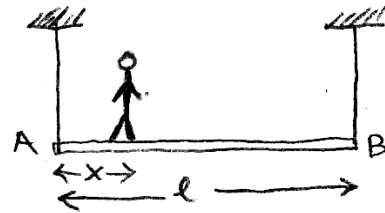


## ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ – ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΤΕΡΕΟΥ – ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΝΟΜΟΣ

1. Ένας ελαιοχρωματιστής βάρους  $w_1=700\text{ N}$  βρίσκεται σε μια οριζόντια σανίδα  $AB$ , μήκους  $\ell=5\text{ m}$  και βάρους  $w=300\text{ N}$ . Η σανίδα κρέμεται από δυο κατακόρυφα σχοινιά που είναι δεμένα στα άκρα  $A$  και  $B$ .



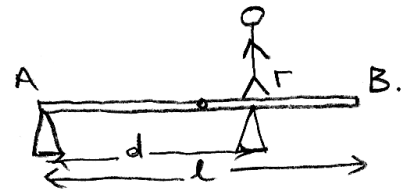
α. Να εκφράσετε τα μέτρα των τάσεων  $T_A$  και  $T_B$  των δυο σχοινιών σε συνάρτηση με την απόσταση  $x$  του ελαιοχρωματιστή από το άκρο  $A$  της σανίδας.

β. Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της τάσης  $T_A$ ;

γ. Για ποια τιμή της απόστασης  $x$ , το μέτρο της τάσης  $T_A$  είναι τριπλάσιο από το μέτρο της τάσης  $T_B$ ;

$$\left( T_A = 850 - 140x, T_B = 150 + 140x, 850\text{ N}, 150\text{ N}, \frac{5}{7}\text{ m} \right) dm$$

2. Ομογενής δοκός  $AB$  μήκους  $\ell=4\text{ m}$  και βάρους  $w_1=600\text{ N}$ , στηριζόμενη στο άκρο  $A$  και σε ένα σημείο  $\Gamma$ , το οποίο απέχει απόσταση  $d=2,5\text{ m}$  από το άκρο  $A$ , όπως φαίνεται στο σχήμα. Ένα παιδί βάρους  $w_2=300\text{ N}$  στέκεται πάνω στη δοκό στο σημείο  $\Gamma$ , και αρχίζει να προχωράει προς το άκρο  $B$ .



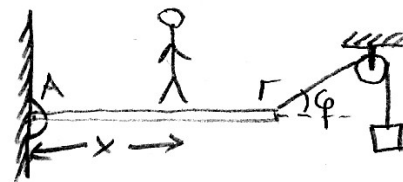
α. Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό, όταν το παιδί βρίσκεται σε απόσταση  $x$  από το σημείο  $\Gamma$ .

β. Μέχρι ποια απόσταση μπορεί να προχωρήσει το παιδί, χωρίς να ανατραπεί η δοκός;

γ. Ποιο είναι το μέτρο της δύναμης που ασκεί στη δοκό το υποστήριγμα στο σημείο  $\Gamma$  στην περίπτωση του προηγούμενου ερωτήματος;

$$\left( F_\Gamma = 780 + 120x, F_A = 120 - 120x, 1\text{ m}, 900\text{ N} \right) dm$$

3. Ομογενής δοκός  $AG$ , μήκους  $\ell=4\text{ m}$  και βάρους  $w=100\text{ N}$ , στηρίζεται σε κατακόρυφο τοίχο με άρθρωση, ενώ στο άλλο άκρο της είναι δεμένο νήμα, το οποίο συγκρατεί σώμα βάρους  $w=400\text{ N}$  με τη βοήθεια τροχαλίας. Ένα παιδί βάρους  $w_1=300\text{ N}$ , στέκεται πάνω στη δοκό σε απόσταση  $x$  από την άρθρωση, έτσι ώστε η δοκός να ισορροπεί οριζόντια και το νήμα να σχηματίζει γωνία  $\varphi=30^\circ$  με τον κατά μήκος άξονα της δοκού, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α. Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό

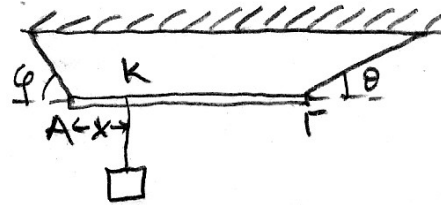
β. Να εκφράσετε τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούν στη δοκό τα στηρίγματα, σε συνάρτηση με την απόσταση  $x$ .

γ. Να γράψετε τις συνθήκες ισορροπίας της δοκού

δ. Να προσδιορίσετε το μέτρο και την κατεύθυνση της δύναμης που ασκεί η άρθρωση στη δοκό

ε. Να υπολογίσετε την απόσταση  $x$ .

4. Ράβδος ΑΓ έχει μήκος  $\ell=2\text{m}$  και αμελητέο βάρος. Η Ράβδος ισορροπεί οριζόντια με τη βοήθεια δυο σχοινιών, τα οποία είναι δεμένα στα άκρα της και σχηματίζουν με τη ράβδο γωνίες  $\phi=60^\circ$  και  $\theta=30^\circ$ , αντίστοιχα. Σε απόσταση  $x$  από το άκρο Α κρέμεται με αβαρές σχοινί σώμα βάρους  $w$ , όπως φαίνεται στο σχήμα.

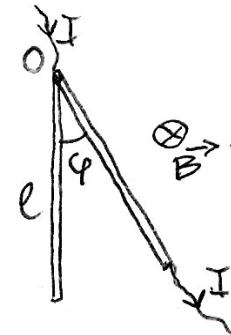


α. Να βρείτε τη σχέση των μέτρων των τάσεων των δυο σχοινιών.

β. Να υπολογίσετε την απόσταση  $x$ .

$$\left( \frac{\sqrt{3}}{1}, \dots, 0,5 \text{ m} \right) dm$$

5. Ομογενές ευθύγραμμο σύρμα μήκους  $\ell=20\text{cm}$  και βάρους  $w=0,5\text{N}$ , μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το ένα άκρο του και είναι κάθετος στο σύρμα όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σύρμα βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, του οποίου η ένταση έχει μέτρο  $B=0,5\text{T}$  και διεύθυνση παράλληλη προς τον άξονα περιστροφής του σύρματος. Όταν το σύρμα τροφοδοτείται με ρεύμα έντασης  $I$ , εκτρέπεται από την κατακόρυφη θέση ισορροπίας του και σχηματίζει γωνία  $\phi=30^\circ$  με την κατακόρυφη διεύθυνση.



α. Να υπολογίσετε την τιμή της έντασης  $I$  του ρεύματος.

β. Να προσδιορίσετε την κατεύθυνση και το μέτρο της δύναμης που ασκεί ο άξονας περιστροφής στο σύρμα.

$$\left( 2,5 A, \dots, \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ N} \right) dm$$

6. Ομογενής σκάλα, μήκους  $\ell=5\text{m}$  και βάρους  $w=100\text{N}$ , ισορροπεί στηριζόμενη σε ένα μη λείο οριζόντιο δάπεδο και σε ένα λείο κατακόρυφο τοίχο όπως φαίνεται στο σχήμα. Η μέγιστη απόσταση στην οποία μπορεί να βρίσκεται η βάση της σκάλας από τον τοίχο, χωρίς να ολισθήσει είναι  $x_{\text{max}}=4\text{m}$ .



α. Να υπολογίσετε το συντελεστή στατικής τριβής της σκάλας με το δάπεδο.

β. Όταν η βάση της σκάλας βρίσκεται σε απόσταση  $x=3\text{m}$  από τον τοίχο, να υπολογίσετε το μέγιστο βάρος που μπορεί να τοποθετηθεί οπουδήποτε πάνω στη σκάλα χωρίς να προκαλέσει την ολίσθηση της.

$$\left( \frac{2}{3}, \dots, 350 \text{ N} \right) dm$$

7. Ομογενής σκάλα βάρους  $w$  στηρίζεται σε οριζόντιο έδαφος και σε κατακόρυφο τοίχο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το κατώτερο άκρο της σκάλας απέχει από τον τοίχο απόσταση  $L=2\text{m}$ , ενώ το ανώτερο άκρο της βρίσκεται σε ύψος  $H=5\text{m}$  από το έδαφος.

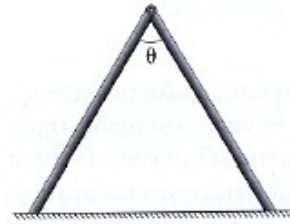
α. Ποια πρέπει να είναι η ελάχιστη τιμή  $\mu_{s(\text{min})}$  του συντελεστή στατικής τριβής της σκάλας με το έδαφος, ώστε η σκάλα να μην ολισθήσει;



β. Αν ο συντελεστής στατικής τριβής της σκάλας με το έδαφος είναι  $\mu_s = \frac{5}{3} \mu_{s(\min)}$ , σε ποια οριζόντια απόσταση  $x$  μπορεί ένα παιδί βάρους  $2w$  να κινηθεί, ανεβαίνοντας τη σκάλα, χωρίς αυτή να ολισθήσει;

$$(0,2, \dots, 2m)$$

8. Δυο πανομοιότυπες ράβδοι, του ίδιου μήκους και του ίδιου βάρους  $w = 24 N$ , συνδέονται στο ένα άκρο τους με άρθρωση, χωρίς τριβές, και τοποθετούνται με τα ελεύθερα άκρα τους πάνω σε οριζόντιο επίπεδο όπως φαίνεται στο σχήμα. Όταν η γωνία των δυο ράβδων είναι  $\theta = 60^\circ$ , οι δυο ράβδοι είναι έτοιμες να ολισθήσουν.



