ΕΑΠ

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΣΠΟΥΔΕΣ

ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΜΣΜ 51

Ιστορική Εξέλιξη & Διδακτική των Μαθηματικών

ΚΑΛΛΕΡΓΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ

Αριθμός μητρώου φοιτητή : 59832

ΕΡΓΑΣΙΑ ΔΕΥΤΕΡΗ

Η περιπέτεια της Γεωμετρίας

ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ: ΕΥΓΕΝΙΑ ΚΟΛΕΖΑ

1. ΠΡΟΛΟΓΟΣ.

«…Άκουσα, λοιπόν, ότι περί την Ναύκρατιν της Αιγύπτου εγεννήθη κάποιος από τους εκεί θεούς, του οποίου είναι ιερό το όρνεο που ονομάζουν ίβιν, το όνομα δε του θεού τούτου είναι Θεύθ. Αυτός λοιπόν πρώτος εύρε και τους αριθμούς και τον λογαριασμόν και την γεωμετρίαν … [1]» Έτσι περιγράφει την αρχή των αριθμητικής και της γεωμετρίας στο έργο «Φαίδρος» του Πλάτωνα, ο Σωκράτης.

Μια σειρά από ζητήματα μπορούν εύκολα να αναδειχθούν από το πιο πάνω κείμενο. Πρώτον για την προέλευση των μαθηματικών και ιδιαίτερα της γεωμετρίας που είναι το θέμα μας, δεύτερον για τις αντιλήψεις των προελληνικών πολιτισμών για την παραγωγή, και για την φύση τους και τρίτον για τις πραγματικές συνθήκες και διαδικασίες δημιουργίας και εξέλιξής τους.

Είναι όμως η γεωμετρία μαθηματικά και γιατί; Οι απόψεις των μαθηματικών φαίνεται να διίστανται[2].
Ποια άποψη είναι όμως η σωστή;
Σε αυτή την εργασία λοιπόν πρώτον θα προσπαθήσουμε να εξετάσουμε τα πιο πάνω ζητήματα, δεύτερον να κάνουμε μια σύντομη αναφορά στην προσφορά των αρχαίων πολιτισμών, εξειδικεύοντας και προσθέτοντας όπου χρειασθεί νέα στοιχεία που δεν αναφέρθηκαν στην προηγούμενη εργασία και τρίτον θα προσπαθήσουμε να παρουσιάσουμε την ιστορική εξέλιξη και το περιεχόμενο της Ευκλείδειας γεωμετρίας, τις προσπάθειες των πιο σύγχρονων μαθηματικών για την καλύτερη θεμελίωσή της, την ανακάλυψη και το περιεχόμενο των νέων μη Ευκλείδειων γεωμετριών, καθώς και των νέων κλάδων, όπως της Αναλυτικής και της προβολικής γεωμετρίας. Θα ασχοληθούμε ακόμη με τους προβληματισμούς που έθεσε στους φιλοσόφους η γεωμετρία από τον Πλάτωνα έως και τους Καντ και Μιλλ
Στην παρούσα ηλεκτρονική μορφή της εργασίας κρίθηκε σκόπιμο για περισσότερες πληροφορίες στον αναγνώστη να δοθούν με ενεργές υπερσυνδέσεις (Links) οι βιογραφίες των σημαντικότερων προσώπων, όπου αναφέρονται, καθώς και λίγες εικόνες και σχήματα που συμβάλουν καλύτερα στην κατανόηση και την τεκμηρίωση του κειμένου.

2. ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

2.1. Προελληνικά χρόνια

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, στην προηγούμενή μου εργασία, τα μαθηματικά όντας σύμφυτα με την φύση της αντίληψης (και όχι μόνον του ανθρώπινου είδους) για τον κόσμο, καλλιεργήθηκαν και αναπτύχθηκαν με την πάροδο των αιώνων παράλληλα με την εξέλιξη του ανθρώπινου πολιτισμού συντελώντας και επηρεάζοντάς την καθοριστικά.
Αναμφίβολα από τους πρώτους πολιτισμούς που έχουμε εμφανή δείγματα για την ανάπτυξη των μαθηματικών και ιδιαίτερα της γεωμετρίας είναι αυτός των Αιγυπτίων με τους οποίους οι Έλληνες ήρθαν ομολογουμένως σε επαφή, όπως και των λαών της Μεσοποταμίας, των Ινδών και των Κινέζων, αλλά και του προελληνικού Μινωικού πολιτισμού.
Αποδείξεις για το επίπεδο και την φύση των τότε γνώσεων είναι πρώτα από όλα το σύνολο των αρχαίων μνημείων που έχουν διασωθεί, όπως οι ***πυραμίδες*** και οι αρχαίοι ***ναοί*** και ***ανάκτορα (Καρνάκ, Κνωσού),*** όπως και αυτών που αναφέρονται σε ιστορικά κείμενα όπως ***οι κρεμαστοί κήποι της Βαβυλώνας***, (που προϋπόθεταν αναμφισβήτητα υψηλές γνώσεις γεωμετρίας και μηχανικής). Υπάρχουν όμως αποδείξεις και σε πολλές άλλες ιστορικές πηγές, όπως σε ανάγλυφες πινακίδες και παπύρους που έχουν ως τις μέρες μας διασωθεί και αποτέλεσαν μετά την αποκρυπτογράφηση της γλώσσας τους αντικείμενα μελέτης, καθώς επίσης και σε κείμενα μεταγενέστερων ιστορικών όπως ο Ηρόδοτος, ο Πλούταρχος κ.α. .
Όσον αφορά στις αντιλήψεις των προελληνικών πολιτισμών για την παραγωγή, αλά και την φύση των μαθηματικών, όπως φαίνεται και στο πιο πάνω κείμενο, αποτέλεσε κοινή αντίληψη σε όλους τους παραπάνω πολιτισμούς η ***θεϊκή προέλευση*** και η ***αποκάλυψη*** των μαθηματικών, καθώς και η θεοποίηση ή η μυθοποίηση κατεξοχήν φωτισμένων προσώπων που συνέβαλλαν ουσιαστικά στην ανάπτυξή τους ή ακόμη και η επινόησή τέτοιων προσώπων, έτσι ώστε να τους αποδίδεται και να δικαιολογείται με αυτό τον τρόπο, το σύνολο της πιο πριν από αυτούς γνώσης. Παρόμοιο φαινόμενο είναι στην αρχαία ελληνική μυθολογία και οι περιπτώσεις του ***Ασκληπιού*** στην ιατρική και του ***Προμηθέα*** στην ανακάλυψη της φωτιάς, όπως και κατά πολλούς πιθανότατα του ***Θαλή,*** του ***Πυθαγόρα*** και του ***Ευκλείδη***.
Σύμφωνα με τον Ηρόδοτο, τον πρώτο που έψαξε να βρει τις αιτίες για την ανάπτυξη της γεωμετρίας (όπως και των άλλων ιστορικών γεγονότων) πέρα απ' τους μύθους, γι' αυτό και θεωρείται ο «πατέρας» της Ιστορίας, η γεωμετρία (ως μέτρηση της γης, που λέει και τ' όνομά της) γεννήθηκε στην Αίγυπτο απ' την ανάγκη για την επανατοποθέτηση των ορίων των χωραφιών που χάνονταν πολλές φορές τον χρόνο εξαιτίας των πλημυρών του Νείλου ποταμού. Έτσι γεννήθηκε η ανάγκη να υπάρξουν ειδικοί, οι «αρπεδονάπτες» 2, που

τουλάχιστον από το 2000π.Χ., με την βοήθεια ενός σχοινιού της «αρπεδόνης» 3 με κόμπους, πιθανόν στα 3, στα 3+4=7 και στα 7+5=12 μέτρα [3]σχημάτιζαν ορθογώνιο τρίγωνο, για να αναπασσαλώσουν τα όρια των χωραφιών. Σχετικές αναφορές δεν έχουν σωθεί όμως εικάζεται η γνώση του πυθαγορείου θεωρήματος[4] γιατί και οι διαστάσεις αρκετών κτισμάτων είναι ακέραια πολλαπλάσια πυθαγορείων τριάδων και στον περίφημο πάπυρο του «Rhind (1650 π.Χ)» τμήμα του οποίου εικονίζεται παραπλεύρως [5] αναφέρεται πρόβλημα υπολογισμού εμβαδού ορθογωνίου τριγώνου από τις κάθετες πλευρές του. Όπως είναι λοιπόν πολύ πιθανό το πυθαγόρειο θεώρημα ήταν από τότε γνωστό, όμως μόνο όσον αφορά την χρήση του για πρακτικές ανάγκες ενώ δεν υπάρχει καμία ένδειξη ότι ήταν γνωστή η απόδειξή του και εικάζεται ότι ήταν προϊόν εμπειρικής ανακάλυψης, όπως υποθέτουμε ότι είναι και το σύνολο της όλης γνώσης. Οι Αιγύπτιοι γνώριζαν και χρησιμοποιούσαν μια προσέγγιση του αριθμού $\pi \cong (4/3)^4 \cong 3{,}1604 \ldots$ όπως φαίνεται από τον πιο πάνω πάπυρο, αφού για τον υπολογισμό του εμβαδού του κύκλου[6] χρησιμοποιούσαν τον εξής τύπο: $E = \left(\delta - \frac{1}{9}\delta\right)^2$ που μετασχηματίζεται εύκολα σε: $E = \left(\frac{8}{9}\delta\right)^2 = \left(\frac{16}{9}\rho\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^4 \rho^2$. Στον ίδιο πάπυρο ακόμη φαίνεται και ο υπολογισμός του όγκου κανονικής κόλουρης τετραγωνικής πυραμίδας που ακολουθεί τον ορθό τύπο $V = \frac{\upsilon}{3}(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$ όπου υ το ύψος και α, β οι πλευρές των βάσεων.

Για τους **Βαβυλώνιους** είναι γνωστό ότι γνώριζαν την ύπαρξη πυθαγορείων τριάδων όπως φαίνεται στην παράπλευρη εικόνα της **πινακίδας Plimpton**[7] **322 (1900-1600π.Χ),** που περιέχει παραδείγματα πολλών τέτοιων τριάδων ίσως για την χρήση του πυθαγορείου θεωρήματος για κατασκευές, όπως στους Αιγυπτίους. Η χρήση του μόνον για καθαρά αριθμητικούς (λογιστικούς) λόγους πρέπει μάλλον να αποκλειστεί, εξαιτίας της ύπαρξης της πιο κάτω και παραπλεύρως **πήλινης πινακίδας**[1] **της πρώτης βαβυλωνιακής - περιόδου από την συλλογή του πανεπιστημίου του Yale**, που γράφει μια εξαιρετική προσέγγιση του $\sqrt{2}$, την 1,414213 αντί της σωστής 1,414214, ως μήκος διαγωνίου τετραγώνου πλευράς 1. Οι Βαβυλώνιοι γνώριζαν και αυτοί τον κύκλο ήξεραν να υπολογίζουν το εμβαδόν του (με π=3) ακόμη για αστρονομικούς λόγους τον είχαν χωρίσει σε 360^{o} μοίρες (μέτρο τόξου-γωνίας) που με τις υποδιαιρέσεις της 1o σε 60΄ λεπτά και 3600΄΄, σύμφωνα με το 60δικό τους σύστημα αρίθμησης, διατηρήθηκε ως τις μέρες μας.

Οι **Ινδοί** για τους οποίους έχουν σωθεί έργα όπως το «Sulva Sutra» που περιγράφουν την χρήση του πυθαγορείου θεωρήματος για την κατασκευή βωμών. Η αρχική όμως σύνθεση του έργου [8] στην καλύτερη εκδοχή έγινε ανάμεσα στο 500 και το 200 π.Χ. (και οπωσδήποτε μετά την εποχή του Πυθαγόρα 600 π. Χ.).

Οι αρχαίοι **Κινέζοι** γνώριζαν το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Ως αποκλειστικές πηγές αναφοράς έχουμε γι αυτό το περιεχόμενο δύο κινέζικων έργων, του «Chou-Pei» και του «Chiu-Chang Suan-Shu». Τα έργα όμως αυτά [8] έχουν γραφεί πολλούς αιώνες μετά την εποχή του Πυθαγόρα και σίγουρα πολύ αργότερα από τη σύνθεση των «Στοιχείων» που έγινε από τον Ευκλείδη γύρω στο 300 π. Χ.. Πιθανόν και οι δύο περιπτώσεις να αποτελούν φαινόμενο διάχυσης (κατά Wilder) μετά την εκστρατεία του Μ. Αλεξάνδρου και την μετέπειτα ίδρυση του κράτους των Σελευκιδών.

Κλείνοντας την παράγραφο, που αφορά την προελληνική γεωμετρική γνώση των άλλων λαών, αντιλαμβάνεται κανείς ότι αυτή ήταν εμπειρική, γι' αυτό συχνά και με λάθη, χωρίς ίχνος τεκμηρίωσης, ως γνώση της θεοκρατικής άρχουσας τάξης, άρα προερχόμενη από τους θεούς, άρα και μη επιδεχόμενη καμιάς επιπλέον επιβεβαίωσης ή απόδειξης. Γι' αυτό τον λόγο εξ' άλλου παρέμεινε, από ένα σημείο και μετά, στατική.

2.2. <u>Παράγοντες για την ποιοτική αλλαγή στην Γεωμετρία</u>

Είναι φυσιολογικό λοιπόν ότι με την άνθιση του εμπορίου και την επαφή των πολιτισμών οι πολλοί και συχνά με διαφορετικά αποτελέσματα για το ίδιο θέμα μαθηματικοί τύποι να δημιούργησαν μία (κατά Wilder) πολιτιστική ένταση και κρίση που δεν μπορούσε να επιλυθεί στα πλαίσια των απολυταρχικών και θεοκρατικών προελληνικών κοινωνιών. Η πλέον δουλοκτητική κοινωνία εκείνων τον λαών δεν μπόρεσε να αποτελέσει παράγοντα για την ποιοτική εξέλιξη της γνώσης. Γι' αυτό το λόγο και δεν συμφωνώ απολύτως με τον Η. Eves ότι η ***δουλοκτητική φύση της κοινωνίας*** στην αρχαία Ελλάδα αποτέλεσε παράγοντα για το ποιοτικό άλμα στην γεωμετρία και τις άλλες επιστήμες. Αν και κατανοώ ως εργαζόμενος σε Λύκειο και πολύτεκνος ότι η έλλειψη χρόνου είναι καθοριστικά αρνητικός παράγοντας για την έρευνα, δεν νομίζω ότι μπορεί κανείς να αμφισβητήσει πως ο ελεύθερος χρόνος υπήρχε σε μεγαλύτερη αφθονία στην άρχουσα τάξη των προελληνικών πολιτισμών. Όσον αφορά τους δύο άλλους παράγοντες ***η αγάπη για το κάλος,*** όπως αυτή φαίνεται στην ζωγραφική, την γλυπτική και την αρχιτεκτονική, δεν μπορούμε να την αποκλείσουμε και στους άλλους πολιτισμούς των οποίων η τέχνη ακόμα θαυμάζεται και αποτελεί αντικείμενο διακόσμησης πολλών σύγχρονων κατοικιών. Εκείνο που ίσως εννοεί χωρίς να διατυπώνει πιστεύω ξεκάθαρα ο Eves είναι η αίσθηση της αρμονίας και του μέτρου που απετέλεσαν το ιδανικό της ελληνικής κοινωνίας. Της πληρότητας με όσον το δυνατόν λιγότερα, χωρίς κανένα περιττό και χωρίς καμία υπερβολή. Και αυτό ήταν μία στάση ζωής που τους ξεχώρισε από τους άλλους. *Ήταν και η γη τους τέτοια, χωρίς Νείλο και Ευφράτη. Στεγνός ο τόπος, όλο φως, που τους έδινε λιτή σοδειά, μα τον πονούσαν. Και όντας λίγοι, για να επιζήσουν έπρεπε διπλά απ' τους άλλους να σκεφτούν. Έτσι σιγά-σιγά απόκτησαν αυτό που οι άλλοι είπαν «ελληνικό δαιμόνιο». Κι οι πιο σπουδαίοι απ' αυτούς στο πνεύμα, κάποιοι τους λέγαν φιλοσόφους, ταξίδεψαν μακριά για να γνωρίσουν όσα απ' τους πραματευτές είχαν ακούσει. Και είδαν πράγματα πολλά και θαυμαστά, μα δεν θαμπώθηκαν, γιατί είχαν πάντοτε σαν πρότυπο το μέτρο. Κι όταν τα σύγκριναν κι είδαν πως το ορθό αλλιώς κάθε λαός το ξέρει έψαξαν να 'βρουν το πώς και το γιατί. Και δεν ησύχασαν ώσπου να βρούνε την αλήθεια.* Η ***ερευνητική σκέψη*** των φιλοσόφων έτσι ήρθε. Κι όπως αναφέρει και ο μεγάλος φιλόσοφος και μαθηματικός **Δημόκριτος** :

«*Εγώ, λοιπόν* [9] *περιπλανήθηκα σε περισσότερους τόπους της γης απ' τους ανθρώπους της εποχής μου, ερευνώντας τα πιο μακρινά μέρη, και γνώρισα πάρα πολλές χώρες και κλίματα και άκουσα πάρα πολλούς μορφωμένους ανθρώπους, αλλά στη σύνθεση σχημάτων που συνοδεύονται από απόδειξη κανείς ως τώρα δε με ξεπέρασε, ούτε ακόμη και αυτοί από τους Αιγυπτίους που ονομάζονται Αρπεδονάπτες. Μαζί και με την παραμονή μου σ' αυτούς, έζησα συνολικά οχτώ χρόνια σε ξένη χώρα*».

