1$. Να σχεδιαστεί και να υπολογιστεί το μέτρο της κεντρομόλου δύναμης που ασκείται στο σώμα $Σ_1$ από τη ράβδο.
Όταν το σώμα $Σ_1$ φτάνει στο σημείο Λ συγκρούεται με το σώμα $Σ_2$. Μετά την κρούση το σώμα $Σ_2$ αποκτά ταχύτητα μέτρου $υ_2$ = 20 m / s και κινείται ευθύγραμμα πάνω στο λείο επίπεδο στη διεύθυνση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο Λ. Να θεωρήσετε ότι η κρούση είναι ακαριαία.
$Δ_2$. Να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας του σώματος $Σ_1$ αμέσως μετά την κρούση.
$Δ_3$. Να βρεθεί ο λόγος T_1 / T_2 , όπου T_1 η περίοδος της ομαλής κυκλικής κίνησης πριν την κρούση και T_2 η περίοδος της ομαλής κυκλικής κίνησης μετά την κρούση.
$Δ_4$. Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων $Σ_1$ και $Σ_2$ την χρονική στιγμή που το σώμα $Σ_1$ μετά τη κρούση φτάνει στο σημείο Κ για πρώτη φορά.
Θεωρήστε για διευκόλυνση των πράξεων ότι $π^2$ = 10.

Λύση

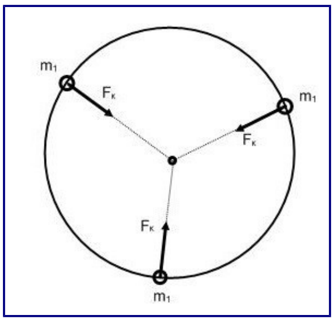
$Δ_1$. Η κεντρομόλος (που είναι η συνισταμένη όλων των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα $Σ_1$)

ασκείται από την ράβδο στο σώμα $Σ_1$:

$F_κ = m_1 \cdot υ_1^2 / R \Rightarrow Fκ = 2 \cdot 20^2 / 1$

Fκ = 800 N .

Η διεύθυνση της Fκ είναι η εφαπτόμενη σε κάθε θέση (σημείο) της κυκλικής τροχιάς.



$Δ_2$.

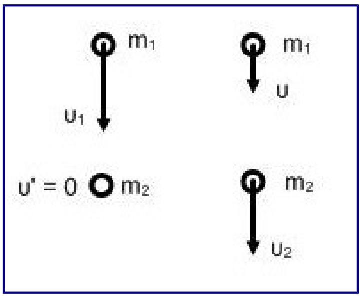
Η αρχή διατήρησης της ορμής

(Διανυσματική σχέση. Θεωρήσαμε θετική φορά προς τα κάτω):

(Η αρχή διατήρησης της ορμής ισχύει σε μονωμένο σύστημα, όπου η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο σύστημα $ΣF_{εξ} = 0$)

$P_{ολ,αρχ} = P_{ολ,τελ} \Rightarrow m_1 \cdot υ_1 = m_1 \cdot υ + m_2 \cdot υ_2 \Rightarrow υ = (m_1 \cdot υ_1 – m_2 \cdot υ_2) / m_1 \Rightarrow$

$υ = υ_1 – (m_2 / m_1) \cdot υ_2 \Rightarrow υ = 20 – ½ \cdot 20 \Rightarrow υ = 10$ m / s .



$Δ_3$.

Η σχέση της ταχύτητας με την περίοδο και την ακτίνα στην ομαλή κυκλική κίνηση:

$υ = 2π \cdot R / T \Rightarrow T = 2π \cdot R / υ$,

αυτή είναι η γενική σχέση, γράφουμε τις σχέσεις για τις περιόδους T_1 και T_2 , και διαιρούμε κατά μέλη (μια συνηθισμένη πρακτική) τις δύο σχέσεις: $T_1 / T_2 = (2π \cdot R / υ_1) / (2π \cdot R / υ) \Rightarrow T_1 / T_2 = υ / υ_1 \Rightarrow T_1 / T_2 = 10 / 20 \Rightarrow$

$T_1 / T_2 = ½$.

$Δ_4$.

Το σώμα $Σ_1$ εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση και μετά την κρούση, αλλά με διαφορετική ταχύτητα,η νέα του περίοδος είναι:

$T_2 = 2π \cdot R / υ \Rightarrow T_2 = 2π \cdot 1 / 10 \Rightarrow T_2 = π / 5$ s .

Το σώμα $Σ_1$ φτάνει στο σημείο Κ για πρώτη φορά σε χρόνο:

$Δt_2 = T_2 / 2 \Rightarrow Δt_2 = (π / 5) / 2 \Rightarrow Δt_2 = π / 10$ s .

Στο χρόνο $Δt_2$ το σώμα $Σ_1$, που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, έχει διανύσει:

$υ_2 = Δx_2 / Δt_2 \Rightarrow Δx_2 = υ_2 \cdot Δt_2 \Rightarrow Δx_2 = 20 \cdot (π / 10) \Rightarrow Δx_2 = 2π$ m .

Για να βρούμε την απόσταση d μεταξύ των δύο σωμάτων:

Πυθαγόρειο θεώρημα:

$d^2 = Δx_2^2 + (2 \cdot R)^2 \Rightarrow d^2 = (2π)^2 + (2 \cdot 1)^2 \Rightarrow d^2 = 4π^2 + 4 \Rightarrow d^2 = 4 \cdot 11 \Rightarrow$

$d = 2\sqrt{11}$ m .