α. Να προσδιορίσετε τη διεύθυνση της δύναμης που ασκεί η μια Ράβδος στην άλλη, στο κοινό τους άκρο.

β. Να υπολογίσετε το συντελεστή οριακής στατικής τριβής κάθε μιας από τις δυο ράβδους με το οριζόντιο επίπεδο.

γ. Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης που ασκεί η μια Ράβδος στην άλλη.

$$\left( \frac{\sqrt{3}}{6}, \dots, 4\sqrt{3} N \right) dm$$

9. Τέσσερα σώματα αμελητέων διαστάσεων, το καθένα μάζας  $m$ , βρίσκονται στις κορυφές ενός τετραγώνου, το οποίο σχηματίζεται από τέσσερις αβαρείς ράβδους, η κάθε μια μήκους  $\ell$ .

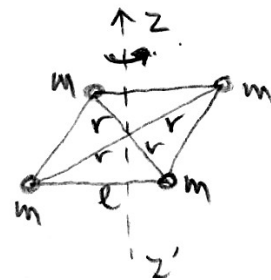
Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του συστήματος, όταν αυτό στρέφεται

α. Γύρω από άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο του τετραγώνου και διέρχεται από το κέντρο του

β. Γύρω από άξονα που ταυτίζεται με μια πλευρά του τετραγώνου

γ. Γύρω από άξονα που ταυτίζεται με μια διαγώνιο του τετραγώνου

δ. Σε ποια περίπτωση είναι πιο εύκολο να θέσουμε το σύστημα σε περιστροφή με γωνιακή ταχύτητα  $\omega$ ;



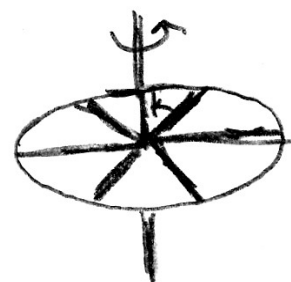
$$[ 2m\ell^2, \dots, 2m\ell^2, \dots, m\ell^2 ] dm$$

10. Ένας τροχός αποτελείται από μια λεπτή στεφάνη, ακτίνας  $R = 0,5 m$  και μάζας  $M = 8 kg$ , και από έξι λεπτές ακτίνες, μήκους  $\ell = 0,5 m$  και μάζας  $m = 0,6 kg$  η κάθε μια, συμμετρικά τοποθετημένες. Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του τροχού και είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζει ο τροχός;

α. Της κυκλικής στεφάνης

β. Κάθε ακτίνας

γ. Του τροχού συνολικά



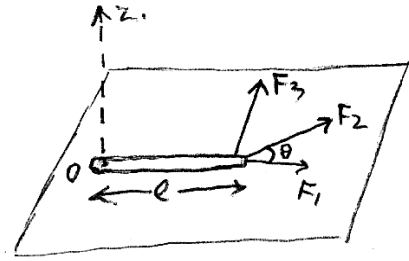
Να θεωρήσετε ότι το πάχος της στεφάνης είναι αμελητέο σε σχέση με την ακτίνα της και ότι κάθε ακτίνα του τροχού είναι μια λεπτή ράβδος. Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας μιας λεπτής ράβδου μάζας  $m$  και μήκους  $\ell$ , ως προς άξονα που διέρχεται από το μέσο της και είναι κάθετος σ' αυτήν είναι ίση με  $I_{cm} = \frac{1}{12} m\ell^2$

$$[ 2, \dots, 0,05, \dots, 2,3 ] dm$$

11. Οι δυνάμεις  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  και  $F_3$  που ασκούνται στη ράβδο του σχήματος έχουν μέτρο  $F_1=4N, F_2=6N$  και  $F_3=8N$  αντίστοιχα. Αν είναι  $\ell=10m$  και  $\theta=30^\circ$ , να βρείτε:

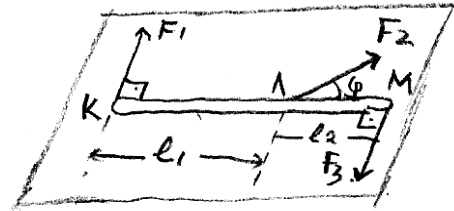
α. Τη ροπή κάθε δύναμης ως προς το σημείο Ο

β. Τη συνολική ροπή των δυνάμεων ως προς το σημείο Ο.



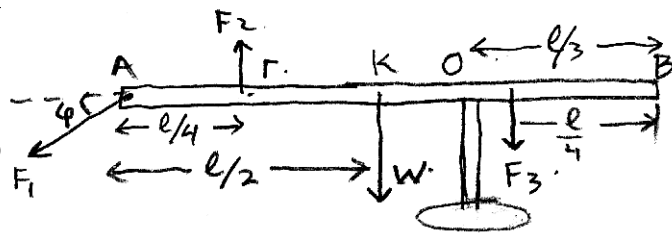
(0,,, 30 Nm,,, 80 Nm,,, 110 Nm)

12. Στη ράβδο ΚΜ του σχήματος ασκούνται οι ομοεπιπεδες δυνάμεις του σχήματος με μέτρο  $F_1=F_2=F_3=10N$ . Αν είναι  $\ell_1=10m, \ell_2=8m$  και  $\varphi=30^\circ$ , να βρείτε τη συνολική ροπή ως προς τα σημεία Λ και Κ.



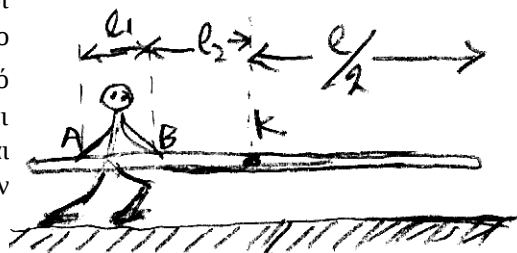
(-180 Nm,,, -130 Nm)

13. Η ομογενής ράβδος ΑΒ του σχήματος έχει μήκος  $\ell=12m$ , βάρος  $w=100N$  ασκούνται οι δυνάμεις  $F_1=50N, F_2=40N$  και  $F_3=30N$  αντίστοιχα. Αν  $\varphi=30^\circ$ , να υπολογίσετε το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων

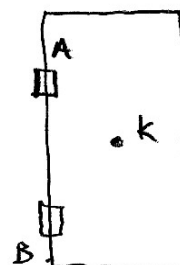


(170 Nm)

14. Ένας άλτης του άλματος επί κοντώ κρατάει το κοντάρι οριζόντια, ασκώντας σ' αυτό μια κατακόρυφη δύναμη  $F_A$ , με το δεξί του χέρι και μια κατακόρυφη δύναμη  $F_B$  με το αριστερό του χέρι, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το κοντάρι, που είναι κατασκευασμένο από ομογενές υλικό, έχει μήκος  $\ell=6m$  και βάρος  $w=30N$ . Να υπολογίσετε τα μέτρα των δυνάμεων  $F_A$  και  $F_B$ . Δίνεται ότι:  $\ell_1=0,75m$  και  $\ell_2=1,5m$

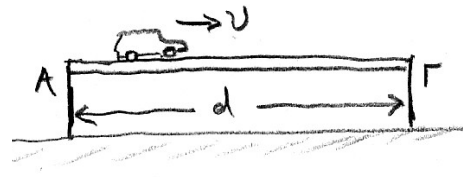


15. Ομογενής πόρτα μάζας  $m=80kg$ , πλάτους  $\beta=1m$  και ύψους  $\alpha=2m$ , υποβαστάζεται από δυο μεντεσέδες, οι οποίοι απέχουν  $\frac{\alpha}{4}$  από την πάνω και την κάτω πλευρά της πόρτας αντίστοιχα. Η πόρτα δέχεται δύναμη από τον πάνω μεντεσέ η οποία είναι κάθετη προς τον τοίχο. Να βρείτε τις δυνάμεις που ασκούν οι μεντεσέδες στην πόρτα. Δίνεται  $g=10m/sec^2$ .



(400N,  $400\sqrt{5}$  N,  $\epsilon\phi\theta=2$ )

16. Μια γέφυρα στηρίζεται στα σημεία A και Γ που απέχουν  $d=40\text{ m}$  και έχει βάρος  $w=10^6\text{ N}$ . Τη χρονική στιγμή  $t=0$  περνά όχημα βάρους  $w_1=2\cdot 10^5\text{ N}$  από το σημείο A της γέφυρας και με φορά από το A προς το Γ με σταθερή ταχύτητα μέτρου  $u=10\text{ m/s}$ .



α. Να βρείτε τις σχέσεις που δίνουν το μέτρο των δυνάμεων που δέχεται η γέφυρα στα σημεία A και Γ, σε συνάρτηση με τον χρόνο κίνησης του οχήματος πάνω στη γέφυρα.

β. Να κάνετε στο ίδιο διάγραμμα τις γραφικές παραστάσεις των  $F_A$  και  $F_\Gamma$  σε συνάρτηση με τον χρόνο. Από το διάγραμμα να βρείτε ποια χρονική στιγμή είναι  $F_A=F_\Gamma$ .

( $F_\Gamma=10^4(50+5t)$ ,  $F_A=(70-5t)10^4$ , 2sec)

17. Στο κέντρο ομογενούς σφαίρας βάρους  $w=50\text{ N}$  και ακτίνας R δένεται το ένα άκρο σχοινιού και το άλλο άκρο στερεώνεται σε λείο κατακόρυφο τοίχο. Όταν η σφαίρα εφάπτεται στον τοίχο, το σχοινί σχηματίζει γωνία  $\phi=45^\circ$  με αυτόν. Να βρείτε την τάση του σχοινιού και τη δύναμη που δέχεται η σφαίρα από τον τοίχο.

