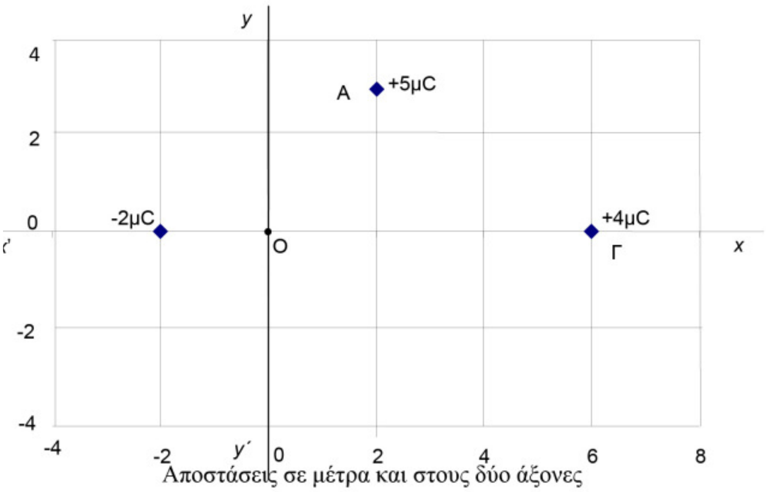
ΚΙΝΗΣΕΙΣ ΦΟΡΤΙΩΝ ΣΕ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Ακινητοποιούμε τρία σημειακά ηλεκτρικά φορτία, στις θέσεις που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα, πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο κατασκευασμένο από κάποιο μονωτικό υλικό.



Αποστάσεις σε μέτρα και στους δύο άξονες

$Δ_1$. Να υπολογίσετε τη δυναμική ενέργεια του συστήματος των φορτίων.

$Δ_2$. Να υπολογίσετε το έργο της ηλεκτρικής δύναμης κατά τη μετακίνηση του φορτίου που βρίσκεται στη θέση Α του σχήματος, σε άπειρη απόσταση.

$Δ_3$. Στη συνέχεια, και στο σύστημα των δύο ηλεκτρικών φορτίων που έχουν μείνει, αποφασίζουμε να μετακινήσουμε προς τα δεξιά το φορτίο που είναι στη θέση Γ (και έχει μάζα 0,01 gr κατά 8 m μέχρι να βρεθεί σε μια νέα θέση Δ, επίσης στον οριζόντιο άξονα xx΄. Αν το ηλεκτρικό αυτό φορτίο όταν βρεθεί στη θέση Δ έχει ταχύτητα υ = 10 m / s, ποιο είναι το έργο που απαιτείται για αυτή τη μετακίνηση;

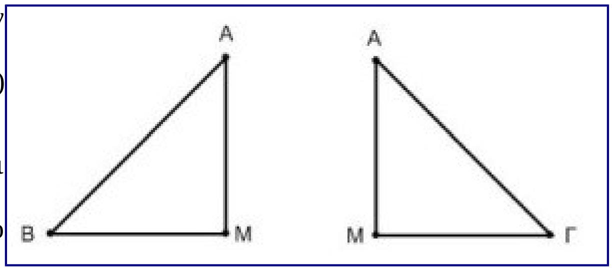
Δίνεται $k_c = 9 \cdot 10^9$ N · m² / C² .

Λύση

$Δ_1$.

Η δυναμική ηλεκτρική ενέργεια του συστήματος των τριών φορτίων:

$U_{ολ} = k_c \cdot (Q_A \cdot Q_B) / (AB) + k_c \cdot (Q_A \cdot Q_Γ) / (AΓ) + k_c \cdot (Q_B \cdot Q_Γ) / (BΓ)$.



Στο σχήμα το φορτίο -2 μC είναι στο σημείο Β (λείπει από το σχήμα της εκφώνησης)

Η απόσταση (ΑΒ) είναι η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΜΒ, πυθαγόρειο :

$(AB)^2 = (AM)^2 + (BM)^2 \Rightarrow (AB)^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow (AB)^2 = 25 \Rightarrow (AB) = 5$ m .

Η απόσταση (ΑΓ) είναι η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΜΓ, πυθαγόρειο :

$(AΓ)^2 = (AM)^2 + (MΓ)^2 \Rightarrow (AΓ)^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow (AΓ)^2 = 25 \Rightarrow (AΓ) = 5$ m .

Άρα:

$U_{ολ} = k_c \cdot (Q_A \cdot Q_B) / (AB) + k_c \cdot (Q_A \cdot Q_Γ) / (AΓ) + k_c \cdot (Q_B \cdot Q_Γ) / (BΓ) \Rightarrow U_{ολ} = 9 \cdot 10^9 \cdot (5 \cdot 10^{-6} \cdot (-2 \cdot 10^{-6}) / 5 + 9 \cdot 10^9 \cdot (5 \cdot 10^{-6} \cdot (4 \cdot 10^{-6}) / 5 + 9 \cdot 10^9 \cdot (-2 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-6}) / 8 \Rightarrow U_{ολ} = 9 \cdot 10^{-3}$ joule .

$Δ_2$. Το έργο της δύναμης Coulomb για την μετακίνηση του Q_A από το Α έως το ∞ :

$W_{F\,(A \to \infty)} = Q_A \cdot (V_A - V_\infty)$, όπου το δυναμικό στο άπειρο είναι μηδέν.

Το δυναμικό στο Α:

$V_A = k_c \cdot Q_B / (AB) + k_c \cdot Q_Γ / (AΓ) \Rightarrow V_A = 9 \cdot 10^9 \cdot (-2 \cdot 10^{-6}) / 5 + 9 \cdot 10^9 \cdot (4 \cdot 10^{-6}) / 5 \Rightarrow V_A = + (18 / 5) \cdot 10^3$ V .

Άρα το έργο: $W_{F\,(A \to \infty)} = Q_A \cdot V_A \Rightarrow W_{F\,(A \to \infty)} = 5 \cdot 10^{-6} \cdot (18 / 5) \cdot 10^3 \Rightarrow W_{F\,(A \to \infty)} = 18 \cdot 10^{-3}$ joule .

$Δ_3$. Η δυναμική ηλεκτρική ενέργεια του συστήματος αρχικά ($Q_Γ$ στο σημείο Γ) :

$U_{BΓ} = k_c \cdot (Q_B \cdot Q_Γ) / (BΓ) \Rightarrow U_{BΓ} = 9 \cdot 10^9 \cdot (-2 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-6}) / 8 \Rightarrow U_{BΓ} = -9 \cdot 10^{-3}$ joule .

Η δυναμική ηλεκτρική ενέργεια του συστήματος τελικά ($Q_Γ$ στο σημείο Δ) :

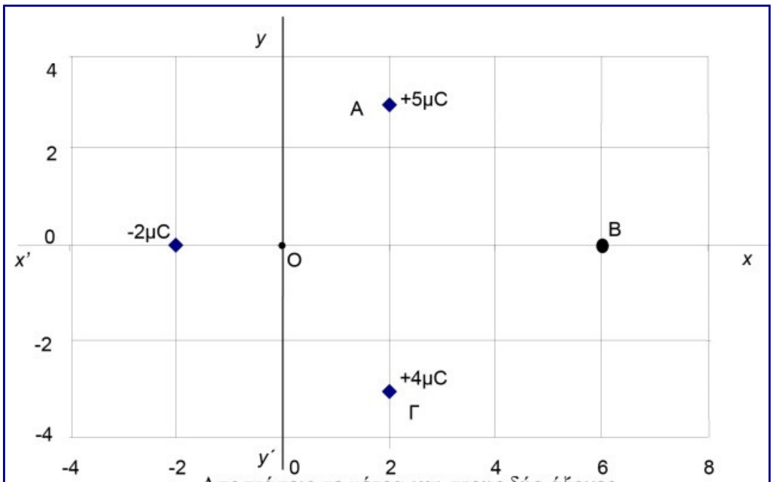
$U_{BΔ} = k_c \cdot (Q_B \cdot Q_Γ) / (BΔ) \Rightarrow U_{BΔ} = 9 \cdot 10^9 \cdot (-2 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-6}) / 16 \Rightarrow U_{BΔ} = -4{,}5 \cdot 10^{-3}$ joule .

Η κινητική ενέργεια του $Q_Γ$ στο σημείο Δ : $K = ½ \cdot m \cdot υ^2 \Rightarrow K = ½ \cdot 10^{-5} \cdot 10^2 \Rightarrow K = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ joule .

Αρχή διατήρησης της ενέργειας :
$U_{ΒΓ} + W = U_{ΒΔ} + K \Rightarrow W = U_{ΒΔ} + K – U_{ΒΓ} \Rightarrow W = – 4{,}5 \cdot 10^{-3} + 0{,}5 \cdot 10^{-3} – (- 9 \cdot 10^{-3}) \Rightarrow W = 5 \cdot 10^{-3}$ joule .

ΑΣΚΗΣΗ 2

Ακινητοποιούμε σε λείο οριζόντιο δάπεδο κατασκευασμένο από μονωτικό υλικό, τρία σημειακά ηλεκτρικά φορτία στις θέσεις που φαίνονται στο πιο κάτω σχήμα.



Αποστάσεις σε μέτρα και στους δύο άξονες

$Δ_1$. Να υπολογίσετε τη δυναμική ενέργεια του συστήματος των τριών φορτίων.
$Δ_2$. Το έργο της ηλεκτρικής δύναμης κατά τη μετακίνηση του φορτίου που βρίσκεται στη θέση Α του σχήματος, σε άπειρη απόσταση.
$Δ_3$. Στη συνέχεια, και στο σύστημα των δύο ηλεκτρικών φορτίων που έχουν μείνει, αποφασίζουμε να μετακινήσουμε το φορτίο που είναι αρχικά στη θέση Γ (και έχει μάζα 0,01 g) προς τη θέση Β. Αν το ηλεκτρικό αυτό φορτίο όταν βρεθεί στη θέση Β έχει ταχύτητα υ = 10 m/s, ποιο είναι το έργο που απαιτείται για αυτή τη μετακίνηση;
Δίνεται $k_c = 9 \cdot 10^9\ N \cdot m^2 / C^2$.

Λύση

$Δ_1$. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ σχηματίζει ένα ρόμβο με μήκη πλευρών:
ΔΓ = 5 m , ΑΔ = 5 m , ΑΒ = 5 m και ΒΓ = 5 m. Το μήκος ΑΓ = 6 m .
Η δυναμική ηλεκτρική ενέργεια του συστήματος των τριών φορτίων $q_Α$, $q_Β$, $q_Γ$:
(Η δυναμική ηλεκτρική ενέργεια ορίζεται μόνο σε ένα σύστημα φορτίων)
$U_{ολ} = k_c \cdot (q_Α \cdot q_Δ) / (ΑΔ) + k_c \cdot (q_Α \cdot q_Γ) / (ΑΓ) + k_c \cdot (q_Δ \cdot q_Γ) / (ΔΓ) \Rightarrow U_{ολ} = 9 \cdot 10^9 \cdot (5 \cdot 10^{-6} \cdot (- 2) \cdot 10^{-6}) / 5 + 9 \cdot 10^9 \cdot (5 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-6}) / 6 + 9 \cdot 10^9 \cdot (-2 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-6}) / 5 \Rightarrow U_{ολ} = – 2{,}4 \cdot 10^{-3}$ joule .

$Δ_2$. Το έργο της ηλεκτρικής δύναμης για την μετακίνηση του φορτίου που βρίσκεται στη θέση Α, σε άπειρη απόσταση : $W_{F, Α \to \infty} = Q_Α \cdot (V_Α – V_\infty) \Rightarrow W_{F, Α \to \infty} = Q_Α \cdot (V_Α – 0) \Rightarrow W_{F, Α \to \infty} = Q_Α \cdot V_Α$ …(Ι)
Ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο Α : $V_Α = V_{Α,Δ} + V_{Α,Γ} \Rightarrow V_Α = k_c \cdot q_Δ / (ΑΔ) + k_c \cdot q_Γ / (ΑΓ) \Rightarrow V_Α = 9 \cdot 10^9 \cdot (-2) \cdot 10^{-6} / 5 + 9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-6} / 6 \Rightarrow V_Α = 2{,}4 \cdot 10^3$ V .
Από την σχέση (Ι) συνεπάγεται:
$W_{F, Α \to \infty} = Q_Α \cdot V_Α \Rightarrow W_{F, Α \to \infty} = 5 \cdot 10^{-6} \cdot 2{,}4 \cdot 10^3 \Rightarrow W_{F, Α \to \infty} = 12 \cdot 10^{-3}$ joule .

$Δ_3$. Δυναμική ηλεκτρική ενέργεια μεταξύ των φορτίων $q_Δ$ και $q_Γ$ σε απόσταση (ΓΔ) :
$U_{ΔΓ} = k_c \cdot (q_Δ \cdot q_Γ) / (ΔΓ) \Rightarrow U_{ΔΓ} = 9 \cdot 10^9 \cdot (-2 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-6}) / 5 \Rightarrow U_{ΔΓ} = – 14{,}4 \cdot 10^{-3}$ joule .
Δυναμική ηλεκτρική ενέργεια μεταξύ των φορτίων $q_Δ$ και $q_Γ$ σε απόσταση (ΔΒ) :
$U_{ΔΒ} = k_c \cdot (q_Δ \cdot q_Γ) / (ΔΒ) \Rightarrow U_{ΔΒ} = 9 \cdot 10^9 \cdot (-2 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-6}) / 8 \Rightarrow U_{ΔΓ} = – 9 \cdot 10^{-3}$ joule .
Η κινητική ενέργεια του του φορτίου $q_Γ$ με μάζα m Q $K = ½ \cdot m \cdot υ^2 \Rightarrow K = ½ \cdot 10^{-5} \cdot 10^2 \Rightarrow K = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ joule .
Αρχή διατήρησης της ενέργειας :
$U_{ΔΓ} + W = U_{ΔΒ} + K \Rightarrow W = U_{ΔΒ} + K – U_{ΔΓ} \Rightarrow W = – 9 \cdot 10^{-3} + 0{,}5 \cdot 10^{-3} – (- 14{,}4 \cdot 10^{-3}) \Rightarrow W = 5{,}9 \cdot 10^{-3}$ joule .

ΑΣΚΗΣΗ 3

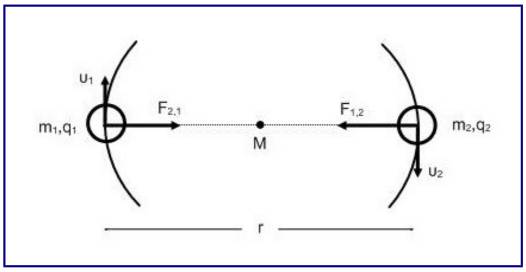
Δύο σημειακά σωματίδια με ηλεκτρικά φορτία q = 10^{-5} C και q = – 10^{-5} C και ίσες μάζες m = 0,1 kg βρίσκονται σε οριζόντιο δάπεδο σε απόσταση 0,5 m.
$Δ_1$. Να υπολογιστεί η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια των δύο φορτίων.

$Δ_2$. Να προσδιοριστεί το μέτρο της ταχύτητας που πρέπει να προσδώσουμε σε καθένα από τα δύο σωματίδια ώστε να μπορούν να εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση με την επίδραση της δύναμης Coulomb που θα παίζει το ρόλο κεντρομόλου δύναμης, γύρω από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα δύο σημειακά σωματίδια.
$Δ_3$. Να υπολογίσετε την κινητική και την ολική ενέργεια του συστήματος των δύο σωματιδίων.
$Δ_4$. Να υπολογίσετε το ποσό της ενέργειας που πρέπει να προσδοθεί στα δύο φορτία, όταν αυτά εκτελούν κυκλική κίνηση, ώστε να φτάσουν σε άπειρη απόσταση με μηδενικές ταχύτητες.
Τριβές δεν υπάρχουν, η βαρύτητα δεν παίζει ρόλο, ενώ η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.
Δίνεται $k_c = 9·10^9$ N·m^2 / C^2 .

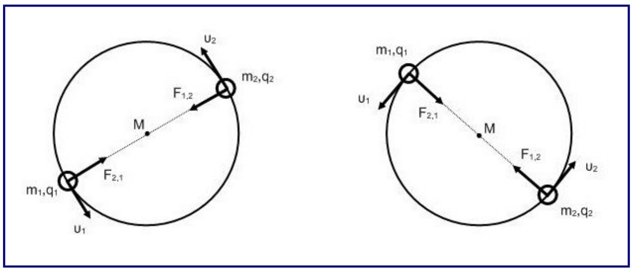
Λύση

$Δ_1$. Μας δίνονται δύο σημειακά σωματίδια που έχουν ίση μάζα $m_1 = m_2$ και φορτία q_1 και q_2 .
Το ερώτημα μας ζητάει την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο φορτισμένων σωματιδίων. Η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια ορίζεται μόνο σε ένα σύστημα δύο ή περισσοτέρων φορτίων, είναι μια μορφή ενέργειας. Δηλαδή μονόμετρο μέγεθος με μονάδες joule, άρα θα υπολογιστεί μόνο το μέτρο της.
Η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των σωματιδίων δίνεται από την σχέση :
$U_{1,2} = k_c·(q_1·q_2) / r ⇒ U_{1,2} = 9·10^9·(10^{-5}·(- 10^{-5})) / ½ ⇒ U_{1,2} = – 1,8$ joule .

$Δ_2$. Τα σωματίδια εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση και η μόνη δύναμη που παίζει ρόλο είναι η ηλεκτρική δύναμη Η ηλεκτρική δύναμη (Coulomb) είναι η κεντρομόλος δύναμη στην άσκηση μας..
(Η κεντρομόλος δύναμη δεν είναι παρά η συνισταμένη των δυνάμεων που ήδη δρουν στο σώμα πάνω στη διεύθυνση της ακτίνας με φορά προς το κέντρο)



Οι δυνάμεις $F_{1,2}$ και $F_{2,1}$ είναι δυνάμεις δράσης – αντίδρασης ($F_{1,2} = F_{2,1}$), η $F_{1,2}$ ασκείται από το m_1 στο m_2 και η $F_{2,1}$ ασκείται από το m_2 στο m_1
Μας δίνεται ότι οι μάζες είναι ίσες $m_1 = m_2 = m$, μόλις σχολιάσαμε ότι $F_{1,2} = F_{2,1}$,
Ισχύει η σχέση : $F_κ = F_c$.
για το σώμα m_1 : $F_{κ,1} = F_{1,2} ⇒ m_1·υ_1^2 / (r / 2) = F_{1,2}$.
για το σώμα m_2 : $F_{κ,2} = F_{2,1} ⇒ m_1·υ_2^2 / (r / 2) = F_{2,1}$.
άρα $υ_1 = υ_2 = υ$ δηλαδή τα δύο σωματίδια θα εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση όπου συνεχώς θα βρίσκονται στην ίδια ευθεία με το μέσο Μ , δείτε το σχήμα :



$F_κ = F_c ⇒ m·υ^2 / (r / 2) = k_c·|q·q| / r^2 ⇒ k_c·|q|^2 / r^2 = (2·m·υ^2) / r ⇒ υ^2 = k_c·|q|^2 / 2·m·r ⇒ υ = |q|·\sqrt{(k_c / (2·m·r))} ⇒ υ = 10^{-5}·\sqrt{(9·10^9 / (2·0,1·0,5))} ⇒ υ = 3$ m / s . Άρα $υ_1 = υ_2 = υ ⇒ υ_1 = υ_2 = 3$ m / s .

$Δ_3$. Η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι :
$K_{ολ} = K_1 + K_2 ⇒ K_{ολ} = ½·m_1·υ_1^2 + ½·m_2·υ_2^2 ⇒ K_{ολ} = 2·(½·m·υ^2) ⇒ K_{ολ} = 0,1·3^2 ⇒ K_{ολ} = 0,9$ joule .
Η ολική ενέργεια είναι το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας :
$E_{ολ} = K_{ολ} + U_{1,2} ⇒ E_{ολ} = 0,9 – 1,8 ⇒ E_{ολ} = – 0,9$ joule .
Το μείον έχει την φυσική σημασία : τα σωματίδια έλκονται, για να τα απομακρύνουμε σε άπειρη απόσταση μεταξύ τους θα χρειαστεί να προσφέρουμε ενέργεια (κάτι που είναι ήδη γνωστό από την φυσική γενικής).

$Δ_4$. Η ενέργεια που απαιτείται για να μεταφερθούν τα φορτία από την αρχική θέση σε άπειρη απόσταση μεταξύ τους, είναι ίση με το έργο της (εξωτερικής) δύναμης W_F που πρέπει να ασκηθεί (από ένα εξωτερικό παράγοντα για το σύστημα) σε αυτά.
Αρχή διατήρησης της ενέργειας :

(Η ολική τελική ενέργεια $E_{τελ}$ = 0 γιατί η δυναμική ηλεκτρική ενέργεια στο άπειρο (εννοούμε ότι τα σωματίδια έχουν άπειρη απόσταση μεταξύ τους) είναι μηδέν $U_{1,2}' = 0$ και η ολική κινητική ενέργεια είναι μηδέν $K_{ολ}' = K_1' + K_2' \Rightarrow K_{ολ}' = 0 + 0 = 0$)

$E_{τελ} = E_{αρχ} + W_F \Rightarrow W_F = E_{τελ} - E_{αρχ} \Rightarrow W_F = 0 - E_{αρχ} \Rightarrow W_F = -(-0,9) \Rightarrow W_F = +0,9$ joule .

Η θετική τιμή του έργου σημαίνει ότι αυξήθηκε η ενέργεια του συστήματος των δύο σωματιδίων (ή μας δείχνει την ενέργεια που πρόσφερε ο εξωτερικός παράγοντα στο σύστημα).

ΑΣΚΗΣΗ 4

Σημειακό σωματίδιο (1) με ηλεκτρικό φορτίο $q_1 = 10^{-5}$ C είναι ακλόνητα στερεωμένο σε σημείο οριζόντιου δαπέδου κατασκευασμένο από μονωτικό υλικό. Σημειακό σωματίδιο (2) με ηλεκτρικό φορτίο $q_2 = -10^{-5}$ C και μάζα m = 0,1 kg βρίσκεται στο ίδιο οριζόντιο δάπεδο σε σημείο Α που απέχει απόσταση r = 1 m από το σωματίδιο (1).

$Δ_1$. Να υπολογιστεί η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια των δύο φορτίων.

$Δ_2$. Ποια πρέπει να είναι η ταχύτητα κατά μέτρο που πρέπει να προσδώσουμε στο σωματίδιο (2) ώστε να εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση γύρω από το σωματίδιο (1) και σε ακτίνα r = 1 m από αυτό, αν θεωρήσουμε ότι η δύναμη Coulomb παίζει το ρόλο κεντρομόλου δυνάμεως;

$Δ_3$. Να υπολογίσετε την κινητική και την ολική ενέργεια του συστήματος των δύο σωματιδίων.

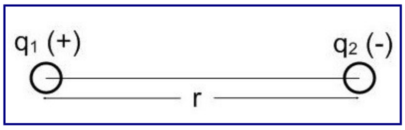
$Δ_4$. Να υπολογίσετε το ποσό της ενέργειας που πρέπει να προσδοθεί στο σύστημα των δύο φορτίων, όταν το ένα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, ώστε να φτάσει σε άπειρη απόσταση από το άλλο με μηδενική ταχύτητα.

