2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Ορισμός. $|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$ ή $|\alpha| = \max\{\alpha, -\alpha\}$

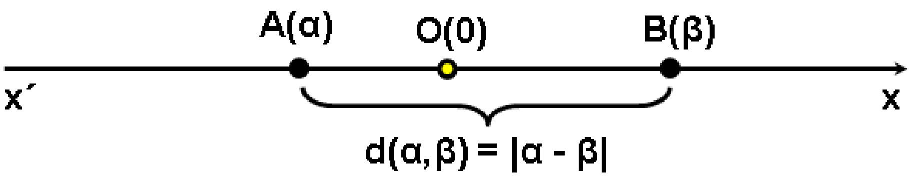
Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύουν:

- $|\alpha| = |-\alpha| \geq 0$
- $|\alpha| \geq \alpha$ και $|\alpha| \geq -\alpha$ δηλαδή $-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$
- $|\alpha|^2 = \alpha^2$
- $|\alpha| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$
- Αν $\theta > 0$, τότε: $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$
- $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha$ ή $x = -\alpha$
- $|x| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta$
- $|x| \geq \theta \Leftrightarrow x \leq -\theta$ ή $x \geq \theta$

Ιδιότητες:

- $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$
- $\left|\frac{\alpha}{\alpha}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$
- $\big||\alpha| - |\beta|\big| \leq |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$
- $|\alpha^\nu| = |\alpha|^\nu$
- $\alpha^\nu \leq \beta^\nu \Leftrightarrow \alpha \leq \beta$ για ν περιττό
- $\alpha^\nu \leq \beta^\nu \Leftrightarrow |\alpha| \leq |\beta|$ για ν άρτιο

Απόσταση δυο αριθμών



Το μήκος του τμήματος ΑΒ λέγεται απόσταση των αριθμών α και β, συμβολίζεται με d(α, β) και είναι ίση με |α- β|. Είναι δηλαδή: **d (α, β) = |α - β|**

Για κάθε x_0 πραγματικό αριθμό και $\rho > 0$, ισχύει:

$$|x - x_0| < \rho \Leftrightarrow d(x, x_0) < \rho \Leftrightarrow x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \Leftrightarrow x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$$

$$|x - x_0| > \rho \Leftrightarrow d(x, x_0) > \rho \Leftrightarrow x \in (-\infty, x_0 - \rho) \cup (x_0 + \rho, +\infty)$$

$$\Leftrightarrow x < x_0 - \rho \text{ ή } x > x_0 + \rho$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν $4 < x < 5$, να γράψετε χωρίς την απόλυτη τιμή την παράσταση

$$A=|x-5|-|4-x|-|x-6|$$

2. Αν $\alpha<\beta<\gamma$ να βρεθεί η τιμή της παράστασης
$$|\alpha-\beta|+|\beta-\gamma|-|\gamma-\alpha|$$

3. Να απλοποιηθεί η $A=|x+1|+|x-1|+|2-x|$
4. Αν $x>2$ να απλοποιηθεί η παράσταση
$A=|x-1|+|x-2|+|x-3|+|1-x|+|2-x|+|3-x|$
5. Να δείξετε ότι: $\big||\alpha|+\alpha\big|+\big||\alpha|-\alpha\big|=2\alpha$.
6. Αν $|x|\le 5$, $|\psi|\le 7$ και $|z|\le 8$ να δείξετε ότι : $-20\le x+\psi+z\le 20$
7. Αν $x=\dfrac{\alpha}{|\alpha|+|\beta|}$, $\psi=\dfrac{\beta}{|\alpha|+|\beta|}$, $\alpha,\beta\neq 0$ να δείξετε ότι : $|x|+|\psi|=1$
8. Αν $\left|\dfrac{\alpha+5}{\alpha-3}\right|=3$ να δείξετε ότι : $\alpha = 7$ ή $\alpha = 1$
9. Αν $\alpha\in\Re$ με $\left|\dfrac{\alpha+36}{\alpha+1}\right|=6$ να δείξετε ότι : $|\alpha|=6$
10. Αν $\alpha\le 2$ να δείξετε ότι : $|2\alpha^3-\alpha^2+5|\le 25$
11. Να συμπληρωθεί ο πίνακας:

ΑΠΟΣΤΑΣΗ	ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ	ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ
$d(x,5)\le 1$		
	$\|x-3\|<2$	
		$(-\infty,-4)\cup(6,+\infty)$
$d(x,-2)>3$		

2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. Τετραγωνική ρίζα μη αρνητικού αριθμού

