ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

3 . ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

3.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

Ορισμοί :

1) **Εξίσωση** ως προς ένα γράμμα είναι μία ισότητα, η οποία αληθεύει για μία μόνο τιμή του γράμματος που περιέχει.
2) Σε μία εξίσωση η παράσταση που βρίσκεται αριστερά από ίσον λέγεται **πρώτο μέλος** ενώ η παράσταση που βρίσκεται δεξιά από το ίσον **δεύτερο μέλος**.
3) ***Λύση ή ρίζα*** μιας εξίσωσης λέγεται ο αριθμός που επαληθεύει την εξίσωση.
4) **Επίλυση** μιας εξίσωσης λέγεται η διαδικασία που κάνουμε για να βρούμε τις λύσεις της.
5) **Επαλήθευση** μιας εξίσωσης λέγεται η εργασία κατά την οποία αντικαθιστούμε τον άγνωστο με τη λύση της εξίσωσης και βρίσκουμε ότι το πρώτο μέρος ισούται με το δεύτερο.
6) **Αδύνατη** λέγεται η εξίσωση που δεν έχει λύση.
7) **Ταυτότητα ή αόριστη** λέγεται η εξίσωση που έχει άπειρες λύσεις.
8) Μια εξίσωση λέγεται **παραμετρική ή εγγράμματη** όταν περιέχει και άλλες μεταβλητές(γράμματα) εκτός από τον άγνωστο ($3x+2\alpha=9x-4\beta$)
9) Δυο εξισώσεις λέγονται **ισοδύναμες** όταν έχουν την ίδια ρίζα.
10) Μια εξίσωση λέγεται **πρώτου βαθμού**, όταν ο άγνωστος δεν έχει εκθέτη.
11. Μια εξίσωση λέγεται **κλασματική,** όταν ένας τουλάχιστον από τους όρους που περιέχουν τον άγνωστο είναι κλασματική παράσταση.

Επίλυση εξισώσεων

Για να λύσουμε μία εξίσωση α΄ βαθμού ακολουθούμε της εξής διαδικασία:
1) Απαλείφουμε τους παρανομαστές (αν υπάρχουν)
2) Κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς.
3) Απαλείφουμε τις παρενθέσεις (αν υπάρχουν).
4) Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους (προσέχοντας το εξής: όταν αλλάζει ένας όρος μέλος, αλλάζει και πρόσημο).
5) Κάνουμε αναγωγές ομοίων όρων.
6) Διαιρούμε και τα δύο μέλη με το συντελεστή του αγνώστου (αν μπορούμε).

Διερεύνηση της εξίσωσης αχ+β=0 (1) ,όπου α,β γνωστοί ρητοί και χ άγνωστος

Έστω $\alpha x + \beta = 0$

- Αν $\alpha \neq 0$ τότε: έχουμε μοναδική λύση $x = \dfrac{-\beta}{\alpha}$
- Αν $\alpha = 0$ τότε $0x=-\beta$ και $\left\{ \begin{array}{l} \alpha\nu\ \beta = 0 \text{ αόριστη} \\ \alpha\nu\ \beta \neq 0 \text{ αδύνατη} \end{array} \right\}$

3.2 Η ΕΞΙΣΩΣΗ $x^ν = α$

- Η εξίσωση $x^ν = α$, με $α > 0$ και ν περιττό φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μια λύση την $x = \sqrt[ν]{α}$
- Η εξίσωση $x^ν = α$, με $α > 0$ και ν άρτιο φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς δύο λύσεις τις $x = \pm\sqrt[ν]{α}$
- Η εξίσωση $x^ν = α$, με $α < 0$ και ν περιττό φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μια λύση την $x = -\sqrt[ν]{|α|}$
- Η εξίσωση $x^ν= α$, με $α < 0$ και ν άρτιο φυσικό αριθμό, είναι αδύνατη
- Αν ο ν περιττός τότε η εξίσωση $x^ν= α$ έχει μοναδική λύση, την $x = α$
- Αν ο ν άρτιος τότε η εξίσωση $x^ν = α$ έχει δύο λύσεις, τις $x_1 = α$ και $x_2 =- α$

3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

Μια εξίσωση λέγεται **δευτέρου βαθμού**, όταν ο άγνωστος είναι υψωμένος στη δευτέρα.

