ΦΘΙΝΟΥΣΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ – ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

1. Στο ένα άκρο ιδανικού οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς $k=100\,N/m$ είναι συνδεδεμένο σώμα μάζας $m=1\,kg$, το οποίο μπορεί να κινείται πάνω σε οριζόντιο δάπεδο. Το άλλο άκρο του ελατηρίου στερεώνεται σε ακλόνητο σημείο. Απομακρύνουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας του, κατά την διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου, κατά $A_0=0{,}2\,m$ και το αφήνουμε ελεύθερο. Λόγω τριβών το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται κατά 2% μετά από κάθε πλήρη ταλάντωση.

α. Ποια είναι η ιδιοσυχνοτητα f_0 του ταλαντωτή;

β. Πόση ενέργεια αφαιρείται από τον ταλαντωτή μέσω του έργου των τριβών στη διάρκεια της πρώτης περιόδου;

γ. Πόση ενέργεια πρέπει να μεταφερθεί στον ταλαντωτή, μέσω του έργου εξωτερικής περιοδικής δύναμης σε χρόνο $t=62{,}8\,s$, ώστε να εκτελεί αμείωτες ταλαντώσεις με συχνότητα f_0 ;

$$(\frac{5}{\pi}Hz\,,,,\,0{,}0792\,j\,,,,\,7{,}92\,j)$$

2. Ένα σώμα μάζας $m=0{,}2\,kg$ εκτελεί ταυτόχρονα δυο απλές αρμονικές ταλαντώσεις με εξισώσεις $x_1=6\,\eta\mu\,2\pi t$ και $x_2=8\,\sigma\upsilon\nu\,2\pi t$ της ίδιας διεύθυνσης και με την ίδια θέση ισορροπίας. (x_1, x_2 σε cm, t σε sec) Να βρείτε:

α. Την εξίσωση της συνισταμένης ταλάντωσης

β. Την ενέργεια της ταλάντωσης

γ. Την ταχύτητα του σώματος στη θέση όπου η απομάκρυνση του από τη θέση ισορροπίας είναι $x=6\,cm$.

$$x=10\,\eta\mu(2\pi t+\theta)\,,,\,\varepsilon\varphi\theta=\frac{4}{3}\,,,,\,4\pi^2 10^{-3}\,j\,,,,\,16\pi\,\frac{cm}{s})$$

3. Οι εξισώσεις δυο α.α.τ. που γίνονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας είναι $x_1=4\,\eta\mu\,2t$ και $x_2=4\,\eta\mu(2t+\frac{\pi}{3})$. (x_1, x_2 σε cm)

α. Να γράψετε την εξίσωση της συνισταμένης ταλάντωσης

β. Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σώματος τη στιγμή $t=\frac{\pi}{4}\sec$.

$$(x=4\sqrt{3}\,\eta\mu(2t+\frac{\pi}{6})\,,,,\,u=-4\sqrt{3}\,\frac{cm}{s}\,,,,\,a=-24\frac{cm}{s^2})$$

4. Ένα σώμα μάζας $m=1\,kg$ εκτελεί ταυτόχρονα δυο α.α.τ. με εξισώσεις $x_1=10\,\eta\mu(3\pi t+\frac{\pi}{3})$ και $x_2=10\,\eta\mu(3\pi t-\frac{\pi}{6})$ της ίδιας διεύθυνσης και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. (x_1, x_2 σε cm)

α. Να βρείτε τη διαφορά φάσης των δυο ταλαντώσεων

β. Να γράψετε την εξίσωση της α.α.τ. που προκύπτει

γ. Ποια είναι η σταθερά D της συνισταμένης ταλάντωσης

δ. Να γράψετε την εξίσωση της συνισταμένης δύναμης που δέχεται το σώμα σε συνάρτηση με τον χρόνο.

$$(\frac{\pi}{2}rad\,,,,\,x=10\sqrt{2}\,\eta\mu(3\pi t+\frac{\pi}{12})\,,,,\,D=9\pi^2\,\frac{N}{m}\,,,,\,F=-0{,}9\sqrt{2}\,\pi^2\,\eta\mu(3\pi t+\frac{\pi}{12})$$

