ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

2. ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

2.1. ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ

- **Ρητοί αριθμοί** ονομάζονται οι αριθμοί που δύναται να γραφούν σε κλασματική μορφή.
  Παραδείγματα: $\frac{14}{5}=2{,}8$, $-\frac{9}{8}=-1{,}25$, $\frac{60}{11}=5{,}454545\dots$, $2{,}25=\frac{225}{100}$
- **Άρρητοι αριθμοί** ονομάζονται οι αριθμοί που δεν δύναται να γραφούν σε κλασματική μορφή.
  Παραδείγματα: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\pi = 3{,}14\dots$, $e = 2{,}71\dots$
- Οι **Πραγματικοί Αριθμοί** αποτελούνται από τους Ρητούς αριθμούς και από τους Αρρήτους αριθμούς.

1. Ιδιότητες πρόσθεσης-πολλαπλασιασμού

0: Ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης
1: Ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	$\alpha+\beta=\beta+\alpha$	$\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$
Προσεταιριστική	$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$	$\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$
Ουδέτερο Στοιχείο	$\alpha+0=\alpha$	$\alpha\cdot 1=\alpha$
Αντίθετος/ Αντίστροφος Αριθμού	$\alpha+(-\alpha)=0$	$\alpha\bullet\frac{1}{\alpha}=1,\ \alpha\neq 0$
Επιμεριστική	$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$	

2. Αφαίρεση

$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$ στον μειωτέο προσθέτουμε τον αντίστροφο του αφαιρετέου

3. Διαίρεση

$\frac{\alpha}{\beta}=\alpha\cdot\frac{1}{\beta}$. Πολλαπλασιάζουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

4. Βασικές ιδιότητες στις πράξεις

- Πρόσθεση και πολλαπλασιασμός ισοτήτων κατά μέλη Αν $\left\langle\begin{matrix}\alpha=\beta\\ \gamma=\delta\end{matrix}\right\rangle$ τότε $\left\langle\begin{matrix}\alpha+\gamma=\beta+\delta\\ \alpha\cdot\gamma=\beta\cdot\delta\end{matrix}\right\rangle$

- Νόμοι της διαγραφής. $\left\langle \begin{array}{c} \alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma=\beta+\gamma \\ \alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha\cdot\gamma=\beta\cdot\gamma \text{ με } \gamma\neq 0 \end{array} \right\rangle$
- Βασική ιδιότητα γινομένου. $\alpha\cdot\beta=0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \alpha=0 \\ \text{ή} \\ \beta=0 \end{array} \right\}$ και $\alpha\cdot\beta\neq 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \alpha\neq 0 \\ \text{και} \\ \beta\neq 0 \end{array} \right\}$
- Κανόνας προσήμων. $\left\langle \begin{array}{c} (-1)\cdot\alpha=-\alpha \\ (-\alpha)\cdot\beta=-\alpha\cdot\beta \\ (-\alpha)\cdot(-\beta)=\alpha\cdot\beta \end{array} \right\rangle$
- Απαλοιφή παρενθέσεων. $\left\langle \begin{array}{c} -(\alpha+\beta=-\alpha-\beta) \\ +(\alpha+\beta)=\alpha+\beta \end{array} \right\rangle$
- Λογισμός κλασμάτων. $\left\langle \begin{array}{c} \frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma} \\ \frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\delta}=\frac{\alpha\cdot\delta+\beta\cdot\gamma}{\gamma\cdot\delta} \\ \frac{\alpha}{\gamma}\cdot\frac{\beta}{\delta}=\frac{\alpha\cdot\beta}{\gamma\cdot\delta} \\ \frac{\alpha}{\beta}/\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma} \end{array} \right\rangle$

5. Ιδιότητες αναλογιών.

- Χιαστή ιδιότητα $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\cdot\delta=\beta\cdot\gamma$
- Αλλαγή μέσων όρων $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$
- Αλλαγή άκρων όρων $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}$
- Αντιστροφή κλασμάτων $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha}=\frac{\delta}{\gamma}$
- $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha\pm\beta}{\beta}=\frac{\gamma\pm\delta}{\delta}$
- $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\varepsilon}{\zeta} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha+\gamma+\varepsilon}{\beta+\delta+\zeta}$

6. Δυνάμεις

Ορισμοί

- $\alpha^{\nu}=\underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdots\alpha}_{\nu \text{ φορές}}$ για $\nu>1$
- $\alpha^{1}=\alpha$
- $\alpha^{0}=1$ με $\alpha\neq 0$
- $\alpha^{-\nu}=\frac{1}{\alpha^{\nu}}$

Ιδιότητες δυνάμεων ν , μ ακέραιοι.