( $50\sqrt{2}\text{ N}$ ,  $50\text{ N}$ )

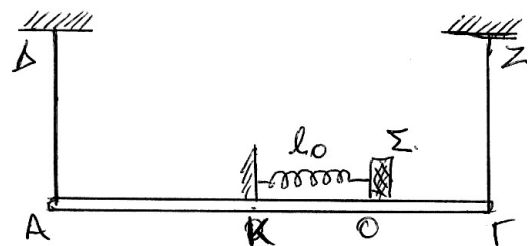
18. Σε σφαίρα μάζας  $0,6\text{ kg}$  και ακτίνας  $2,2\text{ cm}$  δένουμε ένα σχοινί, το άλλο άκρο του οποίου δένουμε σε λείο κατακόρυφο τοίχο με αποτέλεσμα η σφαίρα να εφάπτεται στον τοίχο σε ένα σημείο της και να ισορροπεί. Το σχοινί είναι αβαρές και έχει μήκος  $10\text{ cm}$ . Να βρείτε τη δύναμη που ασκεί ο τοίχος στη σφαίρα. Δίνεται  $g=10\text{ m/s}^2$

(1,1N)

19. Ένα ορθογώνιο κιβώτιο ύψους  $1\text{ m}$ , πλάτους  $0,8\text{ m}$  και μάζας  $40\text{ kg}$  βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο έδαφος και ολισθαίνει με τη βοήθεια μιας οριζόντιας δύναμης  $F$  που του ασκείται σε ύψος  $0,6\text{ m}$  από το έδαφος. Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της δύναμης  $F$ , ώστε το κιβώτιο να μην ανατρέπεται; Δίνεται ο συντελεστής τριβής μεταξύ κιβωτίου και δαπέδου είναι ίσος με  $\mu=0,2$  και η επιτάχυνση της βαρύτητας  $10\text{ m/s}^2$ .

(1200N)

20. Ομογενής σανίδα ΑΓ με μήκος  $L=2\text{ m}$  και βάρος  $w_1=60\text{ N}$  ισορροπεί οριζόντια. Τα άκρα A και Γ της σανίδας συνδέονται με τα ακλόνητα σημεία Δ και Ζ με δυο κατακόρυφα νήματα ΑΔ και ΓΖ όπως φαίνεται στο σχήμα. Πάνω στη σανίδα και σε απόσταση  $\ell_0=0,5\text{ m}$  από το μέσο της Κ βρίσκεται σώμα Σ βάρους  $w_2=20\text{ N}$ , το οποίο είναι στερεωμένο στο ένα άκρο οριζόντιου αβαρούς ελατηρίου σταθεράς  $K=800\text{ N/m}$ . Το άλλο άκρο του ελατηρίου στηρίζεται ακλόνητα σε κατακόρυφο αβαρές στέλεχος που βρίσκεται στο σημείο Κ της σανίδας. Αρχικά το σώμα είναι ακίνητο και το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος  $\ell_0=0,5\text{ m}$ .



α. Να υπολογίσετε τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούνται στη σανίδα από τα δυο νήματα.

Εκτρέπουμε το σώμα Σ από τη θέση ισορροπίας του κατά μήκος της σανίδας, κατά  $x_0=0,2\text{ m}$ , και το αφήνουμε ελεύθερο.

β. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ από τη θέση ισορροπίας του, σε συνάρτηση με το χρόνο. Να θεωρήσετε ως αρχή των χρόνων τη χρονική στιγμή που το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του και κινείται κατά τη θετική φορά

γ. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ, τη χρονική στιγμή που το μέτρο της δύναμης που ασκείται στη σανίδα από το νήμα στο άκρο Γ είναι  $T_2 = 46 \text{ N}$ .

δ. Να παραστήσετε γραφικά το μέτρο της δύναμης που ασκείται στη σανίδα από το νήμα στο άκρο της Α, σε συνάρτηση με το χρόνο.

Να θεωρήσετε ότι τα δυο νήματα παραμένουν συνεχώς κατακόρυφα και ότι δεν υπάρχουν τριβές. Δίνεται  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

$$[T_1 = 35 \text{ N} \text{ ,, } T_2 = 45 \text{ N} \text{ ,, } x = 0,2 \eta \mu 20 t \text{ ,, } |u| = 2\sqrt{3} \text{ m/s} \text{ ,, } T_1 = 35 - 2 \eta \mu 20 t]$$

21. Σφαίρα μάζας  $m = 7 \text{ kg}$  και ακτίνας  $R = 0,2 \text{ m}$  αφήνεται ελεύθερη σε σημείο Α κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης  $\phi = 30^\circ$ . Η σφαίρα κυλιέται χωρίς ολίσθηση κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου. Το σημείο Α βρίσκεται σε ύψος  $h = 3,5 \text{ m}$  από το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου. Να υπολογίσετε :

A1) Την επιτάχυνση του κέντρου μάζας της σφαίρας κατά τη διάρκεια της καθόδου της.

A2) Την ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας στη βάση του κε κλιμένου επιπέδου

A3) Το μέτρο της στατικής τριβής μεταξύ σφαίρας και κεκλιμένου επιπέδου. Για ποιες τιμές του συντελεστή στατικής τριβής αποφεύγεται η ολίσθηση της σφαίρας στο κεκλιμένο επίπεδο;

A4) Ποια η διάρκεια της καθόδου της σφαίρας και πόσες στροφές κάνει η σφαίρα κατά την κάθοδό της;

Δίνονται : η επιτάχυνση της βαρύτητας  $g = 10 \text{ m/s}^2$  και η ροπή αδράνειας της σφαίρας  $I_{cm} = \frac{2}{5} mR^2$ .

22. Ένα γιο-γιο αποτελείται από κύλινδρο μάζας  $m = 0,3 \text{ kg}$  και ακτίνας

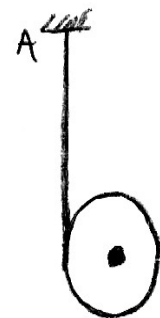
$R = 0,1 \text{ m}$ , γύρω από τον οποίο είναι τυλιγμένο αβαρές νήμα. Κρατάμε ακίνητο το ελεύθερο άκρο Α του νήματος και αφήνουμε τον κύλινδρο ελεύθερο. Να βρείτε:

α. Τη γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου.

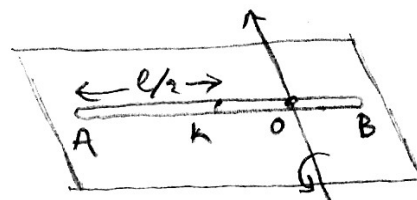
β. Τον ρυθμό αύξησης της στροφορμής του κυλίνδρου.

γ. Την ταχύτητα του άξονα του κυλίνδρου τη στιγμή που έχει ξετυλιχτεί νήμα μήκους  $\ell = 30 \text{ m}$ .

Δίνεται  $I_{cm} = \frac{1}{2} mR^2$  και  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .



23. Οριζόντια ομογενής ράβδος ΑΒ μήκους  $L = 1 \text{ m}$  και μάζας  $m = 0,6 \text{ kg}$  μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από σημείο της Ο που απέχει από το άκρο της Β απόσταση  $L/4$ . Την χρονική στιγμή μηδέν που η ράβδος είναι οριζόντια την αφήνουμε ελεύθερη να περιστραφεί. Την στιγμή μηδέν να βρείτε:



α. Την αρχική γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου

β. Την δύναμη που ασκεί η ράβδος στον άξονα περιστροφής της.

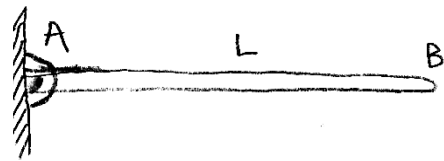
Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της Κ και είναι κάθετος σε αυτήν είναι  $I_{cm} = \frac{1}{12} mL^2$  και  $g = 10 \text{ m/sec}^2$ .

$$\left( \frac{120}{7} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}, \frac{24}{7} \text{N} \right)$$

24. Κατακόρυφη ομογενής ράβδος AB μήκους  $\ell = 1\text{m}$ , μπορεί να περιστραφεί γύρω από οριζόντιο άξονα κάθετο στη ράβδο ο οποίος περνά από σημείο O της ράβδου για το οποίο ισχύει  $OA = \frac{\ell}{3}$ . Απομακρύνουμε τη ράβδο από την κατακόρυφη θέση της κατά γωνία  $\phi = 30^\circ$  και τη στιγμή  $t=0$  την αφήνουμε ελεύθερη. Να βρείτε την στιγμή  $t=0$  την γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου.

Η ροπή αδράνειας ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος σ' αυτή είναι  $I_{cm} = \frac{1}{12} ML^2$  και η επιτάχυνση της βαρύτητας  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

25. Μια λεπτή ομογενής ράβδος AB, μάζας  $M = 10 \text{ kg}$  και μήκους  $L = 2\text{m}$ , μπορεί να στρέφεται περί οριζόντιο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το άκρο της A. Η ράβδος, που αρχικά συγκρατείται σε οριζόντια θέση, αφήνεται ελεύθερη να περιστραφεί περί τον άξονα περιστροφής της.



A. Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της.

B. Τη στιγμή που η ράβδος αφήνεται ελεύθερη, να υπολογίσετε

α. Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της ράβδου.

β. Το μέτρο της γραμμικής επιτάχυνσης του κέντρου μάζας της ράβδου.

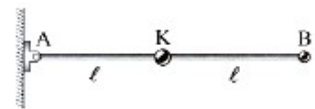
γ. Το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος από τον άξονα περιστροφής.