Έτσι γεννήθηκε η **απόδειξη** και από αυτήν όλες οι επιστήμες, μαζί και η **γεωμετρία**. Εγκαταλείφθηκαν οι εμπειρικές μέθοδοι και εδραιώθηκε η άποψη ότι οι μαθηματικές αλήθειες πρέπει να εξάγονται μέσα από μια ***παραγωγική συλλογιστική***. *Οι* πρώτοι φιλόσοφοι ήταν και μαθηματικοί, γιατί αυτοί κατείχαν όλες τις τότε γνώσεις. Και τα ζητήματα που τέθηκαν και οι θέσεις που τότε διατυπώθηκαν εξακολουθούν να έχουν απήχηση έως σήμερα.

Στη συνέχεια για την πληρότητα αυτής της εργασίας θα παραθέσω συνοπτικά το έργο των αρχαίων Ελλήνων Μαθηματικών, που κατεξοχήν ανάπτυξαν την γεωμετρία, από τους κλασσικούς χρόνους έως την άνοδο του Χριστιανισμού και την αρχή του Μεσαίωνα.

2.3. Κλασσικά χρόνια.

Θαλής *ο Μιλήσιος* (περίπου 630/635π.Χ. - 543π.Χ.), ένας από τους 7 σοφούς της αρχαιότητας μαθηματικός και φιλόσοφος, έχοντας επισκεφθεί κατ' άλλους την Αίγυπτο, κατ' άλλους την Βαβυλώνα, είναι από τους πρώτους που χρησιμοποίησε την ***παραγωγική συλλογιστική***. Σύμφωνα με τον Ηρόδοτο και τον Προκλό θεωρείται ο θεμελιωτής της γεωμετρίας. Σε αυτόν αποδίδεται η απόδειξη του ομώνυμου θεωρήματος και άλλων μαθηματικών προτάσεων, όπως ότι «*ο κύκλος διχοτομείται απ' την διάμετρο*», «*οι προσκείμενες στην βάση ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες*», και ότι «*οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες*» καθώς και η πρόβλεψη μιας ηλιακής εκλείψεως το 585π.Χ.

Ο ***Πυθαγόρας*** *ο Σάμιος* (572-497π.Χ.),υπήρξε ο κατεξοχήν συνεχιστής του έργου του Θαλή. Γεννήθηκε στην Σάμο και έζησε 22 χρόνια στην Αίγυπτο κοντά στο ιερατείο και 12 χρόνια ως αιχμάλωτος των Περσών στην Βαβυλώνα. Επισκέφθηκε ακόμη μετά την απελευθέρωσή του και την Ινδία όπου και μυήθηκε στα μυστήρια των Βραχμάνων [10]. Επέστρεψε 56 χρονών στην Ελλάδα και ίδρυσε τη σχολή των Πυθαγορείων στον Κρότωνα της κάτω Ιταλίας. Σε αυτόν αποδίδεται η απόδειξη του ομωνύμου θεωρήματος που αναφέρεται και ως «*θεώρημα της εκατόμβης*» γιατί όταν το ανακάλυψε θυσίασε στους θεούς 100 βόδια. Σύμφωνα με την φιλοσοφία του ο κόσμος είναι φτιαγμένος και κυβερνάται με πλήρη μουσική αρμονία από τους φυσικούς αριθμούς και τους λόγους τους. Εκεί βρίσκουμε τα πρώτα σπέρματα του «κόσμου των ιδεών» του Πλάτωνα. Η φιλοσοφία των πυθαγορείων δέχθηκε ισχυρό πλήγμα από την ανακάλυψη των αρρήτων αριθμών.

Ο ***Ιπποκράτης*** *ο Χίος* (470 -400π.Χ.) Κατεξοχήν γεωμέτρης μαθήτευσε και δίδαξε στην Αθήνα Οι μαθηματικές του αρχές ήταν Πυθαγόρειες. Πιθανόν κατείχε και την πρώτη γεωμετρία του Αναξίμανδρου. Έγραψε τα πρώτα **"Στοιχεία"** γεωμετρίας. Ασχολήθηκε με το πρόβλημα του **Διπλασιασμού του Κύβου** (κατασκευή του x από την $x^3 = 2a^3$, με α δοσμένο τμήμα), το οποίο τότε περίπου είχε τεθεί, και το ανήγαγε σε πρόβλημα αναλογιών (με τη μορφή της συνεχούς αναλογίας $\frac{2a}{y} = \frac{y}{x} = \frac{x}{a}$). Ασχολήθηκε με το πρόβλημα του **τετραγωνισμού του κύκλου**, από την μελέτη του οποίου οδηγήθηκε στον τετραγωνισμό ενός μηνίσκου. Εκτός αυτού πρότεινε και τον τετραγωνισμό τριών άλλων μηνίσκων, στηριγμένος στην άποψη ότι όλοι οι μηνίσκοι των κανονικών πολυγώνων τετραγωνίζονται (Σιμπλίκιος)

Ο ***Πλάτωνας*** (427 -347π.Χ.) μαθητής του ***Σωκράτη*** και η κύρια πηγή για το έργο του, ίδρυσε σχολή στην Αθήνα την «Ακαδημία» του. Επηρεάσθηκε από την πυθαγόρεια φιλοσοφία και δίδαξε ότι υπάρχουν δύο κόσμοι : ο πραγματικός, ο κόσμος του «είναι», όπου υπάρχουν αναλλοίωτες ιδέες και μορφές όπως τα τέλεια γεωμετρικά σχήματα και η ανάκλασή του εδώ στον κόσμο του «γίγνεσθαι» Ο Πλάτωνας πίστευε ότι η μελέτη των μαθηματικών ήταν απαραίτητη για αυτούς που θα έπρεπε να κυβερνούν την ιδανική πολιτεία, γι αυτό και στην είσοδο της σχολής του είχε αναρτήσει την φράση: «***Μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω* μοι την θύραν».**
Ο ***Εύδοξος** ο Κνίδιος*, (408-335πΧ.) ίσως ο μεγαλύτερος μαθηματικός των κλασσικών χρόνων, ιατρός, μηχανικός, μετεωρολόγος, νομοθέτης και φυσικά φιλόσοφος. Σπούδασε στην Αίγυπτο για 16 μήνες από όπου έφερε γνώσεις αστρονομίας . Ίδρυσε την περίφημη Σχολή της Κυζίκου, έλυσε το πρόβλημα της **τριχοτόμησης της γωνίας,** εφεύρε την **τετραγωνίζουσα γωνία**, έγινε γνωστός για την ανάπτυξη μιας πρώιμης μεθόδου ολοκλήρωσης, για τη χρήση των αναλογιών στα προς επίλυση προβλήματα και τη χρήση των τύπων για τη **μέτρηση τρισδιάστατων σχημάτων**. Το φαινομενικό **αδιέξοδο των ασύμμετρων (αρρήτων)** παρακάμφθηκε κατά μεγάλο μέρος, δεδομένου ότι μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν τα γινόμενα και τα πηλίκα τους μέσω της «θεωρίας των αναλογιών» και *τη **μέθοδο της εξάντλησης***. Ασχολήθηκε και με το ***Δήλιο πρόβλημα*** (το πρόβλημα του **διπλασιασμού του κύβου**, του οποίου η λύση με τη χρήση αποκλειστικά του κανόνα και του διαβήτη ήταν και είναι ακόμα και σήμερα αδύνατη. Όμως εκείνος χρησιμοποιώντας ορισμένες καμπύλες - για τις οποίες δυστυχώς δε γνωρίζουμε πολλά - κατάφερε να το λύσει. Επίσης, απέδειξε ότι τα εμβαδά δύο κύκλων είναι ανάλογα των τετραγώνων των διαμέτρων τους. Είναι πολύ πιθανό η αξιωματική μέθοδος του Ευκλείδη να αναπτύχθηκε αρχικά από τον Εύδοξο. Ο Εύδοξος μαζί με τον Αρχιμήδη θεωρούνται ως οι **θεμελιωτές του ολοκληρωτικού λογισμού**.
Ο **Ευκλείδης** *ο Αλεξανδρεύς* (360-290 π.Χ.) μαθητής του Ευδόξου και του Πλάτωνα από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς, σίγουρα ο σπουδαιότερος κρινόμενος από την προσφορά του και την σφραγίδα που αυτή άφησε στην περαιτέρω εξέλιξη της επιστήμης. Έζησε στο μεταίχμιο των κλασσικών και ελληνιστικών χρόνων. Κλήθηκε από τον **Πτολεμαίο Α΄** να διδάξει στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου όπου ίδρυσε σχολή. Μολονότι έγραψε τουλάχιστον 10 βιβλία τον γνωρίζουμε κυρίως μέσω του μνημειώδους έργου του «**Στοιχεία**», όπου σε 13 τόμους οργάνωσε αξιωματικά όλη την πριν από αυτόν γεωμετρική γνώση, θεμελίωσε την Γεωμετρία ως επιστήμη και αποτέλεσε και αποτελεί πρότυπο για την αξιωματική θεμελίωση και των άλλων επιστημών (ρασιοναλισμός), είναι δε το δεύτερο σε πωλήσεις βιβλίο όλων των εποχών μετά την Βίβλο.
Με το έργο του Ευκλείδη θα ασχοληθούμε παρακάτω διεξοδικότερα καθώς απασχόλησε την μαθηματική σκέψη για πάνω από 2000 χρόνια και έγινε η αφορμή για την εξέλιξη των σύγχρονων μαθηματικών και όχι μόνο.

2.4. Ελληνιστικά - Ρωμαϊκά χρόνια.

Την ίδια άνθηση γνώρισαν και τα ελληνιστικά μαθηματικά.
Ο ***Αρίσταρχος** ο Σάμιος* (310 π.Χ. - περίπου 230 π.Χ.) Είναι ο πρώτος καταγεγραμμένος άνθρωπος ο οποίος πρότεινε ηλιοκεντρικό μοντέλο του Ηλιακού Συστήματος, (για το λόγο αυτό είναι συχνά γνωστός ως ο "Έλληνας Κοπέρνικος"). Οι ιδέες του περί Αστρονομίας δεν είχαν γίνει αρχικά αποδεκτές και θεωρήθηκαν κατώτερες από εκείνες του Αριστοτέλη και του Πτολεμαίου, έως ότου αναγεννήθηκαν επιτυχώς και αναπτύχθηκαν από τον Κοπέρνικο περίπου 2000 χρόνια μετά.
Ο ***Ερατοσθένης*** (Κυρήνη 276 π.Χ. – Αλεξάνδρεια 194 π.Χ.) ήταν αρχαίος Έλληνας μαθηματικός, γεωγράφος και αστρονόμος. Θεωρείται ο πρώτος που υπολόγισε το μέγεθος της Γης και κατασκεύασε ένα σύστημα συντεταγμένων με παράλληλους και μεσημβρινούς. Γνωστός είναι για το «*κόσκινό» του που είναι ένας* από τους πιο απλούς τρόπους για μαζική εύρεση πολλών πρώτων αριθμών.
Αλλά η πιο σημαντική φυσιογνωμία αυτών των χρόνων είναι ο ***Αρχιμήδης,*** που γεννήθηκε στις Συρακούσες το 287π.Χ και πέθανε το 212 π.Χ. κατά τη ρωμαϊκή κατοχή. Επισκέφθηκε την Αλεξάνδρεια όπου γνώρισε και συναναστράφηκε με όλο τον κύκλο των μαθηματικών που είχε δημιουργήσει ο Ευκλείδης. Θεωρείται από όλους ο μεγαλύτερος μαθηματικός και φυσικός της αρχαιότητας. Έκανε τα πρώτα βήματα για το **μαθηματικό υπολογισμό επιφανειών με ακανόνιστο περίγραμμα** και **συμμετρικών εκ περιστροφής σωμάτων**, -μέθοδος που εξελίχθηκε, τεκμηριώθηκε και ονομάστηκε στη σύγχρονη εποχή «**Ολοκληρωτικός Λογισμός**»-, υπολόγισε μία προσεγγιστική τιμή για τον άρρητο **αριθμό π**, Ανακάλυψε τον τύπο για το εμβαδό και τον όγκο της σφαίρας, στο βιβλίο του **"Περί σφαίρας και κυλίνδρου"**, διατύπωσε το νόμο της Μηχανικής για τους **μοχλούς** , διατύπωσε την ομώνυμη αρχή για την **άνωση** του νερού, κατασκεύασε διάφορες μηχανές, ένα τύπο **πολύσπαστου**, τον **κοχλία**, μία αντλητική μηχανή που ονομάζεται «αρχιμήδειος έλικα» κ.ά.
Ο ***Απολλώνιος** ο Περγαίος* (265-170 π.Χ.), μεγάλος μελετητής της γεωμετρίας έζησε, σπούδασε και δίδαξε στην Αλεξάνδρεια. Καθηγητής του Μουσείου της πόλης του. Από το πλήθος των έργων του ελάχιστα σεβάστηκε ο χρόνος με κορυφαίο από αυτά τα "**Κωνικά**" του. Γνωστός είναι ο ομώνυμος με αυτόν κύκλος.

Ο *__Ίππαρχος__ ο Ρόδιος ή Ίππαρχος ο Νικαεύς* (περ.190 π.Χ. - 120 π.Χ.) θεωρείται από αρκετούς ως ο **πατέρας της Αστρονομίας** και της **Τριγωνομετρίας.** Υπολόγισε πως το ηλιακό έτος είναι **365,242** ημέρες όταν σήμερα τα σύγχρονα ατομικά ρολόγια τον επιβεβαιώνουν υπολογίζοντάς το σε **365,242199** ημέρες! Υπολόγισε την **διάμετρο της Σελήνης** και την **απόστασή της από την Γη** κ.α. Είναι εφευρέτης του **αστρολάβου** και μετά από τελευταίες έρευνες πιθανώς και από τους κατασκευαστές του «**μηχανισμού των Αντικυθήρων**».

Ο *__Ήρων__ ο Αλεξανδρεύς* (10 μ.Χ.–70 μ.Χ.), ήταν ένας Έλληνας μηχανικός και γεωμέτρης. Η πιο διάσημη εφεύρεσή του είναι η αιολόσφαιρα ή ατμοστρόβιλος, η **πρώτη ατμομηχανή στην ιστορία**. Υπήρξε διευθυντής της περίφημης Ανώτατης Τεχνικής Σχολής της Αλεξάνδρειας, που είναι το πρώτο **πολυτεχνείο**. Ο ομώνυμος τύπος του για το εμβαδό ενός τριγώνου από τις πλευρές του, απλοποίησε πολύ τον υπολογισμό του εμβαδού των πολυγωνικών επιφανειών.