Τριβές δεν υπάρχουν, η βαρύτητα δεν παίζει ρόλο, ενώ η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Δίνεται : $k_c = 9\cdot10^9$ N·m^2 / C^2 .

Λύση

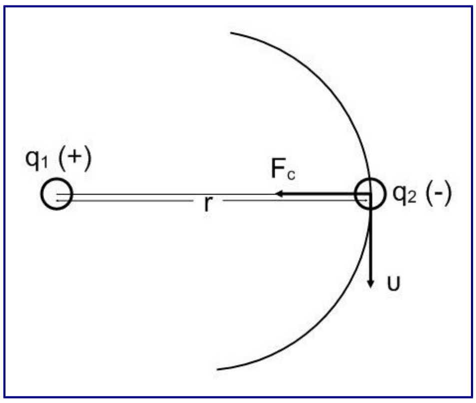
$Δ_1$. Η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των σωματίων (τα σωματίδια είναι πολύ μικρά, π.χ. σωματίδια είναι τα ηλεκτρόνια, όχι τα πρωτόνια.) $U_{1,2}$:



(η δυναμική ηλεκτρική ενέργεια ορίζεται σε σύστημα φορτίων)

$U_{1,2} = k_c\cdot(q_1\cdot q_2) / r \Rightarrow U_{1,2} = 9\cdot10^9\cdot(10^{-5}\cdot(-10^{-5})) / 1 \Rightarrow U_{1,2} = -0,9$ joule .

$Δ_2$. Η δύναμη Coulomb παίζει το ρόλο της κεντρομόλου πάνω στο σωμάτιο με φορτίο q_2 :



$F_c = m\cdot υ^2 / r \Rightarrow k_c\cdot|q|^2 / r^2 = m\cdot υ^2 / r \Rightarrow υ = |q|\cdot\sqrt{(k_c / (m\cdot r))} \Rightarrow υ = 10^{-5}\cdot\sqrt{(9\cdot10^9 / (10^{-1}\cdot1))} \Rightarrow υ = 3$ m / s.

$Δ_3$. Κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο φορτίων :

(Κινητική ενέργεια έχει μόνο το q_2 (το q_1 παραμένει ακλόνητο))

$K_{ολ} = K_1 + K_2 \Rightarrow K_{ολ} = 0 + K_2 \Rightarrow K_{ολ} = ½\cdot m\cdot υ^2 \Rightarrow K_{ολ} = ½\cdot0,1\cdot9 \Rightarrow K_{ολ} = 0,45$ joule .

Η ολική μηχανική ενέργεια του συστήματος των δύο φορτίων : $E = K_{ολ} + U_{1,2} \Rightarrow E = 0,45 - 0,9 \Rightarrow E = -0,45$ joule .

$Δ_4$. Αρχή διατήρησης της ενέργειας :

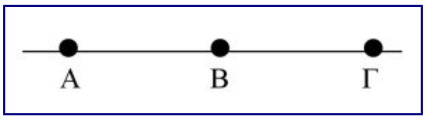
(θα φτάσει το ένα σωμάτιο στο άπειρο άρα $U_\infty = 0$ και θα είναι ακίνητο άρα $K_\infty = 0$)

($W_{Fεξ, A\to\infty}$: είναι το έργο της εξωτερικής δύναμης, μέσω της οποίας θα δοθεί ενέργεια στο σύστημα των δύο φορτίων)

$E_{αρχ} + W_{Fεξ, A\to\infty} = E_\infty \Rightarrow W_{Fεξ, A\to\infty} = ΔE \Rightarrow W_{Fεξ, A\to\infty} = E_\infty - E_{αρχ} \Rightarrow W_{Fεξ, A\to\infty} = 0 - (-0,45) \Rightarrow W_{Fεξ, A\to\infty} = 0,45$ joule .

ΑΣΚΗΣΗ 5

Δύο σημειακά φορτισμένα σώματα με φορτία $q_1 = q_2 = 3{\cdot}10^{-4}$ C βρίσκονται στις θέσεις Α και Β, πάνω σε οριζόντιο μονωμένο επίπεδο μεγάλων διαστάσεων, για τις οποίες ισχύει ΑΒ = 3 m. Η μάζα του σώματος που βρίσκεται στο σημείο Α είναι m = 0,2 kg .



Δ_1. Να βρείτε την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων.

Δ_2. Να βρεθεί η τιμή του φορτίου q τρίτου σημειακού φορτισμένου σώματος, το οποίο πρέπει να τοποθετηθεί στο σημείο Γ της ευθείας ΑΒ, για το οποίο ισχύει ΒΓ = 3 m, ώστε η ολική δυναμική ενέργεια του συστήματος των τριών σωμάτων να είναι μηδενική.

Δ_3. Να εξετάσετε αν σε κάποιο από τα φορτία q_1 , q_2 και q_3 η συνισταμένη δύναμη από τα άλλα είναι μηδέν στις θέσεις Α, Β και Γ αντίστοιχα.

Ακινητοποιούμε τα φορτία q_2 και q_3 στις θέσεις Β και Γ και αφήνουμε το q_1 ελεύθερο να κινηθεί.

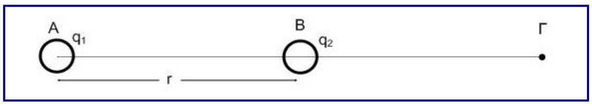
Δ_4. Αφού αιτιολογήσετε γιατί το φορτίο q_1 μπορεί να φτάσει στο άπειρο (δηλαδή σε πολύ μεγάλη απόσταση από τα άλλα δύο φορτία), να βρείτε την ταχύτητά του όταν φτάνει στο άπειρο.

Δίνεται $k_c = 9{\cdot}10^9$ N·m² / C² . Η επίδραση της βαρύτητας, οι τριβές και η αντίσταση του αέρα θεωρούνται αμελητέα.

Λύση

Δ_1.Η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο φορτίων q_1 και q_2 :

(Η δυναμική ηλεκτρική ενέργεια ορίζεται στο σύστημα των φορτίων q_1 και q_2)

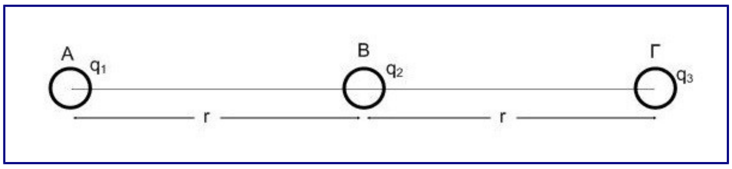


$U_{1,2} = k_c{\cdot}q_1{\cdot}q_2 / r \Rightarrow U_{1,2} = 9{\cdot}10^9{\cdot}3{\cdot}10^{-4}{\cdot}3{\cdot}10^{-4} / 3 \Rightarrow U_{1,2} = 270$ joule .

Δ_2.

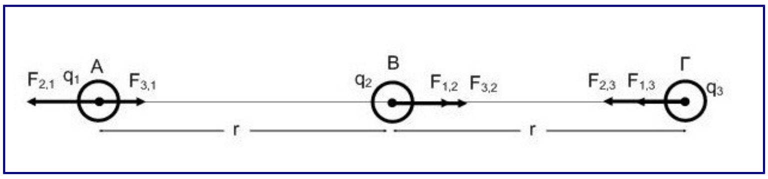
Τοποθετούμε το q_3 στο σημείο Γ.

Η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των τριών φορτίων q_1 , q_2 και q_3 μας δίνεται μηδέν :



$U_{1,2,3} = 0 \Rightarrow k_c{\cdot}q_1{\cdot}q_2 / r_{1,2} + k_c{\cdot}q_2{\cdot}q_3 / r_{2,3} + k_c{\cdot}q_1{\cdot}q_3 / r_{1,3} = 0 \Rightarrow U_{1,2} + k_c{\cdot}q{\cdot}q_3 / r + k_c{\cdot}q{\cdot}q_3 / 2{\cdot}r = 0 \Rightarrow q_3{\cdot}(k_c{\cdot}q / r + k_c{\cdot}q / 2{\cdot}r) = -U_{1,2} \Rightarrow q_3{\cdot}(3{\cdot}k_c{\cdot}q / 2{\cdot}r) = -U_{1,2} \Rightarrow q_3 = -2{\cdot}r{\cdot}U_{1,2} / (3{\cdot}k_c{\cdot}q) \Rightarrow q_3 = -2{\cdot}3{\cdot}270 / (3{\cdot}9{\cdot}10^9{\cdot}3{\cdot}10^{-4}) \Rightarrow q_3 = -2{\cdot}10^{-4}$ C .

Δ_3.Αν υπάρχει περίπτωση να μηδενίζεται η ολική δύναμη πάνω σε ένα φορτίο, αυτό είναι το φορτίο q_1 που βρίσκεται στο σημείο Α, οι δυνάμεις Coulomb που ασκούνται πάνω του από τα φορτία q_2 και q_3 είναι αντίρροπες .



$F_{2,1} = k_c{\cdot}|q_1{\cdot}q_2| / r^2 \Rightarrow F_{2,1} = 9{\cdot}10^9{\cdot}3{\cdot}10^{-4}{\cdot}3{\cdot}10^{-4} / 9 \Rightarrow F_{2,1} = 90$ N .

$F_{3,1} = k_c{\cdot}|q_1{\cdot}q_3| / (2{\cdot}r)^2 \Rightarrow F_{3,1} = 9{\cdot}10^9{\cdot}3{\cdot}10^{-4}{\cdot}2{\cdot}10^{-4} / 36 \Rightarrow F_{3,1} = 15$ N .

Η συνισταμένη των δύο δυνάμεων είναι διάφορη του μηδενός :

$\Sigma F_{x,1} = F_{2,1} - F_{3,1} \Rightarrow \Sigma F_{x,1} = 90 - 15 \Rightarrow \Sigma F_{x,1} = 75$ N , με φορά προς τα αριστερά.

Δηλαδή δεν υπάρχει η περίπτωση να μηδενιστεί η δύναμη σε κανένα από τα τρία φορτία .

Δ_4.Το δυναμικό στο σημείο Α, λόγω των ηλεκτρικών πεδίων που δημιουργούν τα φορτία q_2 και q_3 είναι :

$V_A = V_{A,B} + V_{A,\Gamma} \Rightarrow V_A = k_c{\cdot}q_2 / r + k_c{\cdot}q_3 / 2{\cdot}r \Rightarrow V_A = 9{\cdot}10^9{\cdot}3{\cdot}10^{-4} / 3 - 9{\cdot}10^9{\cdot}2{\cdot}10^{-4} / 6 \Rightarrow V_A = 6{\cdot}10^5$ V .

Το θετικό φορτίο q_1 κινείται αυθόρμητα μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο από το σημείο Α με τιμή υψηλού δυναμικού στο άπειρο με τιμή χαμηλού δυναμικού.

Αρχή διατήρησης μηχανικής ενέργειας για το φορτίο q_1 :

(μια άλλη έκφραση της αρχής διατήρησης της ενέργειας που ισχύει σε συστήματα που ασκούνται μόνο διατηρητικές δυνάμεις σαν την F_c δύναμη Coulomb)

$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow 0 + U_{1,2,3} = K + U_{2,3} \Rightarrow 0 = ½·m·υ^2 + U_{2,3} \Rightarrow ½·m·υ^2 = – U_{2,3} \Rightarrow υ^2 = – 2·U_{2,3} / m \Rightarrow υ = \sqrt{(– 2·U_{2,3} / m)} \Rightarrow υ = \sqrt{(– 2·k_c·q_2·q_3 / (m·r))} \Rightarrow υ = 30·\sqrt{2}\ m / s$.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Δύο φορτισμένα σωματίδια (1) και (2) έχουν μάζες m_1 και m_2 και ηλεκτρικά φορτία q_1 και q_2 αντίστοιχα και βρίσκονται αρχικά σε άπειρη απόσταση μεταξύ τους. Το σωματίδιο (1) εκτοξεύεται με ταχύτητα μέτρου $υ_0$ και κατεύθυνση προς το σωματίδιο (2). Το σωματίδιο (2) ήταν αρχικά ακίνητο. Να υπολογίσετε:

$Δ_1$. τα μέτρα των ταχυτήτων των δύο σωματιδίων, όταν η μεταξύ τους απόσταση γίνει ελάχιστη,

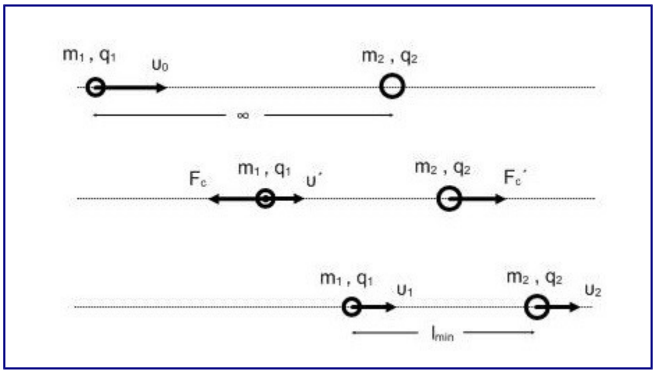
$Δ_2$. την ελάχιστη απόσταση στην οποία θα πλησιάσουν,

$Δ_3$. την απόσταση των δύο σωματιδίων, τη χρονική στιγμή που θα μηδενιστεί η ταχύτητα του σωματιδίου (1).

Δίνονται: $m_1 = 10^{-6}$ kg , $m_2 = 2·10^{-6}$ kg, $q_1 = -5$ μC και $q_2 = -10$ μC, $υ_0 = 3·10^4$ m / s, $k_c = 9·10^9$ N·m²/ C².

Η αντίσταση του αέρα, τριβές και η επίδραση της βαρύτητας θεωρούνται αμελητέες.

Λύση



$Δ_1$ Στο πάνω σχήμα βλέπουμε το σωματίδιο με φορτίο q_1 να βρίσκεται στο άπειρο και να ξεκινάει την κίνηση του με αρχική ταχύτητα $υ_0$.

Στο μεσαίο σχήμα βλέπουμε τις απωστικές δυνάμεις Coulomb που ασκούνται μεταξύ των των σωματιδίων με φορτία q_1 και q_2 .Το σωματίδιο με φορτίο q_1 επιβραδύνεται και το σωματίδιο με φορτίο q_2 επιταχύνεται από την ηρεμία .

Για όσο χρόνο η ταχύτητα του σωματιδίου με φορτίο q_1 είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα του σωματιδίου με φορτίο q_2 τα δύο σωματίδια πλησιάζουν.

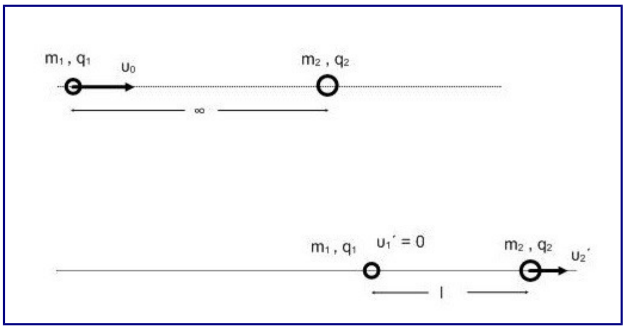
Κάποια στιγμή τα δύο σωματίδια αποκτούν την ίδια ταχύτητα $υ_1 = υ_2$.

Αμέσως μετά η ταχύτητα του σωματιδίου με φορτίο q_1 γίνεται μικρότερη από την ταχύτητα του σωματιδίου με φορτίο q_2 και τα σωματίδια απομακρύνονται. Επομένως στην ελάχιστη απόσταση έχουμε $υ_1 = υ_2$.

Αρχή διατήρησης της ορμής : $P_{ολ,αρχ} = P_{ολ,τελ} \Rightarrow m_1·υ_0 = m_1·υ_1 + m_2·υ_2 \Rightarrow$
(ισχύει $m_2 = 2·m_1$ και $υ_1 = υ_2 = υ$)

$\Rightarrow υ = υ_0 / 3 \Rightarrow υ = 10^4$ m / s με κατεύθυνση (διεύθυνση και φορά) ίδια με την $υ_0$.

$Δ_2$. Αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας μεταξύ της αρχικής κατάστασης (άπειρη απόσταση) και της τελικής κατάστασης(ελάχιστη απόσταση) του συστήματος :
(Οι δυνάμεις Coulomb είναι διατηρητικές και είναι οι μόνες δυνάμεις που επιδρούν στο σύστημα)
$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow ½·m_1·υ_0^2 + 0 = ½·m_1·υ^2 + ½·m_1·υ^2 + k_c·(q_1·q_2) / l_{min} \Rightarrow$
$(υ = υ_0 / 3$ και $m_2 = 2·m_1) \Rightarrow m_1·υ_0^2 = m_1·(υ_0 / 3)^2 + 2·m_1·(υ_0 / 3)^2 + 2·k_c·(q_1·q_2) / l_{min} \Rightarrow m_1·υ_0^2 – m_1·υ_0^2 / 3 = 2·k_c·(q_1·q_2) / l_{min} \Rightarrow (2 / 3)·m_1·υ_0^2 = 2·k_c·(q_1·q_2) / l_{min} \Rightarrow l_{min} = (3·k_c·q_1·q_2) / m_1·υ_0^2 \Rightarrow l_{min} = (3·9·10^9·50·10^{-12}) / (10^{-6}·9·10^8) \Rightarrow l_{min} = 15·10^{-4}\ m \Rightarrow l_{min} = 1,5$ mm .



Δ3.Στο πάνω σχήμα βλέπουμε την αρχική κατάσταση του συστήματος, όταν τα σωματίδια βρίσκονται σε άπειρη απόσταση,
στο κάτω σχήμα βλέπουμε το σωματίδιο με φορτίο q_1 να σταματά στιγμιαία και το σωματίδιο με φορτίο q_2 να έχει ταχύτητα $υ_2΄$ προς τα δεξιά (ίδια κατεύθυνση με το $υ_0$).

Αρχή διατήρησης της ορμής :
$m_1·υ_0 = m_2·υ_2΄ \Rightarrow m_1·υ_0 = 2·m_1·υ_2΄ \Rightarrow υ_2΄ = υ_0 / 2$.
Αρχή διατήρησης μηχανικής ενέργειας :

$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow ½·m_1·υ_0^2 + 0 = ½·m_2·υ_2'^2 + k_c·(q_1·q_2) / l \Rightarrow m_1·υ_0^2 – m_2·υ_2'^2 = 2·k_c·(q_1·q_2) / l \Rightarrow m_1·υ_0^2 – m_2·(υ_0 / 2)^2 = 2·k_c·(q_1·q_2) / l \Rightarrow m_1·υ_0^2 / 2 = 2·k_c·(q_1·q_2) / l \Rightarrow l = (4·k_c·q_1·q_2) / (m_1·υ_0^2) \Rightarrow l = (4·9·10^9·50·10^{-12}) / (10^{-6}·9·10^8) \Rightarrow l = 2·10^{-3}$ m $\Rightarrow l = 2$ mm .

ΑΣΚΗΣΗ 7

Δύο φορτισμένα σωματίδια έχουν μάζες $m_1 = 0,2$ kg, $m_2 = 0,3$ kg και φορτία $q_1 = +(7 / 5)·10^{-4}$ C, $q_2 = +(1 / 6)·10^{-4}$ C αντίστοιχα. Το σωματίδιο (2) αρχικά συγκρατείται ακίνητο, ενώ το (1) εκτοξεύεται από το άπειρο, με ταχύτητα μέτρου $υ_0$, προς το σωματίδιο (2). Τη χρονική στιγμή t_1 η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο σωματιδίων είναι ίση με $U_1 = 210$ J και η ταχύτητα του σωματιδίου (1) είναι $υ_1 = 100$ m / s.

$Δ_1$. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας $υ_0$ και την απόσταση των δύο σωματιδίων τη χρονική στιγμή t_1. Τη χρονική στιγμή t_1 το σωματίδιο (2) αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί.

$Δ_2$. Να περιγράψετε το είδος της κίνησης που θα κάνουν τα δύο σωματίδια μετά την χρονική στιγμή t_1.

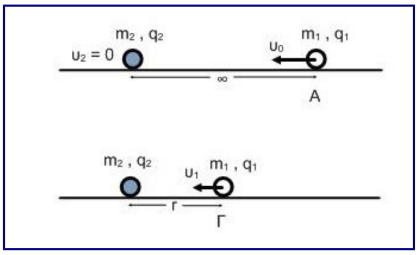
$Δ_3$. Να υπολογίσετε την ελάχιστη απόσταση στην οποία θα πλησιάσουν τα δύο σωματίδια, καθώς και το μέτρο της ταχύτητας των δύο σωματιδίων τη στιγμή που η απόσταση γίνεται ελάχιστη.

$Δ_4$. Τη μέγιστη ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο σωματιδίων.

Δίνεται ότι $k_c = 9·10^9$ N·m^2 / C^2. Η αντίσταση του αέρα και η βαρυτική δύναμη θεωρούνται αμελητέες.

Λύση

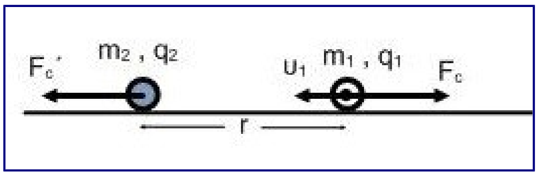
$Δ_1$. Αρχή διατήρησης μηχανικής ενέργειας του συστήματος των (m_1 , q_1) και (m_2 , q_2) μεταξύ των θέσεων Α και Γ :



$E_{μηχ,Α} = E_{μηχ,Γ} \Rightarrow K_Α + U_Α = K_Γ + U_Γ \Rightarrow ½·m_1·υ_0^2 + 0 = ½·m_1·υ_1^2 + U_1 \Rightarrow υ_0^2 = υ_1^2 + (2·U_1 / m_1) \Rightarrow υ_0^2 = 100^2 + (2·210 / 0,2) \Rightarrow υ_0^2 = 10^4 + 2100 \Rightarrow υ_0^2 = 12100 \Rightarrow υ_0 = 110$ m / s .

Η δυναμική ηλεκτρική ενέργεια του συστήματος των δύο σωματιδίων με μάζες m_1 , m_2 και φορτία q_1 , q_2 :

$U_1 = k_c·(q_1·q_2) / r \Rightarrow r = k_c·(q_1·q_2) / U_1 \Rightarrow r = 9·10^9·((7 / 5)·10^{-4}·(1 / 6)·10^{-4}) / 210 \Rightarrow r = 0,1$ m .

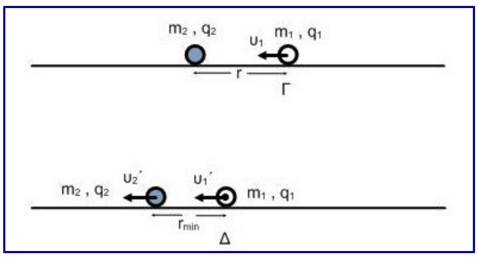


$Δ_2$. Τα δύο σωματίδια με μάζες m_1 , m_2 και φορτία q_1 , q_2 αλληλεπιδρούν με ηλεκτρικές δυνάμεις (Coulomb) F_c και F_c', δυνάμεις δράσης – αντίδρασης ($F_c = F_c'$, που δρουν ταυτόχρονα στα δύο σωματίδια, όπως φαίνεται στο σχήμα .