Διερεύνηση της : $αχ^2+βχ+γ=0$

$Δ = β^2 - 4αγ$	**Η εξίσωση** $αx^2 + βx + γ = 0, α \neq 0$
$Δ > 0$	Έχει δύο ρίζες άνισες τις $x_{1,2} = \dfrac{-β \pm \sqrt{Δ}}{2α}$
$Δ = 0$	Έχει μια διπλή ρίζα την $x = \dfrac{-β}{2α}$
$Δ < 0$	Είναι αδύνατη στο R .

Τύποι Vieta.

Έστω $χ_1$ και $χ_2$ οι ρίζες της εξίσωσης $αx^2+βx+γ=0$ και με S συμβολίσουμε το άθροισμα $x_1 + x_2$ και με P το γινόμενο $x_1 \cdot x_2$, τότε έχουμε τους τύπους: $S = -\dfrac{β}{α}$ και $P = \dfrac{γ}{α}$

- Η εξίσωση $αx^2+βx+γ=0$ με την βοήθεια των τύπων Vieta μετασχηματίζεται ως εξής: $x^2 - Sx + P = 0$. Επομένως αν γνωρίζουμε δυο αριθμούς μπορούμε να βρούμε την εξίσωση που έχει σαν ρίζες τους αριθμούς αυτούς.

ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

Κάθε εξίσωση που περιέχει τον άγνωστο στον παρανομαστή λέγεται κλασματική εξίσωση.

Μέθοδος επιλύσεως των κλασματικών εξισώσεων.
1) Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές.
2) Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π των παρονομαστών.
3) Βρίσκουμε για ποιες τιμές του αγνώστου το Ε.Κ.Π είναι διαφορετικό από το μηδέν.
4) Πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π.
5) Κάνουμε απαλοιφή των παρονομαστών.
6) Εκτελούμε τους πολλαπλασιασμούς , μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος , κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων και καταλήγουμε σε μια πολυωνυμική εξίσωση την οποία και λύνουμε.
7) Από τις λύσεις που βρήκαμε απορρίπτουμε εκείνες που μηδενίζουν τους παρονομαστές της αρχικής εξίσωσης.

Λύση προβλημάτων με εξισώσεις.

Για να λύσουμε ένα πρόβλημα με την βοήθεια εξισώσεων ακολουθούμε την εξής πορεία:
1) Συμβολίζουμε με ένα γράμμα, το ζητούμενο του προβλήματος.
2) Γράφουμε τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος.
3) Προσπαθούμε να σχηματίσουμε την εξίσωση του προβλήματος.
4) Λύνουμε την εξίσωση.
5) Διαπιστώνουμε αν η λύση που βρήκαμε ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του προβλήματος

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3.1

1. Να λυθεί η εξίσωση: $(\lambda^2-16)x = \lambda^2 +4\lambda$

2. Να λυθεί η εξίσωση: $3(\lambda+2)x+5=9x+6$

3. Να λυθεί η εξίσωση: $(x - \lambda).(x - 2) = x^2 -3x + 2$

4. Να λυθεί η εξίσωση: $(x - 3\lambda)^2 - (2\lambda - x)^2 = 1 - x$

5. Να λυθεί η εξίσωση: $\lambda(\lambda^2 - \lambda - x) = 0$

6. Να λυθεί η εξίσωση: $\lambda^2(x - 1) = 2.(2x - 3) + \lambda$

7. Να λυθεί η εξίσωση: $\lambda^3 x - \lambda^2 - 2 = \lambda(4x + 1 - \lambda)$

8. Να λυθεί η εξίσωση: $(\lambda + \mu)x - 2\mu^2(\lambda + \mu) = \lambda\mu(\lambda + \mu) - \mu x$