- $\alpha^{\mu}\cdot\alpha^{\nu}=\alpha^{\mu+\nu}$
- $\alpha^{\nu}\cdot\beta^{\nu}=(\alpha\cdot\beta)^{\nu}$

- $\left(\alpha^{\mu}\right)^{\nu} = \alpha^{\mu\cdot\nu}$
- $\dfrac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \alpha^{\mu-\nu}$
- $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \dfrac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}$
- $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$

7. Βασικές ταυτότητες

- $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$
- $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta$
- $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) = \alpha^2-\beta^2$
- $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3+\beta^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2$
- $(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3-\beta^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2$
- $\alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)\cdot\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right)$
- $\alpha^3-\beta^3 = (\alpha-\beta)\cdot\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\right)$
- $(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma$
- $(\alpha+\beta-\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta-2\alpha\gamma-2\beta\gamma$
- $(\alpha-\beta-\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\alpha\gamma+2\beta\gamma$

8. Χρήσιμές ταυτότητες

- $(\alpha+\beta+\gamma)^3 = \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$
- $(\alpha+\beta)^4 = \alpha^4+4\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta^3+\beta^4$
- $\alpha\cdot\beta = \left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)^2$
- Ταυτότητα Euler $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma = \dfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right] =$
  $= (\alpha+\beta+\gamma)\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha\right)$

ΜΕΔΟΔΟΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ

Εδώ θα αναλύσουμε τους πιο συνηθισμένους τρόπους με τους οποίους μπορείτε να επεξεργάζεστε και να αποδεικνύετε τα διάφορα θεωρήματα και τις ασκήσεις.

Οι περισσότερες ασκήσεις έχουν δύο σκέλη: την υπόθεση και το συμπέρασμα. Η υπόθεση αποτελείται από μία ή περισσότερες αλήθειες προτάσεις ομοίως και το συμπέρασμα αποτελείται από μία ή περισσότερες προτάσεις την ορθότητα των οποίων ελέγχουμε.

Αν η πρόταση (Υ) είναι αληθής να συμπεράνουμε ότι και η πρόταση (Σ) είναι αληθής. Αυτή είναι μία κλασική περίπτωση άσκησης την οποία μπορούμε να επεξεργαστούμε με τις ακόλουθες μεθόδους.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ

Α) Με συνεπαγωγή. Η διαδικασία είναι η εξής:
i) Δεχόμαστε την (Υ) ως αληθή. Συνδυάζοντας την αλήθεια της (Υ) με διάφορους γνωστούς ορισμούς αξιώματα ή θεωρήματα αποδεικνύουμε ότι η (Σ) είναι αληθής πρόταση.
Παράδειγμα: Αν $\alpha + \beta = 0$, να αποδείξετε ότι $\alpha^2 - \beta^2 = 0$
Λύση: Η άσκηση αποτελείται από την υπόθεση και το συμπέρασμα.
Υπόθεση: $\alpha + \beta = 0$
Συμπέρασμα: $\alpha^2 - \beta^2 = 0$
Δεχόμαστε την (Υ) ως αληθή, δηλαδή $\alpha + \beta = 0$
Με γνωστές διαδικασίες και χρησιμοποιώντας την (Υ) αποδεικνύουμε την (Σ).

$$\alpha+\beta=0 \Rightarrow \alpha=-\beta \Rightarrow \alpha^2=(-\beta)^2 \Rightarrow \alpha^2=\beta^2 \Rightarrow \alpha^2-\beta^2=0$$

Β) Με ισοδυναμία.
Η διαδικασία είναι η εξής:
Δεχόμαστε την (Σ) ως αληθή. Με αφετηρία την (Σ) και χρησιμοποιώντας το σύμβολο της ισοδυναμίας καταλήγουμε στην (Υ) ή σε κάποια άλλη αληθή πρόταση. Θεωρώντας την αντίστροφη πορεία η απόδειξη της πρότασης είναι φανερή.