Γ. Να βρείτε το ρυθμό αύξησης της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου τη στιγμή που αυτή σχηματίζει γωνία  $\phi = 60^\circ$  με την αρχική της θέση.

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος σ' αυτή είναι  $I_{cm} = \frac{1}{12} ML^2$  και η επιτάχυνση της βαρύτητας  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

$$\left[ \frac{40}{3} \text{ kg/m}^2, \frac{15}{2} \text{ rad/s}^2, \frac{15}{2} \text{ m/s}^2, 25 \text{ N} \right]$$

26. Αβαρής ράβδος AB μήκους  $2\ell$ , μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο A. Δυο σφαίρες αμελητέων διαστάσεων είναι στερεωμένες επάνω στη ράβδο. Η μια σφαίρα, μάζας  $2m$ , βρίσκεται στο μέσον K της ράβδου, ενώ η άλλη, μάζας  $m$ , βρίσκεται στο άκρο B. Αφήνουμε τη ράβδο ελεύθερη από οριζόντια θέση.



A. Ποια είναι η ροπή αδράνειας του συστήματος, ως προς τον άξονα περιστροφής της ράβδου;

B. Ποιο είναι το είδος της κίνησης της ράβδου; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Γ. Ποιο είναι το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της ράβδου:

α. Την στιγμή που αφήνεται ελεύθερη

β. Τη στιγμή που γίνεται κατακόρυφη. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας  $g$

$$\left[ 6 m\ell^2, \frac{2g}{3\ell}, 0 \right] dm$$

27. Μια λεπτή ομογενής ράβδος  $AB$ , μάζας  $M$  και μήκους  $L$ , μπορεί να στρέφεται περί οριζόντιο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το άκρο  $A$ . Η ράβδος, που αρχικά συγκρατείται σε οριζόντια θέση, αφήνεται ελεύθερη να περιστραφεί περί τον άξονα περιστροφής της.

A. Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της

B. Τη στιγμή που η ράβδος αφήνεται ελεύθερη, να υπολογίσετε:

α. Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της ράβδου

β. Το μέτρο της γραμμικής επιτάχυνσης του κέντρου μάζας της ράβδου

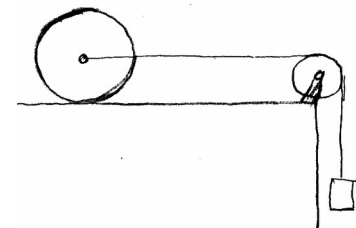
γ. Το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος από τον άξονα περιστροφής της.

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας και είναι κάθετος σ' αυτή είναι

$$I_{cm} = \frac{1}{12} mL^2 \text{ και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι } g .$$

$$\left[ \frac{1}{3} M\ell^2, \frac{3g}{2\ell}, \frac{Mg}{4} \right] dm$$

28. Η τροχαλία του σχήματος περιστρέφεται χωρίς τριβές, ενώ το σχοινί είναι αβαρές και δεν γλιστρά στο αυλάκι της. Στο ένα άκρο του σχοινιού είναι δεμένο σώμα μάζας  $m_1 = m$ , ενώ το άλλο είναι δεμένο στο κέντρο δίσκου μάζας  $m_2 = m$  και ακτίνας  $R = 2r$ , ο οποίος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει στο οριζόντιο επίπεδο.

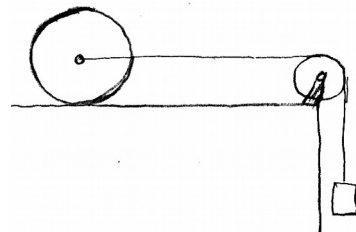


α. Να βρείτε την επιτάχυνση του σώματος μάζας  $m_1$ .

β. Να συγκρίνεται τις γωνιακές επιταχύνσεις του δίσκου και της τροχαλίας. Δίνονται: για το δίσκο

$$I_{cm(\delta)} = \frac{1}{2} m_2 R^2, \text{ για την τροχαλία } I_{cm(tp)} = \frac{1}{2} mr^2 \text{ και } g = 10 \frac{m}{s^2} .$$

29. Ο άξονας ενός κυλίνδρου μάζας  $M = 4 \text{ kg}$  και ακτίνας  $R = 0,3 \text{ m}$  που βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο είναι δεμένος μέσω νήματος με σώμα μάζας  $m_1 = 3 \text{ kg}$ . Το νήμα είναι περασμένο μέσα από το αυλάκι τροχαλίας μάζας  $m = 2 \text{ kg}$  και ακτίνας  $r = 0,1 \text{ m}$  που βρίσκεται στο άκρο του οριζοντίου επιπέδου. Αν αφήσουμε το σώμα ελεύθερο τότε αυτό κινείται κατακόρυφα και αναγκάζει τον κύλινδρο να κυλήσει χωρίς να ολισθαίνει στο οριζόντιο επίπεδο. Να βρεθούν:



α. Η επιτάχυνση του σώματος  $m_1$

β. Η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας

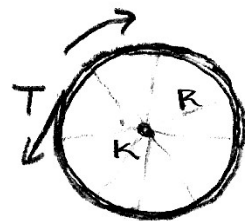
γ. Η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου

δ. Τη δύναμη της στατικής τριβής ανάμεσα στον κύλινδρο και το οριζόντιο επίπεδο

Δίνονται για την τροχαλία  $I_{cm} = \frac{1}{2} mr^2$ , για τον κύλινδρο  $I_{cm} = \frac{1}{2} mR^2$  και  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

3m/s<sup>2</sup> 30rad/s<sup>2</sup> 10rad/s<sup>2</sup> 6N.

30. Ο τροχός ενός ποδηλάτου, μάζας  $m = 4 \text{ kg}$  και ακτίνας  $R = 0,5 \text{ m}$  δεν είναι σε επαφή με το έδαφος και περιστρέφεται γύρω από τον οριζόντιο άξονα του με συχνότητα  $f_0 = 2 \text{ Hz}$ . Με εφαρμογή των φρένων ο τροχός σταματά σε χρόνο  $\Delta t = \pi \text{ sec}$ . Αν το φρένο έρχεται σε επαφή με τον τροχό μόνο από τη μια πλευρά του και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης στην επιφάνεια επαφής τροχού φρένου είναι  $\mu = 0,2$  να βρείτε:



α. Τη μέση γωνιακή επιβράδυνση του τροχού



β. Τον αριθμό των στροφών που κάνει ο τροχός μέχρι να σταματήσει

γ. Την κάθετη δύναμη που ασκεί το φρένο στον τροχό

Δίνεται ότι η ροπή αδρανείας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι ίση με  $I_K = mR^2$ .

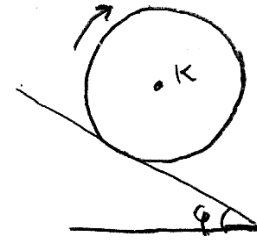
31. Ομογενής κύλινδρος μάζας  $m = 2 \text{ kg}$  αφήνεται από την κορυφή κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης  $\phi = 30^\circ$  και ύψους  $h = 30 \text{ m}$ . Αν ο κύλινδρος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει, να βρείτε:

A. την επιτάχυνση του άξονα του κυλίνδρου

B. την στατική τριβή που δέχεται ο κύλινδρος από το κεκλιμένο επίπεδο

Γ. την ταχύτητα του άξονα του κυλίνδρου όταν ο κύλινδρος φτάνει στη βάση του

κεκλιμένου επιπέδου Δίνονται  $I_{cm} = \frac{1}{2} mR^2$  και  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .



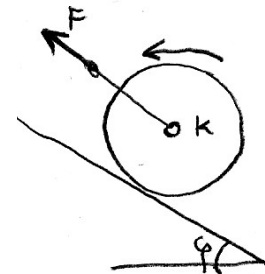
$$\frac{10}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \frac{10}{3} \text{ N} \quad 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

32. Κύλινδρος μάζας  $m = 4 \text{ kg}$  και ακτίνας  $R = 0,2 \text{ m}$  ανεβαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας  $\phi = 30^\circ$  χωρίς να ολισθαίνει με τη βοήθεια σταθερής δύναμης  $F$  που ασκείται στον άξονα του κυλίνδρου παράλληλα προς το κεκλιμένο επίπεδο με φορά προς τα πάνω όπως φαίνεται στο σχηματίζει. Αν η επιτάχυνση με την οποία κινείται ο άξονας του κυλίνδρου είναι  $a_{cm} = 4 \text{ m/s}^2$ , να βρείτε:

A. Τη δύναμη  $F$  που ασκείται στον κύλινδρο

B. Τη στατική τριβή

Γ. Τη γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου. Δίνεται  $I_{cm} = \frac{1}{2} mR^2$  και  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .



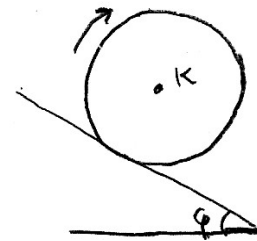
$$44 \text{ N}, \quad 8 \text{ N}, \quad 20 \text{ rad/s}^2$$

33. Κύλινδρος μάζας  $m$  και ακτίνας  $R$  κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης  $\phi = 30^\circ$ . Να βρείτε:

α. Την επιτάχυνση των σημείων του άξονα του κυλίνδρου

β. Την ταχύτητα του άξονα του κυλίνδρου όταν ο κύλινδρος θα έχει διανύσει διάστημα  $x = 60 \text{ m}$  πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο, ξεκινώντας από την ηρεμία.