9. Να λυθεί η εξίσωση: $(\lambda^2 - 1)x^2 = \lambda\mu(x - 1)$

10. Να λυθεί η εξίσωση: $\mu^2(x - \lambda) = \lambda^2 . (x - \mu)$

11. Να λυθεί η εξίσωση: $|x-1|=3$

12. Να λυθεί η εξίσωση: $|3x-1|=|2x+5|$

13. Να λυθεί η εξίσωση: $|x+5|+|x-2|=0$

14. Να λυθεί η εξίσωση: $|2x-8|+|\psi-5|+|z+1|=0$

15. Να λυθεί η εξίσωση: $|x-2|+|2x+\psi-1|=0$

16. Να λυθεί η εξίσωση: $x^2-2|x|=0$

17. Να λυθεί η εξίσωση: $2\cdot|x-3|=x-1$

18. Να λυθεί η εξίσωση: $||x|-1|=3$

19. Να λυθεί η εξίσωση: $||x|-2|=x-1$

20. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{|x-1|}{3}+\frac{2|x-1|}{5}+1=|x-1|$

21. Να λυθεί η εξίσωση: $2|x-1|+|x-2|=x+3$

22. Να λυθεί η εξίσωση: $|x-2|-3\cdot|2x-4|+5\cdot|3x-6|=10$

23. Να λυθεί η εξίσωση: $|3x-7|=-8$

24. Αν η εξίσωση (λ-1)x=μ+2λ-3 είναι ταυτότητα τότε να δείξετε ότι η εξίσωση λx+λ(x-1)μ=2λx-8 είναι αδύνατη.

25. Ένας φαρμακοποιός ανάμειξε 6 lt οινοπνεύματος περιεκτικότητας 70% σε καθαρό οινόπνευμα και 4 lt οινοπνεύματος περιεκτικότητα 20% σε καθαρό οινόπνευμα. Να βρείτε την περιεκτικότητα του μείγματος σε καθαρό οινόπνευμα.

26. Μια βρύση αδειάζει μια γεμάτη δεξαμενή σε 8 ώρες, ενώ μια άλλη γεμίζει την ίδια δεξαμενή αν είναι άδεια σε 4 ώρες. Σε πόσες ώρες θα γεμίσει η δεξαμενή, αν είναι άδεια και ανοίξουμε συγχρόνως τις δύο βρύσες; (8h)

27. Πριν από 4 χρόνια ο Πέτρος είχε τριπλάσια ηλικία από τον Παύλο. Σήμερα η ηλικία του Πέτρου είναι διπλάσια από την ηλικία του Παύλου. Πόσο χρονών είναι σήμερα ο Πέτρος και πόσο ο Παύλος;(16,8)

28. Μια χριστιανική μαθητική κατασκήνωση έχει 100 μαθητές και τρόφιμα για 20 ημέρες. Ύστερα από 5 ημέρες ήρθαν ακόμα 50 μαθητές. Σε πόσες ημέρες θα τελειώσουν τα τρόφιμα;

«Εστω ότι μετά τις 5 πρώτες ημέρες θα περάσουν ακόμα x ημέρες τότε ισχύει: $2000=100\cdot5+150\cdot x \Leftrightarrow x=10$. Άρα τα τρόφιμα θα τελειώσουν σε 15 ημέρες».

3.2

1. Να λυθεί η εξίσωση: $x^6 - x^2 = 0$

2. Να λυθεί η εξίσωση: $x^9 - 27x^6 = 0$

3. Να λυθεί η εξίσωση: $(x^3-1)^5+32=0$

4. Να λυθεί η εξίσωση: $(x+2\lambda)^3+1=0$

5. Να λυθεί η εξίσωση: $x^7-\lambda x^4=0$

6. Να λυθεί η εξίσωση: $(\lambda x+\kappa)^3+1=0$

3.3

1. Να λυθεί : $x^2-7|x|-18=0$

2. Να λυθεί : $x^2-7|x|+12=0$

3. Να λυθεί : $x^2-3|x|+2x-6=0$

4. Να λυθεί : $\sqrt{2}x^2-(\sqrt{5}+\sqrt{2})x+\sqrt{5}=0$

5. Να λυθεί : $x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{5})\cdot x+\sqrt{10}$