Παράδειγμα: $\alpha^2-\beta^2=0 \Leftrightarrow (\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\alpha+\beta=0\\ \text{ή}\\ \alpha-\beta=0\end{matrix}\right\}$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΕΙΣ ΑΤΟΠΟΝ ΑΠΑΓΩΓΗΣ

Δεχόμαστε ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα δηλαδή ότι ισχύει η άρνηση του (Σ). Ξεκινώντας από αυτό και χρησιμοποιώντας το σύμβολο της συνεπαγωγής καταλήγω σε ψευδές συμπέρασμα ΄΄άτοπο΄΄. Αυτό σημαίνει ότι η αφετηρία μου δηλ. η άρνηση του (Σ) είναι ψευδής πρόταση άρα το συμπέρασμα είναι αληθές. Ας δούμε το προηγούμενο παράδειγμα.

$$\alpha^2-\beta^2\neq 0 \Rightarrow (\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)\neq 0 \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\alpha+\beta\neq 0\\ \text{και}\\ \alpha-\beta\neq 0\end{matrix}\right\}, \text{ άτοπο, άρα } \alpha^2-\beta^2=0$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις $1-\alpha^2$ και $x-1$ με $x>0$.
2. Αν $\dfrac{(x+\psi+z+w)^2}{x^2+\psi^2+z^2+w^2}=4$ με ένα τουλάχιστον εκ των $x,\psi,z,w\neq 0$ τότε να δείξετε ότι
$$x=\psi=z=w$$
3. Να δείξετε ότι το τετράγωνο ενός περιττού αριθμού και η διαφορά των τετραγώνων δύο διαφορετικών περιττών αριθμών είναι αντίστοιχα: περιττός και άρτιος αριθμός.
4. Να δείξετε ότι οι αριθμοί $x=\dfrac{1}{\alpha\cdot\beta}+\dfrac{1}{\beta\cdot\gamma}+\dfrac{1}{\gamma\cdot\alpha}$ και με $\psi=\dfrac{\beta\gamma}{1+\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\gamma}{\alpha}}$ $\alpha,\ \beta,\ \gamma\neq 0$ είναι αντίστροφοι.
5. Αν $\dfrac{x}{\psi}=3$ και $A=\dfrac{3x-2\psi}{6x+3\psi}$, $B=\dfrac{2x\psi-5\psi^2}{\psi^2-x^2}$ με $x,\ \psi\neq 0$, τότε να δείξετε ότι: $A=\dfrac{1}{3}$ και $B=-\dfrac{1}{8}$

6. Να δείξετε ότι ο αριθμός $3^{\nu}+3^{\nu+1}+3^{\nu+2}$ είναι πολλαπλάσιο του 13.

7. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $\dfrac{13}{1-\dfrac{1}{3-\dfrac{1}{3}}}$

8. Αν $\dfrac{x}{2}=\dfrac{\omega}{5}=\dfrac{z}{7}$ • και $2x+\omega-z=1$,τότε να βρεθούν οι τιμές των x, ψ, z .

9. Αν $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{2}{5}$ να δειχθεί ότι : $\dfrac{8\alpha-2\beta}{2\beta}=\dfrac{3}{5}$, $\beta\neq 0$

10. Αν $\dfrac{x+2\psi}{x-2\psi}=\dfrac{5}{2}$ να βρεθεί το $\dfrac{x}{\psi}$, $x\neq 2\psi$, $\psi\neq 0$

11. Αν $x+\psi=7$ και $\dfrac{x}{6}=\dfrac{\psi}{8}=\dfrac{\omega}{18}$ να βρεθούν τα x, ψ, ω

12. Αν $\dfrac{x}{\psi}=3$, $\psi\neq 0$ να βρεθούν οι αριθμητικές τιμές των παραστάσεων :

$$A=\frac{3x-2\psi}{6x+3\psi} \quad \text{και} \quad B=\frac{2x\psi-5\psi^2}{\psi^2-x^2}$$

