Τελευταία επανάληψη στη Γεωμετρία της Α λυκείου

Βάρναλης Γ. Νικόλαος

Το άρθρο αυτό το έγραψα με σκοπό να αποτελέσει ένα χρήσιμο βοήθημα για την τελευταία επανάληψη του μαθητή της Α Λυκείου πριν το διαγώνισμα της Γεωμετρίας ώστε να τον καθοδηγεί στην επίλυση των ασκήσεων που θέλει να εξετάσει, καθώς και όποιον θέλει να θυμηθεί τις βασικές προτάσεις ή μεθόδους που χρησιμοποιούμε για την λύση των ασκήσεων. Στο τέλος παραθέτω κάποιες γενικές ασκήσεις.

Μερικές σκέψεις που πρέπει να θυμάστε:

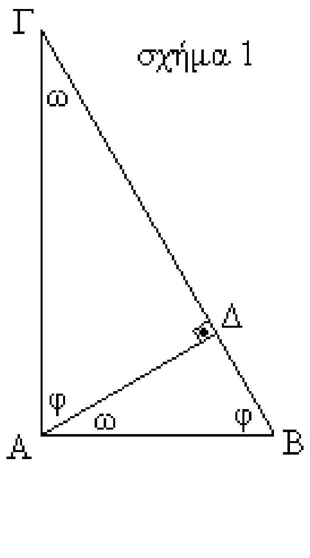
- **Ποιοι είναι οι βασικοί γεωμετρικοί τόποι και ποια είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα που έχουν.**

    - Κύκλος: είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που έχουν απόσταση ρ από ένα σταθερό σημείο (το κέντρο του).
    - Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος: είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος.
    - Διχοτόμος γωνίας: είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας.
    - Μεσοπαράλληλη: είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από δυο παράλληλες ευθείες.

- **Χαρακτηριστικά σημεία του τριγώνου**

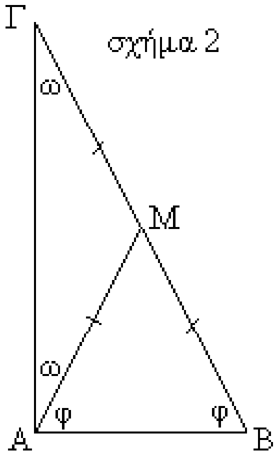
    - Έγκεντρο: σημείο τομής των εσωτερικών διχοτόμων, ισαπέχει από τις πλευρές του τριγώνου.
    - Περίκεντρο: σημείο τομής των μεσοκαθέτων, ισαπέχει από τις κορυφές του τριγώνου.
    - Ορθόκεντρο: σημείο τομής των υψών.
    - Βαρύκεντρο: σημείο τομής των διαμέσων, απέχει τα $\frac{2}{3}$ εκάστης διαμέσου από την αντίστοιχη κορυφή.

Βασικά σχήματα που εμφανίζονται σε ασκήσεις

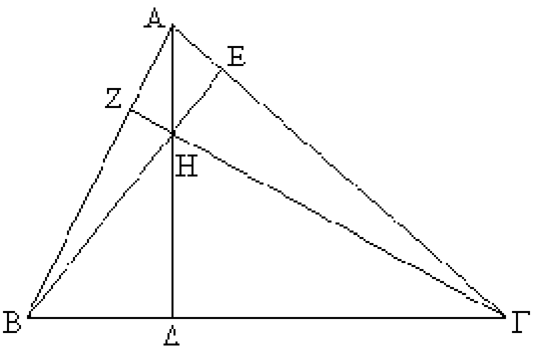


1. Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ δίνεται το ύψος ΑΔ (σχήμα 1) προς την υποτείνουσα τότε σχηματίζονται δύο ζεύγη ίσων γωνιών:

$$\hat{\Delta AB} = \hat{\Gamma}, \quad \hat{\Delta A\Gamma} = \hat{B}.$$



2. Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ δίνεται η διάμεσος ΑΜ προς την υποτείνουσα (σχήμα 2) τότε σχηματίζονται δύο ισοσκελή τρίγωνα ΑΜΒ, ΑΜΓ και δυο ζεύγη ίσων γωνιών: $\widehat{MAB} = \hat{B}$, $\widehat{MA\Gamma} = \hat{\Gamma}$.



3. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ έχω φέρει τα ύψη του ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τότε σχηματίζονται τα εγγράψιμα τετράπλευρά ΑΖΗΕ, ΒΔΗΖ, ΓΕΗΔ, ΒΓΕΖ, ΑΒΔΕ, ΑΖΔΓ.

Ισοσκελές – Ισόπλευρό τρίγωνο

Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου:

- δύο πλευρές ίσες.
- οι αντίστοιχες γωνίες ίσες.
- η διάμεσος που αντιστοιχεί στην βάση είναι και ύψος και διχοτόμος κλπ.

- **Πως αποδεικνύω ότι ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές;**

Δείχνω ένα από τα:

- δύο πλευρές του είναι ίσες.
- δύο γωνίες του είναι ίσες.
- μια διάμεσος του είναι και ύψος.
- μια διάμεσος του είναι και διχοτόμος.
- μια διχοτόμος του είναι και ύψος κλπ.

Ιδιότητες ισοπλεύρου τριγώνου:

- όλες οι πλευρές του ίσες.
- Όλες οι γωνίες του ίσες με 60°.
- Κάθε διάμεσος του είναι και ύψος και διχοτόμος κλπ.

- **Πως αποδεικνύω ότι ένα τρίγωνο είναι ισόπλευρο;**

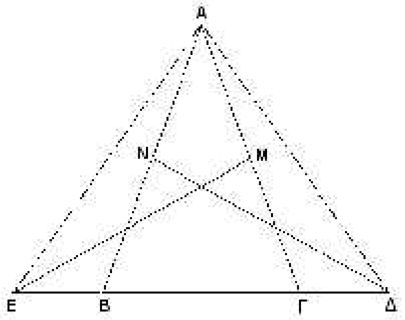
Δείχνω ένα από τα:

- δύο γωνίες του είναι 60°.
- είναι ισοσκελές και έχει μια γωνία 60°.
- έχει 3 γωνίες ίσες.
- Έχει 3 πλευρές ίσες.

Λυμένες ασκήσεις

1. **Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ. Αν οι μεσοκάθετοι των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ τέμνουν την ΒΓ στα Δ, Ε, να δειχθεί ότι το ΑΔΕ είναι ισοσκελές τρίγωνο.**

Λύση

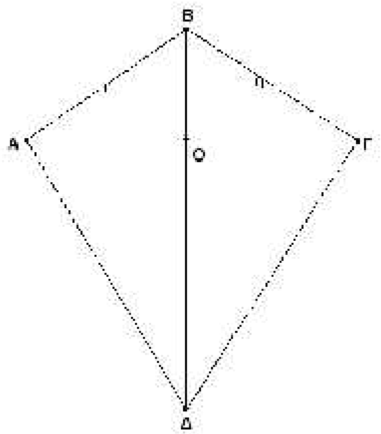


Συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΕΓ και ΝΒΔ.

Έχουν $N\hat{B}\Delta = M\hat{\Gamma}E$ (ως γωνίες παρά τη βάση ισοσκελούς) και ΝΒ = ΜΓ (ως μισά ίσων πλευρών), επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα και έχουν ΕΓ=ΒΔ.
Επειδή η ΝΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ άρα ΒΔ=ΑΔ , και η ΜΕ είναι μεσοκάθετος του ΑΓ άρα ΓΕ=ΑΕ. Άρα ΑΔ = ΑΕ δηλαδή το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές.