6. Να λυθεί : $x^2+(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}=0$

7. Να λυθεί: $(x-3)^2+|x-3|-1=0$

8. Να λυθεί: $(x-2)^2-3|x-2|-10=0$

9. Να λυθεί: $\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}-3=0$

10. Να λυθεί: $3(x+3)(2x-1)-3(x^2-9)=0$ (x= 3,-2)

11. Να λυθεί : $(x^2+x+1)\cdot(x^2+x+2)=12$ (θέτω $x^2+x=\omega$)

12. Να λυθεί: $|x^2-3x+2|+|x-1|=0$ x=1

13. Να λυθεί: $x^{\frac{1}{3}}-9x^{\frac{1}{6}}+8=0,\ x\geq 0$

14. Να λυθεί: $1-\dfrac{x^2}{x-1}=\dfrac{1}{1-x}-6$ x=6

15. Να λυθεί: $\dfrac{3x-1}{x+2}-\dfrac{18}{2-x}=\dfrac{7x^2-28}{x^2-4}+\dfrac{7}{2+x}$ x=5,-4

16. Να λυθεί: $\dfrac{6}{2x-1}-\dfrac{5}{2x+1}=\dfrac{1-8x}{1-4x^2}$ x=2

17. Να λυθεί: $x^2-2x+|4-2x|=0$

Πίνακας προσήμων

x	$-\infty$	2	$+\infty$
4-2x	+	0	-

αν $x\le 2 \ \to x^2-2x+4-2x=0 \Leftrightarrow x=2$

αν $x>2 \ \to x^2-2x-4+2x=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=-2$ (απορ)

18. Να λυθεί: $\dfrac{3x^2-1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-x}=\dfrac{x^2-3x+2}{x}$

x=-3

19. Να λυθεί: $x^2-x=18-\dfrac{72}{x^2-x}$

x=4,+3,-3,-2

20. Να λυθεί : $\dfrac{1+x^2}{x}+\dfrac{1}{4x^2-x}=\dfrac{5-2x}{4x-1}$

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{8}$

21. Να λυθεί : $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+3=4\left(x+\dfrac{1}{x}\right), x\neq 0$

$x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

22. Να λυθεί : $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+6=0,\ x\neq 0$

23. Να λυθεί: $\dfrac{2(x^2+2)}{5}=\dfrac{(x^2-1)\cdot(x^2-2)+6}{x^2+1}=0$

(θέτω $x^2=\omega$)

24. Να λυθεί η εξίσωση $3x^4-5x^2+2=0$

$x=\pm 1$ ή $x=\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

25. Να λυθεί η εξίσωση $9x^4-14x^2-8=0$

$x=\pm\sqrt{2}$

26. Να λυθεί η εξίσωση $9x^4-5x^2-4=0$

27. Να λυθεί η εξίσωση $\dfrac{x-\alpha}{x-\beta}-\dfrac{x-\beta}{x-\alpha}+\dfrac{4\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}=0$

$\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha},\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2\beta}$

28. Να λυθεί η εξίσωση $(x^2-3x)^2+3(x^2-3x)+2=0$

$x=1,2,\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

29. Έστω $\beta^2x^2+\beta x+\gamma=0$, Δ_1 η διακρίνουσα ως προς x και Δ_2 η διακρίνουσα ως προς β. Αν η εξίσωση ως προς β δεν έχει ποτέ ίσες ρίζες τότε να δείξετε ότι ισχύει: $\dfrac{\Delta_1}{\Delta_2}=\left(\dfrac{\beta}{x}\right)^2$

30. Αν α, $\beta\neq 0$ ρητοί αριθμοί, να δείξετε ότι η εξίσωση $\beta^2x^2+(\alpha+\beta)x+\dfrac{\alpha}{\beta}=0$ έχει πάντα ρίζες.