Το σωματίδιο με μάζα m_1 και φορτίο q_1 δέχεται ηλεκτρική δύναμη αντίθετη της κίνησης οπότε εκτελεί επιβραδυνόμενη κίνηση (όχι ομαλά δεδομένου ότι η δύναμη Coulomb είναι μεταβλητή, εξαρτάται από την απόσταση των δύο φορτίων r).

Το σωματίδιο με μάζα m_2 και φορτίο q_2 δέχεται ηλεκτρική δύναμη οπότε εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση (όχι ομαλά δεδομένου ότι η δύναμη Coulomb είναι μεταβλητή).

$Δ_3$. Όταν τα δύο σωματίδια βρεθούν στην ελάχιστη απόσταση θα έχουν ίδια ταχύτητα : $υ_1' = υ_2'$.



Αρχή διατήρησης της ορμής :

$P_{ολ,αρχ} = P_{ολ,αρχ} \Rightarrow m_1·υ_1 = m_1·υ_1' + m_2·υ_2' \Rightarrow m_1·υ_1 = m_1·υ_1' + m_2·υ_1' \Rightarrow m_1·υ_1 = (m_1 + m_2)·υ_1' \Rightarrow υ_1' = υ_1·m_1 / (m_1 + m_2) \Rightarrow υ_1' = 100·0,2 / (0,2 + 0,3) \Rightarrow υ_1' = 40$ m / s .

$υ_1' = υ_2' \Rightarrow υ_2' = 40$ m / s .

Αρχή διατήρησης μηχανικής ενέργειας του συστήματος των (m_1 , q_1) και (m_2 , q_2) μεταξύ των θέσεων Γ και Δ :

$E_{μηχ,Γ} = E_{μηχ,Δ} \Rightarrow K_Γ + U_Γ = K_Δ + U_Δ \Rightarrow ½·m_1·υ_1^2 + U_1 = ½·m_1·υ_1'^2 + ½·m_2·υ_2'^2 + U_2 \Rightarrow U_2 = ½·m_1·υ_1^2 + U_1 – ½·(m_1 + m_2)·υ_1'^2 \Rightarrow U_2 = ½·0,2·100^2 + 210 – ½·(0,2 + 0,3)·40^2 \Rightarrow U_2 = 810$ joule .

Η δυναμική ηλεκτρική ενέργεια του συστήματος των δύο σωματιδίων στην ελάχιστη απόσταση r_{min} :

$U_2 = k_c\cdot(q_1\cdot q_2)\ /\ r_{min} \Rightarrow r_{min} = k_c\cdot(q_1\cdot q_2)\ /\ U_2 \Rightarrow r_{min} = 9\cdot 10^9\cdot((7\ /\ 5)\cdot 10^{-4}\cdot(1\ /\ 6)\cdot 10^{-4})\ /\ 810 \Rightarrow r_{min} = 0{,}0259 = 2{,}59$ cm .

Δ_4. Την μέγιστη δυναμική ηλεκτρική ενέργεια του συστήματος των σωματιδίων $(m_1\ ,\ q_1)$ και $(m_2\ ,\ q_2)$:

$U_{max} = k_c\cdot(q_1\cdot q_2)\ /\ r_{min}$.

Την μέγιστη δυναμική ηλεκτρική ενέργεια του συστήματος έχουμε όταν τα φορτία βρίσκονται στην ελάχιστη απόσταση.

$U_{max} = U_2 \Rightarrow\ U_{max} = 810$ joule .

ΑΣΚΗΣΗ 8

8. Σημειακό σωματίδιο (1) με ηλεκτρικό φορτίο $q_1 = 10^{-4}$ C είναι ακλόνητα στερεωμένο σε σημείο οριζόντιου δαπέδου κατασκευασμένο από μονωτικό υλικό. Σημειακό σωματίδιο (2) με ηλεκτρικό φορτίο $q_2 = -\ 10^{-5}$ C και μάζα m = 0,2 g βρίσκεται στο ίδιο οριζόντιο δάπεδο σε σημείο Α που απέχει απόσταση r = 9 m από το σωματίδιο (1).

Δ_1. Να υπολογίσετε τη δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο σημειακών φορτίων, όταν απέχουν απόσταση r .

Δ_2. Σε ποια απόσταση από το σωματίδιο (1) θα φτάσει το σωματίδιο (2) αν εκτοξευτεί με ταχύτητα μέτρου υ = 50·√2 m / s και κατεύθυνσης αντίθετης από την κατεύθυνση στην οποία βρίσκεται το σωματίδιο (1);

Δ_3. Ποιο θα έπρεπε να ήταν το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου (2) ώστε να φτάσει στο άπειρο με μηδενική ταχύτητα;

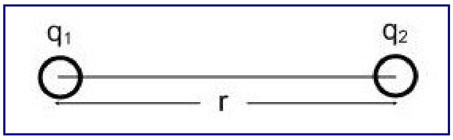
Επαναφέρουμε το σωματίδιο (2) στο σημείο Α και το εκτοξεύουμε ξανά με ταχύτητα μέτρου υ = 50·√2 m / s κατεύθυνσης αντίθετης από την κατεύθυνση στην οποία βρίσκεται το σωματίδιο (1). Αυτή τη φορά το στήριγμα που κρατούσε το σωματίδιο (1) ακλόνητα στερεωμένο σπάει ταυτόχρονα με την εκτόξευση του σωματίδιο (2), οπότε το σωματίδιο (1) μπορεί να κινείται χωρίς τριβές. Η μάζα του σωματιδίου (1) είναι ίση με τη μάζα του σωματιδίου (2).

Δ_4. Να βρεθεί η μέγιστη απόσταση στην οποία μπορούν να φτάσουν τα δύο σωματίδια.

Τριβές δεν υπάρχουν, η βαρύτητα δεν παίζει ρόλο, ενώ η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

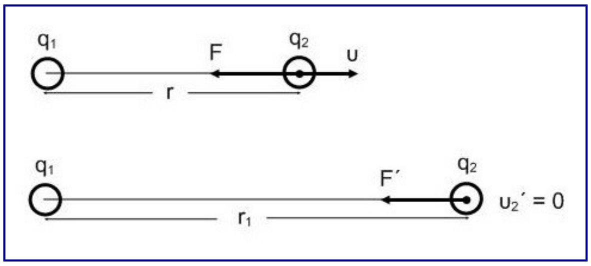
Δίνεται $k_c = 9\cdot 10^9\ N\cdot m^2\ /\ C^2$.

Λύση



Δ_1. Η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο φορτίων q_1 και q_2 :

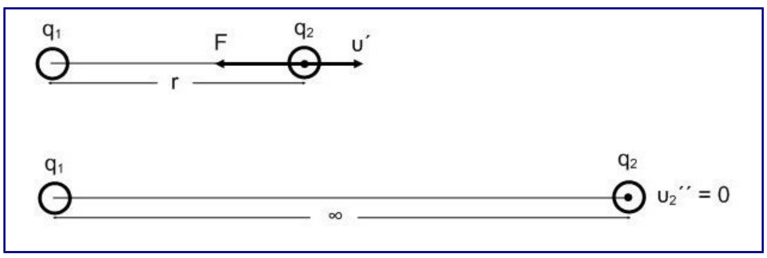
$U_{1,2} = k_c\cdot(q_1\cdot q_2)\ /\ r \Rightarrow U_{1,2} = 9\cdot 10^9\cdot(10^{-4}\cdot(-\ 10^{-5}))\ /\ 9 \Rightarrow U_{1,2} = -\ 1$ joule .



Δ_2. Στο q_2 ξεκινάει με ταχύτητα υ, ενώ ασκείται σε αυτό αντίρροπη ηλεκτρική δύναμη (Coulomb) και το φορτίο επιβραδύνεται. Το φορτίο q_2 σταματά στιγμιαία σε απόσταση r_1 από το q_1 .

Αρχή διατήρησης μηχανικής ενέργειας :

$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow U_{1,2} + K_2 = U_{1,2}{}' + K_2{}' \Rightarrow k_c\cdot(q_1\cdot q_2)\ /\ r + ½\cdot m\cdot υ^2 = k_c\cdot(q_1\cdot q_2)\ /\ r_1 + 0 \Rightarrow (2k_c\cdot(q_1\cdot q_2) + m\cdot υ^2\cdot r)\ /\ 2\cdot r = k_c\cdot(q_1\cdot q_2)\ /\ r_1 \Rightarrow r_1 = (2\cdot r\cdot k_c\cdot q_1\cdot q_2)\ /\ (2\cdot k_c\cdot q_1\cdot q_2 + m\cdot υ^2\cdot r) \Rightarrow r_1 = (-\ 2\cdot 9\cdot 9\cdot 10^9\cdot(-\ 10^{-9}))\ /\ (-\ 2\cdot 9\cdot 10^9\cdot 10^{-9} + 2\cdot 9\cdot 10^{-4}\cdot 25\cdot 10^2\cdot 2) \Rightarrow r_1 = 18$ m .

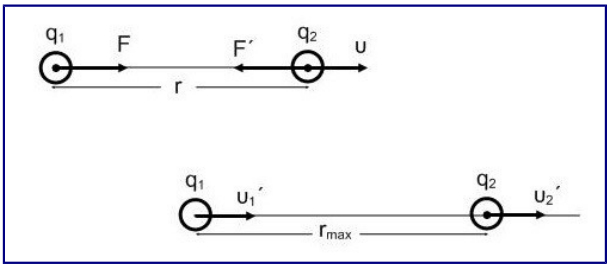


Δ_3. Αρχή διατήρησης μηχανικής ενέργειας :

(μεταξύ των θέσεων αρχική και τελική όπως φαίνονται στο σχήμα η πάνω και η κάτω θέση αντίστοιχα)

$E_{αρχ} = E_{τελ}{}' \Rightarrow U_{1,2} + K_2 = U_{1,2}{}'' + K_2{}'' \Rightarrow U_{1,2} + K_2 = 0 + 0 \Rightarrow k_c\cdot(q_1\cdot q_2)\ /\ r$

$+ ½·m·υ'^2 = 0 ⇒ ½·m·υ'^2 = – k_c·(q_1·q_2) / r ⇒ υ' = \sqrt{(- 2·k_c·q_1·q_2) / m·r} ⇒ υ' = \sqrt{(- 2·9·10^9·(- 10^{-9})) / (2·10^{-4}·9)} ⇒ υ' = 100$ m / s .



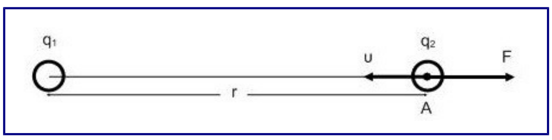
Δ$_4$. Το φορτίο q_1 εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση ενώ το q_2 εκτελεί επιβραδυνόμενη κίνηση.

Για το χρονικό διάστημα της κίνησης όπου η ταχύτητα του q_1 είναι μικρότερη από την ταχύτητα του q_2 που προηγείται, τα φορτία απομακρύνονται.
Κάποια χρονική στιγμή τα φορτία αποκτούν την ίδια ταχύτητα .
Στη συνέχεια το q_1 έχει μεγαλύτερη ταχύτητα από το q_2 άρα το q_1 πλησιάζει το q_2 .
Την χρονική στιγμή που τα δύο φορτία έχουν την ίδια ταχύτητα βρίσκονται και στην μέγιστη δυνατή απόσταση μεταξύ τους.
Αρχή διατήρησης της ορμής :
$P_{ολ,αρχ} = P_{ολ,τελ} ⇒ m_1·υ_1 + m_2·υ = m_1·υ_1' + m_2·υ_2' ⇒ 0 + m·υ = m·υ' + m·υ' ⇒ υ' = υ / 2$.
Αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας :
$E_{αρχ} = E_{τελ} ⇒ U_{1,2} + K_1 + K_2 = U_{1,2}' + K_1' + K_2' ⇒ k_c·(q_1·q_2) / r + ½·m·υ^2 = k_c·(q_1·q_2) / r_{max} + ½·m·(υ / 2)^2 + ½·m·(υ / 2)^2 ⇒ k_c·(q_1·q_2) / r + ½·m·υ^2 – m·υ^2 / 4 = k_c·(q_1·q_2) / r_{max} ⇒ k_c·(q_1·q_2) / r + m·υ^2 / 4 = k_c·(q_1·q_2) / r_{max} ⇒ (4·k_c·q_1·q_2 + m·υ^2·r) / 4·r = k_c·(q_1·q_2) / r_{max} ⇒ r_{max} = (4·k_c·q_1·q_2) / (4·k_c·q_1·q_2 + m·υ^2·r) ⇒ r_{max} = (4·9·10^9·(- 10^{-9})) / (4·9·10^9·(- 10^{-9}) + (2·10^{-4}·2·25·10^2·9)) ⇒ r_{max} = 12$ m .

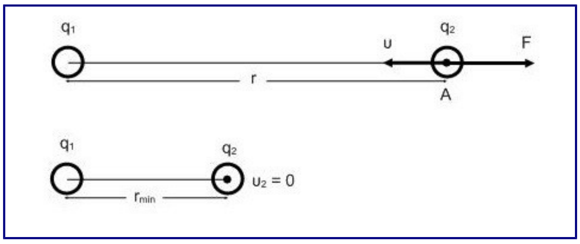
ΑΣΚΗΣΗ 9

Σημειακό σωματίδιο (1) με ηλεκτρικό φορτίο $q_1 = 10^{-5}$ C είναι ακλόνητα στερεωμένο σε σημείο οριζόντιου δαπέδου που είναι κατασκευασμένο από μονωτικό υλικό. Σημειακό σωματίδιο (2) με ηλεκτρικό φορτίο $q_2 = 10^{-4}$ C και μάζα m = 0,2 g βρίσκεται στο ίδιο οριζόντιο δάπεδο σε σημείο που απέχει απόσταση r = 9 m από το σωματίδιο (1) και εκτοξεύεται με ταχύτητα μέτρου υ = 100 m / s με κατεύθυνση προς το σωματίδιο (1).
Δ$_1$. Να βρεθεί η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια που έχει αρχικά το σύστημα των δύο φορτίων.
Δ$_2$. Να βρεθεί η πλησιέστερη απόσταση από το σωματίδιο (2) στην οποία θα φτάσει το σωματίδιο (1).
Δ$_3$. Να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας που έχει το σωματίδιο (2) όταν φτάσει σε άπειρη απόσταση από το σωματίδιο (1),
Επαναφέρουμε το σωματίδιο (2) στην αρχική του θέση που απέχει απόσταση r = 9 m από το σωματίδιο (1), το εκτοξεύουμε ξανά με ταχύτητα μέτρου υ = 100 m / s με κατεύθυνση προς το σωματίδιο (1), αλλά τώρα στην κίνηση του σωματίδιου (2) παρεμβάλλεται ομογενές ηλεκτροστατικό πεδίο με ένταση που έχει μέτρο E = 10^4 / 6 N / C και κατεύθυνση από το σωματίδιο (2) προς το σωματίδιο (1).
Δ$_4$. Να βρεθεί η απόσταση από το σωματίδιο (1) στην οποία μεγιστοποιείται η ταχύτητα του σωματιδίου (2).
Τριβές δεν υπάρχουν, η βαρύτητα δεν παίζει ρόλο, ενώ η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.
Δίνεται $k_c = 9·10^9$ N·m^2 / C^2 .

Λύση



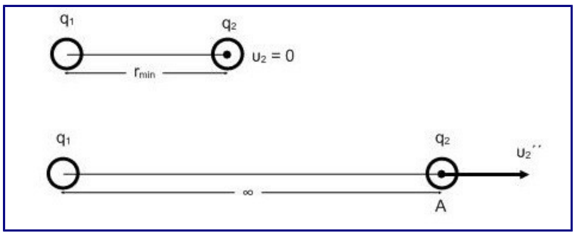
Δ$_1$. Η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο φορτίων είναι :
$U_{1,2} = k_c·(q_1·q_2) / r ⇒ U_{1,2} = 9·10^9·(10^{-5}·10^{-4}) / 9 ⇒ U_{1,2} = 1$ joule .



Δ$_2$. Το φορτίο q_2 εκτελεί επιβραδυνόμενη κίνηση κινούμενο προς το q_1 .
Σε απόσταση από το r_{min} από το q_1 σταματά στιγμιαία.Στη συνέχεια απομακρύνεται από το q_1 .
Αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας :

(μεταξύ των θέσεων που βλέπουμε στο σχήμα, αρχική είναι η κατάσταση όπου τα δύο φορτία απέχουν r και τελική είναι η κατάσταση του συστήματος όπου τα φορτία απέχουν r_{min} απόσταση)

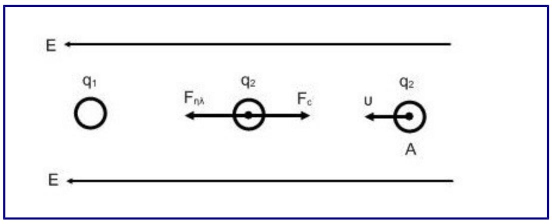
$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow U_{1,2} + K_2 = U_{1,2}΄ + K_2΄ \Rightarrow k_c \cdot (q_1.q_2) / r + ½ \cdot m \cdot υ^2 = k_c \cdot (q_1.q_2) / r_{min} + 0 \Rightarrow (2 \cdot k_c \cdot (q_1.q_2) + m \cdot υ^2 \cdot r) / 2r = k_c \cdot (q_1.q_2) / r_{min} \Rightarrow r_{min} = 2 \cdot r \cdot k_c \cdot (q_1.q_2) / (2 \cdot k_c \cdot (q_1.q_2) + m \cdot υ^2 \cdot r) \Rightarrow r_{min} = (2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-9}) / (2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-9} + 2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^4 \cdot 9) \Rightarrow \Rightarrow r_{min} = 4,5$ m .



$Δ_3$. Αρχή διατήρησης μηχανικής ενέργειας :

(μεταξύ των θέσεων που βλέπουμε στο σχήμα, αρχική είναι η κατάσταση όπου τα δύο φορτία απέχουν r_{min} και τελική είναι η κατάσταση του συστήματος όπου τα φορτία απέχουν άπειρη απόσταση)

$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow U_{1,2}΄ + K_2΄ = U_{1,2}΄΄ + K_2΄΄ \Rightarrow k_c \cdot (q_1.q_2) / r_{min} + 0 = 0 + ½ \cdot m \cdot υ_2΄΄\,^2 \Rightarrow υ_2΄΄ = \sqrt{(2 \cdot k_c \cdot q_1.q_2) / (m \cdot r_{min})} \Rightarrow υ_2΄΄ = 100 \cdot \sqrt{2}$ m / s .



$Δ_4$. Το φορτίο q_2 βάλλεται με ταχύτητα υ = 100 m / s προς το φορτίο q_1 (ακλόνητο).

Το φορτίο q_2 δέχεται δύο δυνάμεις την $F_{ηλ}$ από το ομογενές ηλεκτρικό πεδίο E που έχει την κατεύθυνση της υ και την δύναμη F_c που έχει αντίθετη κατεύθυνση από την υ .

Για όσο χρόνο $F_{ηλ} > F_c \Rightarrow ΣF > 0$, όπου $ΣF = F_{ηλ} – F_c$ το φορτίο επιταχύνεται προς τα αριστερά.

Κάποια στιγμή $F_{ηλ} = F_c$ και αμέσως μετά $F_{ηλ} < F_c$ και το q_2 αρχίζει να επιβραδύνεται. Άρα θα έχει μέγιστη ταχύτητα όταν $ΣF = 0 \Rightarrow F_{ηλ} = F_c$.

$E \cdot |q_2| = k_c \cdot |q_1| \cdot |q_2| / r΄^2 \Rightarrow r΄^2 = k_c \cdot |q_1| / E \Rightarrow r΄ = \sqrt{(k_c \cdot |q_1| / E)} \Rightarrow r΄ = \sqrt{(9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-5} / (10^4 / 6)} \Rightarrow r΄ = 3 \cdot \sqrt{6}$ m .

ΑΣΚΗΣΗ 10

Δύο σφαιρίδια Σ1 και Σ2, τα οποία θεωρούμε σημειακά σώματα έχουν μάζες m_1 = 0,1 kg και m_2 = 0,3 kg αντίστοιχα και ηλεκτρικά φορτία $q_1 = 10^{-5}$ C και $q_2 = 10^{-4}$ C αντίστοιχα. Τα δύο σφαιρίδια βρίσκονται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, κατασκευασμένο από μονωτικό υλικό.

$Δ_1$. Να υπολογίσετε την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο φορτισμένων σφαιριδίων όταν το Σ1 βρίσκεται σε απόσταση r = 18 m από το Σ2.

Φέρουμε το Σ1 σε πολύ μεγάλη (άπειρη) απόσταση από το Σ2 και το εκτοξεύουμε με ταχύτητα μέτρου $υ_1$ = 12 m / s στην κατεύθυνση που βρίσκεται το Σ2, ενώ διατηρούμε το Σ2 ακίνητο με κάποιο μηχανισμό.

$Δ_2$. Να υπολογίσετε την ελάχιστη απόσταση από το Σ2 στην οποία μπορεί να φτάσει το Σ1.

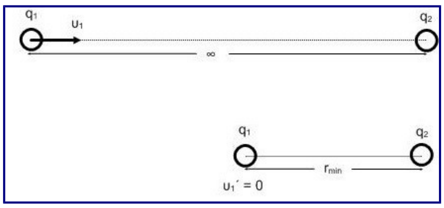
Φέρουμε το Σ1 ξανά σε πολύ μεγάλη (άπειρη) απόσταση από το Σ2 και το εκτοξεύουμε με ταχύτητα μέτρου $υ_1$ = 12 m / s στην κατεύθυνση που βρίσκεται το Σ2, ενώ ταυτόχρονα αφήνουμε το Σ2 ελεύθερο να κινηθεί στο επίπεδο χωρίς τριβές.

$Δ_3$. Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση στην οποία μπορούν να πλησιάσουν τα δύο σφαιρίδια.

$Δ_4$. Κάποια χρονική στιγμή, και ενώ το Σ2 είναι ελεύθερο να κινείται χωρίς τριβές, παρατηρούμε ότι το Σ1 έχει ταχύτητα μέτρου $υ_1΄$ = 3 m / s με κατεύθυνση αντίθετη της αρχικής ταχύτητάς του. Να βρεθεί εκείνη τη χρονική στιγμή, η απόσταση μεταξύ των δύο σφαιριδίων.

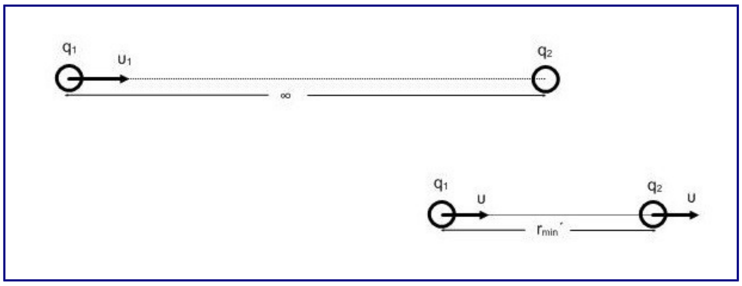
Δίνεται $k_c = 9 \cdot 10^9$ N·m^2 / C^2 , και ότι η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα .

Λύση

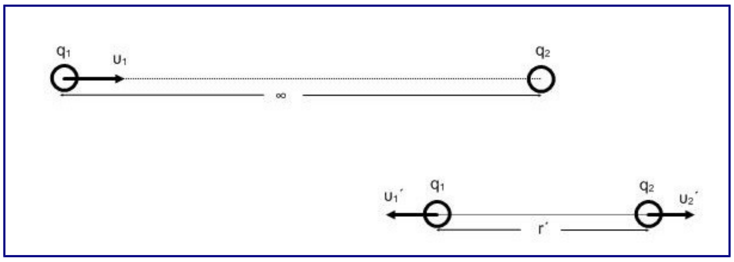


$Δ_1$. Η δυναμική ηλεκτρική ενέργεια του συστήματος των δύο φορτίων q_1 και q_2 που βρίσκονται σε απόσταση r είναι : $U_{1,2} = k_c \cdot (q_1 \cdot q_2) / r \Rightarrow U_{1,2} = 9 \cdot 10^9 \cdot (10^{-5} \cdot 10^{-4}) / 18 \Rightarrow U_{1,2} = ½ = 0,5$ joule .

$Δ_2$. Το φορτίο q_2 είναι ακλόνητα στερεωμένο και το q_1 βάλλεται από άπειρη απόσταση με ταχύτητα $υ_1$.
Το q_1 κινείται επιβραδυνόμενο προς το q_2 , κάποια στιγμή σταματά στιγμιαία και μετά απομακρύνεται. Σταματάει στιγμιαία στην ελάχιστη απόσταση από το q_2 .
Αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας :
(μεταξύ της αρχικής θέσης $r = \infty$ και της τελικής θέσης $r = r_{min}$)
$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow ½·m_1·υ_1^2 + 0 = 0 + k_c·(q_1·q_2) / r_{min} \Rightarrow r_{min} = (2· k_c·q_1·q_2) / (m_1·υ_1^2) \Rightarrow r_{min} = (2·9·10^9·10^{-5}·10^{-4}) / (0,1·12^2) \Rightarrow r_{min} = 1,25$ m .



$Δ_3$. Το q_1 βάλλεται από άπειρη απόσταση προς το q_2 που είναι ελεύθερο να κινηθεί με ταχύτητα $υ_1$.
Το φορτίο q_1 εκτελεί επιβραδυνόμενη κίνηση ενώ το q_2 επιταχυνόμενη, ενώ ξεκίνησε από την ηρεμία. Για όσο χρόνο η ταχύτητα του q_1 είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα του q_2 τα φορτία πλησιάζουν. Κάποια στιγμή αποκτούν την ίδια ταχύτητα. Αμέσως μετά η ταχύτητα του q_1 γίνεται μικρότερη από την ταχύτητα του q_2 και τα φορτία απομακρύνονται. Τα φορτία βρίσκονται στην ελάχιστη απόσταση μεταξύ τους όταν έχουμε : $υ_1΄ = υ_2΄ = υ$.
Αρχή διατήρησης της ορμής :
(διανυσματική σχέση που ισχύει στο μονωμένο σύστημα των φορτίων, θετική είναι η φορά προς τα δεξιά)
$P_{ολ,αρχ} = P_{ολ,τελ} \Rightarrow P_1 + P_2 = P_1΄ + P_2΄ \Rightarrow m_1·υ_1 = m_1·υ + m_2·υ \Rightarrow υ = m_1·υ_1 / (m_1 + m_2) \Rightarrow υ = 0,1·12 / (0,1 + 0,3) \Rightarrow υ = 3$ m / s .
Αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας : (μεταξύ της αρχικής θέσης $r = \infty$ και της τελικής θέσης $r = r_{min}΄$)
$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow ½·m_1·υ_1^2 + 0 = ½·m_1·υ^2 +½·m_2·υ^2 + k_c·(q_1·q_2) / r_{min}΄ \Rightarrow m_1·υ_1^2 = m_1·υ^2 + 3·m_1·υ^2 + (2·k_c·q_1·q_2) / r_{min}΄ \Rightarrow m_1·(υ_1^2 – 4·υ^2) = (2·k_c·q_1·q_2) / r_{min}΄ \Rightarrow r_{min}΄ = (2·k_c·q_1·q_2) / (m_1·(υ_1^2 – 4·υ^2)) \Rightarrow r_{min}΄ = (2·9·10^9·10^{-5}·10^{-4}) / (0,1·(12^2 – 4·3^2)) \Rightarrow r_{min}΄ = 5 / 3 \Rightarrow r_{min}΄ = 1,67$ m .

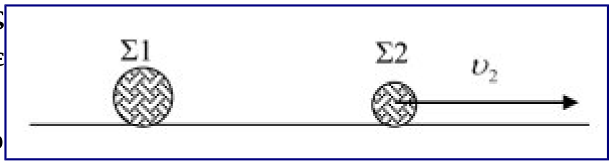


$Δ_4$. Αρχικά τα φορτία q_1 , q_2 βρίσκονται σε άπειρη απόσταση και τελικά το q_1 έχει $υ_1΄$ αντίρροπη της $υ_1$.
Αρχή διατήρησης της ορμής :
$P_{ολ,αρχ} = P_{ολ,τελ} \Rightarrow P_1 + P_2 = P_1΄ + P_2΄ \Rightarrow m_1·υ_1 + 0 = – m_1·υ_1΄ + m_2·υ_2΄ \Rightarrow υ_2΄ = m_1·(υ_1 + υ_1΄) / m_2 \Rightarrow υ_2΄ = 0,1·(12 + 3) / 0,3 \Rightarrow υ_2΄ = 5$ m / s .
Αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας :
$E_{αρχ}΄ = E_{τελ}΄ \Rightarrow K_{αρχ}΄ + U_{αρχ}΄ = K_{τελ}΄ + U_{τελ}΄ \Rightarrow ½·m_1·υ_1^2 + 0 = ½·m_1·υ_1΄^2 + ½·m_2·υ_2΄^2 + k_c·(q_1·q_2) / r΄ \Rightarrow m_1·(υ_1^2 – υ_1΄^2) – m_2·υ_2΄^2 = 2·k_c·(q_1·q_2) / r΄ \Rightarrow r΄ = (2·k_c·q_1·q_2) / (m_1·(υ_1^2 – υ_1΄^2) – m_2·υ_2΄^2) \Rightarrow r΄ = (2·9·10^9·10^{-5}·10^{-4}) / (0,1·(12^2 – 3^2) – 0,3·5^2) \Rightarrow r΄ = 3$ m .

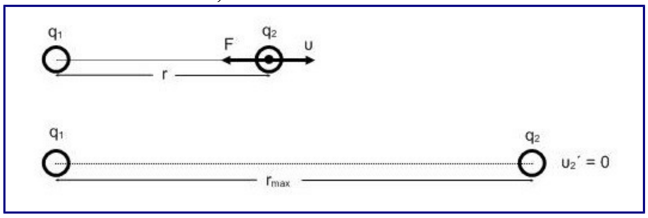
ΑΣΚΗΣΗ 11

Δύο σφαιρίδια $Σ_1$ και $Σ_2$, τα οποία θεωρούμε σημειακά σώματα έχουν μάζες $m_1 = 4·10^{-2}$ kg και $m_2 = 10^{-2}$ kg αντίστοιχα και ηλεκτρικά φορτία $q_1 = 10^{-4} / 3$ C και $q_2 = – 10^{-5} / 3$ C αντίστοιχα. Τα δύο σφαιρίδια βρίσκονται σε λείο οριζόντιο δάπεδο, κατασκευασμένο από μονωτικό υλικό.
$Δ_1$. Να υπολογίσετε την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο φορτισμένων σφαιριδίων όταν η μεταξύ τους απόσταση είναι $r = 0,2$ m .
Ενώ τα σφαιρίδια βρίσκονται σε απόσταση $r = 0,2$ m, κρατάμε το $Σ_1$ ακίνητο και εκτοξεύουμε το $Σ_2$ με ταχύτητα μέτρου $υ = 10·\sqrt{8}$ m / s σε κατεύθυνση αντίθετη από τη θέση στην οποία βρίσκεται το $Σ_1$.

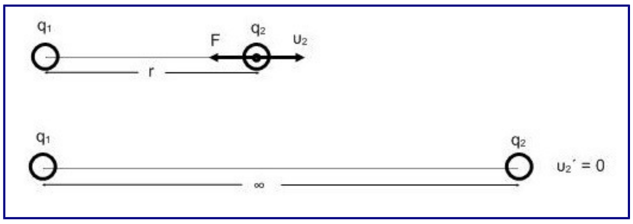
$Δ_2$. Να υπολογίσετε τη μέγιστη απόσταση από το $Σ_1$ στην οποία μπορεί να φτάσει το $Σ_2$.
$Δ_3$. Ποιο είναι το μέτρο της ταχύτητας την οποία θα έπρεπε να δώσουμε στο $Σ_2$ από την απόσταση των r = 0,2 m, ώστε το $Σ_2$ να φτάσει στο άπειρο με μηδενική ταχύτητα, ενώ το $Σ_1$ διατηρείται ακίνητο;



$Δ_4$. Επαναφέρουμε τα δύο φορτία στην αρχική τους απόσταση r = 0,2 m, και εκτοξεύουμε το $Σ_2$ με ταχύτητα μέτρου $υ_2$ = 20 m / s όπως στο σχήμα, ενώ αφήνουμε το $Σ_1$ ελεύθερο να κινηθεί στο λείο οριζόντιο επίπεδο. Κάποια στιγμή η ταχύτητα του $Σ_2$ έχει μέτρο $υ_2΄$ = 8 m / s και ίδια κατεύθυνση με τη $υ_2$. Να βρείτε τη δυναμική ενέργεια που έχουν τότε τα δύο σφαιρίδια.
Δίνεται : $k_c = 9·10^9$ N·m² / C² , και ότι η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα .
Λύση
$Δ_1$. Η δυναμική ηλεκτρική ενέργεια του συστήματος των δύο φορτίων q_1 και q_2 όταν βρίσκονται σε απόσταση r :
$U_{1,2} = k_c·q_1·q_2 / r ⇒ U_{1,2} = 9·10^9·(10^{-4}/ 3)·(- 10^{-5} / 3) / (2·10^{-1}) ⇒ U_{1,2} = – 5$ joule .

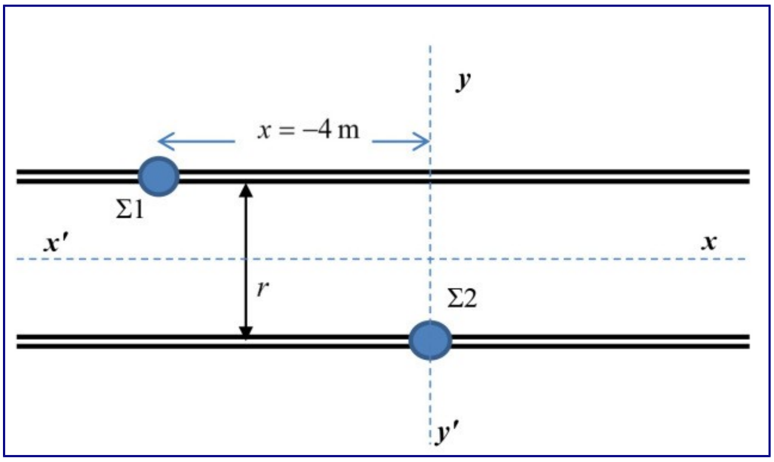


$Δ_2$.Κρατάμε το φορτίο q_1 ακίνητο και από απόσταση r εκτοξεύουμε αντίθετα από το φορτίο q_1 το φορτίο q_2 με ταχύτητα υ .
Το φορτίο κινείται προς τα δεξιά επιβραδυνόμενο εξαιτίας της ηλεκτρικής δύναμης που αντιτίθεται στην κίνηση.Κάποια στιγμή το φορτίο q_2 σταματά στιγμιαία και μετά επιστρέφει προς τα πίσω. Η θέση που μηδενίζεται η ταχύτητα του q_2 είναι και η μεγαλύτερη απόσταση από το φορτίο q_1 .
Αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας :
$E_{αρχ} = E_{τελ} ⇒ K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} ⇒ ½·m_2·υ^2 + k_c·q_1·q_2 / r = 0 + k_c·q_1·q_2 / r_{max} ⇒ r_{max} = (2·r·k_c·q_1·q_2) / (m_2·υ^2·r + 2·k_c·q_1·q_2) ⇒ r_{max} = (2·0{,}2·9·10^9·(10^{-4} / 3)·(- 10^{-5} / 3)) / (10^{-2}·(10·\sqrt{8})^2·2·10^{-1}) ⇒ r_{max} = 1$ m .



$Δ_3$. Ενώ το q_1 παραμένει ακίνητο, από απόσταση r εκτοξεύουμε το q_2 με ταχύτητα $υ_2$ ώστε να φτάσει στο άπειρο (εκτός πεδίου) με μηδενική ταχύτητα.
Αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας :
$E_{αρχ}΄ = E_{τελ}΄ ⇒ K_{αρχ}΄ + U_{αρχ}΄ = K_{τελ}΄ = U_{τελ}΄ ⇒ ½·m_2·υ_2^2 + k_c·q_1·q_2 / r = 0 + 0 ⇒ ½·m_2·υ_2^2 = – k_c·q_1·q_2 / r ⇒ υ_2^2 = – 2·k_c·q_1·q_2 / (m_2·r) ⇒ υ_2^2 = (- 2·9·10^9·(10^{-4} / 3)·(- 10^{-5} / 3)) / (10^{-2}·2· 10^{-1}) ⇒ υ_2^2 = 10^3 ⇒ υ_2 = 10·\sqrt{10}$ m / s .
$Δ_4$. Το q_2 βρίσκεται σε απόσταση r από το q_1 , το q_2 εκτοξεύεται με ταχύτητα $υ_2$, ενώ ταυτόχρονα αφήνεται το q_1 ελεύθερο .
Το q_2 κινείται επιβραδυνόμενο ενώ το q_1 κινείται επιταχυνόμενο από την ηρεμία ακολουθώντας το q_2 .
Αρχή διατήρησης της ορμής :
$P_{ολ,αρχ} = P_{ολ,τελ} ⇒ P_1 + P_2 = P_1΄ + P_2΄ ⇒ 0 + m_2·υ_2 = m_2·υ_2΄ + m_1·υ_1΄ ⇒ m_1·υ_1΄ = m_2·υ_2 – m_2·υ_2΄ ⇒ υ_1΄ = (m_2·υ_2 – m_2·υ_2΄) / m_1 ⇒ υ_1΄ = (10^{-2}·20 – 10^{-2}·8) / (4·10^{-2}) ⇒ υ_1΄ = 3$ m / s .
Αρχή διατήρησης μηχανικής ενέργειας :
$E_{αρχ}΄΄ = E_{τελ}΄΄ ⇒ K_{αρχ}΄΄ + U_{αρχ}΄΄ = K_{τελ}΄΄ + U_{τελ}΄΄ ⇒ ½·m_2·υ_2^2 + U_{1,2} = ½·m_1·υ_1΄^2 + ½·m_2·υ_2΄^2 + U_{1,2}΄ ⇒ U_{1,2}΄ = ½·m_2·(υ_2^2 – υ_2΄^2) – ½·m_1·υ_1΄^2 + U_{1,2} ⇒ U_{1,2}΄ = ½·10^{-2}·(20^2 – 8^2) – ½·4·10^{-2}·3^2 + (-5) ⇒ U_{1,2}΄ = – 3{,}5$ joule .

ΑΣΚΗΣΗ 12 Δύο σφαιρίδια μπορούν να κινούνται χωρίς τριβές πάνω σε παράλληλες οριζόντιες ράγες που βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο και είναι κατασκευασμένες από κάποιο μονωτικό υλικό. Οι ράγες απέχουν μεταξύ τους απόσταση r = 3 m. Την κάτοψη από τις ράγες και τα σφαιρίδια βλέπουμε στο σχήμα. Θεωρούμε ότι οι ράγες είναι παράλληλες στον άξονα x΄x , ενώ ο άξονας y΄y είναι κάθετος στις ράγες. Τα σφαιρίδια μπορούν με κάποιο μηχανισμό να αποκτήσουν ηλεκτρικό φορτίο. Για τις μάζες των δύο σφαιριδίων ισχύει:



$m_1 = m_2 = 2\cdot10^{-2}$ kg, ενώ για τα ηλεκτρικά τους φορτία ισχύει: $q_1 = (\sqrt{5} / 3)\cdot10^{-4}$ C και $q_2 = (\sqrt{5} / 3)\cdot10^{-5}$ C .

$Δ_1$. Να βρεθεί η δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο φορτίων όταν το Σ2 βρίσκεται σε ένα σημείο του άξονα y΄y, ενώ το Σ1 βρίσκεται σε θέση με x = – 4 m.

$Δ_2$. Να βρείτε την ταχύτητα του σώματος Σ1 όταν φτάσει σε πολύ μεγάλη (άπειρη) απόσταση από το Σ2, αν το αφήσουμε ελεύθερο να κινηθεί από την αρχική θέση που σημειώνεται στο σχήμα, ενώ το Σ2 συγκρατείται ακίνητο.

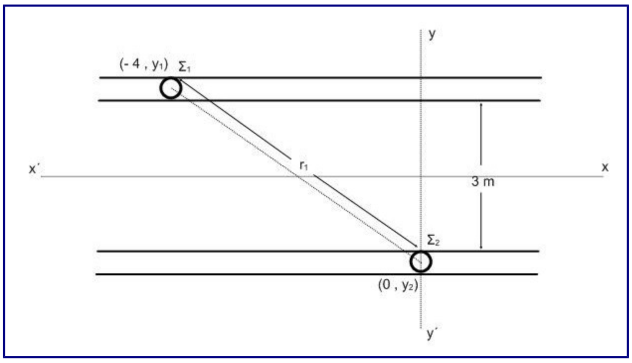
$Δ_3$. Να βρεθεί η ελάχιστη ταχύτητα με την οποία πρέπει να εκτοξεύσουμε το Σ1 από το άπειρο (δηλαδή από πολύ μεγάλη απόσταση) ώστε να φτάσει στην ελάχιστη δυνατή απόσταση από το Σ2, αν το Σ2 συγκρατείται στην αρχική του θέση.

$Δ_4$. Αν εκτοξεύαμε και τα δύο φορτία το ένα προς το μέρος που βρίσκεται το άλλο με ταχύτητες ίσων μέτρων από πολύ μεγάλη (άπειρη) μεταξύ τους απόσταση, να βρείτε την ελάχιστη απαιτούμενη τιμή του μέτρου των δύο ταχυτήτων, ώστε να έφταναν στην ελάχιστη μεταξύ τους απόσταση.

Δίνεται : $k_c = 9\cdot10^9$ N·m² / C² , η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα. Οι βαρυτικές αλληλεπιδράσεις είναι αμελητέες.

Λύση

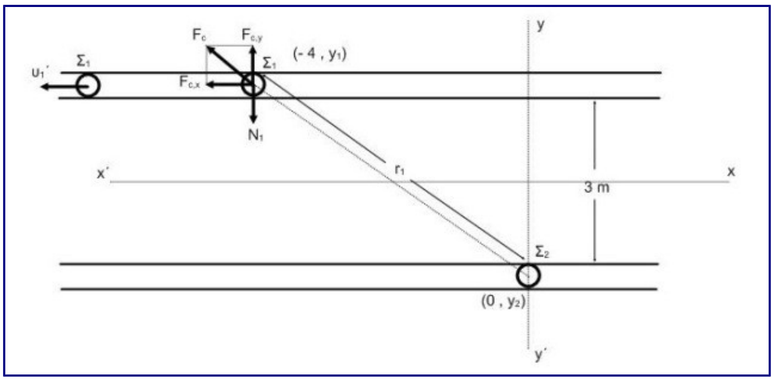
$Δ_1$. Στο σχήμα, στις θέσεις (-4, y_1) και (0 , y_2), η απόσταση r_1 των δύο σφαιριδίων είναι :



$r_1^2 = r^2 + x_1^2 \Rightarrow r_1 = \sqrt{r^2 + x_1^2} \Rightarrow r_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} \Rightarrow r_1 = 5$ m .

$U_{1,2} = k_c\cdot(q_1\cdot q_2) / r_1 \Rightarrow U_{1,2} = 9\cdot10^9\cdot(\sqrt{5} / 3)\cdot10^{-4}\cdot(\sqrt{5} / 3)\cdot10^{-5} / 5 \Rightarrow U_{1,2} = 1$ joule .

$Δ_2$. Στο σφαιρίδιο $Σ_1$ ασκούνται οι δυνάμεις (φαίνονται στο σχήμα) F_c η δύναμη Coulomb ασκείται από το $Σ_2$ στο $Σ_1$ και N_1 η δύναμη που ασκείται από τις ράγες στο σώμα $Σ_1$.

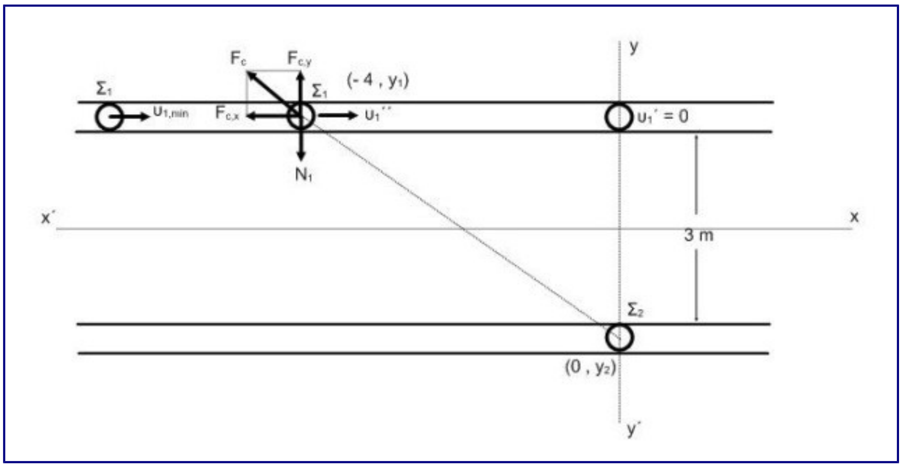


Η F_c , η δύναμη Coulomb αναλύεται σε συνιστώσες $F_{c,x}$ και $F_{c,y}$.

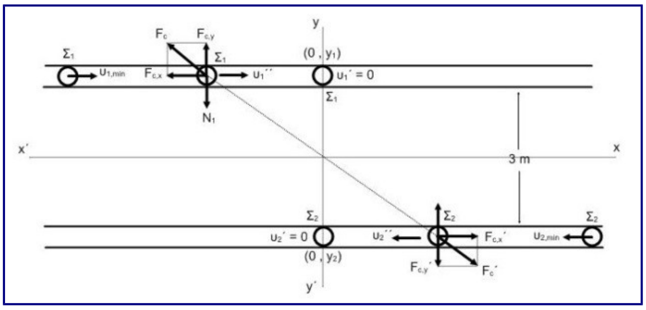
Η μόνη δύναμη που παράγει έργο κατά την κίνηση του $Σ_1$ είναι η συνιστώσα της δύναμης Coulomb στον άξονα x , η $F_{c,x}$, μια διατηρητική δύναμη .