Ο *__Μενέλαος__ ο Αλεξανδρινός* (70–140μ.Χ.) Γεωμέτρης [11] και αστρονόμος στην Ρώμη. Ο πρώτος που ασχολήθηκε με **μη Ευκλείδειες γεωμετρίες.** Θεωρείται ως ο κύριος θεμελιωτής της **σφαιρικής γεωμετρίας και τριγωνομετρίας**, Στο μόνο διασωθέν έργο του, τη «*Σφαιρική*», το οποίο αποτελεί την τελική μορφή των προγενέστερων σφαιρικών, με μία σχεδόν πλήρη αναλογία θεωρημάτων προς τα αντίστοιχα της τότε γεωμετρίας του επιπέδου θεμελιώνει την πρώτη **μη Ευκλείδεια γεωμετρία**, τη Σφαιρική, στην οποία πρωτεύοντα ρόλο παίζουν οι μέγιστοι κύκλοι σφαίρας, ενώ στην Ευκλείδεια γεωμετρία τον έπαιζαν οι ευθείες. Εδώ εισάγονται για πρώτη φορά στην επιστήμη τα **σφαιρικά τρίγωνα** και μελετώνται διάφορες προτάσεις ισότητας και ανισότητας των στοιχείων τους. Το περίφημο **Θεώρημα των διατεμνουσών**, φέρει το όνομά του.

Ο *Κλαύδιος __Πτολεμαίος__* (127 - 151 μ.Χ.) Το σπουδαιότερο έργο του, «Η Μεγίστη» (ή «Μαθηματική Σύνταξις»), σώθηκε στα αραβικά ως «Αλμαγέστη» και αποτέλεσε ένα από τα κείμενα που έδωσαν ώθηση στην αστρονομία των Αράβων.

Ο *__Πάππος__ ο Αλεξανδρινός* έζησε και άκμασε γύρω στο 300 μ.Χ. Στα έργα του κριτικάρει και γενικεύσει έργα αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών με ενδιαφέροντα θέματα της γεωμετρίας: (Διπλασιασμός του κύβου, τετραγωνισμός του κύκλου, κέντρο βάρους, γεωμετρικοί τόποι και άλλα).

Ο *__Πρόκλος__* (412 -485μ.Χ.) ήταν ο τελευταίος νεοπλατωνικός φιλόσοφος και σημαντικός μαθηματικός πριν τον Μεσαίωνα. Μέχρι το θάνατό του ήταν διευθυντής της Πλατωνικής Ακαδημίας στην Αθήνα που, ως γνωστό, έκλεισε ο Αυτοκράτορας Ιουστινιανός (529 μ.Χ.) με διάταγμα που απαγόρευε τη διδασκαλία της φιλοσοφίας.

2.5. Συμπερασματικές μέθοδοι

Η προσφορά των αρχαίων Ελλήνων και της αρχαιοελληνικής γεωμετρίας, πέρα από την ανάπτυξη των ίδιων των μαθηματικών, στον τομέα της θεμελίωσης της αξιωματικής υποθετικο-απαγωγικής μεθόδου στην επιστήμη είναι αδιαμφισβήτητη.

Ας δούμε όμως τι εννοούμε με την πιο πάνω μέθοδο.

Πρώτα από όλα **επαγωγική συμπερασματική μέθοδος** είναι η διαδικασία με την οποία παίρνοντας ένα μέρος ενός συνόλου και εξετάζοντας τις ιδιότητές του υποθέτουμε ότι και όλο το σύνολο έχει τις ίδιες με αυτό ιδιότητες. Με λίγα λόγια όταν από τα λίγα βγάζουμε συμπέρασμα για τα πολλά, χωρίς να έχουμε εξετάσει ενδελεχώς όλες τις παραμέτρους του προβλήματος. Η μέθοδος αυτή δεν είναι καθόλου, όπως είναι φυσικό ασφαλής, είναι όμως η αρχή πάνω στην οποία μετά από διαδοχικές δοκιμές κτίζεται η εμπειρική γνώση. Η μέθοδος αυτή είναι απαραίτητη επίσης και στην έρευνα, γιατί γεννά τις ανακαλύψεις και προηγείται συνήθως της ολοκληρωμένης τεκμηρίωσης.

Αντίθετα με αυτήν η **απαγωγική συμπερασματική** αποδίδει τις ιδιότητες ενός συνόλου σε ένα μέρος του. Δηλαδή όταν από τα πολλά βγάζουμε συμπέρασμα για τα λίγα που είναι μέρος των πολλών. Ασφαλώς η μέθοδος αυτή είναι η πλέον βέβαιη και εφαρμόζεται όταν απαιτείται η ολοκληρωμένη τεκμηρίωση.

Απαγωγή σε άτοπο είναι η αποδεικτική μέθοδος με την οποία υποθέτοντας ότι ισχύει η άρνηση μιας πρότασης, με μια σειρά απαγωγικούς συλλογισμούς καταλήγουμε ότι ισχύει μια άλλη λανθασμένη πρόταση. Σύμφωνα όμως με τον «*νόμο της αντίφασης*» δεν μπορεί μία σωστή υπόθεση να δίνει λάθος συμπέρασμα, και επειδή λόγω του «*νόμου του αποκλειόμενου τρίτου*» δεν υπάρχει τίποτε μεταξύ μιας σωστής και μιας λάθος υπόθεσης καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η υπόθεσή μας, δηλαδή η άρνηση της πρότασης, δεν ισχύει, άρα πάλι λόγω του νόμου του αποκλειόμενου τρίτου, επειδή δεν υπάρχει τίποτε μεταξύ της πρότασης και της άρνησής της, συμπεραίνουμε ότι η πρόταση ισχύει.

Σύμφωνα με την **αξιωματική υποθετικο-απαγωγική** μέθοδο πρέπει να ορίσουμε αρχικά ορισμένες όσον το δυνατόν λιγότερες πρωταρχικές-στοιχιώδεις έννοιες και με αυτές να διατυπώσουμε κάποιες προφανείς προτάσεις οι οποίες δεν χρειάζονται απόδειξη. Με τον τρόπο αυτό αποφεύγουμε τον σκόπελο της κυκλικής απόδειξης των αρχικών προτάσεων από άλλες που συνάγονται από αυτές, που οδηγεί σε ανατροφοδοτούμενο ατέρμονα συλλογιστικό κύκλο (Loop). Τις προτάσεις αυτές όταν ισχύουν σε περισσότερες από μία επιστήμες τις ονομάζουμε αξιώματα και αν ισχύουν μόνον σε μία επιστήμη, όπως π.χ. στην γεωμετρία τις ονομάζουμε αιτήματα, αν και αυτός ο διαχωρισμός σε πολλές περιπτώσεις δεν είναι εφικτός και τείνει να απαλειφθεί έτσι ώστε και οι δύο να θεωρούνται πια συνώνυμες. Από αυτές τις προτάσεις απαγωγικά συνδυάζοντάς τες με την βοήθεια της λογικής βγαίνουν άλλες πιο σύνθετες προτάσεις, τα θεωρήματα που δίνουν με την σειρά τους νέα θεωρήματα και ούτω καθεξής.

Με την πιο πάνω μέθοδο θεμελιώθηκε η γεωμετρία, αρχικά από τον Θαλή, τον Πυθαγόρα και τους μετέπειτα αρχαίους μαθηματικούς αναπτύχθηκε αρκετά από τον Αριστοτέλη στο έργο του «το Όργανον Αναλυτικά πρότερα» και έφθασε σε μια κορύφωση με το έργο του Ευκλείδη «Στοιχεία». Μετά από αυτόν, ήδη από την εποχή του Αρχιμήδη έγιναν προσπάθειες να επεκταθεί το μοντέλο αυτό στις λεγόμενες «φυσικές επιστήμες», την φιλοσοφία και την λογική και έφθασε στις αρχές του 20^{ου} αιώνα μετά τις εργασίες έξοχων μαθηματικών όπως ο Hilbert να εμφυτευθεί σε όλους τους κλάδους των μαθηματικών του 19^{ου} αιώνα και από εκεί και πέρα και στα σύγχρονα μαθηματικά.

3. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ

Αλλά ας εξετάσουμε το έργο του Ευκλείδη «**Στοιχεία**[12]». Αυτό αποτελείται από 13 βιβλία τα οποία καλύπτουν τη στοιχειώδη επιπεδομετρία, τη θεωρία των αριθμών, τη θεωρία των ασυμμέτρων και τη στερεομετρία. Αρχίζουν από ένα κατάλογο 23 ορισμών, όπως π.χ. «Σημείο είναι αυτό που δεν έχει μέρος» (Σημείον εστίν, ου μέρος ουδέν) και «Γραμμή είναι μήκος χωρίς πλάτος» (Γραμμή δε μήκος απλατές). Ακολουθούν 5 αιτήματα και 5 «κοινές έννοιες», από τα οποία το περίφημο πέμπτο αίτημα έχει τη δική του ανεξάρτητη ιστορία. Κάθε κεφάλαιο αρχίζει με πρόσθετους ορισμούς σχετικούς με το υπό διαπραγμάτευση θέμα.

Τα βιβλία I-IV ασχολούνται με ***γεωμετρικές κατασκευές επιπέδων σχημάτων***, δηλαδή τετραπλεύρων, κύκλων , τριγώνων και πολυγώνων που κατασκευάζονται με τη βοήθεια κύκλων. Έχει υποστηριχτεί ότι μέρη αυτών των βιβλίων, ιδιαίτερα το II, παραπέμπουν σε ένα είδος αλγεβρικής γεωμετρίας, όπου οι γεωμετρικές κατασκευές παίζουν το ρόλο των αλγεβρικών πράξεων. Ο όρος «μέγεθος» χρησιμοποιείται παντού για να υποδηλώσει οποιοδήποτε γεωμετρικό αντικείμενο -ένα ευθύγραμμο τμήμα ή σχήμα- και τα θεωρήματα ασχολούνται με τις κατασκευές αυτών των μεγεθών και τις σχέσεις ανάμεσά τους. Είναι ενδιαφέρον ότι η απόδειξη του πυθαγόρειου θεωρήματος γίνεται μέσω της ανακατασκευής σχημάτων, ενώ η χρήση των πραγματικών εμβαδών που περιέχουν θα μπορούσε να δώσει μια πολύ διαφορετική απόδειξη.

Το βιβλίο V είναι η ***γενική θεωρία των αναλογιών όπως παρουσιάστηκε από τον Εύδοξο***. Ο Ευκλείδης παραθέτει ικανό αριθμό κανόνων για τις αναλογίες και για τις προϋποθέσεις χρήσης τους. Η χρήση λόγων αντί κλασμάτων είχε μερικά πλεονεκτήματα. Μπορούσε κανείς να διατυπώσει κανόνες όπως «ο λόγος των εμβαδών των κύκλων είναι ανάλογος με τα τετράγωνα των διαμέτρων τους» και να χρησιμοποιήσει αυτόν τον κανόνα σε κάποια θεωρήματα χωρίς να χρειαστεί να χρησιμοποιήσει το π, το οποίο είναι άρρητο. Επίσης, ο λόγος δύο μεγεθών του ίδιου τύπου είναι χωρίς διάσταση, και έτσι μπορεί να συγκριθεί αναλογικά με άλλους λόγους, όπως στο παραπάνω παράδειγμα. Έτσι ο λόγος ήταν η βασικότερη σχέση μεταξύ μεγεθών και η θεωρία των αναλογιών έδινε τη δυνατότητα σε διαφορετικούς λόγους να συγκριθούν μεταξύ τους.

Το VI πραγματεύεται την ***ομοιότητα των σχημάτων*** και περιέχει μία ***γενίκευση του πυθαγορείου θεωρήματος*** που δεν προσδιορίζεται στα τετράγωνα που κατασκευάζονται από τις πλευρές του τριγώνου, αλλά επεκτείνεται σε οποιοδήποτε κατασκευάσιμο σχήμα. Έτσι εάν κατασκευάσουμε ημικύκλια με διάμετρο την κάθε πλευρά του τριγώνου, τότε το άθροισμα των δύο μικρότερων ημικυκλίων ισούται με το μεγαλύτερο.

Στα βιβλία VII-IX περιλαμβάνεται ***η θεωρία των αριθμών***. Για τον Ευκλείδη, οι «αριθμοί» ήταν οι ακέραιοι. Από τους ορισμούς του VII βλέπουμε ότι η αντιμετώπιση των αριθμών γίνεται ουσιαστικά γεωμετρικά. Ο Ευκλείδης λέει ότι «ο μεγαλύτερος αριθμός είναι πολλαπλάσιο του μικρότερου όταν μπορεί να μετρηθεί από αυτόν» και ότι το γινόμενο δύο αριθμών είναι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου. Υπάρχει επίσης ο περίφημος κανόνας, γνωστός με το όνομα ευκλείδειος αλγόριθμος, για την εύρεση του μέγιστου κοινού διαιρέτη δύο αριθμών ή, με τα λόγια του Ευκλείδη, «του μεγαλύτερου κοινού μέτρου μεταξύ δύο μεγεθών». Στο IX βρίσκουμε την περίφημη απόδειξη, η οποία, με σύγχρονη ορολογία, δηλώνει ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί. Στην πραγματικότητα, ο Ευκλείδης σκόπιμα αποφεύγει την αναφορά στο άπειρο. Δηλώνει ότι «οι πρώτοι αριθμοί είναι περισσότεροι από οποιοδήποτε δεδομένο πλήθος πρώτων αριθμών» και προχωρεί στην απόδειξη αυτού του θεωρήματος για μόνο τρεις δεδομένους πρώτους. Η απαραίτητη επέκταση στους υπόλοιπους πρώτους αριθμούς θεωρείται αυτονόητη. Σε αυτό το βιβλίο αναφέρεται και ένας κανόνας κατασκευής τέλειων αριθμών. Τέλειος αριθμός είναι αυτός για τον οποίο το άθροισμα των διαιρετών του ισούται με τον ίδιο τον αριθμό. Ο πρώτος τέλειος αριθμός είναι το 6 και ο δεύτερος το 28 (με διαιρέτες τους 1, 2, 4, 7 και 14 που το άθροισμά τους είναι 28).

Το βιβλίο X είναι μια λεπτομερής ανάλυση των διαφόρων αρρήτων μηκών, όπου βρίσκουμε την έννοια της ασυμμετρίας μεταξύ γενικών μεγεθών να ανάγεται στην έννοια της αρρητότητας μεταξύ μηκών (και τετραγώνων). Εάν θεωρήσουμε μία ευθεία γραμμή, η οποία να ορίζεται ως ρητή, τότε οποιαδήποτε ευθεία γραμμή ασύμμετρη ως προς αυτή λέγεται ότι είναι άρρητη. Μακροσκελείς αποδείξεις παρατίθενται για όλους τους διαφόρους τύπους των άρρητων, από απλές τετραγωνικές ρίζες μέχρι πολύπλοκα συμπλέγματα ριζών. Η εξέταση των διαφόρων τρόπων αριθμητικής έκφρασης των αρρήτων είναι αποκαλυπτική για τα προβλήματα που αντιμετώπιζαν τότε. Ο συμβολισμός που υπήρχε βασιζόταν στον ευκλείδειο αλγόριθμο, αλλά και η παράσταση στην οποία κατέληγε για έναν συγκεκριμένο άρρητο ήταν χρήσιμη, δεν υπήρχε απλή μέθοδος για να εκφράσει αθροίσματα ή γινόμενα με τον ίδιο τρόπο. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το Λήμμα 1 (λήμμα= προκαταρκτικό θεώρημα), το οποίο βρίσκει δύο τετράγωνα που το άθροισμά τους να είναι και αυτό τετράγωνο-το πυθαγόρειο θεώρημα από τη σκοπιά της θεωρίας των αριθμών χωρίς καμία αναφορά στην απόδειξη που παρατίθεται στο τέλος του Ι. Σε αυτό το βιβλίο υπονοείται σαφώς ότι αυτές οι αριθμητικές και γεωμετρικές μέθοδοι δεν είναι παρά ένα προοίμιο για πιο προχωρημένα προβλήματα, όπως η εύρεση των εμβαδών και τα προβλήματα τετραγωνισμού. Μπορεί επίσης να σημειωθεί ότι οι άρρητοι στους οποίους γίνεται αναφορά μπορούν όλοι να κατασκευαστούν με κανόνα και διαβήτη- π.χ. δεν υπάρχουν κυβικές ρίζες. Η εκτενέστατη ταξινόμηση των αρρήτων αποκτά νόημα στα τελευταία κεφάλαια των Στοιχείων, όπου επανεμφανίζονται σε σχέση με τα κανονικά πολύεδρα.