31. Αν ρ_1 , ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-3x-4=0$ τότε να βρεθούν οι τιμές των παραστάσεων :

- $\rho_1^{-1}+\rho_2^{-1}=$
- $\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{\rho_2^2}=$
- $(\rho_1-\rho_2)^2=$
- $\rho_1^{-3}+\rho_2^{-3}=$
- $\frac{2}{\rho_1+3}+\frac{2}{\rho_2+3}=$

32. Αν ρ_1 και ρ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$,με $\alpha,\beta,\gamma\neq 0$ τότε να βρείτε τις εξισώσεις με ρίζες τους παρακάτω αριθμούς

- $2\rho_1+5, 2\rho_2+5$
- $\rho_1^2+3\rho_1, \rho_2^2+3\rho_2$
- $\rho_1^2-2\rho_2, \rho_2^2-2\rho_1$
- $3\rho_1-\frac{1}{\rho_2}, 3\rho_2-\frac{1}{\rho_1} (\rho_1,\rho_2\neq 0)$
- $3\rho_1^2-4\rho_2+1, 3\rho_2^2-4\rho_1+1$

33. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2-2(\lambda-4)x+\lambda^2-1=0$ έχει δύο ρίζες αρνητικές όταν:

$\lambda\in(-\infty,-1)\cup\left(1,\frac{17}{8}\right)$

(πρέπει Δ>0, S<0, P>0)

34. Αν ρ_1 , ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, να δείξετε ότι

- $\rho_1^2+\rho_2^2=\frac{\beta^2-2\alpha\gamma}{\alpha^2}$;
- $\rho_1^3+\rho_2^3=\frac{-\beta(\beta^2-3\alpha\gamma)}{\alpha^3}$

35. Να δείξετε ότι η εξίσωση $(2-3\lambda)x^2+2\lambda x-\lambda+1=0$ έχει διπλή ρίζα όταν $\lambda=2^{-1}$ ή $\lambda=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

36. Αν λ=2 τότε να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2-4\lambda x+3\lambda+1=0$ έχει δύο ρίζες.

37. Να δείξετε ότι η εξίσωση $-x^2+3\lambda x+(\lambda-1)^2=0$ έχει πάντα δύο ρίζες.

38. Αν ισχύει $\frac{(\beta-2\gamma)(\beta+2\gamma)}{4}>\gamma(\alpha-\gamma)$ τότε να δείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

39. Να βρεθεί η εξίσωση δευτέρου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{2+\sqrt{5}}, \frac{1}{2-\sqrt{5}}$

40. Αν P=0 τότε η μια ρίζα της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ είναι $x_1=-\dfrac{\beta}{\alpha}$

41. Αν ρ_1 , ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-3x-6=0$ τότε να δείξετε ότι $\dfrac{\rho_1}{\rho_2^{\,2}}+\dfrac{\rho_2}{\rho_1^{\,2}}=\dfrac{9}{4}$

42. Αν x_1 , x_2 οι ρίζες της $x^2+4\alpha x+2\beta=0$ τότε να δείξετε ότι η εξίσωση που έχει ρίζες τις $\rho_1=\dfrac{1}{x_1^{\,2}}$ και $\rho_2=\dfrac{1}{x_2^{\,2}}$ είναι η $4\beta^2x^2-4\left(4\alpha^2-\beta^2\right)x+1=0$

43. Να βρεθεί το λ ώστε το τριώνυμο $x^2-6\lambda x+9\lambda^2-3\lambda+5$ να γίνει τέλειο τετράγωνο . $\Delta=0\Leftrightarrow\lambda=\frac{5}{3}$

44. Αν x_1 , x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-2x+(\lambda-1)=0$ να βρεθεί το λ ώστε να ισχύει: $3x_1^3+8x_1x_1^2+8x_1^2x_2+3x_2^3=192$ $3(x_1+x_2)\left[(x_1+x_2)^2-3x_1\cdot x_2\right]+8x_1x_2(x_1+x_2)=192\Rightarrow ....\Rightarrow\lambda=-83$

45. Να δείξετε ότι αν x_1 , x_2 οι ρίζες της $x^2-4x-3=0$ τότε η εξίσωση που έχει ρίζες τις $\rho_1=\dfrac{x_1+1}{x_2+1}$, $\rho_1=\dfrac{x_2+1}{x_1+1}$ είναι η $x^2-16x+1=0$.