Αρχή διατήρησης μηχανικής ενέργειας : (αρχική κατάσταση : σώμα $Σ_1$ στη θέση (-4, y_1) και σώμα $Σ_2$ στη θέση (0, y_2))

$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow 0 + U_{1,2} = ½·m_1·υ_1{'}^2 + 0 \Rightarrow υ_1{'}^2 = 2·U_{1,2} / m_1 \Rightarrow υ_1{'}^2 = 2·1 / 2·10^{-2} \Rightarrow υ_1{'} = 10$ m / s .

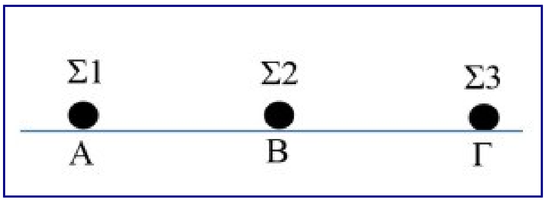


$Δ_3$. Τα δύο σώματα έχουν την ελάχιστη απόσταση όταν το $Σ_1$ βρίσκεται στη θέση $(0, y_1)$, απέναντι από το $Σ_2$ σε απόσταση r = 3 m από αυτό .
Το $Σ_1$ εκτοξεύεται με την ελάχιστη ταχύτητα ώστε όταν φτάνει στη θέση $(0, y_1)$ να έχει μηδενική κινητική ενέργεια (η ταχύτητα του να είναι μηδέν). Αν έχει μεγαλύτερη ταχύτητα από την ελάχιστη, θα προσπεράσει την θέση ελάχιστης απόστασης.
Αν $υ_1 \geq υ_{1,min}$ το $Σ_1$ κινείται επιβραδυνόμενο μέχρι τη θέση της ελάχιστης απόστασης και στη συνέχεια κινείται επιταχυνόμενο και απομακρύνεται από το $Σ_2$.
$υ_1 = υ_{1,min} = 0$.
Αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας :
(Αρχική κατάσταση όπου το $Σ_1$ βρίσκεται στη θέση (∞, y_1) και το $Σ_2$ βρίσκεται στη θέση $(0, y_2)$, ενώ στη τελική κατάσταση το $Σ_1$ βρίσκεται στη θέση $(0, y_1)$ και το $Σ_2$ βρίσκεται στη θέση $(0, y_2)$).
$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow 0 + ½·m_1·υ_{1,min}^2 = k_c·(q_1·q_2) / r + 0 \Rightarrow υ_{1,min}^2 = 2·k_c·q_1·q_2 / (m_1·r) \Rightarrow υ_{1,min}^2 = 2·9·10^9·(\sqrt{5} / 3)·10^{-4}·(\sqrt{5} / 3)·10^{-5} / (2·10^{-2}·3) \Rightarrow υ_{1,min}^2 = (5 / 3)·10^2 \Rightarrow υ_{1,min} = 10·\sqrt{5 / 3}$ m / s .
$Δ_4$. Πρέπει να τονιστεί ότι οι σφαίρες βάλλονται ταυτόχρονα η μία προς την άλλη.
Αρχή διατήρησης της ορμής :
$P_{ολ,αρχ} = P_{ολ,τελ} \Rightarrow P_1 + P_2 = P_1{'} + P_2{'} \Rightarrow m_1·υ_{1,min} – m_2·υ_{2,min} = 0 \Rightarrow m_1·υ_{1,min} = m_2·υ_{2,min} \Rightarrow υ_{1,min} = υ_{2,min} = υ_{min}$.



Λογικό το αποτέλεσμα δεδομένου ότι τα $Σ_1$ και $Σ_2$ φτάνουν στην ελάχιστη απόσταση με ολική ορμή μηδέν. Τα μέτρα των ελάχιστων ταχυτήτων είναι ίσα γιατί οι μάζες είναι ίσες $m_1 = m_2 = m$.
Αρχή διατήρησης μηχανικής ενέργειας :
(Αρχική κατάσταση για τα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ είναι όταν βρίσκονται σε άπειρη απόσταση μεταξύ τους, ενώ τελική είναι η κατάσταση όπου τα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ βρίσκονται στην ελάχιστη απόσταση μεταξύ τους.)
$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow K_1 + K_2 + 0 = 0 + U_{1,2}{'} \Rightarrow ½·m_1·υ_{min}^2 + ½·m_1·υ_{min}^2 = k_c·(q_1·q_2) / r \Rightarrow υ_{min}^2 = k_c·(q_1·q_2) / (m·r) \Rightarrow υ_{min}^2 = 9·10^9·(\sqrt{5} / 3)·10^{-4}·(\sqrt{5} / 3)·10^{-5} / (2·10^{-2}·3) \Rightarrow υ_{min}^2 = (5 / 6)·10^2 \Rightarrow υ_{min} = 10·\sqrt{5 / 6}$ m / s .

ΑΣΚΗΣΗ 13



Τρία σημειακά σώματα $Σ_1$, $Σ_2$ και $Σ_3$ βρίσκονται σε ευθεία, στις θέσεις Α, Β και Γ ενός οριζοντίου μονωτικού επιπέδου μεγάλων διαστάσεων. Για τις μεταξύ τους αποστάσεις ισχύει ΑΒ = ΒΓ = 3 m. Οι μάζες των σωμάτων είναι $m_1 = m_3 = 3 \cdot 10^{-2}$ kg, $m_2 = 2 \cdot 10^{-2}$ kg, ενώ για τα φορτία τους ισχύει: $q_1 = q_2 = q_3 = 10^{-4}$ C .

$Δ_1$. Να υπολογιστεί η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των τριών φορτίων.

$Δ_2$. Ποιο ή ποια από τα φορτία του παραπάνω συστήματος δέχεται μηδενική συνισταμένη δύναμη όταν βρίσκονται στις θέσεις που έχουν τοποθετηθεί αρχικά; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

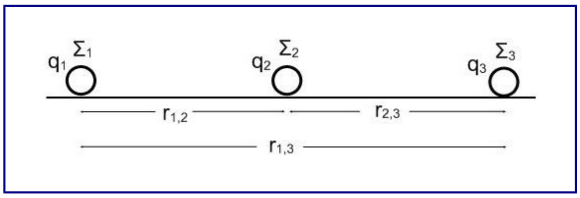
$Δ_3$. Αφήνουμε τα φορτία $Σ_1$ και $Σ_3$ ελεύθερα να κινηθούν ενώ το $Σ_2$ παραμένει στην αρχική του θέση. Να βρείτε τα μέτρα των ταχυτήτων τους όταν θα έχουν φτάσει σε πολύ μεγάλη (άπειρη) απόσταση.

Επαναφέρουμε τα φορτία στις αρχικές τους θέσεις. Ακινητοποιούμε τα $Σ_1$ και $Σ_3$ στις θέσεις Α και Γ και τα κρατάμε σταθερά σε αυτές και εκτοξεύουμε το $Σ_2$ με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $υ_0 = 20 \cdot \sqrt{21}$ m / s (σε διεύθυνση διαφορετική από την ευθεία στην οποία βρίσκονται τα τρία φορτία).

$Δ_4$. Ποια είναι η ταχύτητα με την οποία το $Σ_2$ φτάνει στο άπειρο;

Δίνεται $k_c = 9 \cdot 10^9$ N·m² / C² . Η επίδραση της βαρύτητας, οι τριβές και η αντίσταση του αέρα θεωρούνται αμελητέα.

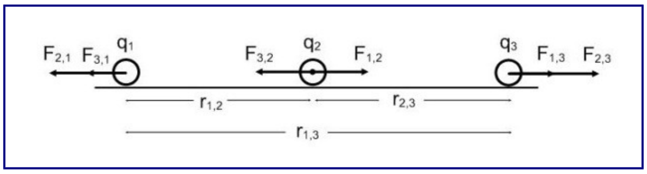
Λύση



$Δ_1$. Η δυναμική ενέργεια του συστήματος των τριών φορτίων :

(Μας δίνεται $q_1 = q_2 = q_3 = q$, $r_{1,2} = r_{2,3} = r$ και $r_{1,3} = 2 \cdot r$)

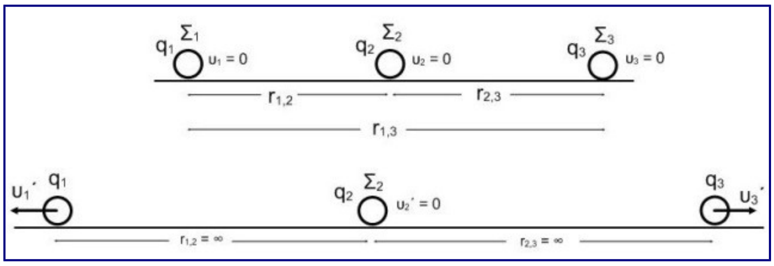
$U_{1,2,3} = k_c \cdot (q_1 \cdot q_2) / r_{1,2} + k_c \cdot (q_2 \cdot q_3) / r_{2,3} + k_c \cdot (q_1 \cdot q_3) / r_{1,3} \Rightarrow U_{1,2,3} = k_c \cdot q^2 / r + k_c \cdot q^2 / r + k_c \cdot q^2 / 2 \cdot r \Rightarrow U_{1,2,3} = 5 \cdot k_c \cdot q^2 / 2 \cdot r \Rightarrow U_{1,2,3} = 5 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-8} / 6 \Rightarrow U_{1,2,3} =$ 75 joule .



$Δ_2$. Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε φορτίο από τα άλλα δύο φορτία. Μηδενική δύναμη δέχεται το q_2 γιατί $F_{3,2} = F_{1,2}$ και είναι αντίρροπες :

$F_{3,2} = k_c \cdot |q_3 \cdot q_2| / r_{3,2}{}^2 \Rightarrow F_{3,2} = k_c \cdot q^2 / r^2 = F_{1,2}$.

$Δ_3$. Αν αφήσουμε τα φορτία q_1 και q_3 να κινηθούν ελεύθερα ενώ κρατούμε το q_2 ακίνητο, τα φορτία q_1 και q_3 θα φτάσουν στο άπειρο με ταχύτητα ίσου μέτρου.



Απόδειξη ότι η ταχύτητα των q_1 και q_3 θα έχει ίσο μέτρο στο άπειρο.

Αρχή διατήρησης της ορμής

$P_{ολ,αρχ} = P_{ολ,τελ} \Rightarrow 0 + 0 + 0 = m_1 \cdot υ_1΄ + m_3 \cdot υ_3΄ + 0 \Rightarrow υ_1΄ = - υ_3΄$, οι ταχύτητες των δύο σωματίων έχουν το ίδιο μέτρο και αντίθετη φορά.

Δηλαδή ισχύει : $υ_1΄ = υ_3΄ = υ΄$.

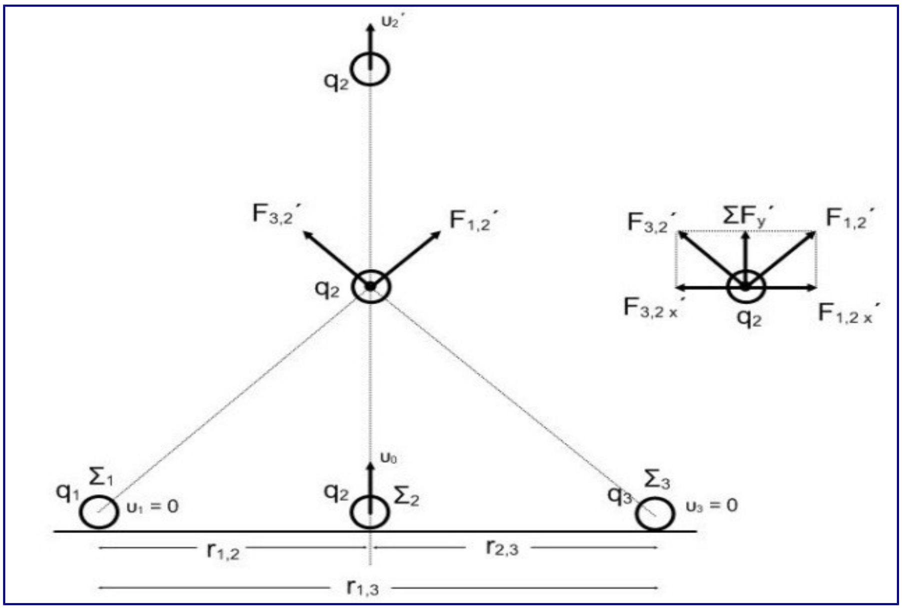
Αρχή διατήρησης μηχανικής ενέργειας :

$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{αρχ} + U_{αρχ} \Rightarrow 0 + U_{1,2,3} = 0 + ½ \cdot m_1 \cdot υ_1΄{}^2 + ½ \cdot m_3 \cdot υ_3΄{}^2 + 0 \Rightarrow$

(ισχύει $υ_1΄ = υ_3΄ = υ΄$ και $m_1 = m_3$)

$\Rightarrow U_{1,2,3} = m_1 \cdot υ΄{}^2 \Rightarrow υ΄ = \sqrt{(U_{1,2,3} / m_1)} \Rightarrow υ΄ = \sqrt{(75 / (3 \cdot 10^{-2})} \Rightarrow υ΄ = 50$ m / s .

$Δ_4$. Θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το σωμάτιο $Σ_2$ από το Β στο άπειρο :
Παρατηρούμε στο σχήμα ότι το φορτίο q_2 με την επίδραση των δυνάμεων από τα φορτία q_1 και q_3 θα κινηθεί πάνω στη μεσοκάθετο της απόστασης των q_1 και q_3 . (Οι δυνάμεις $F_{3,2}΄$ και $F_{1,2}΄$ δίνουν ίσες συνιστώσες στον άξονα x , με συνισταμένη μηδέν)
$ΔK_{B\ \to\ \infty} = W_{Fc,\ B\ \to\ \infty} = K_\infty – K_B = q_2·V_{B\ \to\ \infty} \Rightarrow$ $½·m_2·υ_2΄{}^2 – ½·m_2·υ_2^2 = q_2·(V_B – V_\infty) \Rightarrow$

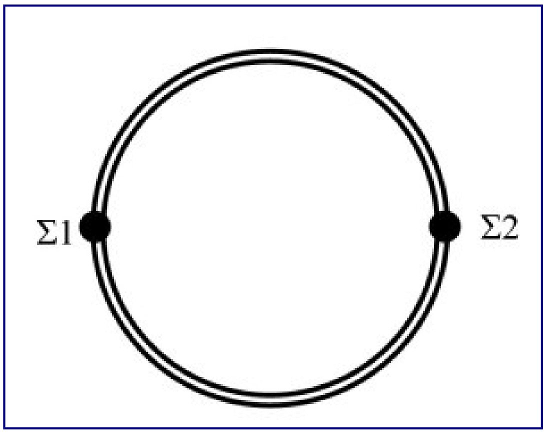


(όπου $V_\infty = 0$, εξ ορισμού το δυναμικό και η δυναμική ενέργεια στο άπειρο είναι μηδέν)
$\Rightarrow ½·m_2·υ_2΄{}^2 – ½·m_2·υ_0^2 = q_2·(k_c·q_1 / r + k_c·q_3 / r) \Rightarrow ½·m_2·υ_2΄{}^2 – ½·m_2·υ_0^2 = 2·k_c·q^2 / r \Rightarrow m_2·υ_2΄{}^2 – m_2·υ_0^2 = 4·k_c·q^2 / r \Rightarrow υ_2΄ = \sqrt{(4·k_c·q^2 / (m_2·r) + υ_0^2)} \Rightarrow υ_2΄ = \sqrt{(4·9·10^9·10^{-8} / (2·10^{-2}·3) + 400·21)} \Rightarrow υ_2΄ = 120\ m / s$.

ΑΣΚΗΣΗ 14

Δύο σημειακά φορτισμένα σώματα με φορτία $q_1 = q_2 = 10^{-4}$ C και μάζες $m_1 = m_2 = 1$ g μπορούν να κινούνται στις ράγες μιας οριζόντιας κυκλικής διαδρομής ακτίνας r = 3 m, χωρίς τριβές. Το σύστημα βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο μονωτικό επίπεδο μεγάλων διαστάσεων. Την κάτοψη του συστήματος των δύο σωμάτων με τις ράγες βλέπουμε στο σχήμα. Τα σώματα βρίσκονται αρχικά ακίνητα σε δύο αντιδιαμετρικές θέσεις της κυκλικής διαδρομής, όπως φαίνεται στο σχήμα.

$Δ_1$. Να βρείτε την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων.
$Δ_2$. Ο μηχανισμός ο οποίος κρατάει τα σώματα στην κυκλική διαδρομή απορρυθμίζεται (την ίδια χρονική στιγμή και για τα δύο σώματα) και τα σώματα μπορούν να κινηθούν ελεύθερα. Να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας με την οποία φτάνουν στο άπειρο.
Επαναφέρουμε τα δύο σώματα στις αντιδιαμετρικές θέσεις της κυκλικής διαδρομής, ρυθμίζουμε το μηχανισμό που τα κρατά σε αυτή τη διαδρομή και τους δίνουμε ταχύτητες με μέτρο υ = 100·√(5 / 2) m / s και αντίθετες κατευθύνσεις.

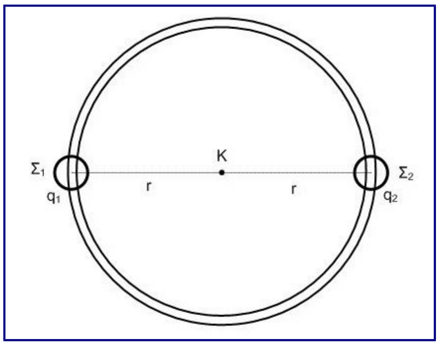


$Δ_3$. Αν απελευθερώσουμε ξανά το μηχανισμό που διατηρεί τα σώματα στην κυκλική τροχιά (την ίδια χρονική στιγμή και για τα δύο σώματα), ποιο είναι το μέτρο της ταχύτητας με την οποία θα φτάσουν στο άπειρο;
$Δ_4$. Να βρείτε το μέτρο της δύναμης που πρέπει να ασκείται από τις κυκλικές ράγες στα σημειακά σώματα, ώστε αυτά να εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση με ταχύτητες μέτρου υ = 100·√(5 / 2) m / s .
Δίνεται $k_c = 9·10^9\ N·m^2 / C^2$. Οι τριβές και η αντίσταση του αέρα θεωρούνται αμελητέες.

Λύση

$Δ_1$. Η δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο φορτίων q_1 και q_2 :

$U_{1,2} = k_c \cdot q_1 \cdot q_2 / (2 \cdot r) \Rightarrow U_{1,2} = 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-4} / (2 \cdot 3) \Rightarrow U_{1,2} = 15$ joule .



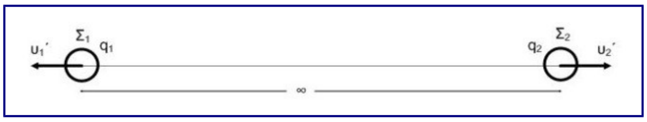
$Δ_2$. Αρχή διατήρησης της ορμής

(το q_2 παραμένει διαρκώς ακίνητο, αφού η συνισταμένη των δυνάμεων που δρουν πάνω του είναι μηδέν, όπως δείξαμε και στο προηγούμενο ερώτημα)

$P_{ολ,αρχ} = P_{ολ,τελ} \Rightarrow P_1 + P_2 = P_1΄ + P_2΄ \Rightarrow 0 + 0 = m_1 \cdot υ_1΄ + m_2 \cdot υ_2΄ \Rightarrow υ_1΄ + υ_2΄ = 0 \Rightarrow$

(δίνετε $m_1 = m_2$)

$\Rightarrow υ_1΄ = – υ_2΄$, οι ταχύτητες των σωμάτων έχουν ίσα μέτρα και αντίθετη κατεύθυνση.



Αρχή διατήρησης της ενέργειας :

$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow U_{1,2} = K_1΄ + K_2΄ \Rightarrow U_{1,2} = ½ \cdot m_1 \cdot υ_1΄^2 + ½ \cdot m_2 \cdot υ_2΄ \Rightarrow$

(Επειδή $m_1 = m_2$ και $υ_1΄ = υ_2΄$)

$\Rightarrow U_{1,2} = m_1 \cdot υ_1΄^2 \Rightarrow υ_1΄ = \sqrt{(U_{1,2} / m_1)} \Rightarrow υ_1΄ = \sqrt{(15 / 1 \cdot 10^{-3})} \Rightarrow υ_1΄ = \sqrt{(15 \cdot 10^3)}$ m / s .

$Δ_3$.

Αφήνουμε τα φορτία q_1 και q_2 να κινηθούν ελεύθερα, ενώ κρατάμε ακίνητο το q_2 , τα q_1 και q_2 θα φτάσουν στο άπειρο με ταχύτητα ίσου μέτρου.

Αρχή διατήρησης της ορμής :

$P_{ολ,αρχ}΄΄ = P_{ολ,τελ,\infty}΄ \Rightarrow P_1΄΄ + P_2΄΄ = P_{1,\infty}΄ + P_{2,\infty}΄ \Rightarrow m_1 \cdot υ + (- m_2 \cdot υ) = m_1 \cdot υ_{1,\infty}΄ + m_2 \cdot υ_{2,\infty}΄ \Rightarrow$

(δίνετε $m_1 = m_2$, τα σώματα έχουν αντίθετη ορμή αρχικά $P_{ολ,αρχ}΄΄ = m_1 \cdot υ + (- m_2 \cdot υ) = 0$, η ολική αρχική ορμή του συστήματος είναι μηδέν)

$\Rightarrow 0 = υ_{1,\infty}΄ + υ_{2,\infty}΄ \Rightarrow υ_{1,\infty}΄ = – υ_{2,\infty}΄$, οι ταχύτητες των σωμάτων έχουν ίσα μέτρα και αντίθετη κατεύθυνση.

Αρχή διατήρησης της ενέργειας :

(αρχική είναι η νέα θέση που δίνεται στην εκφώνηση για τα φορτία και τελική η νέα θέση στο άπειρο, οι ταχύτητες είναι ίσες μεταξύ τους αλλά έχουν διαφορετικό μέτρο από ότι στο $Δ_2$ ερώτημα.)

$E_{αρχ}΄΄ = E_{τελ,\infty}΄ \Rightarrow K_{αρχ}΄΄ + U_{αρχ}΄΄ = K_{τελ,\infty}΄ + U_{τελ,\infty}΄ \Rightarrow K_1 + K_2 + U_{1,2} = K_1΄ + K_2΄ + 0 \Rightarrow ½ \cdot m_1 \cdot υ_1^2 + ½ \cdot m_2 \cdot υ_2^2 + U_{1,2} = ½ \cdot m_1 \cdot υ_{1,\infty}΄^2 + ½ \cdot m_2 \cdot υ_{2,\infty}΄^2 \Rightarrow$

(Επειδή $m_1 = m_2$ και το μέτρο των ταχυτήτων, αποδείξαμε πριν $υ_{1,\infty}΄ = υ_{2,\infty}΄$)

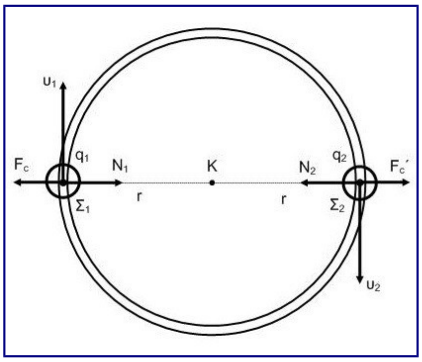
$\Rightarrow m_1 \cdot υ_1^2 + U_{1,2} = m_1 \cdot υ_1΄^2 \Rightarrow υ_1΄ = \sqrt{(U_{1,2} / m_1 + υ_1^2)} \Rightarrow υ_1΄ = \sqrt{((15 / 1 \cdot 10^{-3}) + 10^4 \cdot (5 / 2))} \Rightarrow υ_1΄ = 200$ m / s

Άρα $υ_2΄ = υ_1΄ = 200$ m / s .