5. Ενα σώμα μάζας $m=1\,kg$ εκτελεί ταυτόχρονα δυο α.α.τ. πάνω στην ίδια ευθεία και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Οι εξισώσεις των δυο ταλαντώσεων είναι αντίστοιχα $x_1=4\,\eta\mu\,10t$ και $x_2=4\,\eta\mu\,(10t+\frac{\pi}{3})$, (τα x_1, x_2 σε cm και t σε $\sec$)

α) να γράψετε την εξίσωση της κίνησης του σώματος

β) να προσδιορίσετε σε ποια θέση του θετικού ημιάξονα η κινητική ενέργεια γίνεται τριπλάσια της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης

γ) να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της τιμής της ταχύτητας του σώματος, όταν αυτό βρίσκεται στην προηγουμένη θέση του και κινείται κατά τη θετική φορά.

$$[x=4\sqrt{3}\,\eta\mu\,(10t+\frac{\pi}{6}),,, x=2\sqrt{3}\,cm,,, \frac{du}{dt}=-2\sqrt{3}\,m/s^2]$$

6. Ένα σώμα μάζας $m=2\,kg$ εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση με πλάτος το οποίο μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με την εξίσωση $A_K=0{,}8\,e^{-t\ell n4}$. Αν η περίοδος της ταλάντωσης είναι $T=0{,}5\,s$ να υπολογίσετε:

α) σε πόσο χρόνο το πλάτος της ταλάντωσης θα υποδιπλασιαστεί

β) το χρονικό διάστημα Δt που απαιτείται ώστε το πλάτος από $A_1=0{,}4\,m$, να γίνει $A_3=0{,}1\,m$.

γ) Το ποσοστό της αρχικής ενέργειας που χάνεται κατά το χρονικό διάστημα Δt

δ) πόση ενέργεια έχει η ταλάντωση έπειτα από χρόνο 2s ;

Να θεωρήσετε ότι $\pi^2=10$

$$[t=0{,}5\,s,,, \Delta t=1\mathrm{s},,, \frac{375}{16}\%,,, E_K=0{,}4\,j]$$

7. Ένα σώμα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση με περίοδο $T=0{,}01\,s$ και πλάτος $A_K=0{,}64\,e^{-\Lambda t}$, όπου $k=0,1,2\ldots$ Έπειτα από $N_1=10$ πλήρεις ταλαντώσεις το πλάτος είναι $0{,}32\,m$.

α) να υπολογίσετε την σταθερά Λ

β) να δείξετε ότι ο λόγος δυο διαδοχικών τιμών του πλάτους είναι σταθερός και να υπολογίσετε την τιμή του

γ) να δείξετε ότι ο λόγος δυο διαδοχικών τιμών της ενέργειας της ταλάντωσης είναι σταθερός και να υπολογίσετε την τιμή του

δ) να βρείτε το πλάτος της ταλάντωσης όταν γίνουν ακόμα $N_2=40$ πλήρεις ταλαντώσεις.

Δίνεται ότι $\ell n2\simeq 0{,}7$.

$$[\Lambda=7\mathrm{s}^{-1},,, A_0/A_1=e^{0,07},,, E_0/E_1=e^{0,14},,, A_{50}=2\,cm]$$

8. Σώμα εκτελεί φθίνουσα α.α.τ. πλάτους $A_K=A_0\,e^{-5\mathrm{t}}$. Έπειτα από κάθε πλήρη ταλάντωση η ενέργεια ταλάντωσης μειώνεται κατά 19 . Αν γνωρίζετε ότι $\ell n2\simeq 0{,}7$ και $\ell n\frac{10}{9}\simeq 0{,}1$, να βρείτε:

α) την επί τοις % μεταβολή του πλάτους ταλάντωσης έπειτα από κάθε πλήρη ταλάντωση

β) την περίοδο της ταλάντωσης

γ) ποια χρονική στιγμή t_1 υποτετραπλασιάζεται η ενέργεια της ταλάντωσης;

δ) το ποσοστό της αρχικής ενέργειας της ταλάντωσης που έχει το σώμα την χρονική στιγμή $t_2=0{,}28\,s$.