46. Έστω ρ_1 , ρ_2 οι ρίζες της $2\lambda x\cdot(x-1)+x(x-2)+3\lambda=0.$ και ισχύει $\rho_1^{\,2}+\rho_2^{\,2}=8$, τότε να βρεθεί το λ. $\lambda=\dfrac{-7\pm\sqrt{17}}{8}$

47. Αν ρ_1 , ρ_2 οι ρίζες της $x^2-(\lambda+1)x+\lambda=0$, να βρεθεί το λ ώστε:

- $\rho_1=\rho_2$
- ρ_1 , ρ_2 αντίστροφες.
- ρ_1 , ρ_2 αντίθετες.
- $3\rho_1+2\rho_2=7$
- $\dfrac{\rho_1}{\rho_2}+\dfrac{\rho_2}{\rho_1}=2$

48. Να βρεθεί η εξίσωση β/ βαθμού με ρίζες τους $5+\sqrt{3},5-\sqrt{3}$.

49. Στη Τρίπολη της Αρκαδίας το άθροισμα της μέγιστης και της ελάχιστης θερμοκρασίας είναι +40 C ενώ το γινόμενό τους -120 C. Τότε η μέγιστη θερμοκρασία είναι........... και η ελάχιστη είναι ....

50. Οι αριθμοί που έχουν άθροισμα 160 και γινόμενο 159 είναι: ....

51. Αν x_1 , x_2 οι ρίζες της $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0\ (\alpha\neq 0)$ τότε η εξίσωση με ρίζες τους αριθμούς $\dfrac{x_1}{x_2}$; $\dfrac{x_2}{x_1}$ είναι η $\alpha\gamma x^2-\left(\beta^2-2\alpha\gamma\right)x+\alpha\gamma=0$

52. Αν x_1 , x_2 οι ρίζες της $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0\,(\alpha\neq 0)$ τότε η παράσταση $A=\frac{3}{2x_1-1}+\frac{3}{2x_2-1}$ είναι ίση με $\frac{-6(\alpha+\beta)}{\alpha+2\beta+4\gamma},(\alpha\neq 0)$

53. Αν ρ_1 , ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-\alpha x+\beta=0\,(\beta\neq 0)$ τότε η εξίσωση με ρίζες τους $\rho_1{}^{-2}$, $\rho_2{}^{-2}$ είναι: $\beta^2x^2-(\alpha^2-2\beta)x+1=0$

54. Να δείξετε η εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ως ρίζες τους αριθμούς $3-\sqrt{2},3+\sqrt{2}$ είναι η $x^2-6x+7=0$

55. Έστω η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\gamma<0$. Τότε να δείξετε ότι $\Delta+4\cdot\alpha^2\cdot P+\alpha\cdot\beta\cdot S=0$

56. Έστω η εξίσωση $(\lambda-2)x^2+5x-8=0$. Να βρεθεί το λ ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα $\lambda=\frac{39}{32}$

57. Έστω $\alpha x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}=0$, $\alpha\neq 0$. Τότε να δείξετε ότι: $\frac{S}{P}=-\frac{\beta}{\gamma}$

58. Να βρεθεί το λ ώστε η εξίσωση $2x^2-3\lambda x+\lambda^2=0$ να έχει ρίζα το 1.