13. Αν $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\beta}{\gamma}=\dfrac{\gamma}{\delta}$ με $\alpha,\beta,\gamma,\delta\neq 0$ να δειχθεί ότι: $\dfrac{3\alpha-5\beta+4\gamma}{3\beta-5\gamma+4\delta}=\dfrac{\beta}{\gamma}$ και $\dfrac{\alpha}{\delta}=\left(\dfrac{\beta}{\gamma}\right)^3$

14. Να υπολογιστεί η αριθμητική τιμή της παράστασης :

$$A=\left[\left(x^3\cdot\psi^4\right)^4\cdot\left(x^4\cdot\psi^4\right)^{-3}\right]:\left(x^2:\psi^{-1}\right)^{-4} \quad \text{για } x=27 \text{ και } \psi=\frac{1}{27}$$

15. Αν $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=5$ να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων :

$$\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}, \qquad \alpha^3+\frac{1}{\alpha^3}, \qquad \alpha^4+\frac{1}{\alpha^4}$$

16. Αν $\alpha,\beta,\gamma\in\Re^*$ και ισχύουν $\alpha+\beta+\gamma=1$, $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=0$

να δείξετε ότι $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$

17. Να αποδειχθεί η ταυτότητα De Moivre

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\alpha^2\beta^2-2\beta^2\gamma^2-2\gamma^2\alpha^2=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha-\beta-\gamma)$$

18. Να αποδειχθεί η ταυτότητα Lagrange

$$(\alpha^2+\beta^2)(x^2+\psi^2)=(\alpha x+\beta\psi)^2+(\alpha\psi-\beta x)^2$$

19. Αν $\beta=\alpha+\gamma$ τότε να δειχθεί ότι $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=2(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)$

20. Αν $\alpha,\beta,\gamma\in\Re_+$ και $\alpha+\beta+\gamma=1$ τότε να δείξετε ότι :

$$\alpha^2+\beta^2-\gamma^2 = 1-2\gamma-2\alpha\beta$$

21. Αν $\alpha+\beta+\gamma=1$ τότε να δείξετε ότι: $\dfrac{\gamma^2+1-2\gamma}{\alpha+\beta}+\dfrac{\alpha^2+1-2\alpha}{\beta+\gamma}+\dfrac{\beta^2+1-2\beta}{\alpha+\gamma}=2$ α,β,γ

κατάλληλα ώστε να ορίζετε η παράσταση.

22. Αν $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=0$, α, β, γ $\in \Re^*$ να δείξετε ότι: $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

23. Αν $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=0$, α, β, γ $\in \Re^*$ τότε να δειχθεί ότι :

$$\left(\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\alpha\beta}\right)^2=\left(\frac{1}{\beta\gamma}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha\gamma}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha\beta}\right)^2$$

24. Αν x,ψ,z πραγματικοί αριθμοί να δειχθεί ότι: $\left(\frac{x+\psi+z}{2}\right)^2-\left(\frac{x+\psi-z}{2}\right)^2=(x+\psi)z$

25. Να δειχθεί ότι: $\left[\left(x^{\psi^{-\beta}}\right)^{\psi^{\psi+\beta}}\right]^{\psi}=\left(x^{\psi^{\psi}}\right)^{\psi}$ όπου x, ψ, β ακέραιοι διάφοροι του μηδενός.

26. Αν $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=5$ να υπολογιστεί το $x^3+\frac{1}{x^3}$. $x\neq 0$

27. Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ α, β, γ $\in \Re^*$ να δειχθεί ότι : $\alpha^2+\beta^2=-\beta\gamma-2\alpha\beta-\alpha\gamma$

28. Να απλοποιηθεί η παράσταση: $\frac{\alpha^2-(\beta+\gamma)^2}{\alpha^2-\beta^2}\cdot\frac{\alpha^3-\beta^3}{(\alpha+\beta)^2-\gamma^2}\cdot\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}$

29. Αν $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=2$ να δειχθεί ότι: $\alpha^6+\beta^6+3\alpha^2\beta^2(\alpha^2+\beta^2)=8\alpha^3\beta^3$

30. Να λυθεί: $(3x-5)^2+(2\psi+1)^2+(6z-3)^2=0$

31. Να δείξετε ότι για τους πραγματικούς αριθμούς α,β,γ, ισχύει

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=\frac{1}{2}\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]$$

32. Να δειχθεί ότι το τετράγωνο κάθε φυσικού αριθμού α είναι της μορφής 3ρ ή 3ρ+1.