Δίνονται  $I_{cm} = \frac{1}{2} mR^2$   $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$   $6.19/128$



$$\left[ \frac{10}{3}, \dots, 20 \right]$$

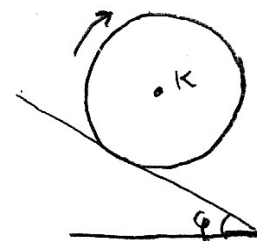
34. Ομογενής κύλινδρος μάζας  $m = 2 \text{ kg}$  αφήνεται από την κορυφή κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης  $\phi = 30^\circ$  και ύψους  $h = 30 \text{ m}$ . Αν ο κύλινδρος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει, να βρείτε:

α. την επιτάχυνση του άξονα του κυλίνδρου

β. την στατική τριβή που δέχεται ο κύλινδρος από το κεκλιμένο επίπεδο

γ. την ταχύτητα του άξονα του κυλίνδρου όταν ο κύλινδρος φτάνει στη βάση του

κεκλιμένου επιπέδου Δίνονται  $I_{cm} = \frac{1}{2} mR^2$  και  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .



$$\left( \frac{10}{3} \frac{m}{s} \frac{10}{3} N \ 20 \frac{m}{s} \right)$$

35. Ομογενής κύλινδρος ακτίνας  $R=0,1m$  και μάζας  $m=10kg$ , περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα μέτρου  $\omega=100rad/sec$  γύρω από άξονα που συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας του. Εφαρμόζοντας σταθερή ροπή  $\vec{\tau}$  στον κύλινδρο, αυτός σταματά να περιστρέφεται μετά από χρόνο  $t=10sec$ . Να βρείτε:

α. Τη γωνιακή επιβράδυνση του κυλίνδρου

β. Τη σταθερή ροπή  $\vec{\tau}$ .

γ. Τη σχέση της γωνιακής ταχύτητας του κυλίνδρου με τον χρόνο και από το αντίστοιχο διάγραμμα να προσδιορίσετε τη συνολική γωνία στροφής του κυλίνδρου μέχρι να σταματήσει. Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα συμμετρίας του είναι  $I_{cm} = \frac{1}{2} mR^2$ .

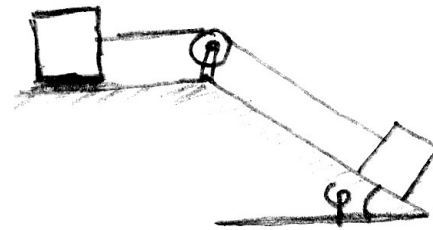
$$\left( 10 \frac{rad}{s^2}, \ 0,5 Nm, \ 500rad \right)$$

36. Η τροχαλία του σχήματος έχει μάζα  $M=4kg$  και ακτίνα  $R=0,1m$ . Τα σώματα έχουν μάζες  $m_1=2kg$  και  $m_2=4kg$  αντίστοιχα και είναι δεμένα στα άκρα αβαρούς σχοινιού που περνά από το αυλάκι της τροχαλίας. Αν τα επίπεδα είναι λεία,  $\varphi=30^\circ$  και αφήσουμε τα σώματα ελεύθερα να βρείτε:

α. τη γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας

β. τις τάσεις του σχοινιού

Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος σ' αυτήν είναι  $I_{cm} = \frac{1}{2} MR^2$  και  $g=10m/sec^2$ .

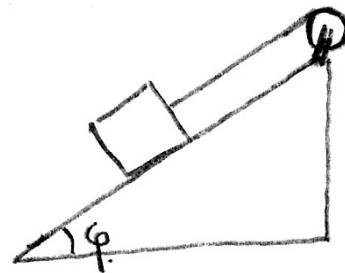


$$\left( 25 \frac{rad}{s^2}, \ 5N, \ 10N \right)$$

37. Τροχαλία ακτίνας  $R=0,1m$  και ροπής αδράνειας  $I_{cm}=0,06kg \ m^2$ , είναι στερεωμένη στην κορυφή κεκλιμένου επιπέδου γωνίας  $30^\circ$  που παρουσιάζει τριβές με συντελεστή τριβής  $\mu = \frac{\sqrt{3}}{5}$ . Στο αυλάκι της τροχαλίας είναι τυλιγμένο αβαρές σχοινί του οποίου η άκρη είναι δεμένη σε σώμα μάζας  $m=4kg$ . Το σώμα βρίσκεται πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο και συγκρατείται ακίνητο. Αν αφήσουμε το σώμα ελεύθερο τότε αυτό ολισθαίνει στο κεκλιμένο επίπεδο. Να βρείτε:

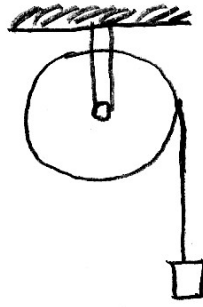
α. Την γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας

β. Την τάση του σχοινιού. Δίνεται  $g=10m/sec^2$ .



$$\left( 8 \frac{rad}{s^2}, \ 4,8N \right)$$

38. Τροχαλία ακτίνας  $R=0,1\text{m}$  και ροπής αδράνειας  $I=0,3\text{kg}\cdot\text{m}^2$  είναι στερεωμένη σε ταβάνι και στο αυλάκι της είναι τυλιγμένο αβαρές σχοινί. Στην άλλη άκρη του σχοινοῦ είναι δεμένο σώμα μάζας  $m=10\text{kg}$  το οποίο κρατάμε ακίνητο. Αφήνουμε το σώμα ελεύθερο και αυτό κατεβαίνει κατακόρυφα με επιτάχυνση μέτρου  $a=2\text{m}/\text{sec}^2$ .



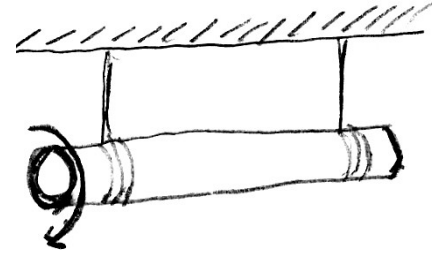
α. Να βρείτε τη ροπή που δέχεται ο άξονας περιστροφής της τροχαλίας λόγω τριβών

β. Ποια είναι η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας μετά από χρόνο  $t=10\text{sec}$ ;

γ. Πως μεταβάλλεται η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας με το χρόνο; Να κάνετε το αντίστοιχο διάγραμμα και από αυτό να βρείτε τη γωνία στροφής της τροχαλίας στον χρόνο των  $10\text{sec}$ . Δίνεται  $g=10\text{m}/\text{sec}^2$ .

$$(2\text{N}\cdot\text{m}, 200 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, 1000\text{rad})$$

39. Ομογενής και συμπαγής κύλινδρος μάζας  $m=6\text{kg}$  συγκρατείται σε οριζόντια θέση κρεμασμένος από δυο αβαρή σχοινιά που είναι τυλιγμένα γύρω του. Αν αφήσουμε τον κύλινδρο ελεύθερο να βρείτε:



α. Την τάση κάθε σχοινοῦ

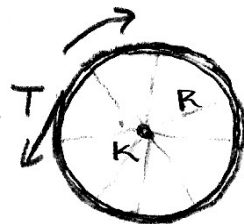
β. Τον χρόνο που χρειάζεται ο κύλινδρος για να κατεβεί κατά

$$h = \frac{40}{3} \text{ m} .$$

Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς άξονα περιστροφής που συμπίπτει με τον γεωμετρικό του άξονα είναι  $I_{\text{cm}} = \frac{1}{2} MR^2$  όπου  $R$  η ακτίνα του και  $g=10\text{m}/\text{sec}^2$ .

$$(10\text{N}, 2\text{s})$$

40. Ο τροχός ενός ποδηλάτου, μάζας  $m=4\text{kg}$  και ακτίνας  $R=0,5\text{m}$  δεν είναι σε επαφή με το έδαφος και περιστρέφεται γύρω από τον οριζόντιο άξονα του με συχνότητα  $f_0=2\text{Hz}$ . Με εφαρμογή των φρένων ο τροχός σταματά σε χρόνο  $\Delta t=\pi \text{ sec}$ . Αν το φρένο έρχεται σε επαφή με τον τροχό μόνο από τη μια πλευρά του και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης στην επιφάνεια επαφής τροχού φρένου είναι  $\mu=0,2$  να βρείτε:



α. Τη μέση γωνιακή επιβράδυνση του τροχού

β. Τον αριθμό των στροφών που κάνει ο τροχός μέχρι να σταματήσει

γ. Την κάθετη δύναμη που ασκεί το φρένο στον τροχό

Δίνεται ότι η ροπή αδρανείας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι ίση με  $I(K)=mR^2$ .

$$(4 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}, \pi \text{ στροφές}, 40\text{N})$$

41. Ένας τροχός μπορεί να στρέφεται γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδο του. Μια σταθερή ροπή μέτρου  $\tau_1=30\text{Nm}$  ασκείται στον τροχό για χρόνο  $\Delta t_1=10\text{s}$ , οπότε το μέτρο της γωνιακής του ταχύτητας αυξάνεται από  $\omega_0=0$  σε  $\omega_1=200\text{rad}/\text{sec}$ . Στη συνέχεια παύει να δρα η ροπή  $\tau_1$  και ο τροχός περιστρέφεται με επιβράδυνση υπό την επίδραση της ροπής της τριβής του με τον άξονα περιστροφής και σταματά μετά από χρόνο  $\Delta t_2=20\text{s}$ . Να βρείτε:

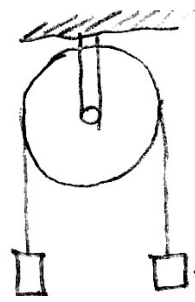
α. Τη ροπή αδρανείας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του