$$[\Delta A_k/A_K\,100=-10\%,,, T=0{,}02\,s,,, t_1=0{,}14\,s,,, E_K/E_0=6{,}25]$$

9. Το πλάτος μιας φθίνουσας ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $A=A_0 e^{-\Lambda t}$. Σε χρόνο $20\,s$, από την έναρξη της ταλάντωσης το σύστημα έχει εκτελέσει $N_1=10$ πλήρεις ταλαντώσεις και το αρχικό πλάτος έχει μειωθεί στο μισό. Να υπολογίσετε:

α) την περίοδο της φθίνουσας ταλάντωσης

β) την τιμή της σταθερής Λ

γ) το επί τοις εκατό ποσοστό μείωσης της ενέργειας της ταλάντωσης έως την στιγμή $20\,s$

δ) το πλάτος της ταλάντωσης σε συνάρτηση με το πλάτος A_0 , όταν το σύστημα έχει εκτελέσει 30 πλήρεις ταλαντώσεις.

$$[T=2\text{s},,,\Lambda=0{,}035\,s^{-1},,,\lambda=75\,\%,,,A_2=A_0/8]$$

10. Το πλάτος μιας φθίνουσας ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $A=A_0 e^{-\Lambda t}$, όπου $A_0=0{,}4\,m$. Ο χρόνος υποδιπλασιασμού του πλάτους είναι $T_{1/2}=5\text{s}$

α) Να προσδιορίσετε την τιμή της σταθερής Λ

β) να προσδιορίσετε το κλάσμα της αρχικής ενέργειας της ταλάντωσης που χάνεται από την στιγμή μηδέν μέχρι την στιγμή $t_1=2\mathrm{T}_{1/2}$

γ) αν κατά την διάρκεια κάθε περιόδου το πλάτος ταλάντωσης μειώνεται κατά 10 , να υπολογίσετε την περίοδο της ταλάντωσης

δ) αν την στιγμή $t_1=2\mathrm{T}_{1/2}$, η αντιτιθέμενη στην ταλάντωση του σώματος δύναμη παύει να ασκείται, θεωρώντας την στιγμή t_1 ως αρχή των χρόνων $t_{0'}$, να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από την θέση ισορροπίας του, σε συνάρτηση με το χρόνο. Να θεωρήσετε ότι η περίοδος της ταλάντωσης παραμένει ίδια και ίση με την περίοδο της φθίνουσας ταλάντωσης. Δίνεται $\ell n2=0{,}7$ και $\ell n\dfrac{10}{9}=0{,}105$.

$$[\Lambda=0{,}14\,s^{-1},,,k=\frac{15}{16},,,T=0{,}75\,s,,,x=0{,}1\,\eta\mu(\frac{8\pi}{3}+\frac{\pi}{2})]$$

11. Σώμα μάζας $m=2\,kg$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από μία θέση ισορροπίας και την χρονική στιγμή $t=0$ διέρχεται από αυτή με κατεύθυνση προς τον αρνητικό ημιάξονα. Το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας 10 φορές σε χρόνο $t=10\,s$. Εάν η μέγιστη δύναμη που δέχεται το σώμα κατά την διάρκεια της ταλάντωσης του είναι $\Sigma F_{max}=100\,N$, να βρείτε:

Α. Την εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με τον χρόνο.

Β. Εάν στο ίδιο σώμα κατά την διάρκεια της ταλάντωσης του αρχίζει να ασκείται δύναμη απόσβεσης $F'=-bu$ όπου $b=2\,kg/s$ και θεωρήσουμε ότι η περίοδος του δεν αλλάζει, να βρείτε σε πόσο χρόνο το πλάτος του θα γίνει $A=1{,}25\,m$.

Γ. Για την παραπάνω χρονική στιγμή να υπολογίσετε τον μέγιστο ρυθμό με τον οποίο χάνει ενέργεια το σύστημα εξαιτίας της δύναμης F' .

Δίνονται: $\Lambda=\dfrac{b}{2\text{m}}$, $\ell n2=0{,}7,\pi^2=10$.