2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. Σύγκριση αριθμών.

- Αν $\alpha-\beta=0$ τότε $\alpha=\beta$
- Αν $\alpha-\beta>0$ τότε $\alpha>\beta$
- Αν $\alpha-\beta<0$ τότε $\alpha<\beta$

2. Χρήσιμες σχέσεις

- ($\alpha>0$ και $\beta>0$) $\Rightarrow$ $\alpha+\beta>0$
- ($\alpha<0$ και $\beta<0$) $\Rightarrow$ $\alpha+\beta<0$
- α, β ομόσημοι $\Leftrightarrow$ $\alpha\cdot\beta>0\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\beta}>0$
- α, β ετερόσημοι $\Leftrightarrow$ $\alpha\cdot\beta<0\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\beta}<0$
- $\alpha^2\geq 0$, για κάθε $\alpha\in$ R (Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $\alpha=0$)

3. Διάταξη και πράξεις

Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύουν

- $\alpha > \beta$ τότε $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$
- $\alpha > \beta$ και $\gamma > 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$
- $\alpha > \beta$ και $\gamma < 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$

- **Πρόσθεση ομόρροπων ανισοτήτων κατά μέλη δίνει ομόρροπη ανισότητα:**
  $\left.\begin{cases}\alpha > \beta \\ \gamma > \delta\end{cases}\right\} \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$

- **Αφαίρεση ανισοτήτων κατά μέλη δεν επιτρέπεται** π.χ $\left.\begin{cases}3 < 5 \\ 1 < 4\end{cases}\right\} \overset{(-)}{\Rightarrow} 2 < 1$ (άτοπο)

- **Πολλαπλασιασμός ομόρροπων ανισοτήτων κατά μέλη επιτρέπεται μόνο αν δύο διαγώνια μέλη είναι ομόσημα.** Αν είναι θετικά προκύπτει ομόρροπη ανίσωση , αν είναι αρνητικά προκύπτει αντίρροπη. $\left.\begin{matrix}\alpha < \beta \\ \gamma < \delta \\ \alpha > 0 \\ \delta > 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \delta$ και $\left.\begin{matrix}\alpha < \beta \\ \gamma < \delta \\ \alpha < 0 \\ \delta < 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$ (Για τις ανάγκες μας ο πολλαπλασιασμός επιτρέπεται μόνο αν όλα τα μέλη είναι θετικά).

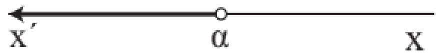
- **Διαίρεση ανισοτήτων κατά μέλη δεν επιτρέπεται**
- π.χ : $\left.\begin{cases}12 < 20 \\ 3 < 4\end{cases}\right\} \Rightarrow 4 < 5$, $\left.\begin{cases}12 < 20 \\ 3 < 10\end{cases}\right\} \Rightarrow 4 > 2$, $\left.\begin{cases}12 < 20 \\ 6 < 10\end{cases}\right\} \Rightarrow 2 = 2$
- Μεταβατικότητα : $\left.\begin{cases}\alpha < \beta \\ \beta < \gamma\end{cases}\right\} \Rightarrow \alpha < \gamma$

4.Διάταξη και δυνάμεις

- Αν α , β θετικοί αριθμοί και ν φυσικός διάφορος του μηδενός ισχύει: $\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu \geq \beta^\nu$

5. Διαστήματα

ΔΙΑΣΤΗΜΑ	ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ	ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ
x΄ α β x	$\alpha \leq x \leq \beta$	[α, β]
x΄ α β x	$\alpha \leq x < \beta$	[α, β)
x΄ α β x	$\alpha < x \leq \beta$	(α, β]
x΄ α β x	$\alpha < x < \beta$	(α, β)

	$x \geq \alpha$	$[\alpha, +\infty)$
	$x > \alpha$	$(\alpha, +\infty)$
	$x \leq \alpha$	$(-\infty, \alpha]$
	$x < \alpha$	$(-\infty, \alpha)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν α > β και α, β ετερόσημοι και διάφοροι του μηδενός τότε:

α. $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$ β. $\frac{1}{\beta} > \frac{1}{\alpha}$