$Δ_4$. Στο σχήμα βλέπουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στα δύο σώματα : F_c η δύναμη Coulomb στο φορτίο q_1 , N_1 η δύναμη που ασκείται από την μηχανισμό στο σώμα m_1, $F_c΄$ η δύναμη Coulomb στο φορτίο q_2 , N_2 η δύναμη που ασκείται από την μηχανισμό στο σώμα m_2 .

$ΣF_r$: η συνισταμένη των δυνάμεων με διεύθυνση την ακτίνα και φορά προς το κέντρο (η κεντρομόλος δύναμη) για ένα από τα δύο :

$ΣF_r = m_1 \cdot υ_1^2 / r \Rightarrow N_1 – F_c = m_1 \cdot υ_1^2 / r \Rightarrow N_1 = m_1 \cdot υ_1^2 / r + k_c \cdot |q_1 \cdot q_2| / (2 \cdot r)^2 \Rightarrow N_1 = 1 \cdot 10^{-3} \cdot 5^2 \cdot 10^3 / 3 + 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-8} / (4 \cdot 9) \Rightarrow N_1 = 65 / 6$ N .



ΑΣΚΗΣΗ 15

Δύο σφαίρες Α και Β μικρών διαστάσεων βρίσκονται πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο κατασκευασμένο από κάποιο μονωτικό υλικό και έχουν μάζες m_A = 1 g και m_B = 2 g. Οι σφαίρες φέρουν ηλεκτρικά φορτία Q_A= 0,1 μC και Q_B = 0,2 μC. Κρατάμε ακίνητες τις σφαίρες σε απόσταση x = 2 cm και κάποια στιγμή αφήνουμε ελεύθερη την Α ενώ η Β συνεχίζει να κρατείται ακίνητη.

$Δ_1$. Να υπολογιστεί η επιτάχυνση της σφαίρας Α μόλις αυτή αφήνεται ελεύθερη.

$Δ_2$. Να υπολογιστεί η ταχύτητα της σφαίρας Α όταν απέχει απόσταση 2x από την Β.

Επαναφέρουμε τις σφαίρες στην αρχική τους θέση, δηλαδή σε απόσταση x και στη συνέχεια τις αφήνουμε ταυτόχρονα ελεύθερες και τις δύο. Τη χρονική στιγμή που αυτές απέχουν απόσταση 2x να υπολογιστούν:

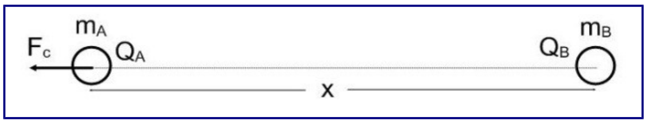
$Δ_3$. Το μέτρο της επιτάχυνσης της κάθε σφαίρας,

$Δ_4$. Το μέτρο της ταχύτητας της κάθε σφαίρας.

Δίνεται $k_c = 9·10^9$ N·m^2 / C^2 . Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Λύση

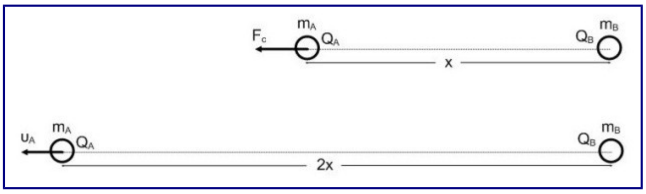
$Δ_1$. Η σφαίρα Β ασκεί δύναμη Coulomb στη σφαίρα Α.



2ος Newton στο σώμα Α :

$F_c = m_A·α_A \Rightarrow α_A = F_c / m_A \Rightarrow α_A = k_c·|Q_A|·|Q_B| / (m_A·x^2) \Rightarrow α_A = 9·10^9·10^{-7}·2·10^{-7} / (10^{-3}·4·10^{-4}) \Rightarrow α_A = 450$ m / s² .

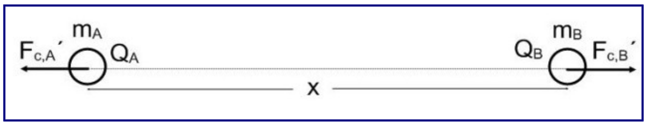
$Δ_2$. Η αρχική θέση του συστήματος των δύο μαζών φαίνεται στο πάνω σχήμα και η τελική θέση του συστήματος των δύο μαζών φαίνεται στο κάτω σχήμα.



Αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας :

$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow 0 + k_c·Q_A·Q_B / x = ½·m_A·υ_A^2 + k_c·Q_A·Q_B / 2·x \Rightarrow k_c·Q_A·Q_B / 2·x = ½·m_A·υ_A^2 \Rightarrow υ_A = \sqrt{(k_c·Q_A·Q_B / (x·m_A))} \Rightarrow υ_A = \sqrt{(9·10^9·10^{-7}·2·10^{-7} / 2·10^{-2}·10^{-3})} \Rightarrow υ_A = 3$ m / s .

$Δ_3$. Οι σφαίρες αφήνονται ελεύθερες και απωθούνται λόγω των δυνάμεων Coulomb F_c , $F_c΄$.

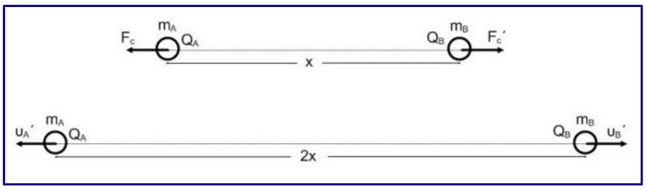


2ος Newton στη σφαίρα Α :

$F_{c,A}΄ = m_A·α_A΄ \Rightarrow α_A΄ = F_{c,A}΄ / m_A \Rightarrow α_A΄ = k_c·|Q_A|·|Q_B| / (m_A·(2·x)^2) \Rightarrow α_A΄ = 9·10^9·10^{-7}·2·10^{-7} / (16·10^{-3}·10^{-4}) \Rightarrow α_A΄ = 112{,}5$ m / s² .

2ος Newton στη σφαίρα Β : $F_{c,B}΄ = m_B·α_B΄ \Rightarrow α_B΄ = F_{c,B}΄ / m_B \Rightarrow (F_{c,A}΄ = F_{c,B}΄$ είναι δυνάμεις δράσης – αντίδρασης , $m_B = 2·m_A) \Rightarrow α_B΄ = F_{c,A}΄ / (2·m_A) \Rightarrow α_B΄ = α_A΄ / 2 \Rightarrow α_B΄ = 112{,}5 / 2 \Rightarrow α_B΄ = 56{,}25$ m / s² .

$Δ_4$.Αρχή διατήρησης της ορμής :



$P_{ολ,αρχ} = P_{ολ,τελ} \Rightarrow P_1 + P_2 = P_1΄ + P_2΄ \Rightarrow 0 + 0 = m_A·υ_A΄ – m_B·α_B΄ \Rightarrow m_A·υ_A΄ = m_B·υ_B΄ \Rightarrow m_A·υ_A΄ = 2·m_A·υ_B΄ \Rightarrow υ_A΄ = 2·υ_B΄ \Rightarrow υ_B΄ = υ_A΄ / 2$.

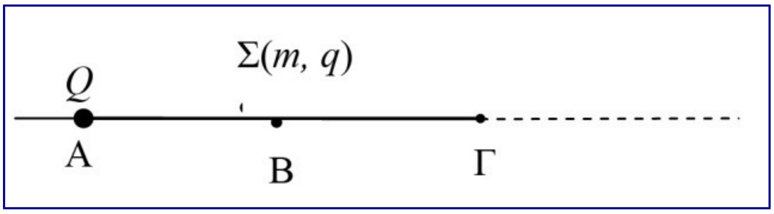
Αρχή διατήρησης μηχανικής ενέργειας :

$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow 0 + k_c·Q_A·Q_B / x = ½·m_A·υ_A΄^2 + ½·m_B·υ_B΄^2 + k_c·Q_A·Q_B / 2·x \Rightarrow k_c·Q_A·Q_B / 2·x = ½·m_A·υ_A΄^2 + ½·2·m_A·(υ_A΄ / 2)^2 \Rightarrow k_c·Q_A·Q_B / x = (3 / 2)·m_A·υ_A΄^2 \Rightarrow υ_A΄ = \sqrt{(2·k_c·Q_A·Q_B / (3·m_A·x))} \Rightarrow υ_A΄ = \sqrt{(2·9·10^9·10^{-7}·2·10^{-7} / (3·10^{-3}·2·10^{-2})} \Rightarrow υ_A΄ = \sqrt{6}$ m / s .

$υ_B΄ = υ_A΄ / 2 \Rightarrow υ_B΄ = \sqrt{6} / 2$ m / s .

ΑΣΚΗΣΗ 16

Σημειακό ηλεκτρικό φορτίο Q = 0,4 μC βρίσκεται σταθερά στερεωμένο στο σημείο Α λείου οριζόντιου επιπέδου. Το δάπεδο είναι κατασκευασμένο από μονωτικό υλικό. Τοποθετούμε στο σημείο Β του οριζόντιου επιπέδου,

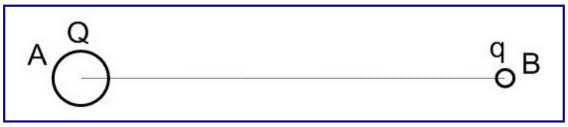


ένα σημειακό φορτισμένο αντικείμενο Σ, το οποίο έχει μάζα m = 2 mg και ηλεκτρικό φορτίο $q = 2·10^{-8}$ C, και στη συνέχεια το αφήνουμε ελεύθερο, όπως φαίνεται στο σχήμα.

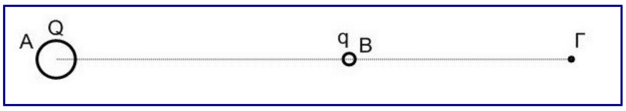
Να υπολογίσετε:

$Δ_1$. την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος, σημειακό ηλεκτρικό φορτίο Q – σημειακό φορτισμένο αντικείμενο Σ, όταν το Σ βρίσκεται στο σημείο Β.
$Δ_2$. το έργο της ηλεκτρικής δύναμης που δέχεται το φορτισμένο αντικείμενο Σ από το φορτίο Q, κατά τη μετακίνηση του αντικειμένου Σ από το σημείο Β στο σημείο Γ.
$Δ_3$. την ταχύτητα με την οποία φτάνει το αντικείμενο Σ στο σημείο Γ. Θεωρούμε ότι η μοναδική δύναμη που ασκείται στο Σ είναι η δύναμη Coulomb.
$Δ_4$. την ταχύτητα του φορτισμένου αντικειμένου Σ, μόλις αυτό φτάσει σε σημείο εκτός του ηλεκτρικού πεδίου του σημειακού φορτίου Q. Θεωρούμε ότι η μοναδική δύναμη που ασκείται στο Σ είναι η δύναμη Coulomb.
Δίνονται ότι (ΑΒ) = (ΒΓ) = 1 m, και η ηλεκτρική σταθερά $k_c = 9·10^9\ N·m^2 / C^2$.

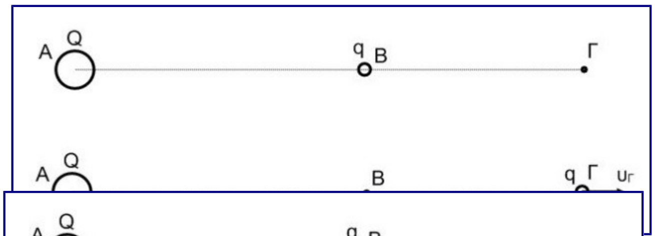
Λύση



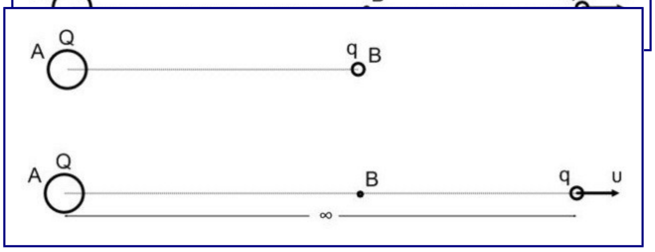
$Δ_1$. Η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των Q, q :
$U_{Q,q} = k_c·Q·q\ /\ r ⇒ U_{Q,q} = 9·10^9·4·10^{-7}·2·10^{-8} /\ 1 ⇒ U_{Q,q} = 72·10^{-6}$ joule .



$Δ_2$. Ο ορισμός της διαφοράς δυναμικού :
$V_{ΒΓ} = W_{Fc\ ,\ Β\ →\ Γ} / q ⇒ W_{Fc\ ,\ Β\ →\ Γ} = q·V_{ΒΓ} ⇒ W_{Fc\ ,\ Β\ →\ Γ} = q·(V_Β – V_Γ) ⇒ W_{Fc\ ,\ Β\ →\ Γ} = q·(k_c·Q\ /\ (ΑΒ) – k_c·Q / (ΑΓ)) ⇒ W_{Fc\ ,\ Β\ →\ Γ} = 2·10^{-8}·(9·10^9·4·10^{-7} / 1 – 9·10^9·4·10^{-7} / 2) ⇒ W_{Fc\ ,\ Β\ →\ Γ} = 36·10^{-6}$ joule .

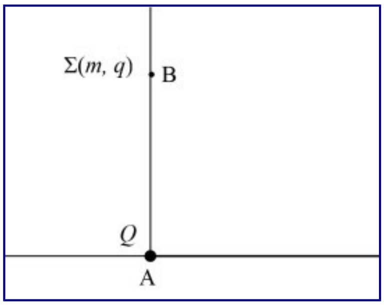


$Δ_3$. Θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας στο σώμα Σ από την θέση Β στη Γ:
$ΔΚ = W_{Fc\ ,\ Β\ →\ Γ} ⇒ Κ_{τελ} – Κ_{αρχ} = W_{Fc\ ,\ Β\ →\ Γ} ⇒ ½·m·υ_Γ^2 – 0 = W_{Fc\ ,\ Β\ →\ Γ} ⇒ υ_Γ^2 = 2·W_{Fc\ ,\ Β\ →\ Γ} / m ⇒ υ_Γ = \sqrt{(2·36·10^{-6} / 2·10^{-6})} ⇒ υ_Γ = 6\ m / s$.



$Δ_4$. Αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας :
$E_{αρχ} = E_{τελ} ⇒ Κ_{αρχ} + U_{αρχ} = Κ_{τελ} + U_{τελ} ⇒ 0 + U_{Q,q} = ½·m·υ^2 + 0 ⇒ υ = \sqrt{(2·U_{Q,q} / m)} ⇒ υ = \sqrt{(2·72·10^{-6} / 2·10^{-6})} ⇒ υ = 6·\sqrt{2}\ m / s$.

ΑΣΚΗΣΗ 17



Σημειακό ηλεκτρικό φορτίο Q = 4 μC βρίσκεται σταθερά στερεωμένο στο σημείο Α οριζόντιου μονωτικού δαπέδου. Σε σημείο Β που βρίσκεται στην ίδια κατακόρυφο με το φορτίο Q και σε απόσταση (ΑΒ) = 20 cm από αυτό, αφήνουμε ελεύθερο ένα σημειακό φορτισμένο σώμα Σ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σώμα Σ έχει μάζα m = 20 g και ηλεκτρικό φορτίο q = 2 μC. Να θεωρήσετε μηδενική την αντίσταση του αέρα.
$Δ_1$. Να υπολογίσετε την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος: σημειακό ηλεκτρικό φορτίο Q – σημειακό φορτισμένο σώμα Σ, όταν το Σ βρίσκεται στο σημείο Β.
$Δ_2$. Να βρείτε τη κατεύθυνση προς την οποία θα κινηθεί το σώμα Σ, όταν το αφήσουμε ελεύθερο στο σημείο Β.
Το σώμα Σ μετακινείται «αυθόρμητα» λόγω της αλληλεπίδρασής του με το φορτίο Q. Για μετακίνηση του σώματος Σ κατά d = 10 cm, από το σημείο Β όπου το αφήσαμε ελεύθερο, να υπολογίσετε:
$Δ_3$. Τη μεταβολή της ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος: σημειακό ηλεκτρικό φορτίο Q – σημειακό φορτισμένο σώμα Σ.
$Δ_4$. Την ταχύτητα που θα έχει το φορτισμένο σώμα Σ στο τέλος της μετακίνησης αυτής.

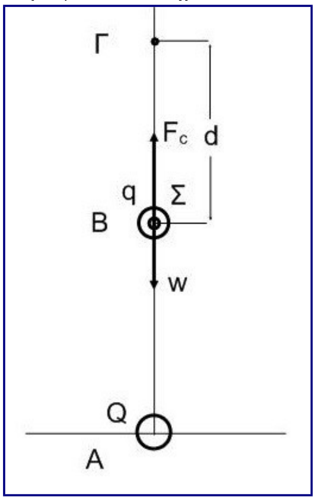
Δίνονται η ηλεκτρική σταθερά $k_c = 9\cdot10^9$ N·m² / C² και η επιτάχυνση της βαρύτητας g = 10 m / s² .

Λύση

$Δ_1$. Στην απόσταση ΑΒ η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος :

$U_{Q,q} = k_c\cdot Q\cdot q / (AB) \Rightarrow U_{Q,q} = 9\cdot10^9\cdot4\cdot10^{-6}\cdot2\cdot10^{-6} / (2\cdot10^{-1}) \Rightarrow U_{Q,q} = 0{,}36$ joule .

$Δ_2$. Πάνω στο σώμα Σ ασκούνται δύο δυνάμεις, η δύναμη Coulomb με κατεύθυνση προς τα πάνω και η δύναμη του βάρους με κατεύθυνση προς τα κάτω. Ο φορέας των δύο δυνάμεων είναι η κατακόρυφος στο σημείο Α.



Το σώμα Σ θα κινηθεί προς την κατεύθυνση της μεγαλύτερης κατά μέτρο δύναμης.

Η δύναμη Coulomb : $F_c = k_c\cdot|Q|\cdot|q| / (AB)^2 \Rightarrow F_c = 9\cdot10^9\cdot4\cdot10^{-6}\cdot2\cdot10^{-6} / (2\cdot10^{-1})^2 \Rightarrow F_c = 1{,}8$ N .

Το βάρος : $w = m\cdot g \Rightarrow w = 2\cdot10^{-2}\cdot10 \Rightarrow w = 0{,}2$ N .

Αφού $F_c = 1{,}8 > w = 0{,}2$ και οι δύο δυνάμεις βρίσκονται στον άξονα y, το σώμα θα κινηθεί κατακόρυφα με φορά προς τα πάνω.

$Δ_3$. Το σώμα κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω και μετακινείται κατά d, η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια μεταβάλλεται κατά :

$ΔU = U_{Q,q}' – U_{Q,q}$.

Η δυναμική ηλεκτρική ενέργεια στη νέα θέση :

$U_{Q,q}' = k_c\cdot Q\cdot q / ((AB) + d) \Rightarrow U_{Q,q}' = 9\cdot10^9\cdot4\cdot10^{-6}\cdot2\cdot10^{-6} / ((2\cdot10^{-1}) + 1\cdot10^{-1}) \Rightarrow U_{Q,q}' = 0{,}24$ joule .

Η μεταβολή της ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας :

$ΔU = U_{Q,q}' – U_{Q,q} \Rightarrow ΔU = 0{,}24 – 0{,}36 \Rightarrow ΔU = – 0{,}12$ joule .

$Δ_4$. Θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το σώμα μεταξύ των θέσεων Β και Γ :

(Το έργο του βάρους είναι το έργο της κατακόρυφης συνιστώσας του βάρους)

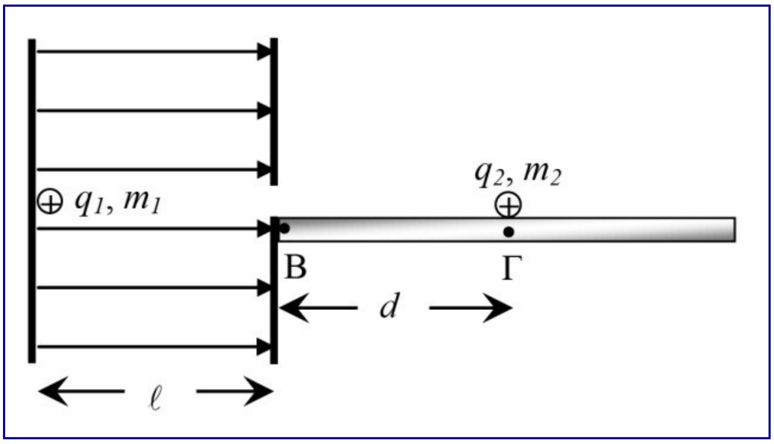
$ΔK = W_{ΣF,\, B \to Γ} \Rightarrow K_Γ – K_B = W_{Fc,\, B \to Γ} + W_{w,\, B \to Γ} \Rightarrow ½\cdot m\cdot υ_Γ{}^2 – 0 = – ΔU + m\cdot g\cdot d\cdot συν\, 180° \Rightarrow ½\cdot m\cdot υ_Γ{}^2 = – ΔU – m\cdot g\cdot d \Rightarrow υ_Γ{}^2 = – 2\cdot(ΔU + m\cdot g\cdot d) / m \Rightarrow υ_Γ = \sqrt{- 2\cdot(ΔU + m\cdot g\cdot d) / m)} \Rightarrow υ_Γ = \sqrt{- 2\cdot(- 0{,}12 + 2\cdot10^{-2}\cdot10\cdot2\cdot10^{-1})} \Rightarrow υ_Γ = \sqrt{10}$ m / s .

Με την αρχή διατήρησης μηχανικής ενέργειας :

$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow$ θα φτάσουμε στην ίδια λύση.

ΑΣΚΗΣΗ 18

Πυκνωτής αποτελείται από κατακόρυφους οπλισμούς που απέχουν απόσταση l = 0,1 m. Η τάση ανάμεσα στους οπλισμούς του είναι V = 100 V. Στο θετικό οπλισμό αφήνουμε, χωρίς αρχική ταχύτητα, φορτισμένο σωμάτιο (Ι) μάζας $m_1 = 10^{-6}$ kg και φορτίου $q_1 = 2\cdot10^{-6}$ C. Το σωμάτιο (Ι) επιταχύνεται υπό την επίδραση του πεδίου του πυκνωτή και τελικά εξέρχεται από μία οπή στον αρνητικό οπλισμό του πυκνωτή στο σημείο Β.