β. Τη ροπή της τριβής αν τη θεωρήσουμε σταθερή

γ. Τον συνολικό αριθμό των περιστροφών του τροχού.

$$(1\text{kg}\cdot\text{m}^2, 10\text{Nm}, \frac{1500}{\pi} \text{ στροφές})$$

42. Στα ελεύθερα άκρα αβαρούς νήματος το οποίο περνά από το αυλάκι τροχαλίας στερεωμένης στο ταβάνι είναι δεμένα δυο σώματα μάζας  $m_1=1\text{kg}$  και  $m_2=2\text{kg}$  αντίστοιχα. Το σύστημα είναι αρχικά ακίνητο, η μάζα της τροχαλίας είναι  $M=4\text{kg}$  και η ακτίνα της  $R=0,2\text{m}$ . Αν αφήσουμε τα σώματα ελεύθερα, να βρείτε:



α. Την επιτάχυνση των σωμάτων

β. Τη ροπή που δέχεται η τροχαλία

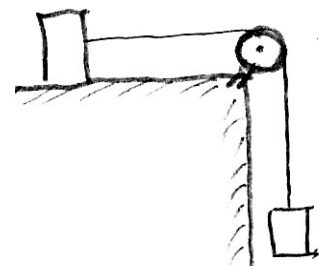
γ. Τις τάσεις του σχοινιού

δ. μετά πόσο χρόνο τα σώματα θα απέχουν μεταξύ τους απόσταση  $d=8\text{m}$  αν αρχικά ήταν στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο;

Δίνεται ότι η ροπή αδρανείας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι  $I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$  και  $g=10\text{m/sec}^2$ . Τριβές δεν υπάρχουν και το σχοινί δεν γλιστρά στο αυλάκι της τροχαλίας.

$$\left( 2 \frac{m}{s^2}, 0,8 Nm, 12N, 16N, 2s \right)$$

43. Σώμα μάζας  $m_1=5\text{kg}$  βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο, με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης  $\mu=0,2$ . Το σώμα είναι δεμένο με αβαρές νήμα το οποίο περνά από το αυλάκι τροχαλίας και στο άλλο άκρο του νήματος είναι δεμένο σώμα μάζας  $m_2=4\text{kg}$  το οποίο κρέμεται και μπορεί να κινηθεί κατακόρυφα αν αφεθεί ελεύθερο. Αφήνουμε το δεύτερο σώμα ελεύθερο. Να βρεθούν:



α. Η επιτάχυνση κάθε σώματος

β. Οι τάσεις του νήματος

Δίνονται: μάζα τροχαλίας  $M=2\text{kg}$  και ροπή αδρανείας τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της  $I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$ . Επίσης  $g=10\text{m/sec}^2$ .

$$\left( 3 \frac{m}{s^2}, 25N, 28N \right)$$

44. Ομογενής ράβδος μήκους  $L=1\text{m}$  και μάζας  $M=0,3\text{kg}$ , είναι οριζόντια και μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το άκρο της  $O$ . Στο άλλο άκρο  $A$  της ράβδου είναι στερεωμένη σφαίρα αμελητέων διαστάσεων, μάζας  $m=0,1\text{kg}$ .

α. Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του συστήματος, ως προς άξονα περιστροφής της ράβδου

Το σύστημα τίθεται σε περιστροφή με γωνιακή ταχύτητα μέτρου  $\omega_1=20 \frac{rad}{sec}$ , γύρω από τον άξονα περιστροφής της ράβδου

β. Να υπολογίσετε το μέτρο της σταθερής ροπής που πρέπει να ασκηθεί στο σύστημα, ώστε σε χρόνο  $\Delta t=2\text{sec}$  το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του να γίνει  $\omega_2=10 \frac{rad}{sec}$

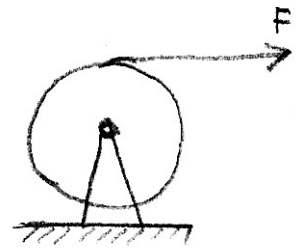
γ. Αν η ροπή δημιουργείται με την επίδραση μιας οριζόντιας δύναμης σταθερού μέτρου, η οποία είναι κάθετη στον κατά μήκος άξονα της ράβδου, ποια είναι η ελάχιστη τιμή του μέτρου της δύναμης αυτής;

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο της μάζας της ράβδου είναι

$$I_{cm} = \frac{1}{12}mL^2.$$

$$[ 0,2, \dots, 1, \dots, 1 ]$$

45. Μια ομογενής τροχαλία, μάζας  $m=8\text{ kg}$  και ακτίνας  $R=0,2\text{ m}$ , μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από τον άξονα της, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο της και είναι κάθετος στο επίπεδο της. Γύρω από την τροχαλία είναι τυλιγμένο ένα λεπτό αβαρές σχοινί. Ασκώντας στο σχοινί σταθερή δύναμη μέτρου  $F=16\text{ N}$ , η τροχαλία αρχίζει να περιστρέφεται τη χρονική στιγμή  $t=0$ . Να υπολογίσετε:



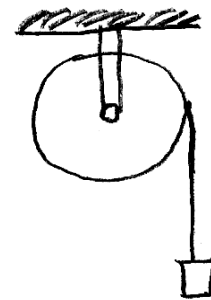
α. Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της τροχαλίας

β. Τη γωνία κατά την οποία έχει περιστραφεί η τροχαλία μέχρι τη χρονική στιγμή  $t=3\text{ sec}$

γ. Το μήκος του σχοινοῦ που έχει ξετυλιχθεί μέχρι τη χρονική στιγμή  $t=3\text{ sec}$ . Δίνεται η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα της  $I=\frac{1}{2}mR^2$

[ 20,,90,,18] dm

46. Η τροχαλία του σχήματος είναι ομογενής, μάζας  $M=4\text{ kg}$  και ακτίνας  $R=0,2\text{ m}$ , και μπορεί να στρέφεται γύρω από τον άξονα της χωρίς τριβές. Το σώμα  $\Sigma$  έχει μάζα  $m=2\text{ kg}$  και είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο αβαρούς και μη εκτατού σχοινοῦ, το οποίο είναι τυλιγμένο στην περιφέρεια της τροχαλίας. Αν το σώμα  $\Sigma$  αφηθεί από την ηρεμία, να υπολογίσετε:



α. Το μέτρο της επιτάχυνσης με την οποία θα κινηθεί το σώμα  $\Sigma$

β. Το μέτρο της τάσης του σχοινοῦ

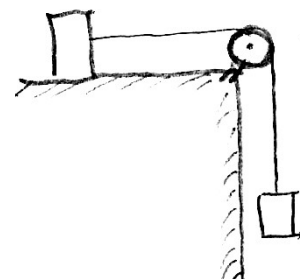
γ. Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της τροχαλίας τη στιγμή που το σώμα θα έχει κατέλθει κατά  $h=10\text{ m}$ .

Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι  $I=\frac{1}{2}MR^2$  και η επιτάχυνση της

βαρύτητας είναι  $g=10\frac{m}{\text{sec}^2}$ . Να θεωρηθεί ότι μεταξύ σχοινοῦ και τροχαλίας δεν παρατηρείται ολίσθηση.

[ 5,,10,,50]

47. Ένα σώμα  $\Sigma_1$ , μάζας  $m_1=2\text{ kg}$ , ηρεμεί πάνω σε οριζόντιο επίπεδο, με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης  $\mu=0,5$ . Το σώμα  $\Sigma_1$  είναι δεμένο στο άκρο αβαρούς νήματος που περνά από το αυλάκι μιας τροχαλίας, ακτίνας  $R=10\text{ cm}$  και μάζας  $M=2\text{ kg}$ . Στο άλλο άκρο του νήματος είναι δεμένο σώμα  $\Sigma_2$ , μάζας  $m_2=3\text{ kg}$ . Αν αφήσουμε το σύστημα ελεύθερο να κινηθεί, να βρείτε:



α. Το μέτρο της επιτάχυνσης κάθε σώματος

β. Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της τροχαλίας

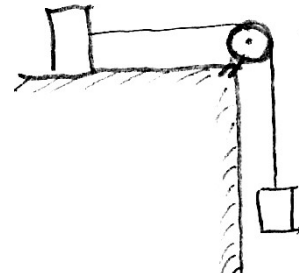
γ. Τα μέτρα των δυνάμεων που ασκεί το νήμα στα σώματα  $\Sigma_1, \Sigma_2$ .

Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι  $I_{cm}=\frac{1}{2}MR^2$  και η επιτάχυνση της

βαρύτητας  $g=10\frac{m}{\text{sec}^2}$ . Το νήμα δεν ολισθαίνει στο αυλάκι της τροχαλίας.