γ. $\alpha > \frac{1}{\beta}$ δ. $\beta > \frac{1}{\alpha}$

2. Αν α > β και γ > δ τότε η παράσταση Α = (α - β) (δ - γ) είναι:

α. $A \geq 0$ β. $A \leq 0$ γ. $A > 0$ δ. $A < 0$

3. Η σχέση $\alpha^2 + \beta^2 \leq 0$ ισχύει:

α. για όλα τα α, $\beta \in \mathbb{R}$ β. για $\alpha \leq 0$ και $\beta \leq 0$

γ. για $\alpha = 0$ και $\beta = 0$ δ. δεν ισχύει ποτέ

4. Αν $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$ τότε ισχύει:

α. $\alpha^2 + \beta^2 \geq 0$ β. $\alpha^2 + \beta^2 > 0$

γ. $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ δ. $\alpha^2 + \beta^2 \leq 0$

5. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί. Ποιό διάστημα είναι μεγαλύτερο;

α. [α, β) β. (α, β]
γ. (α, β) δ. [α, β]

6. Αν α, β, γ, δ πραγματικοί αριθμοί με α < β < γ < δ τότε ισχύει:

α. $\alpha = \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4} = \delta$ β. $\alpha < \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4} < \delta$

γ. $\alpha > \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4} > \delta$ δ. $\alpha > \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4} < \delta$

7. Από τα ακόλουθα, δεν ισχύει:

α) ότι α > β και γ > δ συνεπάγεται α + γ > β + δ
β) ότι α > β και γ > δ συνεπάγεται α – γ > β - δ

γ) ότι $\alpha\cdot\beta=0$ συνεπάγεται ότι είτε $\alpha = 0$ είτε $\beta = 0$
δ) ότι $\alpha + \beta > \alpha + \beta$ είναι αδύνατο

8. Από τα ακόλουθα για θετικούς αριθμούς α, β, γ, δ, δεν ισχύει:
α) ότι $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ συνεπάγεται $\alpha\cdot\gamma > \beta\cdot\delta$
β) ότι $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ συνεπάγεται $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\delta}$
γ) ότι $\alpha + \beta > \gamma + \delta$ συνεπάγεται $\alpha + \beta - \gamma - \delta > 0$
δ) ότι $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ συνεπάγεται $(\alpha - \beta)\cdot(\gamma - \delta) > 0$

9. Εάν $\alpha - \beta \le x \le \gamma - \delta$ και $\beta - \alpha \le y \le \delta - \gamma$, τότε:
α. $x = y$ β. $x = -y$
γ. $x \cdot y = 1$ δ. $x \cdot y = -1$

10. Έστω α μη αρνητικός πραγματικός αριθμός, τότε:
α) για κάθε α ισχύει ότι $\alpha^2 > \alpha$
β) για κάθε α ισχύει ότι $\alpha^2 < \alpha$
γ) για κάθε α ισχύει ότι $\alpha^2 = \alpha$
δ) τίποτα από τα παραπάνω

11. Έστω α, β, γ θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $\alpha < \beta < \gamma$, τότε:
α) $(\gamma - \beta)\cdot(\beta - \alpha) > 0$
β) $(\gamma - \beta)\cdot(\alpha - \beta) > 0$
γ) $(\gamma - \alpha)\cdot(\beta - \alpha) = 0$
δ) τίποτα από τα παραπάνω

12. Εάν $(\alpha - \beta)\cdot(\gamma - \delta) \ge 0$, τότε οι $(\alpha - \beta)$ και $(\gamma - \delta)$, αντιστοίχως, είναι:
α) οπωσδήποτε αρνητικοί
β) οπωσδήποτε θετικοί
γ) οπωσδήποτε μηδέν
δ) τίποτα από τα παραπάνω

13. Εάν $\alpha > 1 > \beta$, τότε:
α) $\alpha + \beta > 1 + \alpha\cdot\beta$
β) $\alpha + \beta < 1 + \alpha\cdot\beta$
γ) $\alpha + \beta = 1 + \alpha\cdot\beta$
δ) $\alpha + \beta = \alpha\cdot\beta$

14. Ποια από τις παρακάτω σχέσεις ισχύει :