Η τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον α. ή αλλιώς

$$\left.\begin{cases} x^2=\alpha \\ \alpha\ge 0 \\ x\ge 0\end{cases}\right\}\Leftrightarrow x=\sqrt{\alpha}$$

Ιδιότητες:

Για κάθε α,β θετικούς αριθμούς ισχύουν **:**

- $\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|$
- $\sqrt{\alpha\cdot\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$

- $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$

2. ν-οστή ρίζα μη αρνητικού αριθμού

Η ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός(1) που όταν υψωθεί στην ν, δίνει τον α. ή αλλιώς

$$\left.\begin{matrix} x^{\nu} = \alpha \\ \alpha \geq 0 \\ x \geq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x = \sqrt[\nu]{\alpha}$$

Ιδιοτητες: Έστω α, β ≥ 0

- $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu} = \alpha$
- Αν α ≤ 0 και ν άρτιος $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}} = |\alpha|$
- $\sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta} = \sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$
- $\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}$ με β $\neq$ 0
- $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\kappa} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\kappa}}$
- $\alpha \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\nu} \cdot \beta}$
- $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu \cdot \nu]{\alpha}$
- $\sqrt[\nu \cdot \rho]{\alpha^{\mu \cdot \rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$

3. Δυνάμεις με ρητό εκθέτη

Ορισμός: Αν α > 0, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε: $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$

επίσης ορίζουμε $0^{\frac{\mu}{\nu}} = 0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις

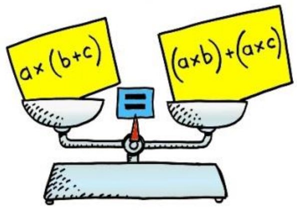
$\sqrt{6+2\sqrt{5}}$	$\sqrt{3-2\sqrt{2}}$	$\sqrt{(x-2)^2} - 2\sqrt{(x-1)^2}$
$\sqrt{9x^4+6x^2+1}$	$\sqrt{\frac{x^4}{9}+\frac{x^2}{3}+\frac{1}{2}}$	$\sqrt[4]{3\sqrt[5]{3\sqrt{3}}}$
$\sqrt{\frac{x^3+2x^2+x}{x^4}}$	$\frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}+\frac{1}{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}$	$\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

2. Να δειχθεί ότι ο αριθμός $A = \sqrt{12+6\sqrt{3}} - \sqrt{12-6\sqrt{3}}$ είναι άρρητος

3. Να μετατραπούν τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητούς παρανομαστές

$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{5}{\sqrt[4]{6}}$	$\frac{1}{2-\sqrt{3}}$
$\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$
$\frac{\sqrt{x^2+\alpha}-x}{\sqrt{x^2+\alpha}+x}$, $(\alpha>0)$	$\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$	$\begin{matrix}\frac{2}{3} = \\ \sqrt{3}\end{matrix}$

4. Αν $\alpha = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$, $\beta = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$, $\gamma = \sqrt{2+\sqrt{3}}$. Να δειχθεί ότι $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma = 1$



5. Αν α, β, γ, δ > 0 να δειχθεί ότι:

   á) $\sqrt{(\alpha+\gamma)\cdot(\beta+\delta)} \geq \sqrt{\alpha\cdot\beta} + \sqrt{\gamma\cdot\delta}$

   â) $\sqrt{(x+1)\cdot(\psi+1)} \geq \sqrt{x} + \sqrt{\psi}$

6. Να συγκριθούν οι αριθμοί $\left(\sqrt{\alpha x+\beta}\right)^2$ και $\sqrt{(\alpha x+\beta)^2}$

7. Να συγκριθούν οι αριθμοί $5-\sqrt{2}$ και $1+\sqrt{6}$

8. Να δείξετε ότι $\sqrt{\nu-1}+\sqrt{\nu+1} < 2\sqrt{\nu}$, $\nu \in N^*$

9. Να δείξετε ότι $\sqrt{\nu^\nu} < \left(\frac{\nu+1}{2}\right)^\nu$, $\nu \in N^*$

10. Αν $2x+3\psi = \sqrt{\alpha^2+12\beta^2}$ και $3x-2\psi = \sqrt{12\alpha^2+\beta^2}$. Να δείξετε ότι: $x^2+\psi^2 = \alpha^2+\beta^2$

11. Αν α ,β ,γ πλευρές τριγώνου , να δείξετε ότι : $\sqrt{\alpha+\beta} > \sqrt{\gamma}$

12. Αν α ,β ,γ πλευρές ορθογωνίου τριγώνου (γ υποτείνουσα), να δειχθεί ότι $\alpha+\beta < \gamma\cdot\sqrt{2}$