2. **Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΑΒ=ΒΓ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$. Να δειχθεί ότι :**
   a. **ΑΔ=ΔΓ.**
   b. **Οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου τέμνονται κάθετα.**

Λύση

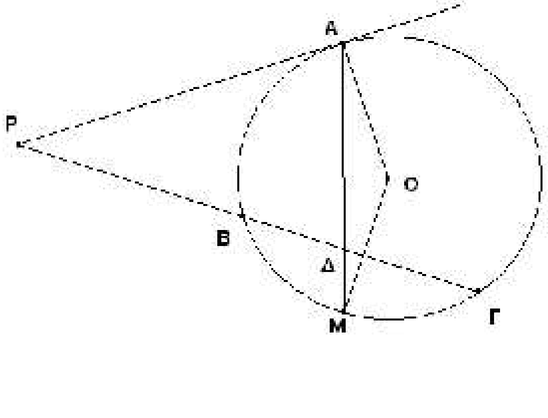


Το ΑΒΓ είναι ισοσκελές άρα $B\acute{A}O \, Z \, B\acute{\Gamma}O$,

επομένως θα είναι $\Delta\hat{A}O = \Delta\hat{\Gamma}O$ ως διαφορές ίσων γωνιών. Συνεπώς το ΑΓΔ είναι ισοσκελές άρα ΑΔ=ΔΓ.
Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ. Έχουν ΑΒ=ΒΓ, ΑΔ=ΔΓ, και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ επομένως

$A\hat{B}O = \Gamma\hat{B}O$ δηλαδή η ΒΟ είναι διχοτόμος στο ισοσκελές ΑΒΓ επομένως και ύψος δηλαδή $A\Gamma \perp B\Delta$.

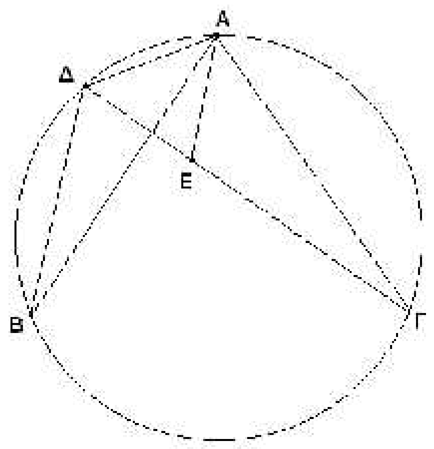
3. **Δίνεται κύκλος κέντρου Ο, η εφαπτομένη του Αχ στο σημείο του Α και σημείο Ρ πάνω στην Αχ. Φέρνουμε τέμνουσα ΡΒΓ προς τον κύκλο και ονομάζουμε Μ το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{B\Gamma}$. Αν η ΑΜ τέμνει την ΡΓ στο Δ, να δειχθεί ότι το τρίγωνο ΡΑΔ είναι ισοσκελές. (Θέμα 1972)**



Λύση

Φέρνουμε τις ΟΑ, ΟΜ που είναι κάθετες στις ΡΑ, ΒΓ αντίστοιχα. Ισχύουν $P\hat{A}\Delta$ = $90^{o} - M\hat{A}O$, $P\hat{\Delta}A = M\hat{\Delta}\Gamma = 90^{o} - \Delta\hat{M}O = 90^{o} - M\hat{A}O$. Άρα $P\hat{A}\Delta = P\hat{\Delta}A$ δηλαδή το τρίγωνο ΡΑΔ είναι ισοσκελές.

4. Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο στο κύκλο (Ο,ρ). Παίρνουμε τυχαίο σημείο Δ του ελάσσονος τόξου $\overset{\frown}{AB}$ και φέρνουμε τα τμήματα ΔΑ ΔΒ και ΔΓ. Επί του ΔΓ παίρνουμε τμήμα ΔΕ=ΔΑ. Να αποδειχθεί ότι α)Το τρίγωνο ΔΑΕ είναι ισόπλευρο β) ΓΕ=ΒΔ.