α. $x+\frac{1}{x}\ge 2$ για $x < 0$	β. $x+\frac{1}{x}\ge 2$ για $x > 0$
γ. $x+\frac{1}{x}\le 2$ για όλα τα x	δ. $x+\frac{1}{x}\le 2$ για $x > 0$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ									
1.α	**2.δ**	**3.γ**	**4.β**	**5.δ**	**6.β**	**7.β**	**8.β**	**9.β**	**10.δ**
11.α	**12.δ**	**13.α**	**14.β**						

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

1. Να δειχθεί ότι: $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$ α,β πραγματικοί αριθμοί.
2. Αν $\alpha > 0$ να δείξετε ότι : $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$
3. Για τους πραγματικούς αριθμούς α,β,x , να αποδείξετε τις παρακάτω ανισώσεις:
   - $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \geq 0$, $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 \geq 0$
   - $x^2 + x + 1 > 0$, $x^2 - x + 1 > 0$
4. Αν $\alpha + \beta = 2$ και $\alpha\beta > 0$ τότε να δείξετε ότι $0 < \alpha < 2$
5. Αν $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ και $\alpha, \beta > 0$ να δείξετε ότι: $\alpha^4 + \beta^4 \geq \frac{1}{2}$
6. Αν $x, \psi > 0$ να δειχθεί ότι: $\left(\frac{x}{2} + \frac{\psi}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{\psi}\right) \geq 4$
7. Αν $x, \psi \in \Re^*$ να αποδειχθούν τα παρακάτω:

   α) $x + \psi \geq 2\sqrt{x\psi}$ β) $(x+1)(\psi+1)(x+\psi) \geq 8x\psi$
8. Αν α, β, γ είναι πλευρές τριγώνου να δείξετε ότι:

   $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 < 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$
9. Να δείξετε ότι: αν $\alpha,\beta \in \Re_+$ τότε $\alpha^3 + \beta^3 \geq \alpha\beta \cdot (\alpha + \beta)$
10. Να δείξετε ότι: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$
11. Αν $\kappa,\lambda,x > 0$ με $\kappa < \lambda$ να δείξετε ότι: $\frac{\kappa + 2x}{\lambda + 2x} > \frac{\kappa}{\lambda}$
12. Αν $\kappa,\lambda,\alpha,\beta,x > 0$ με $\kappa < \lambda$ και $\beta < \alpha$ να δείξετε ότι: $\frac{\kappa + \alpha x}{\lambda + \beta x} > \frac{\kappa}{\lambda}$
13. Αν α,β είναι θετικοί αριθμοί και α+β = 1 να δείξετε ότι:

    á) $\alpha \cdot \beta \leq \frac{1}{4}$ και â) $\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \geq 8$
14. Για κάθε $\alpha,\beta,\gamma \in \Re$ να δείξετε ότι: $2\beta^2 + \alpha^2 + \gamma^2 \geq 2\beta \cdot (\alpha + \gamma)$
15. Αν $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ να δείξετε ότι: $\alpha < \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{4} < \delta$
16. Να δείξετε ότι: $(\bullet\kappa^2 + \lambda^2) \cdot \left(\frac{1}{\bullet\kappa^2} + \frac{1}{\lambda^2}\right) \geq (\kappa + \lambda) \cdot \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\lambda}\right)$ $\kappa, \lambda \neq 0$
17. Να δείξετε ότι: $\frac{10^{1992} + 1}{10^{1993} + 1} > \frac{10^{1993} + 1}{10^{1994} + 1}$
18. Αν $0 < \alpha < 1$ και ν φυσικός αριθμός με $\nu > 1$ να δείξετε ότι:

    1) $\alpha^\nu < \alpha$ 2) $\left(\frac{2}{5}\right)^{1994} + \left(\frac{3}{5}\right)^{1994} < 1$

3) $3^{2000}+4^{2000}<7^{2000}$

19. Να αποδειχθεί η ανισότητα: B - C - S

- $(\alpha^2+\beta^2)\cdot(x^2+\psi^2)\geq(\alpha x+\beta\psi)^2$
- $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\cdot(x^2+\psi^2+z^2)\geq(\alpha x+\beta\psi+\gamma z)^2$
- Αν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \Re_+^*$ και $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1$ να δειχθεί ότι:

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\leq\sqrt{3}$$