Κατά απτή την κίνηση του σωματίου (Ι) θεωρούμε την επίδραση του βαρυτικού πεδίου αμελητέα.

$Δ_1$. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του σωματίου (Ι) κατά την κίνησή του μέσα στον πυκνωτή.

$Δ_2$. Να υπολογίσετε την ταχύτητα $υ_B$ του σωματίου (Ι) όταν φτάνει στον αρνητικό οπλισμό (σημείο Β).

Μόλις το σωμάτιο (Ι) εξέρχεται από τον πυκνωτή, συνεχίζει να κινείται σε λείο μονωμένο οριζόντιο επίπεδο με την ταχύτητα $υ_B$. Με κατάλληλη διάταξη το πεδίο του πυκνωτή περιορίζεται μόνο εντός των οπλισμών του πυκνωτή και επομένως δεν επηρεάζει πλέον την κίνηση του φορτισμένου σωματίου (Ι).

Τη χρονική στιγμή που το σωμάτιο (Ι) εξέρχεται από το ηλεκτρικό πεδίο του πυκνωτή, τοποθετείται πάνω στο οριζόντιο επίπεδο σε σημείο που απέχει από το Β απόσταση ΒΓ = d = 2 m, ελεύθερο ακίνητο φορτισμένο σωμάτιο (ΙΙ), μάζας $m_2 = 4\cdot10^{-6}$ kg και φορτίου $q_2 = 2\cdot10^{-9}$ C. Το σωμάτιο (ΙΙ) αλληλεπιδρά με το σωμάτιο (Ι).

$Δ_3$. Να εξηγήσετε τι συμβαίνει όταν τα δύο σωμάτια (Ι) και (ΙΙ) απέχουν την ελάχιστη απόσταση μεταξύ τους και να υπολογίσετε τότε την ταχύτητά τους.

$Δ_4$. Να υπολογίσετε την ενέργεια του συστήματος των σωματίων (Ι) και (ΙΙ) όταν απέχουν την ελάχιστη απόσταση μεταξύ τους.

Δίνεται η σταθερά του νόμου του Coulomb $k_c = 9\cdot10^9$ N·m² / C². Οι διαστάσεις του πυκνωτή και η απόσταση d, έχουν σχεδιαστεί στο σχήμα εκτός κλίμακας.

Λύση

$Δ_1$.

Το σωμάτιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση αφού το πεδίο είναι ομογενές και το σωμάτιο κινείται παράλληλα στις δυναμικές γραμμές του πεδίου.

2ος Newton :

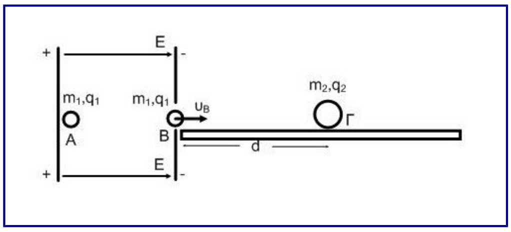
$ΣF = m_1\cdot α \Rightarrow F_c = m_1\cdot α \Rightarrow$

(ορισμός της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου : $E = F_c / q_1 \Rightarrow F_c = q\cdot E$)

$\Rightarrow q_1\cdot E = m_1\cdot α \Rightarrow α = q_1\cdot E / m_1 \Rightarrow$

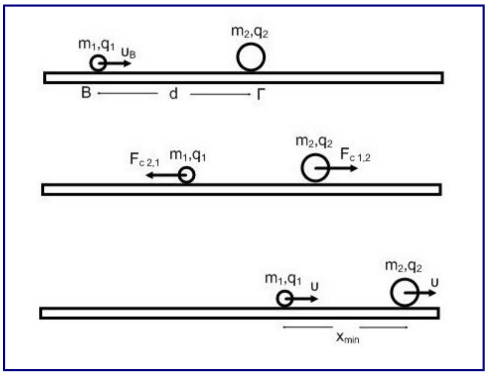
(σχέση έντασης και διαφοράς δυναμικού σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο : $E = V / l$)

$\Rightarrow α = q_1\cdot(V / l) / m_1 \Rightarrow α = q_1\cdot V / (m_1\cdot l) \Rightarrow α = 2\cdot10^{-6}\cdot100 / (10^{-6}\cdot10^{-1}) \Rightarrow α = 2\cdot10^3$ m / s² .



$Δ_2$. Θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας για το σωμάτιο από το Α στο Β :

$ΔK = W_{Fc,A\to B} \Rightarrow K_B - K_A = W_{Fc,A\to B} \Rightarrow ½\cdot m_1\cdot υ_B^2 - 0 = q_1\cdot V \Rightarrow υ_B^2 = 2\cdot q_1\cdot V / m_1 \Rightarrow υ_B = \sqrt{(2\cdot q_1\cdot V / m_1)} \Rightarrow υ_B = \sqrt{(2\cdot2\cdot10^{-6}\cdot10^2 / 10^{-6})} \Rightarrow υ_B = 20$ m / s .



$Δ_3$. Το σωμάτιο φορτίου q_1 εξέρχεται από το ομογενές ηλεκτρικό πεδίο και αλληλεπιδρά με το φορτίο q_2 που βρίσκεται στη θέση Γ. Τα q_1 , q_2 ασκούν μεταξύ τους απωστικές δυνάμεις Coulomb. Το q_1 επιβραδύνεται, ενώ το q_2 επιταχύνεται αλλά η επιβράδυνση και η επιτάχυνση αντίστοιχα δεν είναι ομαλή (σταθερή) . ελάχιστη απόσταση έχουν τα δύο φορτισμένα σωμάτια όταν η ταχύτητα τους έχει ίσο μέτρο υ .

Αρχή διατήρησης της ορμής :

$P_{ολ,αρχ} = P_{ολ,αρχ} \Rightarrow P_1 + P_2 = P_1' + P_2' \Rightarrow m_1\cdot υ_B = m_1\cdot υ + m_2\cdot υ \Rightarrow υ = m_1\cdot υ_B / (m_1 + m_2) \Rightarrow υ = 10^{-6}\cdot20 / (10^{-6} + 4\cdot10^{-6}) \Rightarrow υ = 4$ m / s .

Αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας :

$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow ½\cdot m_1\cdot υ_B^2 + k_c\cdot q_1\cdot q_2 / d = ½\cdot m_1\cdot υ^2 + ½\cdot m_2\cdot υ^2 + k_c\cdot q_1\cdot q_2 / x_{min} \Rightarrow ½\cdot m_1\cdot υ_B^2 + k_c\cdot q_1\cdot q_2 / d - ½\cdot(m_1 + m_2)\cdot υ^2 = k_c\cdot q_1\cdot q_2 / x_{min} \Rightarrow x_{min} = (k_c\cdot q_1\cdot q_2) / (½\cdot m_1\cdot υ_B^2 + k_c\cdot q_1\cdot q_2 / d - ½\cdot(m_1 + m_2)\cdot υ^2) \Rightarrow x_{min} = (9\cdot10^9\cdot2\cdot10^{-6}\cdot2\cdot10^{-9}) / (½\cdot10^{-6}\cdot20^2 + 9\cdot10^9\cdot2\cdot10^{-6}\cdot2\cdot10^{-9} / 2 - ½\cdot(10^{-6} + 4\cdot10^{-6})\cdot4^2)$

$\Rightarrow x_{min} = 36 / 178 = 0,2$ m .

$Δ_4$. Η τελική μηχανική ενέργεια του συστήματος των φορτίων q_1 , q_2 :

$E_{τελ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow E_{τελ} = ½\cdot m_1\cdot υ^2 + ½\cdot m_2\cdot υ^2 + k_c\cdot q_1\cdot q_2 / x_{min} \Rightarrow E_{τελ} = ½\cdot(m_1 + m_2)\cdot υ^2 + k_c\cdot q_1\cdot q_2 / x_{min} \Rightarrow E_{τελ} = ½\cdot(10^{-6} + 4\cdot10^{-6})\cdot4^2 + 9\cdot10^9\cdot2\cdot10^{-6}\cdot2\cdot10^{-9} / 0,2 \Rightarrow E_{τελ} = 220\cdot10^{-6}$ joule .

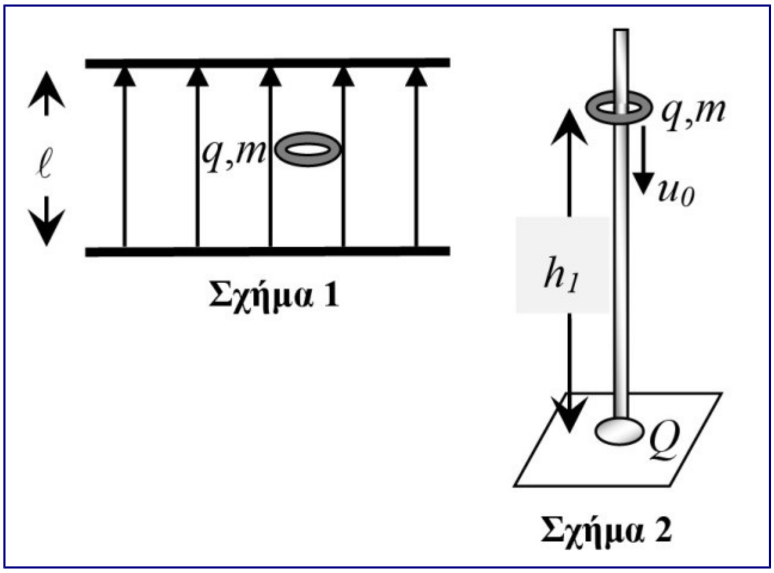
ΑΣΚΗΣΗ 19

Μικρή, θετικά φορτισμένη χάντρα, μάζας m = $6\cdot10^{-3}$ kg και φορτίου q ισορροπεί ανάμεσα στους οριζόντιους οπλισμούς πυκνωτή (σχήμα 1). Η τάση μεταξύ των οπλισμών είναι V = 12.000 V και η απόστασή τους είναι l = 0,2 m.

$Δ_1$. Να υπολογίσετε το φορτίο της χάντρας.

Διπλασιάζουμε την απόσταση των οπλισμών χωρίς να μεταβάλλουμε την τάση ανάμεσά τους. Η χάντρα αρχίζει να κινείται. Αν κινηθεί για 0,2 s μεταβαίνει από τη θέση Α στην οποία ισορροπούσε αρχικά σε μια τελική θέση Γ.

$Δ_2$. Να υπολογίσετε την απόλυτη τιμή της διαφοράς δυναμικού ανάμεσα στις θέσεις Α και Γ.



Αφαιρούμε τη φορτισμένη χάντρα από το πεδίο του πυκνωτή και την περνάμε μέσα σε πολύ λεπτή κατακόρυφη ράβδο, από μονωτικό υλικό (σχήμα 2). Η χάντρα μπορεί να κινείται κατά μήκος της ράβδου χωρίς τριβές. Στη βάση της ράβδου, που είναι στερεωμένη σε οριζόντιο επίπεδο, βρίσκεται στερεωμένο σώμα με φορτίο Q = $2\cdot10^{-6}$ C.

$Δ_3$. Να υπολογίσετε την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια που έχει το σύστημα χάντρα – φορτίο Q όταν η χάντρα απέχει h_1 = 1 m από το Q.

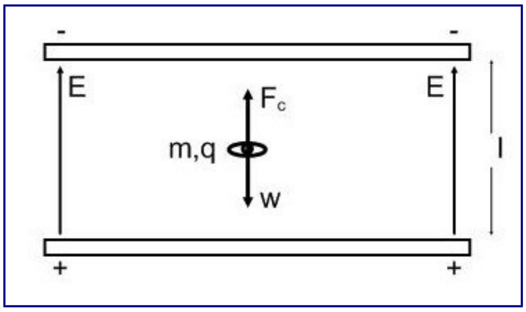
Από ύψος h_1 =1 m εκτοξεύουμε τε χάντρα προς τα κάτω με αρχική ταχύτητα $υ_0$. Η χάντρα φτάνει σε ύψος h_2 = 0,2 m από το φορτίο Q και σταματά στιγμιαία.

$Δ_4$. Να υπολογίσετε την ταχύτητα με την οποία εκτοξεύσαμε την χάντρα προς τα κάτω.

Δίνεται η σταθερά του νόμου του Coulomb $k_c = 9\cdot10^9$ N·m^2 / C^2 και η επιτάχυνση της βαρύτητας g = 10 m / s^2. Τριβές δεν υπάρχουν και η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Λύση

$Δ_1$. Η χάντρα ισορροπεί με την επίδραση των δυνάμεων F_c και w που έχουν κατακόρυφη διεύθυνση.



ΣF = 0 ⇒ F_c – w = 0 ⇒ F_c = w ⇒

(ορισμός έντασης ηλεκτρικού πεδίου : E = F_c / q ⇒ F_c = q·E)

⇒ q·E = m·g ⇒

(σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο ισχύει : E = V / l)

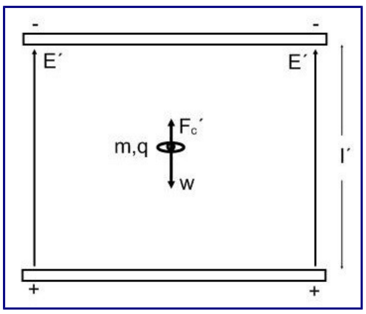
⇒ q·(V / l) = m·g ⇒ q = m·g·l / V ⇒ q = $6\cdot10^{-3}\cdot10\cdot0{,}2$ / 12.000 ⇒ q = 10^{-6} C .

$Δ_2$. Δεν αλλάζει η τάση αλλά μεταβάλλεται η απόσταση των οπλισμών l΄ = 2·l, αλλάζει η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου :

E΄ = V / l΄ ⇒ E΄ = V / (2·l) ⇒ E΄ = ½·E .

Η αλλαγή της έντασης αλλάζει την δύναμη Coulomb :

F_c΄ = q·E΄ ⇒ F_c΄ = q·½·E ⇒ F_c΄ = F_c / 2 .



Η χάντρα δεν ισορροπεί, το βάρος w > F_c΄ άρα η χάντρα κινείται κατακόρυφα με φορά προς τα κάτω και με σταθερή επιτάχυνση. Σε χρόνο t = 0,2 s βρίσκεται στη θέση Γ.

Ισχύει : E΄ = V / (2·l) ⇒ $|V_{ΑΓ}|$ / (ΑΓ) = V / (2·l) ⇒ $|V_{ΑΓ}|$ = V·(ΑΓ) / 2·l …(Ι)

2ος Newton :

$\Sigma F' = m \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = \Sigma F' / m \Rightarrow \alpha = (w - F_c') / m \Rightarrow \alpha = (m \cdot g - q \cdot E') / m \Rightarrow \alpha = (m \cdot g - q \cdot (V / l')) / m \Rightarrow \alpha = (6 \cdot 10^{-3} \cdot 10 - 10^{-6} \cdot (12 \cdot 10^3 / 0,4)) / 6 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \alpha = 5\ m / s^2$.

Η χάντρα διανύει $\Delta x = (A\Gamma) = ½ \cdot \alpha \cdot t^2 \Rightarrow (A\Gamma) = ½ \cdot 5 \cdot 0,2^2 \Rightarrow (A\Gamma) = 0,1\ m$.

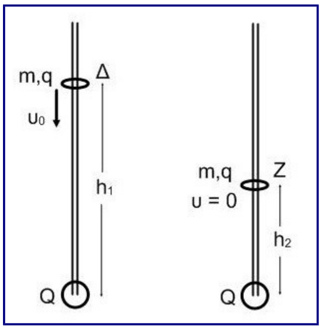
Από την (Ι) σχέση :

$|V_{A\Gamma}| = V \cdot (A\Gamma) / 2 \cdot l \Rightarrow |V_{A\Gamma}| = 12 \cdot 10^3 \cdot 0,1 / 0,4 \Rightarrow |V_{A\Gamma}| = 3 \cdot 10^3\ V$.

Δ_3.

Όταν το φορτίο βρίσκεται σε κατακόρυφη απόσταση h_1 από το Q βρίσκουμε την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος :

$U_{Q,q,h1} = k_c \cdot Q \cdot q / h_1 \Rightarrow U_{Q,q,h1} = 9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-6} / 1 \Rightarrow U_{Q,q,h1} = 18 \cdot 10^{-3}$ joule .



Δ_4. Από ύψος h_1 η χάντρα βάλλεται προς τα κάτω με ταχύτητα υ_0 και σταματά στιγμιαία σε απόσταση h_2 από το Q.

Αρχή διατήρησης μηχανικής ενέργειας :

$E_{\alpha\rho\chi} = E_{\alpha\rho\chi} \Rightarrow K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} + U_{\beta\alpha\rho,\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\beta\alpha\rho,\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow ½ \cdot m \cdot \upsilon_0^2 + U_{Q,q,h1} + U_{\beta\alpha\rho,h1} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{Q,q,h2} + U_{\beta\alpha\rho,h2} \Rightarrow \upsilon_0 = \sqrt{(2 \cdot (U_{Q,q}' - U_{Q,q} + U_{\beta\alpha\rho,h2} - U_{\beta\alpha\rho,h1}) / m)}$ …(ΙΙ)

Η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια όταν τα φορτία απέχουν κατά h_2 :

$U_{Q,q,h2} = k_c \cdot Q \cdot q\ / h_2 \Rightarrow U_{Q,q,h2} = 9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-6} /\ 0,2 \Rightarrow U_{Q,q,h2} = 90 \cdot 10^{-3}$ joule .

Η βαρυτική δυναμική ενέργεια σε ύψος h_2 :

$U_{\beta\alpha\rho,h2} = w \cdot h_2 \Rightarrow U_{\beta\alpha\rho,h2} = m \cdot g \cdot h_2 \Rightarrow U_{\beta\alpha\rho,h2} = 6 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10^{-1} \Rightarrow U_{\beta\alpha\rho,h2} = 12 \cdot 10^{-3}$ joule .

Η βαρυτική δυναμική ενέργεια σε ύψος h_1 :

$U_{\beta\alpha\rho,h1} = w \cdot h_1 \Rightarrow U_{\beta\alpha\rho,h1} = m \cdot g \cdot h_1 \Rightarrow U_{\beta\alpha\rho,h1} = 6 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 1 \Rightarrow U_{\beta\alpha\rho,h2} = 60 \cdot 10^{-3}$ joule .

Από την σχέση (ΙΙ) :

$\Rightarrow \upsilon_0 = \sqrt{(2 \cdot (U_{Q,q}' - U_{Q,q} + U_{\beta\alpha\rho,h2} - U_{\beta\alpha\rho,h1})\ /\ m)} \Rightarrow \upsilon_0 = \sqrt{(2 \cdot (90 \cdot 10^{-3} - 18 \cdot 10^{-3} + 12 \cdot 10^{-3} - 60 \cdot 10^{-3})\ /\ 6 \cdot 10^{-3})} \Rightarrow \upsilon_0 = 2 \cdot \sqrt{2}\ m / s$.

ΑΣΚΗΣΗ 20

Δύο σημειακά σωματίδια με ηλεκτρικά φορτία $q = 10^{-5}$ C και $q = -10^{-5}$ C και ίσες μάζες m = 0,1 kg βρίσκονται σε οριζόντιο δάπεδο σε απόσταση 0,5 m.

Δ_1. Να υπολογιστεί η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια των δύο φορτίων.

Δ_2. Να προσδιοριστεί το μέτρο της ταχύτητας που πρέπει να προσδώσουμε σε καθένα από τα δύο σωματίδια ώστε να μπορούν να εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση με την επίδραση της δύναμης Coulomb που θα παίζει το ρόλο κεντρομόλου δύναμης, γύρω από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα δύο σημειακά σωματίδια.

Δ_3. Να υπολογίσετε την κινητική και την ολική ενέργεια του συστήματος των δύο σωματιδίων.

Δ_4. Να υπολογίσετε το ποσό της ενέργειας που πρέπει να προσδοθεί στα δύο φορτία, όταν αυτά εκτελούν κυκλική κίνηση, ώστε να φτάσουν σε άπειρη απόσταση με μηδενικές ταχύτητες.

Τριβές δεν υπάρχουν, η βαρύτητα δεν παίζει ρόλο, ενώ η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Δίνεται $k_c = 9 \cdot 10^9\ N \cdot m^2 / C^2$.

Λύση

Δ_1.

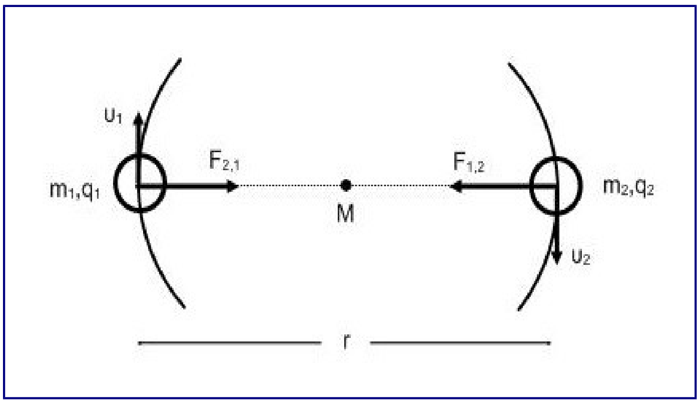
Μας δίνονται δύο σημειακά σωματίδια που έχουν ίση μάζα $m_1 = m_2$ και φορτία q_1 και q_2 .

Το ερώτημα μας ζητάει την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο φορτισμένων σωματιδίων. Η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια ορίζεται μόνο σε ένα σύστημα δύο ή περισσοτέρων φορτίων, είναι μια μορφή ενέργειας. Δηλαδή μονόμετρο μέγεθος με μονάδες joule, άρα θα υπολογιστεί μόνο το μέτρο της.

Η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των σωματιδίων δίνεται από την σχέση :

$U_{1,2} = k_c \cdot (q_1 \cdot q_2) / r \Rightarrow U_{1,2} = 9 \cdot 10^9 \cdot (10^{-5} \cdot (-10^{-5})) / ½ \Rightarrow U_{1,2} = -1,8$ joule .

$Δ_2$.Τα σωματίδια εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση και η μόνη δύναμη που παίζει ρόλο είναι η ηλεκτρική δύναμη (δίνεται στο τέλος της εκφώνησης ότι η βαρύτητα και η αντίσταση του αέρα δεν παίζουν ρόλο). Η ηλεκτρική δύναμη (Coulomb) είναι η κεντρομόλος δύναμη στην άσκηση μας..



(Η κεντρομόλος δύναμη δεν είναι παρά η συνισταμένη των δυνάμεων που ήδη δρουν στο σώμα πάνω στη διεύθυνση της ακτίνας με φορά προς το κέντρο)

Οι δυνάμεις $F_{1,2}$ και $F_{2,1}$ είναι δυνάμεις δράσης – αντίδρασης ($F_{1,2} = F_{2,1}$),

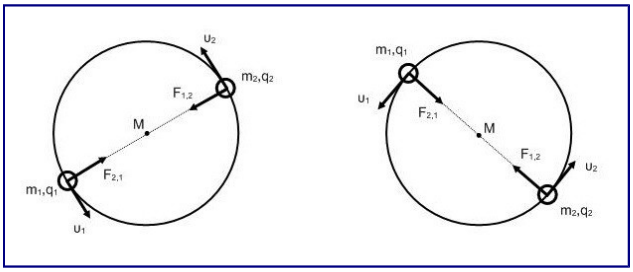
η $F_{1,2}$ ασκείται από το m_1 στο m_2 και η $F_{2,1}$ ασκείται από το m_2 στο m_1

(Ο συμβολισμός $F_{1,2}$ και $F_{2,1}$ είναι ένας συμβολισμός που διδακτικά λειτουργεί.)