Λύση

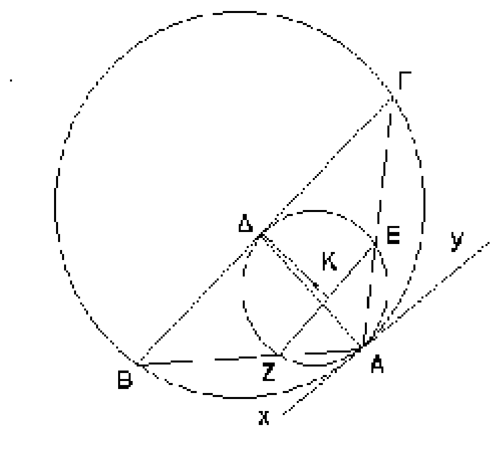
α) Το ΔΑΕ έχει ΔΑ=ΔΕ από υπόθεση και $A\hat{\Delta}E = \Delta\hat{A}E = 60^{o}$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο. Άρα ΔΑΕ είναι ισόπλευρο.

β) Τα τρίγωνα ΑΓΕ και ΒΔΑ είναι ίσα γιατί έχουν ΔΑ=ΑΕ (από (α) ερώτημα το ΔΑΕ είναι ισοσκελές), ΑΒ=ΑΓ ως πλευρές ισοπλεύρου τρίγωνου και $\Delta\hat{B}A = \Delta\hat{\Gamma}A$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο. Επομένως ισχύει ΓΕ=ΒΔ.

Κύκλοι

- **Όταν σε άσκηση έχω κύκλο και εφαπτομένη για να λύσω την άσκηση συνήθως φέρνω την ακτίνα στο σημείο επαφής (η οποία είναι κάθετη στην εφαπτομένη).**
- **Όταν σε άσκηση έχω κύκλο και μια χορδή για να λύσω την άσκηση συνήθως φέρνω το απόστημα της χορδής.**
- **Όταν σε κύκλο θέλω να δείξω ισότητα χορδών αποδεικνύω την ισότητα των αντίστοιχων αποστημάτων.**
- **Όταν σε άσκηση έχω δύο κύκλους για να λύσω την άσκηση φέρνω κάποια από τις παρακάτω ευθείες:**
  - Την διάκεντρο τους.
  - Αν οι κύκλοι είναι εφαπτόμενοι την κοινή εφαπτομένη τους στο σημείο επαφής τους.
  - Αν οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι την κοινή χορδή τους.

5. Δύο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά στο Α. Θεωρούμε χορδή ΒΔΓ του μεγαλυτέρου, που εφάπτεται στο μικρότερο στο Δ. Να δείξετε ότι η ΑΔ διχοτομεί την γωνία $B\hat{A}\Gamma$.



Λύση

Επειδή οι κύκλοι εφάπτονται φέρνουμε την κοινή εφαπτομένη xy στο Α. Η ως από χορδής και εφαπτομένης και εγγεγραμμένη που βαίνουν στο ίδιο τόξο, άρα $\hat{\Gamma} = Z\hat{E}A$ δηλαδή ΖΕ//ΒΓ.Αν Κ το κέντρο του μεγαλύτερου κύκλου και Λ του μικρότερου τότε $\Lambda\Delta \perp B\Gamma$ ως ακτίνα στο σημείο επαφής με την εφαπτομένη, αρα $\Lambda\Delta \perp ZE$. Τότε $\overset{\frown}{\Delta Z} = \overset{\frown}{\Delta E} \Leftrightarrow Z\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}E$.

Παραλληλία

Πως δείχνω ότι δύο ευθείες είναι παράλληλες;

Δείχνω ένα από τα:

- Είναι παράλληλες σε τρίτη.
- Είναι κάθετες σε τρίτη.
- Σχηματίζουν με τρίτη ευθεία εντός εναλλάξ γωνίες ίσες ή εντός και επί τα αυτά παραπληρωματικές κλπ.
- Είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου.
- Η μια είναι φορέας πλευράς τριγώνου ενώ η άλλη περνά από τα μέσα των δύο άλλων πλευρών του.
- Η μια είναι φορέας βάσης τραπεζίου ενώ η άλλη περνά από τα μέσα των δύο μη παράλληλων πλευρών του.
- Ισχύουν οι προϋποθέσεις του αντιστρόφου του θεωρήματος Θαλή.