Τα τελευταία βιβλία XI-XIII των στοιχείων ασχολούνται με τη στερεομετρία και χρησιμοποιούν τη μέθοδο του Ευδόξου για την εύρεση με αυστηρό μαθηματικό τρόπο εμβαδών και όγκων μέσω αλλεπάλληλων προσεγγίσεων. Ο Αρχιμήδης απέδωσε στον Εύδοξο την πρώτη απόδειξη ότι ο όγκος του κώνου είναι το ένα τρίτο του όγκου ενός κυλίνδρου με ίση βάση και ύψος, και μεγάλο μέρος του XII θεωρείται ότι βασίζεται στην εργασία του Ευδόξου. Το XIII κλείνει με την απόδειξη ότι υπάρχουν μόνο πέντε κανονικά πλατωνικά στερεά, τα οποία μπορούν να κατασκευαστούν από τρίγωνα, τετράγωνα και πεντάγωνα. Όλα τα στερεά κατασκευάζονται μέσα σε μία σφαίρα και υπολογίζονται τα αποστήματα- αποστάσεις από το κέντρο, των πλευρών των στερεών.

4. ΜΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΕΣ

4.1. Προσπάθειες για την καλύτερη θεμελίωση της Ευκλείδειας γεωμετρίας

Θα προκαλούσε μεγάλη έκπληξη [13] αν τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη παρά την πρώιμη και εκτεταμένη εφαρμογή της αξιωματικής μεθόδου ήταν απαλλαγμένα από λογικές ατέλειες. Γι αυτό τον λόγο δεν αποτελεί μεγάλη κακοπιστία στην εργασία να αναφέρουμε ότι κριτικές έρευνες έχουν αναδείξει έναν αριθμό από ελαττώματα στην λογική της διάταξη. Πιθανότατα τα σπουδαιότερα από αυτά είναι ορισμένες σιωπηρές εικασίες που χρησιμοποιούνται αργότερα στους συλλογισμούς ενώ δεν περιλαμβάνονται στα πρώτες αρχές της εργασίας. Ακόμη το 5^{o} από τα αιτήματα του Ευκλείδη , που λέει ότι : «Εάν μια ευθεία γραμμή τέμνοντας δύο άλλες ευθείες σχηματίζει τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες με άθροισμα μικρότερο από 180^{o} τότε οι ευθείες αυτές τέμνονται προς το μέρος των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών», διαφέρει από όλα τα άλλα αιτήματα και αξιώματα γιατί είναι σύνθετο και μοιάζει περισσότερο με θεώρημα. Γι αυτούς τους λόγους τα *Στοιχεία* τράβηξαν το ενδιαφέρον των Ελλήνων, Αράβων και Δυτικοευρωπαίων κατά σειρά μελετητών τους, που βάλθηκαν να τα βελτιώσουν. Εκείνο που προσπάθησαν ιδιαίτερα να κάνουν ήταν να αποδείξουν το 5^{o} ευκλείδειο αίτημα. Στην προσπάθειά τους αυτή ανακάλυψαν άλλα ισοδύναμα με το 5^{o} αιτήματα όπως αυτό το οποίο έχει επικρατήσει να διδάσκεται στα σχολικά εγχειρίδια της γεωμετρίας, δηλαδή ότι :

«*Από ένα σημείο εκτός ευθείας άγεται μία και μοναδική παράλληλη προς αυτήν*».

Αυτό το αίτημα μολονότι προτάθηκε για πρώτη φορά από τον πολύ σπουδαίο μελετητή του Ευκλείδη, ***Προκλό*** ήδη στις αρχές του 5^{ου} αι., φέρει το όνομα του σκωτσέζου μαθηματικού ***John Playfair*** (1748-1819) που την εισήγαγε στα πλαίσια μιας ευρύτερης αναδιάταξης της ύλης της ευκλείδειας γεωμετρίας.

Πριν από αυτόν:

Ο ***Ποσειδώνειος*** *ο Ρόδιος* (135 - 51 π.Χ.): Εναλλακτικός ορισμός της έννοιας των παραλλήλων: *Παράλληλες είναι δυο συνεπίπεδες ευθείες που ισαπέχουν. (Η απόσταση οποιουδήποτε σημείου της μιας από την άλλη είναι σταθερή).*

Ο ***Γέμινος*** *ο Ρόδιος*(1ος αι. π.Χ.): *Η υπερβολή και η κογχοειδής σε σχέση με τις ασυμπτώτους τους, εκτείνονται απεριόριστα χωρίς να τέμνονται, όμως δεν ισαπέχουν!*

Ο ***Πρόκλος*** *ο Λυκαεύς* (410 – 485): *Όταν το αντίστροφο ενός θεωρήματος μπορεί να αποδειχθεί είναι αδύνατο το ίδιο το θεώρημα να μη μπορεί να αποδειχθεί!*

Ο *Ιμπν* ***Αλ Χαϊτάμ*** *(Αλχαζέν)* (965- 1039) βασισμένος σε εργασίες του Γέμινου του Ρόδιου (110-40 π.Χ.) και του Σιμπλίκιου (αρχές 6^{ου} αιώνα) αποδεικνύει ότι υπάρχουν τετράπλευρα που έχουν τουλάχιστον τρεις ορθές γωνίες. Ενώ η τέταρτη γωνία δέχεται ότι είναι ορθή αφού ο γ. τόπος ενός σημείου που κινείται έτσι ώστε να ισαπέχει συνεχώς από δεδομένη ευθεία είναι ευθεία // στην πρώτη. (ισοδύναμο με το 5ο αίτημα).

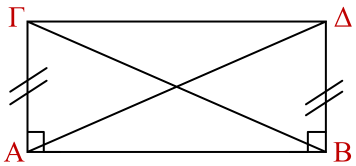
Ο *Ομάρ* ***Καγιάμ*** (1014 – 1123) αποδεικνύει ότι υπάρχει τετράπλευρο με δυο πλευρές ίσες και κάθετες στη βάση, ενώ οι άλλες δύο γωνίες δέχεται ότι είναι ορθές αφού αν είναι οξείες ή αμβλείες συγκλίνουν και άρα τέμνονται" (ισοδύναμο με το 5ο αίτημα)

Ο *Ναζίρ αλ Ντιν* ***αλ Τούσι*** (1201-1274) δέχεται ότι αν η ευθεία (ε) είναι κάθετη στη (ζ) στο Α και η (η) τέμνει πλάγια τη (ζ) στο Β, τότε οι κάθετες από την (ε) στην (η) είναι μικρότερες της ΑΒ όταν βρίσκονται προς το μέρος της οξείας γωνίας Β και μεγαλύτερες της ΑΒ όταν βρίσκονται προς το μέρος της αμβλείας γωνίας Β. (ισοδύναμο με το 5ο αίτημα)

Ο *John* ***Wallis*** (1616-1703) μελετώντας τον Ναζίρ αλ Ντιν αλ Τούσι έδωσε την δική του απόδειξη όμως και η δική του απόδειξη περιέχει την σιωπηρή υπόθεση ότι υπάρχουν όμοια άνισα τρίγωνα (ισοδύναμο με το 5ο αίτημα)

Έτσι, παρά τις πολλές [13] προσπάθειες, όλα αυτά τα χρόνια, λίγη πρόοδος στην γεωμετρία έγινε, γιατί όλοι στην προσπάθειά τους να αποδείξουν το $5^{ο}$ Ευκλείδειο αίτημα χρησιμοποιούσαν κυκλικά κάποιο άλλο ισοδύναμό του. Όλα αυτά μέχρι την πολύ αξιόλογη προσπάθεια του *Girolamo* ***Saccheri*** (1667-1733).

Ο Saccheri σαν νέος ολοκλήρωσε την εκπαίδευσή του ως μοναχός στο Ιησουίτικο Τάγμα στην ηλικία των είκοσι τριών και από τότε πέρασε την υπόλοιπη ζωή του γεμάτος επιτυχίες σε πανεπιστημιακές καθηγητικές θέσεις. Καθώς δίδασκε ρητορική, φιλοσοφία και θεολογία διάβασε τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη και ερωτεύθηκε την ισχυρή μέθοδο της *απαγωγής σε άτοπο* την οποία υιοθέτησε και χρησιμοποίησε στις επιστήμες που δίδασκε. Τότε σκέφθηκε να εφαρμόσει την αγαπημένη του μέθοδο στην απόδειξη του $5^{ου}$ Ευκλειδείου αιτήματος. Προετοιμάσθηκε για αυτό καλά διαβάζοντας τις προηγούμενες προσπάθειες δείχνοντας παράλληλα και τα λάθη τους. Το αποτέλεσμα αυτής της προσπάθειας ήταν ένα μικρό βιβλίο με το όνομα «*Ο Ευκλείδης ελευθερωμένος από κάθε ψεγάδι*» που εκδόθηκε λίγους μήνες πριν τον θάνατό του. Σε αυτό του το έργο ο Saccheri δέχεται τις 27 πρώτες προτάσεις που δεν απαιτούν το $5^{ο}$ αίτημα και με την βοήθεια αυτών, φέροντας τις διαγώνιες, λόγω της ισότητας τριγώνων, αποδεικνύει εύκολα ότι σε ένα τετράπλευρο ΑΒΔΓ με ΑΓ=ΒΔ και Α=Β=$90^{ο}$ οι γωνίες Γ και Δ είναι ίσες. Με πολύ προσπάθεια κατορθώνει να αποκλείσει την περίπτωση να είναι αμβλείες πέφτοντας στο ***ίδιο λάθος με τον Ευκλείδη***, ***να υιοθετήσει σιωπηρά ότι οι ευθείες έχουν άπειρο μήκος***. Μα όσο και αν προσπαθεί δεν καταφέρνει να αποκλείσει την περίπτωση να είναι οι Γ και Δ οξείες γωνίες. Στην προσπάθειά του να αποδείξει το τελευταίο αποδεικνύει μια σειρά από άλλα θεωρήματα τα οποία αργότερα θα γίνουν κλασσικά στις μη ευκλείδειες γεωμετρίες. Αν ο Sacchery δεν ήταν τόσο προσκολλημένος στην απόδειξη του $5^{ου}$ αιτήματος θα είχε σίγουρα «εισπράξει» την ανακάλυψη των μη ευκλείδειων γεωμετριών.



Άλλες αξιόλογες προσπάθειες είναι αυτές των *Johann Heinrich* ***Lambert*** (1728-1777) και του *Adrien-Marie* ***Legendre*** (1752-1833). Απ' αυτούς ο πρώτος παίρνοντας ένα τρισορθογώνιο τετράπλευρο απέδειξε ότι αν η τέταρτη γωνία είναι οξεία, ορθή ή αμβλεία αυτό είναι ισοδύναμο με το αν το άθροισμα των γωνιών τριγώνου είναι <, = ή > από 2 ορθές. Αυτό τον οδήγησε να παρατηρήσει την ομοιότητα με την σφαιρική γεωμετρία και να προβλέψει ότι η υπόθεση της οξείας γωνίας επαληθεύεται ίσως σε μια σφαίρα με φανταστική ακτίνα. Ο Lambert απέρριψε την υπόθεση της αμβλείας με την ίδια σιωπηρή υπόθεση που είχε πάρει και ο Saccheri αλλά η προσπάθειά του να αποκλείσει την περίπτωση της οξείας γωνίας τον απέτρεψε να δημοσιεύσει την εργασία του η οποία δημοσιεύθηκε από φίλους του μετά τον θάνατό του.

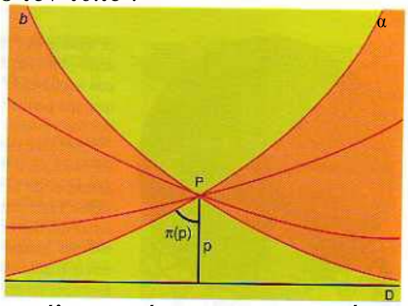
Ο Legendre μεγάλος μαθηματικός της εποχής του που είναι ο πρώτος που απέδειξε την αρρητότητα του αριθμού π , ανακάλυψε και ανέπτυξε την θεωρία των υπερβολικών συναρτήσεων, την παραστατική γεωμετρία και την θεωρία των προβολών και υπολόγισε τις τροχιές των κομητών έκανε μια μακρόχρονη προσπάθεια (40 έτη) για την απόδειξη του $5^{ου}$ αιτήματος, με παρόμοια όμως με τους άλλους αποτελέσματα.

4.2. Η ανακάλυψη

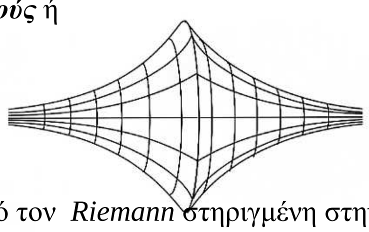
Ο πρώτος που υποπτεύθηκε την ανεξαρτησία του $5^{ου}$ αιτήματος ήταν κατά πάσα πιθανότητα ο μεγάλος γερμανός μαθηματικός *Carl Friedrich* ***Gauss*** (1777-1855) [14] που λόγω ιδιοσυγκρασίας και για να μην συγκρουσθεί με τον μεγάλου πνευματικού διαμετρήματος σύγχρονό του φιλόσοφο *Immanuel* **Kant,** (1724 - 1804), δεν δημοσίευσε τίποτε, αλλά όπως αποκαλύφθηκε αργότερα από την αλληλογραφία του, έστρεψε και ενθάρρυνε άλλους να ασχοληθούν, όπως τους φίλους του ***Farkas** (Wolfgang)* ***Bolyai*** (1775–1856) [16]και *Johann Christian* ***Martin Bartels*** (1769-1836) [15], όπως και τον τότε βοηθό του στο πανεπιστήμιο του Göttingen, μεγάλο μαθηματικό *Georg Friedrich* ***Bernhard Riemann*** (1826 –1866), του οποίου σχετικό θέμα για μη ευκλείδια γεωμετρία του πρότεινε για την εκπόνηση του διδακτορικού. Έτσι ο γιος του δεύτερου *Johann* ***Bolya***i (1802-1860) από την Ουγγαρία και ο φοιτητής του δεύτερου στο πανεπιστήμιο του Καζάν της Ρωσίας ***Nikolai** Ivanovich* ***Lobachevsky*** (1793-1856) ξεκινώντας από την φόρμα του Plaifair έδωσαν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο την πρώτη μη ευκλείδεια (υπερβολική) γεωμετρία δεχόμενοι όλα τα προηγούμενα 27 αξιώματα και αιτήματα ενώ αντι γιατο $5^{ο}$ αίτημα ο Lobachevsky δέχθηκε ότι: «*Διαμέσου δοθέντος σημείου P εκτός δοθείσης ευθείας D τουλάχιστον 2 ευθείες a και b μπορούν στο επίπεδο των P και D να αχθούν οι οποίες να μην έχουν κοινό σημείο με την D*».