Μας δίνεται ότι οι μάζες είναι ίσες $m_1 = m_2 = m$, μόλις σχολιάσαμε ότι $F_{1,2} = F_{2,1}$,

Ισχύει η σχέση :

$F_κ = F_c$.



για το σώμα m_1 : $F_{κ,1} = F_{1,2} \Rightarrow m_1 \cdot υ_1^2 / (r / 2) = F_{1,2}$.

για το σώμα m_2 : $F_{κ,2} = F_{2,1} \Rightarrow m_1 \cdot υ_2^2 / (r / 2) = F_{2,1}$.

άρα $υ_1 = υ_2 = υ$ δηλαδή τα δύο σωματίδια θα εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση όπου συνεχώς θα βρίσκονται στην ίδια ευθεία με το μέσο Μ , δείτε το σχήμα :

$F_κ = F_c \Rightarrow m \cdot υ^2 / (r / 2) = k_c \cdot |q \cdot q| / r^2 \Rightarrow k_c \cdot |q|^2 / r^2 = (2 \cdot m \cdot υ^2) / r \Rightarrow υ^2 = k_c \cdot |q|^2 / 2 \cdot m \cdot r \Rightarrow υ = |q| \cdot \sqrt{(k_c / (2 \cdot m \cdot r))} \Rightarrow υ = 10^{-5} \cdot \sqrt{(9 \cdot 10^9 / (2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}5))} \Rightarrow υ = 3$ m / s .

Άρα $υ_1 = υ_2 = υ \Rightarrow υ_1 = υ_2 = 3$ m / s .

$Δ_3$.Η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι :

$K_{ολ} = K_1 + K_2 \Rightarrow K_{ολ} = ½ \cdot m_1 \cdot υ_1^2 + ½ \cdot m_2 \cdot υ_2^2 \Rightarrow K_{ολ} = 2 \cdot (½ \cdot m \cdot υ^2) \Rightarrow K_{ολ} = 0{,}1 \cdot 3^2 \Rightarrow K_{ολ} = 0{,}9$ joule .

Η ολική ενέργεια είναι το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας :

$E_{ολ} = K_{ολ} + U_{1,2} \Rightarrow E_{ολ} = 0{,}9 – 1{,}8 \Rightarrow E_{ολ} = – 0{,}9$ joule .

Το μείον έχει την φυσική σημασία : τα σωματίδια έλκονται, για να τα απομακρύνουμε σε άπειρη απόσταση μεταξύ τους θα χρειαστεί να προσφέρουμε ενέργεια

$Δ_4$.

Η ενέργεια που απαιτείται για να μεταφερθούν τα φορτία από την αρχική θέση σε άπειρη απόσταση μεταξύ τους, είναι ίση με το έργο της (εξωτερικής) δύναμης W_F που πρέπει να ασκηθεί (από ένα εξωτερικό παράγοντα για το σύστημα) σε αυτά.

Αρχή διατήρησης της ενέργειας :

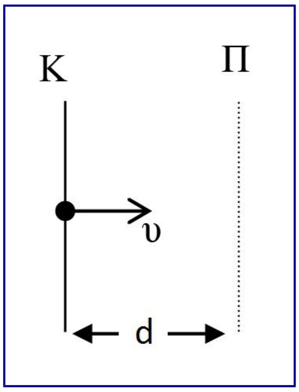
(Η ολική τελική ενέργεια $E_{τελ} = 0$ γιατί η δυναμική ηλεκτρική ενέργεια στο άπειρο (εννοούμε ότι τα σωματίδια έχουν άπειρη απόσταση μεταξύ τους) είναι μηδέν $U_{1,2}' = 0$ και η ολική κινητική ενέργεια είναι μηδέν $K_{ολ}' = K_1' + K_2' \Rightarrow K_{ολ}' = 0 + 0 = 0$)

$E_{τελ} = E_{αρχ} + W_F \Rightarrow W_F = E_{τελ} – E_{αρχ} \Rightarrow W_F = 0 – E_{αρχ} \Rightarrow W_F = – (- 0{,}9) \Rightarrow W_F = + 0{,}9$ joule .

Η θετική τιμή του έργου σημαίνει ότι αυξήθηκε η ενέργεια του συστήματος των δύο σωματιδίων (ή μας δείχνει την ενέργεια που πρόσφερε ο εξωτερικός παράγοντα στο σύστημα).

ΑΣΚΗΣΗ 21

Επίπεδη μεταλλική πλάκα Κ έχει δυναμικό V_0 = -100 V. Σε απόσταση d = 10 cm από το Κ τοποθετείται μεταλλικό πλέγμα Π, παράλληλα προς το Κ, που έχει δυναμικό μηδέν. Μεταξύ των Κ και Π το ηλεκτρικό πεδίο θεωρείται ομογενές. Ένα ηλεκτρόνιο εκπέμπεται από το Κ χωρίς αρχική ταχύτητα, φθάνει στο Π και το διαπερνά. Η μάζα του ηλεκτρονίου είναι $m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}$ kg και το φορτίο του είναι $e = -1{,}6\cdot10^{-19}$ C. Να θεωρήσετε ότι 1,6 / 9,1 = 0,18.



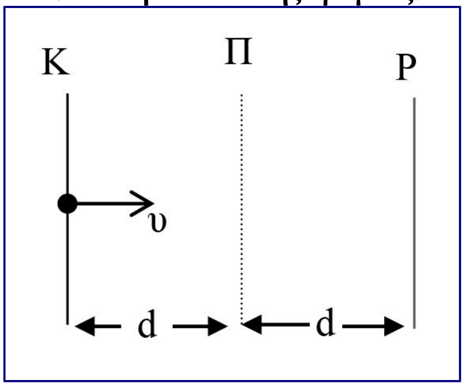
$Δ_1$. Να σχεδιαστεί το διάγραμμα, σε βαθμολογημένους άξονες, του τετραγώνου της ταχύτητας του ηλεκτρονίου σε συνάρτηση με την απόσταση x από το ηλεκτρόδιο Κ ($υ^2 = f(x)$), μέχρι το ηλεκτρόνιο να φτάσει στο Π.

$Δ_2$. Να υπολογιστούν η μέγιστη ταχύτητα με την οποία το ηλεκτρόνιο φθάνει στο πλέγμα Π και ο χρόνος που χρειάζεται γι' αυτό.

Σε απόσταση d = 10 cm από το πλέγμα Π, τοποθετούμε μία μεταλλική πλάκα Ρ παράλληλα σε αυτό, η οποία έχει επίσης αρνητικό δυναμικό $V = 2\cdot V_0$. Το ηλεκτρόνιο που εκπέμπεται από το Κ όταν διαπερνά το πλέγμα Π κατευθύνεται προς την πλάκα Ρ. Μεταξύ των Π και Ρ το ηλεκτρικό πεδίο θεωρείται επίσης ομογενές.

$Δ_3$. Θα φθάσει το ηλεκτρόνιο στην πλάκα Ρ;

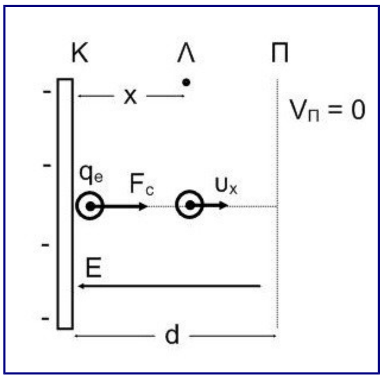
$Δ_4$. Ποια είναι η τιμή του δυναμικού που πρέπει να έχει η πλάκα Ρ ώστε το ηλεκτρόνιο μόλις να φτάνει σε αυτή;



Λύση

$Δ_1$.Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο Λ που απέχει απόσταση x από την αρνητική πλάκα Κ.

Στη θέση Λ το ηλεκτρόνιο έχει ταχύτητα $υ_x$.



Ορισμός της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου :

$E = V / d \Rightarrow E = (V_0 – 0) / d$ και $E = (V_0 – V_x) / x \Rightarrow$

$(V_0 – 0) / d = (V_0 – V_x) / x \Rightarrow V_0 – V_x = (V_0 / d)\cdot x$ …(Ι)

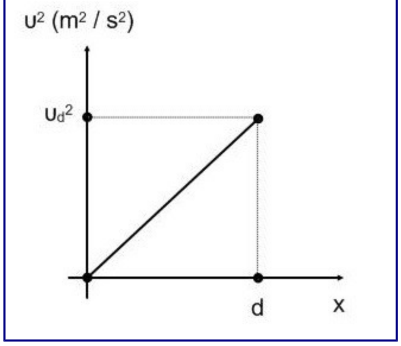
Θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (ή θεώρημα έργου – ενέργειας) :

(μια άλλη έκφραση της αρχής διατήρησης της ενέργειας που ισχύει παντού και εφαρμόζετε για την κίνηση του ηλεκτρονίου μεταξύ των θέσεων Κ και Λ)

$ΔK = W_{Fc,\ K\to Λ} \Rightarrow K_Λ – K_K = W_{Fc,\ K\to Λ} \Rightarrow ½\cdot m_e\cdot υ_x{}^2 – 0 = e\cdot(V_0 – V_x) \Rightarrow ½\cdot m_e\cdot υ_x{}^2 = e\cdot(V_0 / d)\cdot x \Rightarrow υ_x{}^2 = (2\cdot e\cdot V_0 / (m_e\cdot d))\cdot x \Rightarrow υ_x{}^2 = (2\cdot(- 1{,}6)\cdot10^{-19}\cdot(- 10^2) / (9{,}1\cdot10^{-31}\cdot10^{-1}) \Rightarrow υ_x{}^2 = 36\cdot10^{13}\cdot x$, με $0 \le x \le d$, όταν x = d τότε $υ_d{}^2 = 36\cdot10^{12}$ m² / s² .

$Δ_2$.$υ_x{}^2 = 36\cdot10^{13}\cdot x$, όταν x = d τότε $υ_x = υ_π$.

$υ_x{}^2 = 36\cdot10^{13}\cdot10^{-1} \Rightarrow υ_x = 6\cdot10^6$ m / s .



Η κίνηση του ηλεκτρονίου είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη με επιτάχυνση $α_1$.

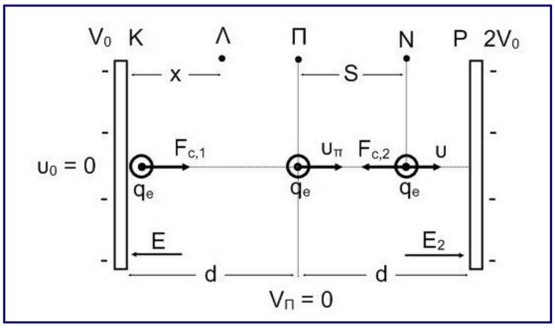
2ος Newton :

$F_{c,1} = m_e\cdot α_1 \Rightarrow α_1 = F_{c,1} / m_e \Rightarrow$

(Ορισμός της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου : $E = F_{c,1} / |e| \Rightarrow F_{c,1} = |e|\cdot E) \Rightarrow α_1 = |e|\cdot E / m_e \Rightarrow$

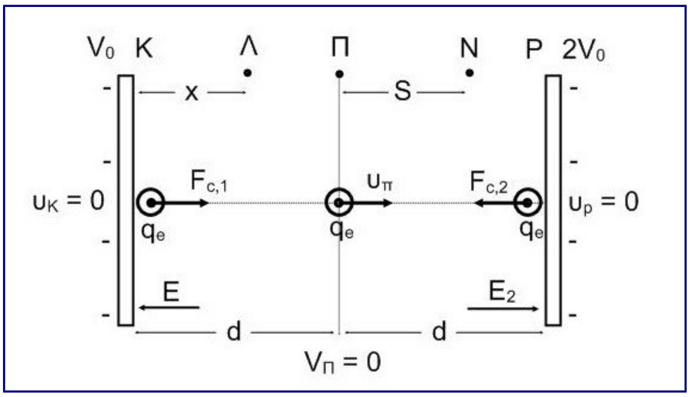
(Σχέση έντασης και διαφοράς δυναμικού σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο : $E = |V_0| / d$)$\Rightarrow \alpha_1 = |e|\cdot(|V_0| / d) / m_e \Rightarrow \alpha_1 = |e|\cdot|V_0| / (d\cdot m_e) \Rightarrow \alpha_1 = 1{,}6\cdot10^{-19}\cdot10^2 / (10^{-1}\cdot9{,}1\cdot10^{-31}) \Rightarrow \alpha_1 = 18\cdot10^{13}$ m / s² .
Η ταχύτητα στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, χωρίς αρχική ταχύτητα :
$\upsilon = \alpha_1\cdot t$, την χρονική στιγμή $t = t_1$ η ταχύτητα είναι $\upsilon = \upsilon_\pi$:
$\upsilon_\pi = \alpha_1\cdot t_1 \Rightarrow t_1 = \upsilon_\pi / \alpha_1 \Rightarrow t_1 = 6\cdot10^6 / (18\cdot10^{13}) \Rightarrow t_1 = (1 / 3)\cdot10^{-7}$ m / s .

Δ_3.1ος τρόπος : (Κινηματική αντιμετώπιση)



Το ηλεκτρόνιο μπαίνει στο ομογενές πεδίο της δεύτερης πλάκας όπου εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση, με επιβράδυνση (αρνητική επιτάχυνση) α_2 .
Έστω ότι το ηλεκτρόνιο σταματά στιγμιαία σε ένα σημείο N που απέχει απόσταση S από το πλέγμα Π .
Η εξίσωση της ταχύτητας με τον χρόνο :
$\upsilon = \upsilon_\pi - \alpha_2\cdot t \Rightarrow$(αν $t = t_2$ τότε $\upsilon = \upsilon_N = 0$) $\Rightarrow 0 = \upsilon_\pi - \alpha_2\cdot t_2 \Rightarrow t_2 = \upsilon_\pi / \alpha_2$ …(II)
Η εξίσωση της απομάκρυνσης με τον χρόνο :
$\Delta x = \upsilon_\pi\cdot t - ½\cdot\alpha_2\cdot t^2 \Rightarrow$(αν $t = t_2$ τότε $\Delta x = S$)$\Rightarrow S = \upsilon_\pi\cdot t_2 - ½\cdot\alpha_2\cdot t_2^2 \Rightarrow$(αντικαθιστούμε το t_2 από την σχέση (II))$\Rightarrow S = \upsilon_\pi\cdot(\upsilon_\pi / \alpha_2) - ½\cdot\alpha_2\cdot(\upsilon_\pi / \alpha_2)^2 \Rightarrow S = \upsilon_\pi^2 / (2\cdot\alpha_2)$ …(III)
2ος Newton :$F_{c,2} = m_e\cdot\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = F_{c,2} / m_e \Rightarrow$
(Ορισμός της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου : $E_2 = F_{c,2} / |e| \Rightarrow F_{c,2} = |e|\cdot E_2$)$\Rightarrow \alpha_2 = |e|\cdot E_2 / m_e \Rightarrow$
(Σχέση έντασης και διαφοράς δυναμικού σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο : $E_2 = |2\cdot V_0| / d$)$\Rightarrow \alpha_2 = |e|\cdot(|2\cdot V_0| / d) / m_e \Rightarrow \alpha_2 = |e|\cdot|2\cdot V_0| / (d\cdot m_e) \Rightarrow \alpha_2 = 2\cdot\alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 = 36\cdot10^{13}$ m / s² .
(III) $\Rightarrow S = \upsilon_\pi^2 / (2\cdot\alpha_2) \Rightarrow (6\cdot10^6)^2 / (2\cdot36\cdot10^{13}) \Rightarrow S = ½\cdot10^{-1}$ m . Διαιρούμε κατά μέλη τα S και d :
$S / d = ½\cdot10^{-1} / 10^{-1} \Rightarrow S / d = ½ \Rightarrow S = d / 2$.
Αφού το $S < d$ το ηλεκτρόνιο δεν φτάνει στην πλάκα P .

Δ_4.



Θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (ή θεώρημα έργου – ενέργειας) :
(άλλη έκφραση της αρχής διατήρησης της ενέργειας που ισχύει παντού, εφαρμόζεται για το ηλεκτρόνιο κατά την μετακίνηση του από το σημείο K στο P)
Έστω ότι το ηλεκτρόνιο μόλις που σταματά στιγμιαία στο σημείο P.
$\Delta K = W_{Fc,1,\ K\rightarrow\Pi} + W_{Fc,2,\ \Pi\rightarrow P} \Rightarrow K_P - K_K = W_{Fc,1,\ K\rightarrow\Pi} + W_{Fc,2,\ \Pi\rightarrow P} \Rightarrow 0 - 0 = e\cdot(V_0 / d)\cdot d + e\cdot(- V_P / d)\cdot d \Rightarrow V_P = V_0 = -100$V.

ΑΣΚΗΣΗ 22

Σε ένα διαστημόπλοιο (στο οποίο η βαρυτική δύναμη είναι αμελητέα) πραγματοποιούνται πειράματα με έναν επίπεδο πυκνωτή, η απόσταση μεταξύ των οπλισμών του οποίου είναι d = 4 cm. Ο πυκνωτής φορτίζεται από πηγή σταθερής τάσης V = 4000 V .
Δ_1. Να υπολογιστεί το μέτρο της έντασης του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό του πυκνωτή.
Σωματίδιο με μάζα $m = 1{,}6\cdot10^{-15}$ kg και ηλεκτρικό φορτίο $q = 3{,}2\cdot10^{-19}$ C αφήνεται με μηδενική αρχική ταχύτητα πολύ κοντά στο θετικά φορτισμένο οπλισμό του πυκνωτή.
Δ_2. Να υπολογιστεί η επιτάχυνση του σωματιδίου.
Δ_3. Να υπολογιστεί η απόσταση που έχει διανύσει το σωματίδιο όταν το μέτρο της ταχύτητάς του είναι $\upsilon = \sqrt{10} / 5$ m / s .
Το διαστημόπλοιο επιστρέφει στην επιφάνεια της γης. Ο πυκνωτής παραμένει συνδεδεμένος με την πηγή και οι οπλισμοί του είναι οριζόντιοι. Ο θετικός οπλισμός βρίσκεται κάτω και ο αρνητικός οπλισμός πάνω

από το θετικό. Το σωματίδιο αφήνεται ξανά με μηδενική ταχύτητα πολύ κοντά στο θετικό οπλισμό του πυκνωτή.

$Δ_4$. Να υπολογιστεί η απόσταση που θα έχει διανύσει το σωματίδιο όταν το μέτρο της ταχύτητάς του είναι $υ = \sqrt{10} / 5$ m / s .

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της γης $g = 10$ m / s^2. Η αντίσταση του αέρα σε κάθε περίπτωση θεωρείται αμελητέα.

Λύση

$Δ_1$.Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή :$E = V / d \Rightarrow E = 4·10^3 / (4·10^{-2}) \Rightarrow E = 10^5$ N / C ή V / m .

$Δ_2$.Το σωματίδιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, χωρίς αρχική ταχύτητα.

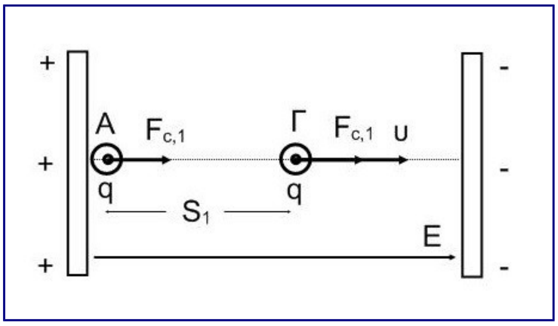
2ος Newton :$ΣF = m·α_1 \Rightarrow F_{c,1} = m·α_1 \Rightarrow$

(Ορισμός της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου $E = F_{c.1} / q \Rightarrow F_c = q·E) \Rightarrow q·E = m·α_1 \Rightarrow α_1 = q·E / m \Rightarrow α_1 = (3,2·10^{-19}·10^5) / (1,6·10^{-15}) \Rightarrow α_1 = 20$ m / s² .

$Δ_3$.Στο σχήμα βλέπουμε την $(ΑΓ) = S_1$.

Θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (ή θεώρημα έργου – ενέργειας) :

$ΔK = W_{Fc,\, A \to Γ} \Rightarrow K_Γ – K_A = W_{Fc,\, A \to Γ} \Rightarrow ½·m·υ^2 – 0 = F_{c,1}·S_1 \Rightarrow S_1 = m·υ^2 / (2·F_{c,1}) \Rightarrow S_1 = 1,6·10^{-15}·(\sqrt{10} / 5)^2 / (2·3,2·10^{-19}) \Rightarrow S_1 = 10^{-2}$ m .



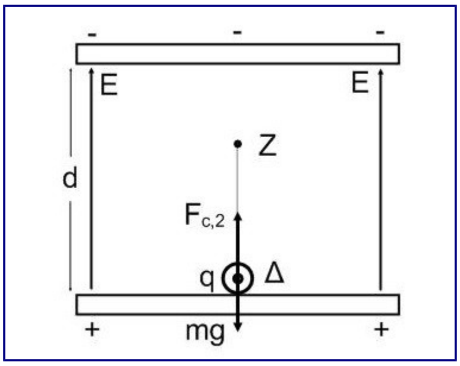
$Δ_4$.Ο πυκνωτής μεταφέρεται στο βαρυτικό πεδίο της Γης, τώρα πάνω στο σώμα εκτός από την ηλεκτρική δύναμη, ασκείται πάνω του και η δύναμη του βάρους.

Ορισμός της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου :

$E = F_{c,2} / q \Rightarrow F_{c,2} = q·E \Rightarrow F_{c,2} = 3,2·10^{-19}·10^5 \Rightarrow F_{c,2} = 3,2·10^{-14}$ N .

Το βάρος δίνεται :$w = m·g \Rightarrow w = 1,6·10^{-15}·10 \Rightarrow w = 1,6·10^{-14}$ N .

Παρατηρούμε ότι $F_{c,2} > w$, άρα το σωματίδιο θα κινηθεί κατακόρυφα με φορά προς τα πάνω.



Θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (ή θεώρημα έργου – ενέργειας) :

(άλλη έκφραση της αρχής διατήρησης της ενέργειας που ισχύει παντού, εφαρμόζετε στο σωματίδιο για την κίνηση του από το Δ στο Ζ, $ΔΖ = S_2$)

$ΔK = W_{Fc,\, Δ \to Z} + W_{w,\, Δ \to Z} \Rightarrow K_Δ – K_Z = F_{c,2}·S_2 – w·S_2 \Rightarrow ½·m·υ^2 – 0 = F_c·S_2 – w·S_2 \Rightarrow S_2 = m·υ^2 / (2·(F_{c,2} – w)) \Rightarrow S_2 = 1,6·(\sqrt{10} / 5)^2 / (2·(3,2·10^{-14} – 1,6·10^{-14})) \Rightarrow S_2 = 2·10^{-2}$ m (ή 2 cm) .