Εύρεση Γωνιών

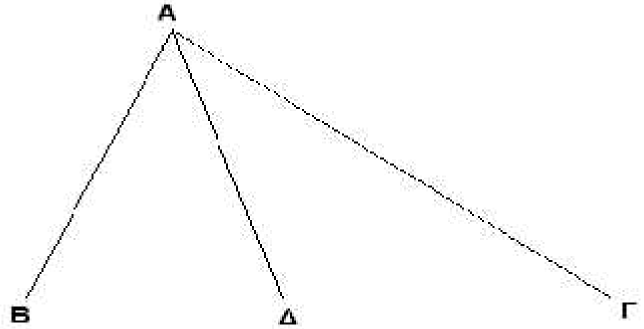
Όταν μου ζητάνε να βρω το μέτρο μιας γωνίας πρέπει να θυμάμαι τα εξής:

- Το άθροισμα των γωνιών τριγώνου είναι 180°.
- Σε τρίγωνο αν η διάμεσος σε μια πλευρά είναι ίση με το μισό της πλευράς τότε η απέναντι της πλευράς αυτής γωνία είναι 90°.
- Σε ορθογώνιο τρίγωνο απέναντι από 30° γωνία η κάθετη πλευρά είναι το μισό της υποτείνουσας.
- Το άθροισμα των γωνιών κυρτού ν–γώνου είναι (2ν-4) ορθές.

6. α**) Η εσωτερική διχοτόμος της γωνίας Α, τριγώνου ΑΒΓ, τέμνει την πλευρά ΒΓ και σχηματίζει με αυτή δύο γωνίας των οποίων η διαφορά ισούται με την διαφορά των γωνιών Β και Γ του τριγώνου.**

β) Αν σε τρίγωνο ισχύει $\hat{B} - \hat{\Gamma} = 90^\circ$ και η διχοτόμος του ΑΔ της γωνίας Α. Να δειχθεί ότι $B\hat{\Delta}A = 45^\circ$.

Λύση



α) Έστω ΑΒ<ΑΓ άρα $\mathrm{A\hat{\Delta}B} < \mathrm{A\hat{\Delta}\Gamma}$ (γιατί;). Στο τρίγωνο ΑΔΓ είναι $\mathrm{A\hat{\Delta}\Gamma} = 180^o - \hat{\Gamma} - \frac{\hat{A}}{2}$ και $\mathrm{A\hat{\Delta}B} = 180^o - \hat{B} - \frac{\hat{A}}{2}$.

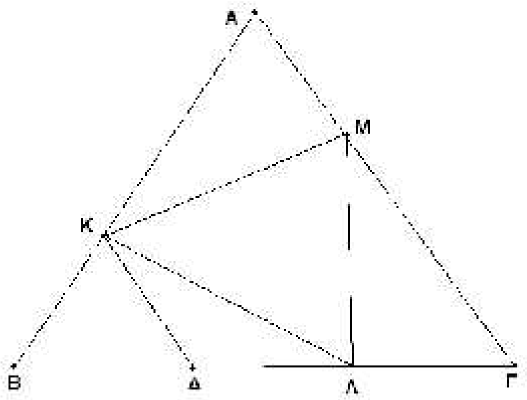
Αφαιρώντας κατά μέλη $\mathrm{A\hat{\Delta}\Gamma} - \mathrm{A\hat{\Delta}B} = \hat{B} - \hat{\Gamma}$

β) Θα είναι $\mathrm{A\hat{\Delta}\Gamma} + \mathrm{A\hat{\Delta}B} = 180^o$. Επίσης $\mathrm{A\hat{\Delta}\Gamma} - \mathrm{A\hat{\Delta}B} = \hat{B} - \hat{\Gamma} = 90^o$. Αν αφαιρέσουμε τις σχέσεις κατά μέλη $2\mathrm{B\hat{\Delta}A} = 90^o \Leftrightarrow \mathrm{B\hat{\Delta}A} = 45^o$.