[  $\frac{10}{3}$  ,,  $\frac{100}{3}$  ,,  $\frac{50}{3}$  ,, 20]

48. Για το επόμενο σχήμα δίνονται ότι  $m_1 = m_2 = 8 \text{ kg}$ ,  $R = 0,25 \text{ m}$  και ότι το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο. Αν τη χρονική στιγμή  $t_0 = 0$  αφήσουμε το σώμα  $\Sigma_1$  ελεύθερο να κινηθεί, τη χρονική στιγμή  $t = 2 \text{ sec}$  η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας έχει μέτρο  $\omega = 16 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ . Να υπολογίσετε:



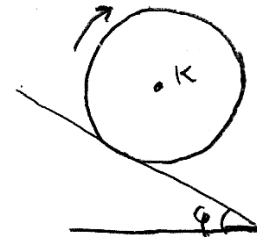
α. Το μέτρο της επιτάχυνσης με την οποία κινούνται τα δυο σώματα

β. Τα μέτρα των δυνάμεων που ασκεί το σχοινί στα δυο σώματα

γ. Τη ροπή αδράνειας της τροχαλίας. Δίνεται ότι  $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$

[ 2,, 64,, 16,, 1,5 ]

49. Ομογενής κυκλικός δακτύλιος, ακτίνας  $R = 0,2 \text{ m}$  και μάζας  $m$ , αφήνεται τη χρονική στιγμή  $t_0 = 0$  στην κορυφή πλάγιου επιπέδου, γωνίας  $\varphi = 30^\circ$ , και κυλιέται κατά μήκος του πλάγιου επιπέδου χωρίς να ολισθαίνει. Αν ο δακτύλιος φτάνει στη βάση του πλάγιου επιπέδου τη χρονική στιγμή  $t = 4 \text{ sec}$ , να υπολογίσετε:



α. Το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του δακτυλίου

β. Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του δακτυλίου

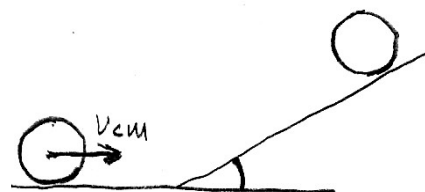
γ. Το μέτρο της ταχύτητας του σημείου που απέχει περισσότερο από το πλάγιο επίπεδο όταν ο δακτύλιος φτάνει στη βάση του

δ. Το μήκος του πλάγιου επιπέδου

Η ροπή αδράνειας του δακτυλίου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζει είναι  $I_{cm} = mR^2$  και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι  $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ .

[ 2,5,, 12,5,, 20,, 20 ]

50. Ένας ομογενής κυκλικός δακτύλιος, ακτίνας  $R$  και μάζας  $m$ , κινείται με σταθερή ταχύτητα κατά μήκος οριζόντιου επιπέδου. Στην πορεία του ο δακτύλιος συναντά πλάγιο επίπεδο γωνίας κλίσης  $\varphi$  και ανεβαίνει κατά μήκος του πλάγιου επιπέδου χωρίς ολίσθηση. Τη χρονική στιγμή  $t_0 = 0$  το μέτρο της ταχύτητας του δακτυλίου είναι  $u_0$



α. Να σχεδιάσετε τη στατική τριβή μεταξύ του δακτυλίου και του πλάγιου επιπέδου και να εξηγήσετε την φορά της.

β. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής επιβράδυνσης του δακτυλίου

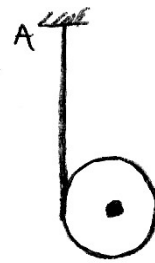
γ. Ποια χρονική στιγμή  $t_1$  ο δακτύλιος θα σταματήσει στιγμιαία;

δ. πόσο διάστημα θα έχει διανύσει μέχρι τότε ο δακτύλιος από τη στιγμή  $t_0 = 0$  έως τη στιγμή  $t_1$ ;

Η ροπή αδράνειας του δακτυλίου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζει είναι  $I_{cm} = mR^2$  και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι  $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ .

[  $\frac{g \eta \mu \varphi}{2 R}$  ,,  $\frac{2 u_0}{g \eta \mu \varphi}$  ,,  $\frac{u_0^2}{g \eta \mu \varphi}$  ]

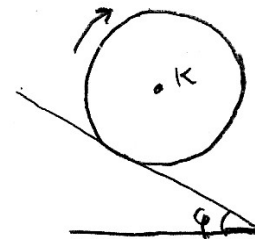
51. Σε ομογενή τροχαλία, μάζας  $M=3\text{ kg}$  και ακτίνας  $R=0,2\text{ m}$ , τυλίγεται αβαρές σχοινί, του οποίου το ελεύθερο άκρο στερεώνεται σε σταθερό σημείο. Αφήνουμε την τροχαλία ελεύθερη να κινηθεί και θεωρούμε ότι το σχοινί παραμένει συνεχώς κατακόρυφο. Να υπολογίσετε:



- α. Το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας της τροχαλίας  
 β. Το μέτρο της τάσης του σχοινού  
 γ. Το μήκος του σχοινού που θα έχει ξετυλιχθεί, όταν η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας γίνεται  $\omega=20\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ . Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας της τροχαλίας, ως προς τον άξονα της είναι  $I_{cm}=\frac{1}{2}MR^2$  και ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι  $g=10\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$

$$\left[ \frac{20}{3}, \dots, 10, \dots, 1, 2 \right]$$

52. Συμπαγής και ομογενής κύλινδρος, ακτίνας  $R$  και μάζας  $m$ , κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει κατά μήκος πλάγιου επιπέδου γωνίας  $\varphi$ . Να υπολογίσετε:

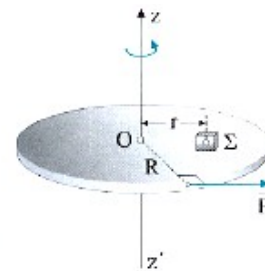


- α. Το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του κυλίνδρου  
 β. Το μέτρο της στατικής τριβής, η οποία είναι υπεύθυνη για την κύλιση του κυλίνδρου  
 γ. Τον ελάχιστο συντελεστή στατικής τριβής του κυλίνδρου με το πλάγιο επίπεδο, ώστε ο κύλινδρος να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει.

Η ροπή αδρανειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα συμμετρίας του είναι  $I_{cm}=\frac{1}{2}MR^2$  και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι  $g$ .

$$\left[ \frac{2}{3}g\eta\mu\varphi, \dots, \frac{1}{3}mg\eta\mu\varphi, \dots, \mu_{s(\min)}=\frac{\varepsilon\varphi\varphi}{3} \right].$$

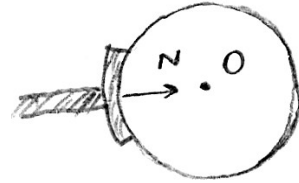
53. Ομογενής οριζόντιος δίσκος, ακτίνας  $R=0,4\text{ m}$  και μάζας  $M=5\text{ kg}$ , μπορεί να στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο του  $O$  και είναι κάθετος στο επίπεδο του. Πάνω στο δίσκο βρίσκεται μικρό σώμα  $\Sigma$ , μάζας  $m=0,5\text{ kg}$ , σε απόσταση  $r=0,2\text{ m}$  από το κέντρο  $O$  του δίσκου. Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ σώματος και δίσκου είναι  $\mu_s=0,2$ . Κάποια χρονική στιγμή ασκείται εφαπτομενική της περιφέρειας του δίσκου και σε τυχαίο σημείο της δύναμη  $\vec{F}$  σταθερού μέτρου, η οποία του προσδίδει σταθερή γωνιακή επιτάχυνση μέτρου  $\alpha_{\gamma\omega\nu}=0,8\frac{\text{rad}}{\text{sec}^2}$ . Να υπολογίσετε:



- α. Τη ροπή αδράνειας του συστήματος, ως προς τον άξονα περιστροφής του δίσκου  
 β. Το μέτρο της δύναμης  $\vec{F}$   
 γ. Ποιος είναι ο ρόλος της στατικής τριβής στο χρονικό διάστημα που το σώμα  $\Sigma$  δεν ολισθαίνει πάνω στο δίσκο;  
 δ. Για ποια τιμή του μέτρου της στατικής τριβής το σώμα  $\Sigma$  αρχίζει να ολισθαίνει πάνω στο δίσκο;  
 Η ροπή αδρανείας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα συμμετρίας του είναι  $I_{cm}=\frac{1}{2}MR^2$  και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι  $g$ .

$$\left[ 0,42, \dots, 0,84, \dots, 1 \right]$$

54. Ένας τροχός, μάζας  $M=2\text{ kg}$  και ακτίνας  $R=0,4\text{ m}$ , στρέφεται γύρω από τον άξονα του με συχνότητα  $f_0=20\pi\text{ Hz}$ . Ένα φρένο πιέζει την περιφέρεια του τροχού με δύναμη, η οποία έχει μέτρο  $N=10\text{ N}$ , ενώ ο φορέας της διέρχεται από τον άξονα του τροχού. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του φρένου και του τροχού είναι  $\mu=0,5$ .

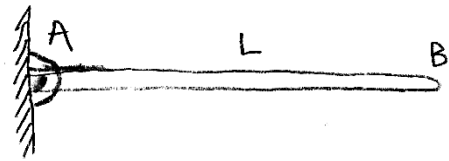


- Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής επιβράδυνσης του τροχού
- Μετά πόσο χρόνο από την εφαρμογή του φρένου ο τροχός θα σταματήσει;
- Πόσες περιστροφές θα εκτελέσει ο τροχός μέχρι να σταματήσει;

Η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα του είναι  $I_{cm}=\frac{1}{2}MR^2$ . Δίνεται  $\pi^2\approx 10$ .

[ 12,5,,,32,,,320π ]

55. Οριζόντια ομογενής ράβδος  $AB$ , μάζας  $M$  και μήκους  $L$ , μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που είναι κάθετος στη ράβδο και διέρχεται από το άκρο  $A$ . Η ράβδος, που αρχικά συγκρατείται σε οριζόντια θέση, αφήνεται ελεύθερη να περιστραφεί περί τον άξονα περιστροφής της, χωρίς τριβές. Τη στιγμή της εκκίνησης το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης



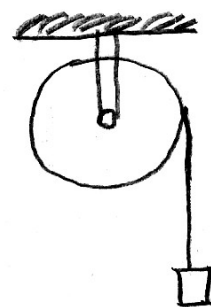
της ράβδου είναι  $\alpha_{\omega\nu(1)}=15\frac{\text{rad}}{\text{sec}^2}$ . Να υπολογίσετε:

- Το μήκος  $L$  της ράβδου
- Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της ράβδου, τη στιγμή που έχει στραφεί κατά γωνία  $\theta=60^\circ$  από την αρχική οριζόντια θέση της.
- Το μέτρο της γραμμικής επιτάχυνσης του άκρου  $B$  της ράβδου τη στιγμή που γίνεται κατακόρυφη.