Δεν είναι δύσκολο να δειχθεί ότι υπάρχουν πάντοτε δύο γραμμές a και b από το P που δεν τέμνουν την D και σχηματίζουν δύο ίσες οξείες π(ρ) μετην απόσταση ρ του σημείου P από την D. Η κάθε γωνία π(ρ) την οποία

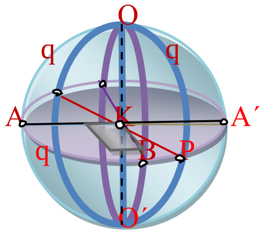
ονόμασε ***γωνία παραλληλισμού***, εξαρτάται από την απόσταση ρ σύμφωνα με τον τύπο :
$\pi(\rho) = 2Arc\tan e^{-\rho}$ *οπότε* $\rho = \ln cot\frac{\pi(\rho)}{2}$ (βλέπε σχήμα παραπλεύρως)



Οι δύο αυτές ***παράλληλες οριακές ευθείες*** α και b χωρίζουν το επίπεδο σε δύο κλάσεις ευθειών που διέρχονται από το σημείο P, αυτών στο πράσινο μέρος οι οποίες τέμνουν την D και εκείνων στο πορτοκαλί μέρος (άπειρες) που δεν τέμνουν την D τις οποίες ονόμασε ***υπερπαράλληλες***. Ας σημειώσουμε ότι η γωνία π(ρ) αυξάνει από 0 →**π**/2 καθώς το ρ ελαττώνεται από το ∞ → 0, έτσι ώστε «εν μικρώ» η Λομπατσέφσκια γεωμετρία να προσεγγίζει την ευκλείδεια αφού οι ευθείες α και b τείνουν να ταυτιστούν άρα και οι υπερπαράλληλες , άρα να υπάρχει μόνο μία ευθεία παράλληλη της D. Ένα μοντέλο επιφάνειας που μπορεί να εφαρμοστεί η Λομπατσέφσκια γεωμετρία είναι αυτό της επιφάνειας με ***σταθερή αρνητική κυρτότητα.*** Ίσως η πιο εύκολη τέτοια επιφάνεια είναι της ***ψευδοσφαίρας*** ή ***ατρακτοειδούς*** ή όπως είναι γνωστή ***tractrix***. (Βλέπε σχήμα παραπλεύρως)



Η γεωμετρία του Lobachevsky αντιστοιχεί στην υπόθεση της οξείας γωνίας των *Saccheri – Lambert*. Είδαμε επίσης ότι η υπόθεση της αμβλείας γωνίας είχε παραμεριστεί γιατί αντίβαινε στην υπόθεση ότι η ευθεία γωνία είναι άπειρη. Το 1854 όμως μια δεύτερη μη ευκλείδεια γεωμετρία αναδείχθηκε από τον *Riemann* στηριγμένη στην υπόθεση της αμβλείας γωνίας. Όπως είναι φυσικό σε αυτή την γεωμετρία η ευθεία είναι πεπερασμένη και όπως είχε πολύ εύστοχα ο *Lambert* προβλέψει η ευθεία είναι μέγιστος κύκλος σε σφαίρα με φανταστική ακτίνα. Έτσι τα αιτήματα 1, 2 και 5 διορθώνονται ως εξής:



(1΄) Δύο διαφορετικά σημεία ορίζουν τουλάχιστον μία ευθεία.
(2΄) Κάθε ευθεία γραμμή δεν έχει πέρας.
(5΄) Κάθε δύο ευθείες γραμμές σε ένα επίπεδο τέμνονται.
Εύκολα αποδεικνύεται ότι οι κάθετες σε μια ευθεία m ευθείες συντρέχουν σε ένα σημείο O.(Με τον ίδιο τρόπο που οι κάθετες στον ισημερινό ευθείες όντας μεσημβρινοί συντρέχουν στους πόλους) και όλα τα κάθετα από το O στην ευθεία τμήματα είναι ίσα μεταξύ τους. Έστω ότι η απόσταση d(O,m) =q, τότε αν A,B και P κάποια σημεία στην m τότε μπορεί να δειχθεί ότι $\frac{AP}{AB} = \frac{\widehat{AOP}}{\widehat{AOB}}$ και αν AB=q τότε $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{2}$
Αυτό που τώρα έπεται είναι ότι όλες οι ευθείες είναι πεπερασμένες μήκους 4q, αφού παρατηρούμε ότι το OP συμπίπτει με το OA όταν $\widehat{AOB} = 2\pi$, έτσι ώστε το AP παίρνει το συνολικό μήκος της γραμμής m. Αλλά τώρα $\frac{AP}{AB} = \frac{2\pi}{\widehat{AOB}}$, *άρα* $\frac{\textbf{Μήκος ευθείας } m}{q} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}$, *άρα το* ***Μήκος της ευθείας m*** = 4q. Γι αυτό αν και χωρίς τέλος είναι πεπερασμένη σε μήκος. Η εργασία αυτή του Riemann επηρέασε όσο καμία άλλη την έρευνα της νεώτερης γεωμετρίας, εγκαινιάζοντας μια δεύτερη περίοδο που χαρακτηρίζεται από την χρήση μεθόδων της διαφορικής γεωμετρίας. Σε αυτήν οφείλουμε μια αξιοσημείωτη γενίκευση της έννοιας του χώρου που βρήκε εφαρμογή στην ***θεωρία της σχετικότητας.*** Όπως φαίνεται και στο πιο πάνω σχήμα η γεωμετρία του *Riemann* μπορεί να απεικονιστεί, (και φυσικά να χρησιμοποιηθεί), σε επιφάνειες με θετική κυρτότητα η πιο απλή από τις οποίες είναι η σφαίρα. Εάν μεταφράσουμε το επίπεδο στην επιφάνεια της σφαίρας τότε πάνω σ' αυτήν μπορούμε να δούμε πώς η γεωδαισία δηλαδή ο συντομότερος δρόμος μεταξύ δύο σημείων στην επιφάνεια της σφαίρας είναι το τόξο του μέγιστου κύκλου που διέρχεται από αυτά και τα έχει άκρα. Άρα οι ευθείες μεταφράζονται σε μέγιστοι κύκλοι της σφαίρας. Τα αιτήματα τότε μεταφράζονται ως εξής:
(1΄) Δύο διαφορετικά σημεία ορίζουν τουλάχιστον ένα μέγιστο κύκλο στη σφαίρα. (Στην περίπτωση αντιδιαμετρικών σημείων υπάρχουν άπειροι μέγιστοι κύκλοι ενώ στην περίπτωση μη αντιδιαμετρικών σημείων ένας μόνον.)
(2΄) Κάθε μέγιστος κύκλος στην σφαίρα είναι χωρίς τέλος (όμως με πεπερασμένο μήκος 4q, q τεταρ/κύκλιο)
(3΄) Με κάθε σημείο στην σφαίρα σαν κέντρο και κάθε τόξο μεγίστου κύκλου ως απόσταση ακτίνα ένας κύκλος μπορεί να ζωγραφιστεί πάνω στην σφαίρα.
(4΄) Όλες οι ορθές γωνίες στην σφαίρα είναι μεταξύ τους ίσες.
(5΄) Κάθε δύο οι μέγιστοι κύκλοι τέμνονται.
Τις πιο πάνω αποδείξεις και τα μοντέλα για την λογική ευστάθεια των δύο μη-ευκλειδείων γεωμετριών την οφείλουμε σε μια έξοχη εργασία του ***Eugenio Beltrami*** (1835, 1900) το 1868.
Το ποια γεωμετρία είναι η σωστή δεν έχει βρεθεί ούτε ίσως έχει νόημα το ερώτημα αφού σύμφωνα με την θεωρία της σχετικότητας μπορεί να μην έχει σταθερή κυρτότητα. Εξαρτάται από τι θέλουμε να μελετήσουμε καθώς και από την θέση του παρατηρητή π.χ. για την παρατήρηση του διαστήματος (οπτική γεωμετρία) καταλληλότερη είναι η Λομπατσέφσκια γεωμετρία. Ο *Jules Henri* ***Poincaré*** (1854 – 1912) είπε όταν ρωτήθηκε ότι δεν υπάρχει η σωστότερη αλλά η κάθε φορά καταλληλότερη γεωμετρία. Άλλωστε έδωσε και ένα παρά-

δειγμα ενός κόσμου σε μία σφαίρα που για μας είναι πεπερασμένος και Ευκλείδειος, ενώ για τους κατοίκους του, λόγω των συνθηκών και της δομής της ύλης της σφαίρας, μη Ευκλείδειος και άπειρος. (Άσκηση 3.5.10 Eves, σελ.27/λύση στο τέλος της εργασίας.). Ο Riemann έφτιαξε μια ολόκληρη κλάση από γεωμετρίες τις *Ρημάνιες Γεωμετρίες(ν–διάστατες, ελλειπτικές κ.α.).* Ένα από τα επιτεύγματα του 2^{ου} αι. είναι οι δημιουργία *μη Ρημάννιων γεωμετριών.* Άλλη γεωμετρία είναι η *μη Αρχιμήδεια γεωμετρία* του ***Max Dehn*** (1878-1952) στην οποία δεν ισχύει το ακόλουθο αίτημα του Αρχιμήδη: « *Εάν Α,Β,Γ,Δ είναι 4 δι-αφορετικά σημεία τότε υπάρχει στην ημιευθεία ΑΒ ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων* $Α_1$, $Α_2$ *,⋯,*$Α_ν$*, τέτοιο ώστε (1) κάθε ένα από τα τμήματα* $ΑΑ_1$*,*$Α_1Α_2$*,⋯,*$Α_{ν-1}$ $Α_ν$*, να είναι ίσο προς το τμήμα ΓΔ, και (2) το Β να είναι μεταξύ των Α και* $Α_ν$».

5. ΤΑ ΘΕΜΕΛΕΙΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

5.1. Οι πρώτες προσπάθειες

Μετά την ανακάλυψη των μη Ευκλείδειων γεωμετριών γεννήθηκε η ανάγκη για μια αληθινά ικανοποιητική αξιωματική αντιμετώπιση της Ευκλείδειας γεωμετρίας. Όλες οι κρυφές ή σιωπηρές υποθέσεις έπρεπε να αναφερθούν και ένα λογικά αποδεκτό σύστημα από υποκείμενα αιτήματα ώστε το αντικείμενο να ξεκαθαριστεί. Μια τέτοια προσπάθεια έγινε το 1882 από τον γερμανό μαθηματικό *Moritz **Pasch*** (1843,1930), ακολούθησαν αυτές των Ιταλών μαθηματικών *Giuseppe **Peano*** (1858-1932) το 1889 και του *Mario **Pieri*** (1860-1904) το 1899. Ο ***Pasch*** δέχθηκε κάποιους πρωταρχικούς (πρωτόγενείς) όρους όπως το *σημείο,* η *ευθεία* και το *επίπεδο* υπονοούμενους από την χρήση τους στις βασικές προτάσεις (πυρήνας) που υπέθεσε ως αιτήματα στην διατριβή του, δίνοντας έμφαση ότι αυτές πρέπει να θεωρηθούν χωρίς σχέση με την εμπειρική τους σημασία. Διατύπωσε την θέση ότι η γεωμετρία πρέπει να είναι ένα ουσιωδώς συμβολικό υποθετικο-αποδεικτικό σύστημα περιορισμένο σε μια καθαρή άσκηση στην λογική σύνταξη.
Ο ***Peano*** όπως ο *Pasch* στήριξε την εργασία του σε συγκεκριμένους πρωτογενείς όρους μεταξύ των οποίων είναι μια οντότητα που ονομάζεται «*σημείο*» και μία σχέση ανάμεσα από σημεία οριζόμενη ως «*ενδιαμεσότητα*». Από πολλά σημεία η όψη της δουλειάς του *Peano* είναι κατά κύριο λόγο μια μετάφραση της εργασίας του *Pasch* σε ένα σύστημα χαρακτήρων και συμβόλων συμβολικής λογικής που ο *Peano* εισήγαγε στα μαθηματικά. Η παραγωγή των θεωρημάτων έγινε μια αλγεβρική διαδικασία στην οποία μόνον σύμβολα και τύποι χρησιμοποιούνται και η γεωμετρία περιορίσθηκε σε μια αυστηρά τυπική διαδικασία, συνεχίζοντας την δουλειά στο πεδίο της συμβολικής λογικής που είχε το 1847 ξεκινήσει ο *George **Boole*** (1815–1864) και οι συνεχιστές του. Ο άλλος Ιταλός ο ***Pieri*** χρησιμοποίησε στις εργασίες του στην Ευκλείδεια γεωμετρία μια διαφορετική προσέγγιση από τους προηγούμενους. Θεώρησε ότι το αντικείμενο της μελέτης του ήταν μια συγκέντρωση αόριστων στοιχείων που ονομάζονταν «*σημεία*» και μιας αόριστης έννοιας της «*κίνησης*». Ο *Pieri* θεώρησε την γεωμετρία ως μια μελέτη των ιδιοτήτων και των σχέσεων των μορφοποιήσεων των σημείων που παραμένουν αμετάβλητα κάτω από το σύνολο των άκαμπτων μετατοπίσεων, χτίζοντας μια γεωμετρία ως θεωρία μιας ομάδας αμετάβλητων μετασχηματισμών.

5.2. Η θεμελείωση της γεωμετρίας από τον Hilbert

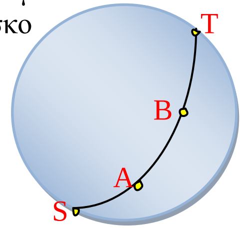
Εκείνος όμως που σε αυτόν τον τομέα προσέφερε μακράν περισσότερα από όλους είναι ο πολύ σπουδαίος γερμανός μαθηματικός *David **Hilbert*** (1862-1943) καθηγητής και αυτός στο πανεπιστήμιο του Göttingen που το έργο του «Θεμέλια τις Γεωμετρίας» τον χειμώνα του 1898-1899 θεωρείται κλασσικό σε αυτό τον τομέα. Αναπτύσσοντας ένα σύνολο αιτημάτων για την Ευκλείδεια επιπεδομετρία και στερεομετρία που δεν απείχε και πολύ από το πνεύμα του Ευκλείδη υιοθετώντας τον ελάχιστο συμβολισμό ώστε να μπορεί να διαβαστεί από κάθε έξυπνο μαθητή Λυκείου, πέτυχε να πείσει σε πολύ μεγαλύτερη έκταση τους μαθηματικούς από τους Pasch, Peano και Pieri για την καθαρά υποθετικο-απαγωγική φύση των μαθηματικών και κατόρθωσε να την εμφυτεύσει όχι μόνον στον τομέα της γεωμετρίας αλλά και σε όλα τα μαθηματικά τα οποία αναπτύχθηκαν πριν και μετά από αυτόν. Χωρίς να κάνει διακρίσεις μεταξύ αξιωμάτων και αιτημάτων θεωρώντας τα συνώνυμα, διατύπωσε 21 αξιώματα-αιτήματα, από τα οποία τα 14 αφορούσαν την επιπεδομετρία, τα οποία περιείχαν 6 πρωτογενείς μη ορισμένους όρους, που πέντε απ' αυτούς αναφέρονταν στην επιπεδομετρία. Αυτοί είναι: *σημείο, γραμμή (ευθεία), επάνω* (μια σχέση μεταξύ ευθείας και γραμμής), *μεταξύ* (μια σχέση μεταξύ ενός σημείου και ενός ζεύγους σημείων) *και ίσο* (μια σχέση μεταξύ συνθέσεων που καλούνται *τμήματα* και άλλων που ονομάζονται *γωνίες* οι οποίες είναι κατηγορηματικά ορισμένες στην εργασία). Στην προσπάθειά του να δείξει την λογική ευστάθεια και την επί μέρους ανεξαρτησία των αιτημάτων του ο Hilbert εφεύρε πολλά ενδιαφέροντα μοντέλα ή μεταφράσεις για διαφορετικά υποσύνολα των αιτημάτων του. Για παράδειγμα για να δείξει την ανεξαρτησία του αιτήματος του Αρχιμήδη έδωσε ένα σύστημα στο οποίο ίσχυαν όλα τα άλλα αιτήματα πλην του αιτήματος του Αρχιμήδη.

Τα *Θεμέλια της Γεωμετρίας* του Hilbert αντιπροσωπεύουν ένα ξεχωριστό ορόσημο στην ιστορία της μαθηματικής σκέψης.

5.3. Άλλες θεμελιώσεις

Αξιωματικές πραγματείες της Ευκλείδειας γεωμετρίας που ακολούθησαν αυτή του Hilbert είναι:
Το 1904 του Αμερικάνου μαθηματικού *Oswald* ***Veblen*** (1880-1960) με μόνο 2 πρωταρχικούς όρους, του *σημείου* και της *διάταξης*, καθώς και η πραγματεία του *Gilbert de B.***Robinson** που είναι ένας πιο ευκολοδιάβαστος συνδυασμός των αξιωμάτων των Hilbert και Veblen και αυτή του *E.V.***Huntington** (1874-1952) το 1913, μιας 3-διάστατης βασισμένης σε δύο πρωταρχικούς όρους, της *σφαίρας* και της *συμπερίληψης*.
Άλλες τέτοιες πραγματείες ήταν το 1927 του *Henry George* ***Forder*** μια με πρωταρχικές έννοιες *το σημείο* και την *διάταξη*, και μια δεύτερη με *σημείο* και *ισότητα*, μια άλλη πραγματεία το 1961 από τον L.M. ***Blumenthal*** με πρωταρχικούς όρους το *σημείο* και την *απόσταση* σαν μετρική στο χώρο, που μετασχηματίζεται εύκολα στην ν-διάστατη και την Λομπατσεύσκια γεωμετρία. Δύο άλλες πραγματείες *για το λύκειο* γράφτηκαν η μεν πρώτη από τον *George Bruce* ***Halsted*** το 1904 , και δεύτερη το 1940 από τους καθηγητές του πανεπιστημίου του Harvard, *George D.***Birkhoff** και Ralph ***Beatley***.