7. Επί των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα σημεία Κ, Λ, Μ αντίστοιχα τέτοια ώστε ΑΚ = ΒΛ = ΓΜ = $\frac{1}{3}\mathrm{AB}$. Να αποδειχθεί ότι το ΚΛΜ είναι ισόπλευρο τρίγωνο και οι πλευρές του είναι αντίστοιχα κάθετες στις πλευρές του ΑΒΓ.

Λύση

Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΚΜ και ΚΛΒ.



Έχουν ΑΚ=ΒΛ=$\frac{2}{3}\mathrm{AB}$, $\hat{A} = \hat{B}$, ΑΜ=ΒΚ=$\frac{1}{3}\mathrm{AB}$, άρα τα τρίγωνα είναι ίσα και ΚΜ=ΚΛ. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύω ότι τα ΚΜ=ΜΛ οπότε το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο.

Επίσης αν είναι Δ το μέσο της ΒΛ τότε το ΒΚΔ είναι ισοσκελές (ΒΚ=ΒΔ=$\frac{1}{3}\mathrm{AB}$) και $\hat{B}$=60ο άρα το ΒΚΔ είναι ισόπλευρο και είναι ΚΔ=$\frac{1}{3}\mathrm{AB} \Leftrightarrow$ ΚΔ=$\frac{1}{2}$ΒΛ επομένως το ΒΚΛ είναι ορθογώνιο με $\mathrm{B\hat{K}\Lambda} = 90^\circ$. Ομοίως αποδεικνύεται και ότι $\mathrm{K\hat{M}A} = \mathrm{M\hat{\Lambda}\Gamma} = 90^\circ$.

- **Πως δείχνω ότι δύο γωνίες είναι ίσες;**

Δείχνω ένα από τα:

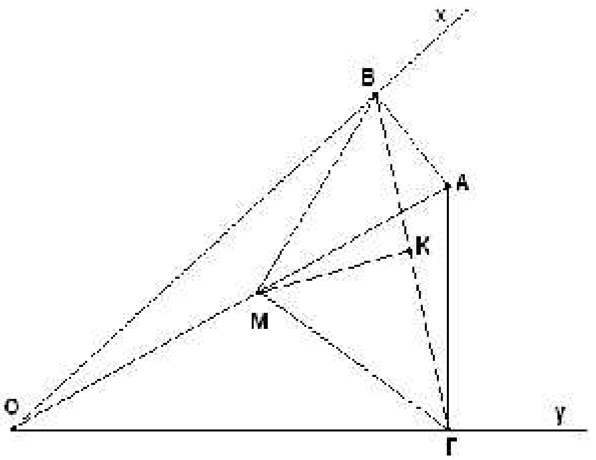
- Είναι γωνίες δύο ίσων τριγώνων.
- Αν είναι συμπληρώματα ή παραπληρώματα ίσων γωνιών.
- Είναι κατακορυφήν.
- Είναι εντός εναλλάξ γωνίες ή εντός εκτός και επί τα αυτά σε δύο παράλληλες τεμνόμενες από τρίτη.
- Είναι οξείες (αντίστοιχα αμβλείες) με πλευρές κάθετες ή παράλληλες.
- Είναι απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου.
- Είναι γωνίες παρά τη βάση ισοσκελούς τριγώνου.
- Είναι γωνίες παρά τη βάση ισοσκελούς τραπεζίου.
- Είναι εγγεγραμμένες ή επίκεντρες ή από χορδής και εφαπτομένης και βαίνουν σε ίσα τόξα.