59. Να βρεθεί το λ ώστε η εξίσωση $x^2-2(\lambda+2)x+2\lambda^2-17=0$ να έχει διπλή ρίζα (λ=7ή -3)

60. Αν η εξίσωση $3x^2+5x-2\kappa^2+10\kappa-12=0$ έχει ρίζα το -1 , , να βρεθεί το κ αν υπάρχει.

61. Αν η εξίσωση $5x^2-9\kappa-\kappa+6=0$ έχει ρίζα το -1, να βρεθεί το κ αν υπάρχει.

62. Να βρεθούν τα κ,λ ώστε η εξίσωση $x^2+(\kappa-1)x-\lambda^2=0$ να έχει διπλή ρίζα το 0.

63. Αν η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\alpha\neq 0$ έχει ρίζες τις x_1,x_2 τότε να δείξετε ότι η εξίσωση $\alpha^2x^2+3\alpha\beta x+2\beta^2+\alpha\gamma=0$ έχει ρίζες τους αριθμούς $2x_1+x_2, 2x_2+x_1$

64. Να βρεθεί το λ ώστε η εξίσωση $2x^2+4x+3\lambda-1=0$ να έχει ρίζες που ικανοποιούν τη σχέση: $x_1{}^2+x_2{}^2-2x_1-2x_2=18$ (λ=-3)

65. Αν x_1,x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ και α + β = γ να δειχθεί ότι $(1-x_1{}^2)\cdot(1-x_2{}^2)=4x_1\cdot x_2$

66. Αν $\alpha\gamma<0$ και x_1,x_2 οι ρίζες της $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ τότε να δειχθεί ότι : $|x_1-x_2|=|x_1|+|x_2|$

67. Να βρεθούν τα κ , λ ώστε η εξίσωση $5x^2+(2\kappa-1)x+\lambda+4=0$ να έχει μοναδική ρίζα το 0

68. Να δείξετε ότι η εξίσωση $(\alpha^2+\beta^2)x^2-2\alpha\gamma x-\beta^2+\gamma^2=0$ με $\alpha^2+\beta^2<\gamma^2\,(\beta\neq 0)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

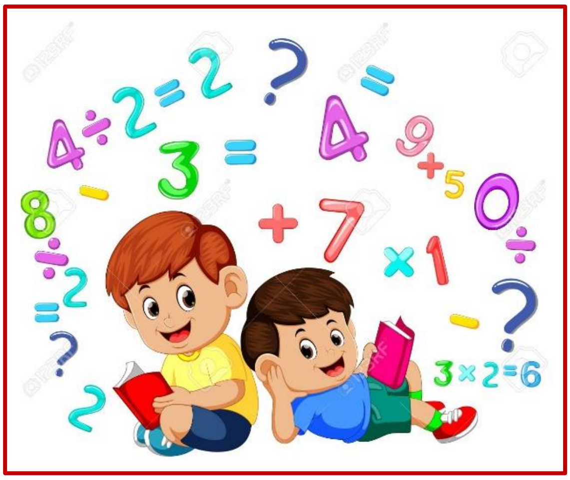
69. Να βρεθεί το λ ώστε το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών της εξίσωσης $2\lambda x(x-1)-x(x-2)+3\lambda=0$ να ισούται με 4 (λ=0 ή 7/12)

70. Να βρεθεί η εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{\mu}{\nu}$ και $\frac{\nu}{\mu}$ $(\mu,\nu\neq 0)$

71. Αν μια ρίζα της $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0\ (\alpha\neq 0)$ $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0\ (\alpha\neq 0)$ είναι διπλάσια της άλλης, τότε να δείξετε ότι $9\alpha\gamma=2\beta^2$

72. Αν $\alpha,\gamma\neq 0$ και $\frac{\gamma^2}{2\alpha}+\frac{\alpha}{2}+\gamma=0$, τότε να δείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$: έχει δύο ρίζες άνισες.

73. Να βρεθεί το λ ώστε το τριώνυμο $A=4x^2-(3\lambda-1)x+\lambda^2-2$ γίνετε τέλειο τετράγωνο .



74. $x = 1, 2, \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$