Μια **αξιωματική θεμελίωση της Λομπατσεύσκιας γεωμετρίας** πραγματοποίησε ο μεγάλος μαθηματικός και φιλόσοφος *Jules Henri* ***Poincaré*** (1854 – 1912) χρησιμοποιώντας τα αιτήματα του Hilbert και αντί του IV-1 δηλαδή του αιτήματος παραλληλίας του Playfair, τοποθετώντας το αντίστοιχο με το5^o Ευκλείδειο, αίτημα του Lobachevski και χρησιμοποιώντας ως μοντέλο επιπέδου τον κυκλικό δίσκο και ορίζοντας την ιδιαίτερη μετρική, $(AB) = \log(AB,TS) = log\left(\frac{TA}{TB}\frac{SB}{SA}\right)$, όπου AB εσωτερικό ευθύγραμμο τμήμα και T,S τα σημεία τομής της ευθείας AB με τον κύκλο, απέδειξε την λογική ευστάθεια της Λομπατσεύσκιας γεωμετρίας στο επίπεδο. Και επεκτείνοντας τον κύκλο σε σφαίρα απέδειξε την λογική ευστάθεια της Λομπατσεύσκιας γεωμετρίας στο χώρο.



6. ΑΛΛΑ ΕΙΔΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

6.1. Αναλυτική Γεωμετρία

Μια άλλη μορφή γεωμετρίας που συνδυάζει την γεωμετρία και την άλγεβρα είναι αυτή της **Αναλυτικής γεωμετρίας.** Η κεντρική ιδέα αυτής είναι αυτή της καθιέρωσης μιας 1-1 αντιστοιχίας μεταξύ των διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών και των σημείων του επιπέδου, έτσι ώστε κάθε καμπύλη του επιπέδου να προσδιορίζεται όσον αφορά τις συντεταγμένες των σημείων της, από τις λύσεις μιας εξίσωσης του τύπου f(x,y)=0. Με τον τρόπο αυτό κάθε γεωμετρική ιδιότητα της καμπύλης να μεταφράζεται ανάλογα σε ένα αλγεβρικό της ισοδύναμο. Έτσι κάθε πρόταση ή πρόβλημα της γεωμετρίας να μπορεί να μετατραπεί σε ισοδύναμο αλγεβρικό, να αποδειχθεί ή να επιλυθεί και στην συνέχεια το αποτέλεσμά του να ξαναμετατραπεί σε γεωμετρικό αποτέλεσμα και με αυτό τον τρόπο το αρχικό γεωμετρικό ζητούμενο να ευρεθεί.
Η σκέψη της χρησιμοποίησης συντεταγμένων για την απεικόνιση σημείων ήταν γνωστή από την αρχαιότητα για την κατασκευή χαρτών. Το ίδιο και τα γεωμετρικά αντίστοιχα των εξισώσεων των κωνικών τομών. Η ιδέα πρέπει να προέρχεται από τον ***Μέναιχμο*** (380–320 π.Χ.) και αναπτύχθηκε από τον ***Απολλώνιο*** (265-170 π.Χ.). Όμως η πρώτη γεωμετρική-γραφική απεικόνιση εξίσωσης σε μελέτη των μεταβολών εξαρτημένης μεταβλητής σε μικρές μεταβολές της ανεξάρτητης μεταβλητής οφείλεται στον *Nicole* ***Oresme*** (1323-1382) καθηγητή των μαθηματικών αρχικά και μετέπειτα επίσκοπο. Για να φθάσει όμως η Αναλυτική γεωμετρία στην σημερινή τις μορφή έπρεπε να περιμένει την εξέλιξη του αλγεβρικού συμβολισμού άλλα 200 χρόνια με την συμβολή δύο πολύ σπουδαίων Γάλλων μαθηματικών: του *René* ***Descartes*** (1596 -1650) και του *Pierre de* ***Fermat*** (1601–1665) τον 17^o αιώνα, οι οποίοι άφησαν βαθειά τα σημάδια τους στην ιστορία των μαθηματικών. Επίσης τι να πει κανείς για την σπουδαιότητα της Αναλυτικής γεωμετρίας όχι μόνον για την ίδια την γεωμετρία αλλά και για την μελέτη των καμπύλων και των επιφανειών που ήταν η κινητήριος δύναμη για την ανάπτυξη του λογισμού της ανάλυσης μέσα από την δημιουργία εννοιών όπως *συνάρτηση* και *διάσταση*. Όπως έδειξε ο ***Eves*** [17] μεταφράζοντας αλγεβρικά τις πρωταρχικές έννοιες του Hilbert: την έννοια του *σημείου* με αυτή του διατεταγμένου ζεύγους (x,y) , της *ευθείας* με την εξίσωση αx+βy+γ = 0, την έννοια του *ανήκει* με την επαλήθευση της εξίσωσης από τις συντεταγμένες του σημείου κ.τ.λ. μπορούμε να μετατρέψουμε κάθε αίτημα σε μία αλγεβρική πρόταση. Μπορεί δε εύκολα να δειχθεί ότι κάθε αίτημα μετατρέπεται με αυτόν τον τρόπο σε αλγεβρικό θεώρημα κατά έναν και μοναδικό τρόπο. Έτσι με την Αναλυτική γεωμετρία, σύμφωνα με τον ***Eves***, πετυχαίνουμε ***πρώτον*** κάθε θεώρημα της Ευκλείδειας γεωμετρίας να το δείξουμε μόνο με αλγεβρικές μεθόδους χωρίς την χρήση των προτάσεων της γεωμετρίας, ***δεύτερον*** η Αναλυτική γεωμετρία σαν μέθοδος περισσότερο παρά σαν κλάδος της γεωμετρίας μας βοηθά να χρησιμοποιήσουμε

ένα πεδίο μελέτης με το οποίο είμαστε περισσότερο εξοικειωμένοι για να αποκτήσουμε πληροφορίες για ένα άλλο πεδίο μελέτης με το οποίο δεν είμαστε γι αυτό την ονομάζουν βασιλικό δρόμο για την γεωμετρία και τρίτον μας βοηθά να αποδείξουμε την λογική ευστάθεια των διαφόρων τομέων των μαθηματικών μέσω της λογικής ευστάθειας της άλγεβρας, φτάνει αυτοί οι τομείς να είναι κατηγορηματικοί, όπως η Ευκλείδεια και η Λομπατσεύσκια γεωμετρία.

6.2. Προβολική γεωμετρία

Η ***Προβολική γεωμετρία*** δεν ασχολείται με τις μετρικές αλλά με τις περιγραφικές ιδιότητες των μαθηματικών δηλαδή τις ιδιότητες που δεν περιέχουν ισότητες και ανισότητες μεγεθών. Οι προτάσεις της διέπονται από την *αρχή της Δυϊκότητας* σύμφωνα με την οποία μια αξιοσημείωτη συμμετρία εμφανίζεται ανάμεσα στα σημεία και τις ευθείες. Σύμφωνα λοιπόν με αυτή την αρχή, αν σε ένα θεώρημα της προβολικής γεωμετρίας εναλλάξουμε τις δύο αυτές έννοιες προκύπτει ένα άλλο θεώρημα Έτσι εάν θέλουμε να αποδείξουμε ένα θεώρημα έχουμε την δυνατότητα να αποδείξουμε το δυϊκό του αντίστοιχο. Η γεωμετρία αυτή αναπτύχθηκε από μια μικρή ομάδα Γάλλων μαθηματικών εμψυχωτής της οποίας ήταν ο ***Gérard Desargues*** (1591–1661) που ήταν παράλληλα αρχιτέκτονας και μηχανικός, η εργασία του οποίου αγνοήθηκε για 200 χρόνια και επανεισήχθηκε από τον Jean Victor Poncelet (1788-1867) και ακολούθησαν μια σειρά από σπουδαίοι Γάλλοι και Γερμανοί Μαθηματικοί όπως οι: Gergonne, Brianchon, Chasles, Plücker, Steiner και Staudt

7. Η ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΑΠΟ ΤΟΝ ΠΛΑΤΩΝΑ ΕΩΣ ΤΟΝ ΜΙΛΛ ΚΑΙ ΤΟΝ ΚΑΝΤ

Από τότε που η γεωμετρία πρωτοεμφανίσθηκε οι αντιλήψεις για τη φύση της έγιναν αντικείμενο της θεολογίας ή της φιλοσοφίας, ανάλογα με την εποχή ,τις κοινωνικές συνθήκες που επικρατούσαν.

Οι αρχαίοι λαοί θεώρησαν ότι οι θεοί τους την αποκάλυψαν (βλέπε κείμενο στην αρχή της εργασίας) και η γνώση της έγινε προνόμιο του ιερατείου και λίγων εξειδικευμένων σε πρακτικά θέματα κρατικών υπαλλήλων, που την ασκούσαν.

Μετά όμως την ανάπτυξη της αποδεικτικής μεθόδου στη γεωμετρία ήταν φυσικό να δημιουργηθούν ερωτήματα και για τη φύση καθώς και την προέλευση της γεωμετρίας. Η γεωμετρία έγινε αντικείμενο μελέτης αρχικά από τους αρχαίους Έλληνες φιλοσόφους και συνεχίζει ακόμη και σήμερα να απασχολεί με τον ένα ή τον άλλον τρόπο τους σύγχρονους συναδέλφους τους.

Δύο από τότε είναι τα κυρίαρχα ρεύματα ο ***Ρεαλισμός*** που δέχεται ότι υπάρχουν τα γεωμετρικά αντικειμενικά ανεξάρτητα από τις αισθήσεις μας και ο ***Αντιρεαλισμός***, που δεν δέχεται πως τα αντικείμενα της γεωμετρίας δεν είναι αληθινά αλλά ότι γίνονται αντιληπτά μέσω των αισθήσεων και γενικότερα της εμπειρίας μας. Με κύριους αντιπροσώπους για μεν το πρώτο τον Πλάτωνα για δε το δεύτερο τον Αριστοτέλη.

Ο ρεαλισμός στην σύγχρονη εποχή αποκαλείται ορθολογισμός ή **ρασιοναλισμός**. Ορθολογιστές ήταν ο Πλάτωνας και οι ωριμότεροι μαθηματικοί όπως ο Descartes, Newton, Leibniz καθώς και μεταγενέστεροι όπως ο Gödel, η Maddy ο Resnik και ο Shapiro[18].

Στην φιλοσοφία του ***Πλάτωνα*** υπάρχουν δύο κόσμοι. Ο κόσμος του «είναι» όπου υπάρχουν άφθαρτες και αναλλοίωτες οι ιδέες και μορφές όπως τα τέλεια μαθηματικά σχήματα και έννοιες και ο άλλος κόσμος είναι ο κόσμος του «γίγνεσθαι» που είναι ο φθαρτός κόσμος που ζούμε,. Όπως στο νερό ή στον καθρέφτη σχηματίζεται η αντανάκλαση του κόσμου που ζούμε, έτσι και ο κόσμος που ζούμε είναι μια ατελής αντανάκλαση του κόσμου των ιδεών. Επειδή τα μαθηματικά είναι ιδέες είναι άφθαρτα και αναλλοίωτα άρα δεν μετακινούνται και δεν κατασκευάζονται ούτε μπορούν να γίνουν αντιληπτά μέσω των αισθήσεων παρά μόνο μέσω της νόησης. Πιστεύει ακόμη ότι τα μαθηματικά «είναι καθολικά χρήσιμα» και είναι «το πρώτο πράγμα που πρέπει κανείς να μάθει» γιατί «αποσπούν την ψυχή από τον κόσμο της αλλαγής στην πραγματικότητα».

Ο ***Καρτέσιος*** (Descartes) Θεωρείται σταθμός στην ιστορία της φιλοσοφίας, καθώς προσπάθησε και κατόρθωσε να αποκαταστήσει την εμπιστοσύνη στις νοητικές δυνάμεις του ανθρώπου και να απελευθερώσει το ανθρώπινο πνεύμα από την αυθεντία του παρελθόντος. Είναι ο **ιδρυτής του νεότερου ορθολογισμού (ρασιοναλισμός)** και του **φορμαλισμού** ή **Νεοπλατωνισμού,** δίδαξε ότι υπάρχουν έμφυτες ιδέες και αιώνιες αλήθειες που συλλαμβάνει από μόνο του το πνεύμα. Τα μαθηματικά αντικείμενα θεωρούνται **υπαρκτά, αντικειμενικά, απόλυτα, καλώς ορισμένα και αλάνθαστα και στηρίζονται στα σταθερά θεμέλια λογικής.** Κάθε γνώση είναι αποτέλεσμα μιας προηγούμενης λογικής επεξεργασίας .

Στα νεώτερα χρόνια ο αντιρεαλισμός ονομάσθηκε **εμπειρισμός**, σύμφωνα με τον οποίο τα μαθηματικά αντικείμενα δεν υπάρχουν αλλά γίνονται αντιληπτά εμπειρικά μέσω των αισθήσεων, όταν ο νους αφαιρέσει όλες τις άλλες ιδιότητες και κρατήσει μόνο το σχήμα τους. Οι δε αριθμοί γίνονται αντιληπτοί από το πλήθος των στοιχείων όταν σε μία συλλογή αφαιρεθούν νοητικά όλα τα χαρακτηριστικά που διαφοροποιούν τα στοιχεία τους. Οι μαθηματικές προτάσεις είναι αληθινές εφόσον επαληθεύονται από την εμπειρία.

Νομιναλισμός ή **ονοματοκρατία** ονομάζεται η εμπειριστική αντίληψη σύμφωνα με την οποία οι έννοιες είναι μόνο ονόματα που δίνονται γιατί τα φυσικά αντικείμενα μοιάζουν ως προς κάποια εξωτερική ιδιότητα μεταξύ τους. Τα μαθηματικά δεν υπάρχουν παρά μόνο σαν έννοιες, η αλήθεια γίνεται αντιληπτή μόνο μέσα

από την φύση. Η θεωρία τους, γνωστή και ως «το ξυράφι του Οκάμ» πρότεινε την επιστημονική οικονομία, την προτίμηση δηλαδή της ευθείας, κατά το δυνατό πιο απλής εξήγησης των φυσικών φαινομένων.
Εμπειριστές θεωρούνται ο Αριστοτέλης και οι **φυσιοκράτες** όπως ο Mill οι **νομιναλιστές** και οι μεταγενέστεροι **ανθρωπιστές** Popper, Kuhn και Lakatos που εισήγαγαν πέραν των άλλων και την διαψευσιμότητα στα μαθηματικά και συνέδεσαν μεθοδολογικά τα Μαθηματικά με την Επιστήμη.
Έτσι στον ***Αριστοτέλη*** αντίθετα με τον Πλάτωνα δεν υπάρχει κόσμος των ιδεών. Τα μαθηματικά αντικείμενα δεν υπάρχουν εκ των προτέρων, σε κανέναν άλλο κόσμο παρά μόνον στο μυαλό μας, όπου γίνονται αντιληπτά μέσω των αισθήσεων. Οι μαθηματικές μορφές είναι προϊόν της αφαιρετικής ικανότητας της συνείδησης. Τα γεωμετρικά αντικείμενα, είναι δηλαδή, ότι απομένει στο μυαλό από την ύλη, όταν ο νους αφαιρέσει από τα φυσικά σώματα όλες τις άλλες φυσικές τους ιδιότητες..
Ο ***J. S. Mill*** (1806-1873) προσπάθησε να τεκμηριώσει τον εμπειρισμό του με την βοήθεια του ορίου. Είπε ότι το γεωμετρικό σχήμα ενυπάρχει στο υλικό σώμα και είναι το όριο της ύλης του σώματος πέρα από το οποίο το σώμα δεν υπάρχει. Πουθενά όμως δεν πρόκειται να δούμε στην φύση έναν τέλειο κύκλο ή μια τέλεια ευθεία, καθώς επίσης και οι σύγχρονες αντιλήψεις μας για την ομιχλώδη σύσταση της ύλης στα επίπεδα των μορίων και των ατόμων όπως και η δημιουργία των μη Ευκλείδειων γεωμετριών που ξεφεύγουν από την σύγχρονη αντίληψή μας για τον κόσμο μάλλον δεν τον δικαίωσαν.
Μια περίπτωση μεταξύ των δύο αυτών ρευμάτων είναι η **καντιανή φιλοσοφία**. Εισηγητής της ο *Immanuel* **Kant**, (1724 - 1804) η οποία προσπάθησε να συμβιβάσει τον ορθολογισμό με τον εμπειρισμό. Σύμφωνα με τον Kant τα μαθηματικά αντικείμενα γίνονται αντιληπτά μέσω των αισθήσεών μας και μέσω μιας ικανότητας του νου, της διαίσθησης. Οι μαθηματικές προτάσεις είναι συνθετικές, a priory σωστές, και γνώσιμες μέσω της λογικής και ανεξάρτητες από την εμπειρία.

8. ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Η Γεωμετρία γεννήθηκε στην προσπάθεια του ανθρώπου να υπολογίσει τον χώρο γύρω του να μετρήσει την γη που του ανήκει αλλά και για να οικοδομήσει κτήρια και ναούς που θα έδειχναν την δύναμη και τον πολιτισμό του. Στην αρχή με εμπειρικούς τρόπους και αργότερα με την απόδειξη οι αρχαίοι λαοί με την συνεισφορά πολλών γενεών έφθασαν την γεωμετρία σε ένα τέτοιο επίπεδο που μόνο μετά από σχεδόν 2 χιλιετίες θα ξανασυναντήσουμε. Οι προσπάθειες για την βελτίωση του μνημειώδους έργου της *«Στοιχεία» του Ευκλείδη* όλα αυτά τα χρόνια απέβησαν ουσιαστικά άκαρπες. Μόνο μετά την ανακάλυψη των μη Ευκλείδειων γεωμετριών η γεωμετρία απελευθερώθηκε από τα δεσμά του παρελθόντος και προχώρησε. Και μαζί της συμπαρέσυρε και άλλους κλάδους των μαθηματικών και της φυσικής σε νέες ανακαλύψεις όπως αυτή της σχετικότητας.
Εξετάζοντας το ρόλο που έπαιξε η γεωμετρία στην ανάπτυξη της θεωρίας αριθμών, της άλγεβρας, του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού, μέσω της αναλυτικής γεωμετρίας, της τοπολογίας και της διαφορικής γεωμετρίας, δίνοντας οπτικά μοντέλα για την θεμελίωση και την ανάπτυξή τους, καθώς επίσης και την προσφορά της μέσω των μη Ευκλείδειων γεωμετριών στην εξέλιξη των σύγχρονων μαθηματικών που υποστήριξαν τις σύγχρονες επιστημονικές θεωρίες, καταλαβαίνουμε ότι η γεωμετρία όχι μόνον αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι της ιστορίας και της εξέλιξης των μαθηματικών αλλά όπως είπαν οι O.Veblen και J.H. C. Whitehead :"*Κάθε αντικειμενικός ορισμός της γεωμετρίας θα περιελάμβανε πιθανότατα το σύνολο των μαθηματικών*"[2].
Τώρα σχετικά με την ύπαρξη ή όχι των γεωμετρικών αντικειμένων θεωρώ ότι αυτά υπάρχουν με τον ένα ή άλλο τρόπο, αφού γίνονται αντικείμενο αναφοράς και μελέτης της γεωμετρίας. Το αν υπάρχουν εκ των προτέρων ή εκ των υστέρων, είναι για μένα επουσιώδες. Πιστεύω ότι αυτό εξαρτάται από την συνολική τοποθέτηση του καθένα. Κατά την γνώμη μου αυτή πρέπει να είναι αξιωματικού τύπου όπως και σε παρόμοια οντολογικά ζητήματα, π.χ. της ύπαρξη του Θεού, της ψυχής κ.α. Λόγω του θεωρήματος μη πληρότητας του Gödel και του παραδόξου του Russel , που είναι παρόμοιο με το αρχαίο παράδοξο του ψεύτη του Επιμενίδη δεν πιστεύω πως είναι ποτέ δυνατό, εξαιτίας της ανατροφοδότησης, οποιοδήποτε σύστημα, άρα και το φιλοσοφικό, να είναι τόσο επαρκές ώστε να καταλήξει σε συμπεράσματα για ζητήματα που το προσδιορίζουν, όπως αυτού του είδους τα φιλοσοφικά ζητήματα. Ίσως θα 'πρεπε κανείς να καταλήξει και για την φιλοσοφία σε παρόμοιο συμπέρασμα με αυτό του Poincaré για την γεωμετρία, δηλαδή ότι δεν υπάρχει σωστότερη φιλοσοφία για την γεωμετρία αλλά καταλληλότερη, …με ότι και αν αυτό μπορεί να σημαίνει !

9. ΠΑΡΑΠΟΜΠΕΣ - ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. **R. Wilder**, Εξέλιξη των Μαθηματικών Εννοιών (παρ. 3.3), Εκδόσεις Κουτσούμπος.
2. **R. Wilder**, Εξέλιξη των Μαθηματικών Εννοιών (παρ. 3.1), Εκδόσεις Κουτσούμπος.
3. **livepedia.gr ,**Ο βίος του Δημόκριτου **(Αρπεδονάπτες)** /http://www.livepedia.gr/index.php/%CE%94%CE%B7%CE%BC%CF%8C%CE%BA%CF%81%CE%B9%CF%84%CE%BF%CF%82
4. **Δ. Ρωσσικόπουλος**, Από τον Όμηρο στον Πτολεμαίο. Αναδρομή στα όργανα και στις μεθόδους της πρώτης γεωμετρίας/,http://users.auth.gr/~rossi/PDF%20Files/Erg_2.pdf
5. **Γιώργος Μαντζώλας,** Αντίστροφο Πυθαγορείου θεωρήματος/http://users.sch.gr/geoman22/b-gym/b-1/b-1-4b.htm
6. ***Ε.Ε. Χατζηχρόνης,*** Η ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΩΝ ΙΔΕΩΝ ΣΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙ-Α/http://users.sch.gr/mmanol/Sunergasies/EME1.pdf
7. ***G. Loria***, Ιστορία των Μαθηματικών, εκδόσεις Παπαζήση, Ελλ. Μαθ. Εταιρ.
8. ***Εφημερίδα Έθνος 6/11/06,*** http://www.ethnos.gr/article.asp?catid=11386&subid=2&pubid=72063
9. ***Live-pedia.gr,*** Δημόκριτος /http://www.livepedia.gr/index.php/%CE%94%CE%B7%CE%BC%CF%8C%CE%BA%CF%81%CE%B9%CF%84%CE%BF%CF%82
10. http://mythologia.8m.com/pithagoras.html
11. http://www.telemath.gr/mathematical_ancient_times/ancient_greek_mathematicians/menelaos_alexandrinos.php
12. **H. Eves**, Foundations & Funtamental Concepts of Mathematics (παρ. 2.3), Dover
13. **H. Eves**, Foundations & Funtamental Concepts of Mathematics (παρ. 3.2) , Dover
14. **H. Eves**, Foundations & Funtamental Concepts of Mathematics (παρ. 3.4) , Dover
15. http://en.wikipedia.org/wiki/Johann_Christian_Martin_Bartels
16. http://en.wikipedia.org/wiki/Farkas_Bolyai
17. **H. Eves**, Foundations & Funtamental Concepts of Mathematics (παρ. 4.4/σελ.94) , Dover
18. **Stewart Shapiro**, Σκέψεις για τα μαθηματικά. Η φιλοσοφία των μαθηματικών, Εκδ. Παν. Πατρών.

10. ΠΊΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΈΝΩΝ

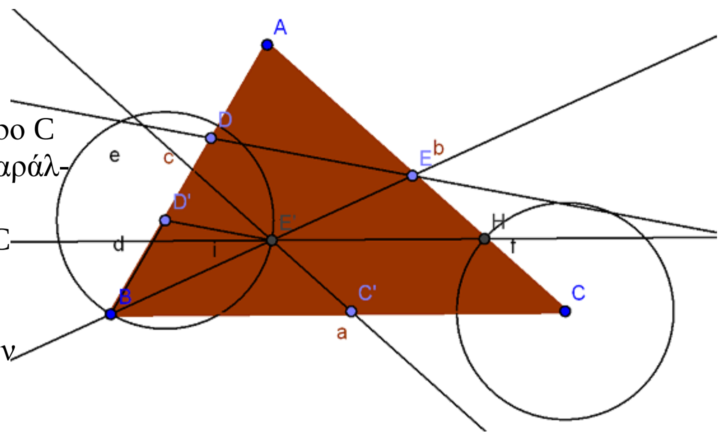
ΚΑΛΛΕΡΓΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ
Επίλυση ασκήσεων του βιβλίου του H. EVES

Τα σχήματα έχουν δημιουργηθεί με την χρήση του μαθηματικού λογισμικού Geogebra

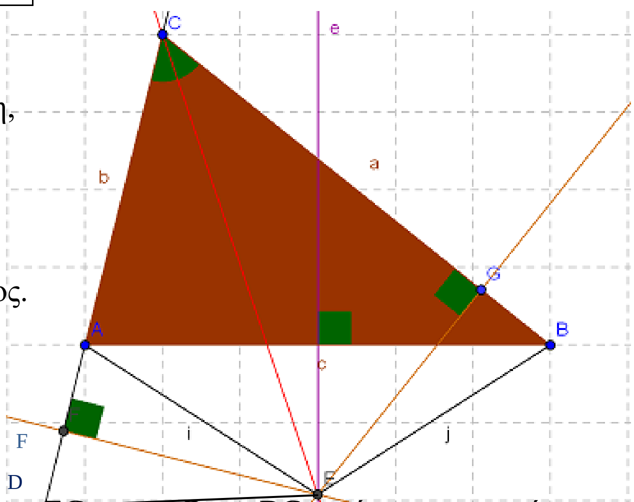
(1.1.10) Στη μελέτη των γεωμετρικών κατασκευών υπάρχει ένας αντίστοιχος του κανόνα της λάθος θέσης, γενικά γνωστός ως μέθοδος της ομοιοθεσίας. Η μέθοδος αυτή συνίσταται στην κατασκευή ενός σχήματος όμοιου με το επιθυμητό και μετά με την χρήση της αναλογίας, «φουσκώνει στο σωστό μέγεθος.(Σημ/ση: Εδώ δίνεται κάποιο παράδειγμα το οποίο δεν μας είναι απαραίτητο)
Κατασκευάστε με την μέθοδο της ομοιοθεσίας ένα ευθύγραμμο τμήμα DE με D ∈ AB και E ∈ AC, όπου AB και AC πλευρές ενός δοσμένου τριγώνου ABC, έτσι ώστε BD=DE=EC.
(Σημείωση: Το σχήμα έχει δημιουργηθεί για μεγαλύτερη πιστότητα με την χρήση του μαθηματικού λογισμικού Geogebra)

Λύση

Κατασκευή:
Με κέντρο σημείο D΄ της πλευράς AB και ακτίνα d=D΄B≤ $\frac{AB}{2}$ χαράζω κύκλο.
Με την ίδια ακτίνα d χαράζω κύκλο με κέντρο C που τέμνει την AC στο H. Από το H φέρω παράλληλη στην BC που τέμνει τον πρώτο κύκλο στο E΄. Από το E΄ φέρω παράλληλη στην AC που τέμνει την BC στο C΄.
Αν η BE΄ τέμνει την AC στο E και από το E φέρω παράλληλη στην D΄E΄ που τέμνει την AB στο D, τότε BD=DE=EC.



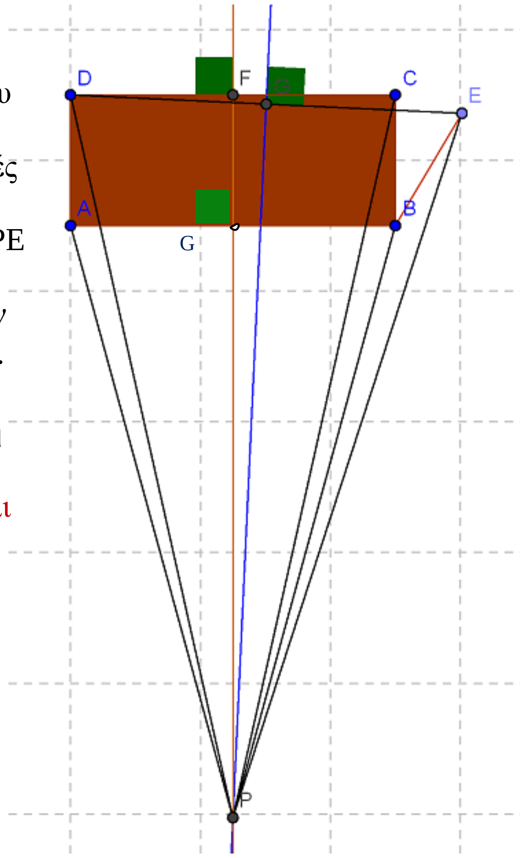
Απόδειξη:
Προφανώς αφού HE΄//BC και E΄C΄//AC έπεται ότι το CC΄E΄H είναι παραλληλόγραμμο άρα έχει και E΄C΄=CH. Όμως B΄D΄ =D΄E΄= CH =d,
άρα και BD =D΄E΄= E΄C΄ =d (1)
Στο τρίγωνο BDE η D΄E΄//DE, άρα το τρίγωνο BD΄E΄ όμοιο με BDE, άρα $\frac{BD'}{BD}=\frac{D'E'}{DE}=\frac{BE'}{BE}$ (2)
Ομοίως επειδή
στο τρίγωνο BEC η E΄C΄//CE το τρίγωνο BE΄C΄ όμοιο με BEC, άρα $\frac{BE'}{BE}=\frac{E'C'}{EC}\overset{(2)}{\Rightarrow}\frac{BD'}{BD}=\frac{D'E'}{DE}=\frac{E'C'}{EC}$
Οπότε λόγω της (1) ⇒ $\frac{d}{BD}=\frac{d}{DE}=\frac{d}{EC}$ ⇒ $\boxed{\text{BD=DE=EC.}}$



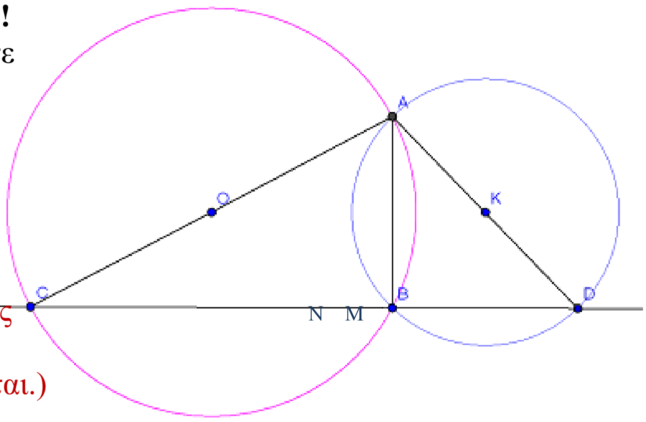
(2.4.1) Εάν μια υπόθεση που έγινε σιωπηρά σε μια αποδεικτική ανάπτυξη περιελάμβανε μια παρανόηση, η εισαγωγή της μπορεί να οδηγήσει όχι μόνο σε ένα αποτέλεσμα που δεν συνάδει με τα αιτήματα του αποδεικτικού συστήματος αλλά σε κάποιο που πραγματικά έρχεται σε αντίθεση με κάποια από τα προηγουμένως αποδειχθέντα θεωρήματα του συστήματος. Από αυτή την άποψη κριτικάρετε τα ακόλουθα τρία γεωμετρικά παράδοξα.
(a) Κάθε τρίγωνο είναι ισοσκελές!
Έστω ABC τυχαίο τρίγωνο. Σχεδιάστε την διχοτόμο της γωνίας C και την μεσοκάθετο της πλευράς AB Από το σημείο τομής τους E φέρε τις καθέτους EF και EG στις AC και BC αντίστοιχα και φέρε τις EA και EB. Τώρα τα ορθογώνια τρίγωνα CFE και CGE είναι ίσα, αφού έχει το καθένα την CE ως υποτείνουσα και $\widehat{FCE}=\widehat{GCE}$. Γι αυτό τον λόγο CF=CG. Και τα ορθογώνια τρίγωνα EFA και EGB

είναι ίσα καθώς η κάθετος EF=EG κάθετο επειδή το E σαν σημείο της διχοτόμου της γωνίας C ισαπέχει από τις πλευρές της και καθώς η υποτείνουσα EA=EB υποτείνουσα επειδή το E σαν σημείο της μεσοκαθέτου του AB ισαπέχει από τα άκρα. Γι αυτό το λόγο FA=GB. (Μέχρι εδώ όλα σωστά και σύμφωνα με το σχήμα.) Αυτό τώρα έπεται ότι CF+FA=CG+GB. Άρα CA=CB και το τρίγωνο είναι ισοσκελές. (Εδώ όμως αυτό είναι λάθος γιατί το E είναι εκτός του τριγώνου. Το σωστό θα ήταν να γραφεί CD=CB , όπου D$\in$ $AB\ και\ FD = FA$. Άρα το τρίγωνο DBC και όχι το ABC είναι το ισοσκελές.)