- **Πως δείχνω ότι μια γωνιά είναι ορθή.**

- Αν είναι κάθετες οι φορείς των πλευρών της.

- o Αν βρίσκεται σε τρίγωνο και το άθροισμα των άλλων δύο γωνιών του τριγώνου είναι 90°.
- o Αν βρίσκεται σε τρίγωνο και η διάμεσος από την κορυφή της είναι ίση με το μισό της απέναντι πλευράς.
- o Αν ανήκει σε ορθογώνιο (π.χ. να έχω παραλληλόγραμμο που οι διαγώνιοί του είναι ίσες κλπ).
- o Αν οι πλευρές της είναι διχοτόμοι εφεξής παραπληρωματικών γωνιών.
- o Αν είναι εγγεγραμμένη και βαίνει σε ημικύκλιο.

8. Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και σημείο Α στο εσωτερικό της. Από το Α φέρνουμε τις κάθετες ΑΒ, ΑΓ προς τις πλευρές της γωνίας και ονομάζουμε Μ το μέσο της ΟΑ. Από το Μ φέρνω την κάθετη στο ΒΓ. Να δειχθεί ότι η κάθετη αυτή διέρχεται από το μέσο της ΒΓ.

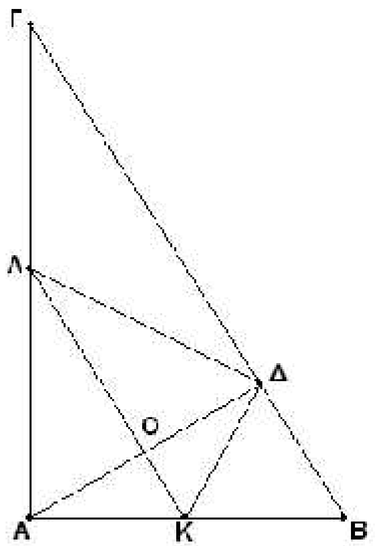


Λύση

Στο ορθογώνιο ΟΒΑ η ΒΜ είναι διάμεσος άρα ΒΜ=$\frac{OA}{2}$. Ομοίως στο ΟΓΑ η ΓΜ είναι διάμεσος άρα ΓΜ=$\frac{OA}{2}$. Επομένως ΒΜ=ΓΜ δηλαδή το ΒΜΓ είναι ισοσκελές και επειδή το ΜΚ είναι ύψος του θα είναι και διάμεσος δηλαδή ΒΚ=ΓΚ.

- Όταν σε άσκηση δίνεται τμήμα που ενώνει μέσα δύο ευθυγράμμων τμημάτων χρησιμοποιώ ένα από τα θεωρήματα:
  - o Το τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τρίγωνο είναι παράλληλο στη τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.
  - o Η διάμεσος ενός τραπεζίου είναι παράλληλη στις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμά τους.
  - o Το τμήμα που ενώνει τα μέσα των διαγωνίων ενός τραπεζίου είναι παράλληλο στις βάσεις του και ίσο με την ημιδιαφορά τους.

9. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\hat{A}$ =90° και ΑΔ το ύψος του. Αν Κ, Λ τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα να δείξετε ότι



a. $\widehat{K\Delta\Lambda}$ =90°.

b. Η ΚΛ είναι μεσοκάθετη στην ΑΔ.

c. Η ΚΛ είναι διχοτόμος των γωνιών $\widehat{AK\Delta}$, $\widehat{A\Lambda\Delta}$.