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που είναι κάθετος στη ράβδο και διέρχεται από το κέντρο μάζας της είναι  $I_{cm}=\frac{1}{12}ML^2$  και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι  $g=10\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ .

[ 1,,,7,5,,,0 ]

56. Η τροχαλία του σχήματος, ακτίνας  $R=0,2\text{ m}$ , μπορεί να στρέφεται γύρω από τον άξονα της, χωρίς τριβές. Το σώμα  $\Sigma$  έχει μάζα  $m=1\text{ kg}$  και είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο αβαρούς νήματος που είναι τυλιγμένο στην περιφέρεια της τροχαλίας. Αφήνουμε το σώμα  $\Sigma$  να ελεύθερο να κινηθεί και διαπιστώνουμε ότι όταν έχει ξετυλιχτεί νήμα μήκους  $s=2\text{ m}$ , το μέτρο της ταχύτητας του σώματος



είναι  $u=4\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ . Να υπολογίσετε:

- Το μέτρο της επιτάχυνσης με την οποία κινείται το σώμα  $\Sigma$
- Το μέτρο της δύναμης που ασκεί το σχοινί στο σώμα  $\Sigma$
- Τη ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της.

Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι  $g=10\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ . Να θεωρηθεί ότι μεταξύ σχοινού και τροχαλίας δεν παρατηρείται ολίσθηση.

[ 4,,,6,,,0,06 ]



57. Ο τροχός του σχήματος, μάζας  $m=1\text{ kg}$  και ακτίνας  $R=0,2\text{ m}$ , στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο. Στο ελεύθερο άκρο του σχοινιού ασκούμε σταθερή δύναμη  $F=2\text{ N}$ . Να βρείτε

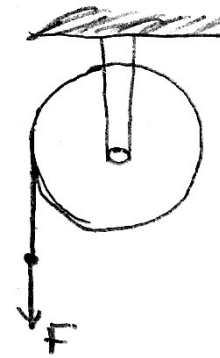
α. Τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του δίσκου

β. Τη γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου

γ. Τη στροφορμή του δίσκου τη χρονική στιγμή  $t_1=3\text{ s}$  αν τη στιγμή  $t_0=0$  που αρχίζει να ασκείται στον δίσκο η δύναμη, η γωνιακή ταχύτητα έχει μέτρο  $\omega_0=10\text{ rad/s}$  και ο δίσκος περιστρέφεται αριστερόστροφα.

δ. Τις στροφές που έκανε ο δίσκος στο χρονικό διάστημα των  $3\text{ s}$ .

Δίνεται  $I_{cm}=\frac{1}{2}MR^2$ .



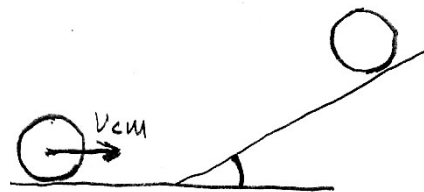
[ 0,4,,,20,,,1,4,,,60/π ]

58. Ομογενής κύλινδρος μάζας  $m=3\text{ kg}$  και ακτίνας  $R=\frac{1}{3}m$ , που

κυλάει οριζόντια με μεταφορική ταχύτητα μέτρου  $u=8\frac{m}{s}$ , συναντά

τη βάση ενός κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης  $\phi=30^0$  και αρχίζει να ανεβαίνει χωρίς να ολισθαίνει. Ο συντελεστής τριβής του κυλίνδρου με το κεκλιμένο επίπεδο είναι  $\mu=0,8$ . Δίνεται η ροπή

αδράνειας του κυλίνδρου  $I_{cm}=\frac{1}{2}mR^2$  και  $g=10\frac{m}{s^2}$ .



α. Πόσο ψηλότερα από τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου βρίσκεται το ανώτατο σημείο που θα φτάσει ο κύλινδρος;

β. Με ποια επιβράδυνση ανέρχεται στο κεκλιμένο επίπεδο το κέντρο μάζας του κυλίνδρου;

γ. Με ποια γωνιακή επιβράδυνση περιστρέφεται ο κύλινδρος;

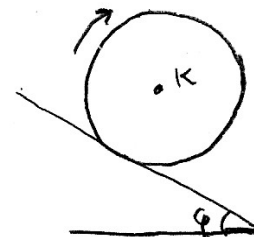
δ. Ποιο είναι το μέτρο της δύναμης τριβής;

(4,8 m,,, 10 m/s^2,,, 10 rad/s,,, 5N)

59. Μια συμπαγής και ομογενής σφαίρα μάζας  $m=4,2\text{ kg}$  και ακτίνας  $R=\frac{1}{7}m$  αφήνεται να κυλήσει από την κορυφή κεκλιμένου επιπέδου γωνίας

κλίσης  $\phi=30^0$ , που βρίσκεται σε ύψος  $h=0,28\text{ m}$  ψηλότερα από τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου. Δίνεται ο συντελεστής τριβής μεταξύ σφαίρας – κεκλιμένου επιπέδου  $\mu=\frac{\sqrt{3}}{2}$ , η ροπή αδράνειας της σφαίρας  $I_{cm}=\frac{2}{5}mR^2$

και  $g=10\frac{m}{s^2}$ .



α. Να αποδειχθεί ότι η σφαίρα θα κατέλθει το κεκλιμένο επίπεδο κυλώντας χωρίς να ολισθαίνει

β. Να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση της σφαίρας

γ. Ποια είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας όταν φτάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου;

δ. Πόσο είναι το μέτρο της δύναμης τριβής;

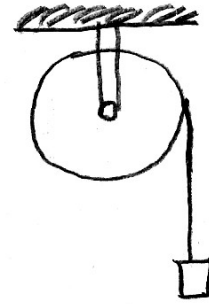
ε. Να βρεθεί η χρονική διάρκεια κατά την οποία η σφαίρα κατέρχεται το κεκλιμένο επίπεδο.

$$(T < T_{\max} = 31,5 \text{ N} \text{ , , } 25 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \text{ , , } 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ , , } 6 \text{ N} \text{ , , } 0,56 \text{ s})$$

60. Μια Ομογενής σφαίρα αφήνεται από ύψος  $h_1 = 7 \text{ m}$  ενός κεκλιμένου επιπέδου να κυλήσει χωρίς ολίσθηση. Από ποιο ύψος  $h_2$  ενός αλλού κεκλιμένου επιπέδου πρέπει να αφηθεί ένας κύβος πάγου να ολισθήσει χωρίς τριβές, ώστε τα δυο σώματα να φτάσουν στις βάσεις των κεκλιμένων επιπέδων με ίσες ταχύτητες; Δίνεται  $I_{cm} = \frac{1}{2} mR^2$ .

[ 9.24/208, , 5m ]

61. Ομογενής τροχαλία μάζας  $M = 4 \text{ kg}$  και ακτίνας  $R = 0,2 \text{ m}$ , μπορεί να στρέφεται γύρω από τον άξονα της, χωρίς τριβές. Ένα σώμα  $\Sigma$ , μάζας  $m = 0,5 \text{ kg}$ , είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο αβαρούς νήματος, το οποίο είναι τυλιγμένο στην περιφέρεια της τροχαλίας. Τη χρονική στιγμή  $t_0 = 0$  το σώμα  $\Sigma$  αφήνεται ελεύθερο. Να υπολογίσετε:



α. Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της τροχαλίας

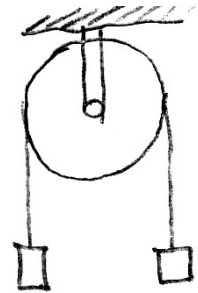
β. Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της τροχαλίας, όταν το σώμα  $\Sigma$  βρίσκεται χαμηλότερα από την αρχική του θέση κατά  $h = 4 \text{ m}$ .

Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας της τροχαλίας, ως προς τον άξονα της είναι  $I_{cm} = \frac{1}{2} MR^2$  και ότι η επιτάχυνση

της βαρύτητας είναι  $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$

[ 10, , 20 ] dm

62. Η ομογενής τροχαλία του σχήματος, μάζας  $M = 2 \text{ kg}$  και ακτίνας  $R = 0,2 \text{ m}$ , μπορεί να στρέφεται γύρω από τον άξονα της, χωρίς τριβές. Τα σώματα  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  έχουν μάζες  $m_1 = 3 \text{ kg}$  και, αντίστοιχα, και είναι δεμένα στα άκρα αβαρούς σχοινού που διέρχεται από το αυλάκι της τροχαλίας. μεταξύ σχοινού και τροχαλίας δεν παρατηρείται ολίσθηση. Τη χρονική στιγμή  $t_0 = 0$  αφήνουμε ταυτόχρονα τα δυο σώματα ελεύθερα να κινηθούν. Να υπολογίσετε:



α. Το μέτρο της επιτάχυνσης με την οποία θα κινηθούν τα δυο σώματα

β. Τα μέτρα των δυνάμεων που ασκεί το νήμα στα δυο σώματα

γ. Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της τροχαλίας, όταν η κατακόρυφη απόσταση των δυο σωμάτων είναι  $h = 1 \text{ m}$ . Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας της τροχαλίας, ως προς τον άξονα της είναι  $I_{cm} = \frac{1}{2} MR^2$  και ότι η

επιτάχυνση της βαρύτητας είναι  $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$

[ 4, , 18, , 14, , 10 ]