(b) Μια αμβλεία γωνία είναι ίση με μια αμβλεία!
Έστω ABCD τυχαίο ορθογώνιο ABCD. Σχεδιάστε BE εκτός του ορθογωνίου και ίσο σε μήκος με το BC, και γι αυτό και με το AD. Φέρτε τις μεσοκαθέτους των DE και AB. Καθώς είναι αυτές κάθετες σε μη παράλληλες πλευρές πρέπει να τέμνονται σε σημείο P. Φέρτε τις AP, BP, DP και EP. Τότε PA=PB και PD=PE καθώς το P σημείο των μεσοκαθέτων. Επίσης από κατασκευής AD=BE. Γι αυτό τα τρίγωνα APD και BPE είναι ίσα γιατί έχουν και τις τρεις πλευρές μία προς μία ίσες. Επομένως $\widehat{DAP} = \widehat{EBP}$. Αλλά $\widehat{BAP} = \widehat{ABP}$ ως γωνίες τις βάσεις ισοσκελούς τριγώνου. (Μέχρι εδώ όλα καλά και σύμφωνα με το σχήμα.) Με αφαίρεση βγαίνει ότι $\widehat{DAP} = \widehat{EBA}$ (Όμως αυτό το συμπέρασμα δεν είναι το σωστό γιατί η PE είναι εξωτερική του ορθογωνίου ABCD και επομένως $\widehat{EBP} - \widehat{ABP} \neq \widehat{EBA}$)

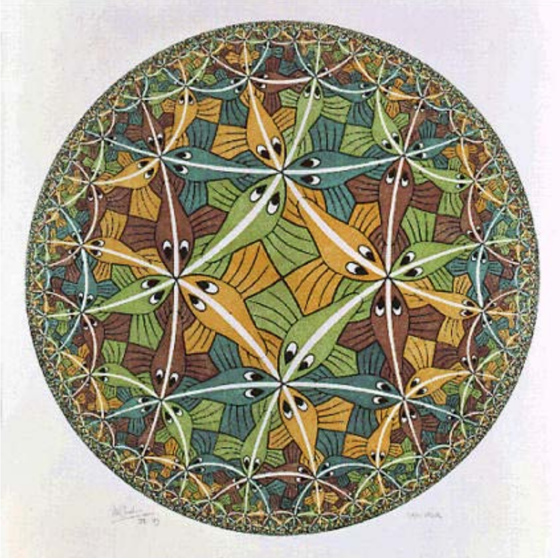


(c) Υπάρχουν δύο κάθετες από σημείο σε ευθεία!
Έστω ότι δυο κύκλοι τέμνονται στα A και B. Φέρτε τις διαμέτρους AC και AD και έστω το τμήμα με άκρα C και D κόβει τους αντίστοιχους κύκλους στα M και N. Η γωνίες AMC και AND είναι ορθές ως εγγεγραμμένες σε ημικύκλια. Επομένως οι AM και AN είναι κάθετες στο CD. (Εδώ όπως βλέπουμε και στο σωστό σχήμα CD διέρχεται από το B, γιατί διαφορετικά θα είχαμε δύο κάθετες στην CD από το A άτοπο. Επομένως τα M και N ταυτίζονται με το B. Άρα οι AM και AN ταυτίζονται.)



(3.5.10)…ο Poincare επινόησε ένα φανταστικό σύμπαν Σ, που καταλαμβάνει το εσωτερικό μιας σφαίρας ακτίνας R (βλέπε τις πιο κάτω εικόνες του διάσημου Ολλανδού ζωγράφου *Maurits Cornelis* ***Escher*** (1898 – 1972)) στην οποία υποθέτουμε ότι ισχύουν οι εξής φυσικοί νόμοι :

1. Σε κάθε σημείο P του Σ η απόλυτη θερμοκρασία T δίνεται από τον τύπο T = k(R^2- r^2), όπου r η απόσταση του P από το κέντρο της σφαίρας του Σ και k μια σταθερά.
2. Οι γραμμικές διαστάσεις των σωμάτων είναι ευθέως ανάλογες της απόλυτης θερμοκρασίας της περιοχής των σωμάτων.
3. Όλα τα υλικά σώματα στο Σ αμέσως προσλαμβάνουν την θερμοκρασία των περιοχών τους.



a. Δείξτε ότι είναι αδύνατον για έναν κάτοικο του Σ να αντιληφθεί τους τρείς φυσικούς νόμους που επικρατούν στο σύμπαν τους.
b. Δείξτε ότι ένας κάτοικος του Σ θα αισθάνονταν ότι το σύμπαν του είναι άπειρο σε έκταση στη βάση ότι δεν θα μπορούσε ποτέ να φθάσει το όριο της σφαίρας αφού έκανε ένα πεπερασμένο αριθμό N βημάτων, όσο μεγάλο N μπορούσε να διαλέξει.
c. Δείξτε ότι οι γεωδαισίες στο Σ είναι καμπύλες λυγίζοντας προς το κέντρο του Σ. Στην πραγματικότητα μπορεί να δειχθεί ότι η γεωδαισία διαμέσου δύο σημείων A και B του Σ είναι ένα τόξο κύκλου ή ευθεία γραμμή που τέμνει ορθογώνια την σφαίρα.
d. Ας απαιτήσουμε έναν επιπλέον νόμο στο σύμπαν Σ υποθέτοντας ότι το φώς ταξιδεύει κατά μήκος της γεωδαισίας του Σ. Αυτή η συνθήκη μπορεί να πραγματοποιηθεί γεμίζοντας το Σ με ένα αέριο που έχει τον κατάλληλο δείκτη διάθλασης σε κάθε σημείο του Σ. Δείξτε τώρα ότι η γεωδαισία του Σ φαίνεται ευθεία σε έναν κάτοικο του Σ.
e. Δείξτε ότι στην γεωμετρία της γεωδαισίας στο Σ επικρατεί το αίτημα παραλληλίας του Λομπατσεύσκι, ώστε ο κάτοικος του Σ θα πίστευε ότι ζει σε ένα μη Ευκλείδειο κόσμο.

Εδώ εμείς έχουμε ένα μέρος από κανονικό και υποτιθέμενα Ευκλείδειο χώρο που εξαιτίας διαφορετικών φυσικών νόμων φαίνεται να είναι μη Ευκλείδειος.

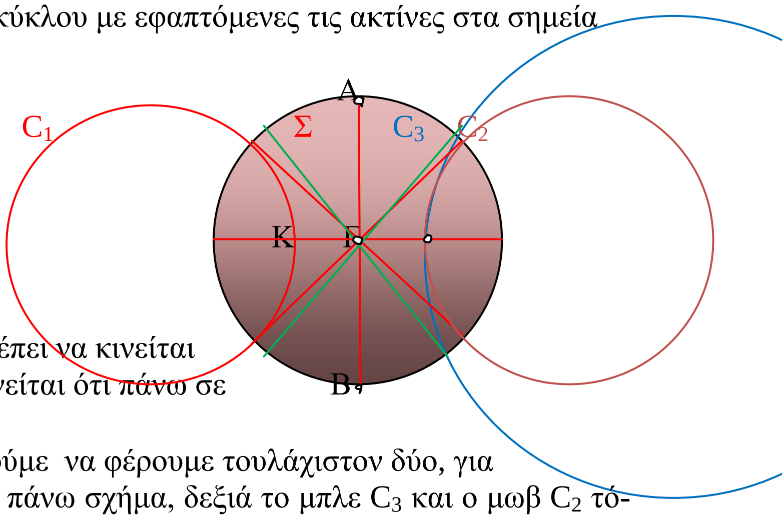
Λύση

a. Ένας κάτοικος του Σ δεν μπορεί να αντιληφθεί την διαφορά θερμοκρασίας όταν απομακρύνεται ή πλησιάζει το κέντρο πρώτον γιατί λόγω του φυσικού νόμου 3. το σώμα του προσλαμβάνει άμεσα την θερμοκρασία του τόπου στον οποίο κάθε φορά βρίσκεται, άρα δεν αντιλαμβάνεται διαφορά θερμοκρασίας από το περιβάλλον του και δεύτερον επειδή σε όλα τα θερμόμετρα η μέτρηση γίνεται με τη βοήθεια της γραμμικής συστολής - διαστολής του υγρού ή στερεού υλικού θερμομέτρησης του θερμομέτρου αυτή θα είναι ανάλογη της γραμμικής συστολής – διαστολής του σώματός του, και του περιβάλλοντός του άρα θα λείπει το μέτρο σύγκρισης. Ακόμη μη καταλαβαίνοντας καμιά μεταβολή θερμοκρασίας δεν αντιλαμβάνονται ούτε τον 1^o ούτε τον 3^o νόμο .

b. Πρέπει το μήκος ενός σώματος L= nT με T= k(R^2- r^2), άρα L= nk(R^2- r^2), άρα L(x)=nk(R^2-x^2) παραβολικό τόξο με μέγιστο nkR^2 για x=0 και ελάχιστο 0 για x=R και $\lim_{x\to R} L(x) = o$, άρα για εμάς αφενός το μήκος του σώματός του αλλά και το μήκος των βημάτων του τείνει να γίνει μηδέν όσο πλησιάζει στα άκρα της σφαίρας. Άρα ποτέ δεν την ξεπερνά, αφού κάνει μηδενικά βήματα, άρα για μας μένει ακίνητος και μάλιστα εξαφανίζεται. Αυτός όμως αντιλαμβάνεται ότι κάνει συνεχώς τα ίδια σε μήκος βήματα, σε σχέση με το σώμα και το περιβάλλον του, χωρίς όμως να φθάνει στην επιφάνεια της σφαίρας. Άρα γι αυτόν το Σ είναι άπειρο.

c. Αν κοιτάξουμε προσεκτικά τον πιο πάνω πίνακα του Escher θα αντιληφθούμε ότι αν κάποιος προσπαθήσει να βαδίσει κατά μήκος της σφαίρας χωρίς να διέρχεται από το κέντρο της, έχοντας π.χ. το κέντρο στα αριστερά του, τότε το αριστερό του πόδι θα είναι μεγαλύτερο από το δεξιό, αφού θα βρίσκεται πιο κοντά από το δεξιό στο κέντρο της σφαίρας και οι αποστάσεις που θα κάνει η αριστερή του πλευρά, όχι μόνο λόγω μήκους του αριστερού του ποδιού, αλλά επειδή και αυτές είναι πιο κοντά στο κέντρο, από αυτές που διανύει η δεξιά του πλευρά, καταλαβαίνουμε εύκολα ότι θα διαγράψει τόξο που πλησιάζει στο κέντρο στρίβοντας δεξιά (μωβ κύκλος C_2). Για τους ίδιους λόγους αν κινηθεί έχοντας το κέντρο στα δεξιά του, θα διαγράψει τόξο προς τα αριστερά (κόκκινος κύκλος C_1). Αν όμως κινηθεί ή προς ή από το κέντρο Κ οι αποστάσεις που διαγράφει η αριστερή αλλά και η δεξιά του πλευρά θα είναι διαφορετικές σε μήκος από τις προηγούμενες, όμως ίσες μεταξύ τους. Άρα θα κινηθεί σε ευθεία πάνω σε διάμετρο ΑΒ της σφαίρας. Τέλος όταν κινείται όπως στις δύο πρώτες περιπτώσεις, σε αριστερόστροφο ή δεξιόστροφο τόξο πλησιάζοντας προς τα άκρα της σφαίρας ή απομακρυνόμενος από αυτά, οι αποστάσεις που διανύει και το αριστερό και το δεξί του πόδι τείνουν να γίνουν ίσες μεταξύ τους, αφού τείνουν όπως είπαμε να γίνουν μηδέν. Άρα τείνει να κινηθεί πάνω σε μια ακτίνα. Άρα σε κάθε περίπτωση η τροχιά του θα είναι ορθογώνια στην επιφάνεια της σφαίρας, όπως και κάθε ακτίνα της είναι κάθετη στην εφαπτομένη προς το σημείο επαφής. Μάλιστα αφού τείνει να γίνει ακτίνα, η ακτίνα θα είναι εφαπτόμενη της τροχιάς. Άρα η τροχιά είναι τόξο κύκλου με εφαπτόμενες τις ακτίνες στα σημεία που «τέμνει» την σφαίρα.

Άρα αυτή είναι η γεωδαισία του Σ .



d. Αφού η ακτίνες του φωτός ακολουθούν την γεωδαισία του Σ ο κάτοικος του Σ δεν θα βλέπει την διαφορά μεταξύ αριστερής και δεξιάς διανυόμενης απόστασης, όταν κινείται σε τόξο και θα βλέπει για εμπρός το σημείο που η τροχιά του συναντά την σφαίρα, όπου και κατευθύνεται. Άρα θα βλέπει να κινείται ακριβώς όπως σε ευθεία, άρα θα νομίζει κινείται ότι πάνω σε ευθεία.

e. Επειδή από κάθε σημείο του Γ του Σ μπορούμε να φέρουμε τουλάχιστον δύο, για τον κάτοικο του Σ ευθείες (για μας στο πιο πάνω σχήμα, δεξιά το μπλε C_3 και ο μωβ C_2 τόξο), στο ίδιο «επίπεδο» που να μην τέμνουν τον φορέα της συνεπίπεδης διαμέτρου ΑΒ (ή της ευθείας τόξου C_1) της σφαίρας. Ισχύει προφανώς το αίτημα παραλληλίας του Lobachevski για τους κατοίκους του Σ, άρα ο χώρος γι αυτούς είναι μη Ευκλείδειος, τύπου Lobachevski, ενώ για μας δηλαδή κάποιον που ζει εκτός της σφαίρας Σ είναι «κανονικός» και «υποτιθέμενα Ευκλείδειος», μια και δεν ξέρουμε σίγουρα σε τι τύπου χώρο ζούμε *(και αν μετά από όλα αυτά και εμείς, χωρίς να το αντιλαμβανόμαστε, ζούμε μέσα σε μια μεγαλύτερη υπερκείμενη σφαίρα πως να το μάθουμε;⋯).*

Έντυπο Υποβολής – Αξιολόγησης ΓΕ

Ο φοιτητής συμπληρώνει την ενότητα «Υποβολή Εργασίας» και αποστέλλει το έντυπο σε δύο μη συρραμμένα αντίγραφα (ή ηλεκτρονικά) στον Καθηγητή-Σύμβουλο. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος συμπληρώνει την ενότητα «Αξιολόγηση Εργασίας» και στα δύο αντίγραφα και επιστρέφει το ένα στο φοιτητή μαζί με τα σχόλια επί της ΓΕ, ενώ κρατά το άλλο για το αρχείο του μαζί με το γραπτό σημείωμα του Συντονιστή, εάν έχει δοθεί παράταση.

*Σε περίπτωση ηλεκτρονικής υποβολής του παρόντος εντύπου, το όνομα του ηλεκτρονικού αρχείου θα πρέπει να γράφεται υποχρεωτικά με λατινικούς χαρακτήρες και να ακολουθεί την κωδικοποίηση του παραδείγματος: Π.χ., το όνομα του αρχείου για τη 2η ΓΕ του φοιτητή ΙΩΑΝΝΟΥ στη ΔΕΟ13 θα πρέπει να γραφεί: «**ioannou_ge2_deo13.doc**».*

ΥΠΟΒΟΛΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ονοματεπώνυμο φοιτητη	**ΚΑΛΛΕΡΓΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ** ΑΡ.ΜΗΤΡΩΟΥ: **59832**

Κωδικός ΘΕ	**ΜΣΜ 51**
Κωδικός Τμήματος	**ΘΕΣ-1**
Ακ. Έτος	**2009-2010**
α/α ΓΕ	**2η**

Ονοματεπώνυμο Καθηγητή - Σύμβουλου	**κα. ΚΟΛΕΖΑ ΕΥΓΕΝΙΑ**
Καταληκτική ημερομηνία παραλαβής σύμφωνα με το ακ. ημερολόγιο (*ημέρα Τρίτη*)	**15.12.2009**
Ημερομηνία αποστολής ΓΕ από το φοιτητή	**15.12.2009**
Επισυνάπτεται (*σε περίπτωση που έχει ζητηθεί*) η άδεια παράτασης από το Συντονιστή;	ΝΑΙ / ΟΧΙ **ΟΧΙ**

***<u>Υπεύθυνη Δήλωση Φοιτητή</u>**: Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τη συγκεκριμένη Θεματική Ενότητα..*

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ημερομηνία παραλαβής ΓΕ από το φοιτητή	
Ημερομηνία αποστολής σχολίων στο φοιτητή	
Βαθμολογία (αριθμητικά, ολογράφως)	

Υπογραφή Φοιτητή

Υπογραφή Καθηγητή-Συμβούλου