Λύση

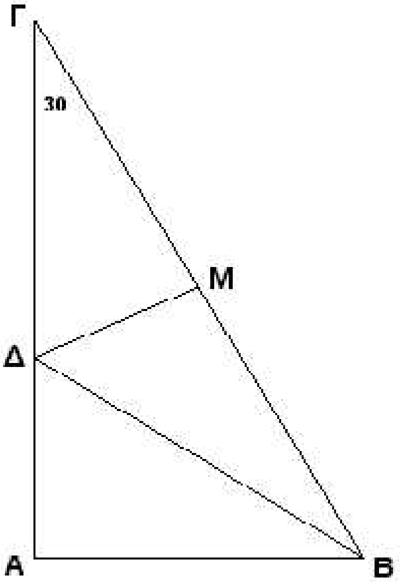
α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ η ΚΔ είναι διάμεσος άρα ΚΔ=$\frac{1}{2}$ΑΒ ⇔ ΚΔ=ΑΔ συνεπώς το ΑΔΚ είναι ισοσκελές και θα είναι $K\hat{A}\Delta = K\hat{\Delta}A$. Ομοίως έχω $\Delta\hat{A}\Lambda = A\hat{\Delta}\Lambda$ και προσθέτοντας τις σχέσεις κατά μέλη είναι

$$K\hat{A}\Delta + \Delta\hat{A}\Lambda = A\hat{\Delta}K + A\hat{\Delta}\Lambda \Leftrightarrow K\hat{\Delta}\Lambda = K\hat{A}\Lambda = 90^o.$$

b. Από τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΚΔ, ΑΛΔ έχω ότι τα Κ, Λ ισαπέχουν από τα Α, Δ άρα ανήκουν στη μεσοκάθετη του ΑΔ, επομένως η ΚΛ είναι μεσοκάθετη στην ΑΔ.

c. Στα ισοσκελή τρίγωνα ΑΚΔ, ΑΛΔ οι ΚΟ, ΛΟ είναι ύψη άρα και διχοτόμοι.

10. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) με $\hat{\Gamma} = 30^o$. Αν Μ είναι το μέσο της υποτείνουσας ΒΓ και η ευθεία (ε) που είναι κάθετη επί την ΒΓ στο Μ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο εσωτερικό της σημείο Δ, τότε να αποδειχθεί ότι είναι ΑΓ=3ΜΔ.

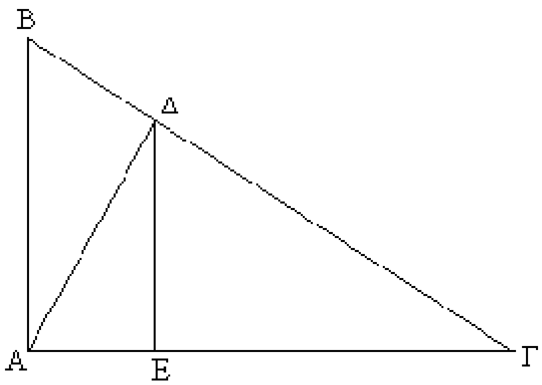


Λύση

Ονομάζω ΓΔ = x. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΜΓ η $\hat{\Gamma} = 30^o$ άρα ΔΜ = $\frac{1}{2}$ΓΔ = $\frac{1}{2}$x. Η ΜΔ είναι μεσοκάθετος του ΒΓ άρα ΓΔ = ΔΒ = x δηλαδή το τρίγωνο ΓΔΒ είναι ισοσκελές και θα έχω $\Delta\hat{B}M = 30^o$ και επειδή $\hat{B} = 60^o$ θα έχω ΑΔ = $\frac{1}{2}$ΔΒ $\Leftrightarrow$ ΑΔ=$\frac{1}{2}$x.

Επομένως ΑΓ = ΑΔ + ΔΓ = $\frac{1}{2}$x+x = $\frac{3}{2}$x = 3($\frac{1}{2}$x) = 3ΜΔ.

11. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$), το ύψος του ΑΔ και ονομάζουμε Ε την προβολή του Δ στην πλευρά ΑΓ. Αν είναι $\hat{\Gamma} = 30^o$, να αποδειχθεί ότι ΑΓ=4·ΑΕ.



Λύση

Ισχύει $A\hat{\Delta}E = \hat{\Gamma} = 30^o$ ως οξείες με πλευρές κάθετες.

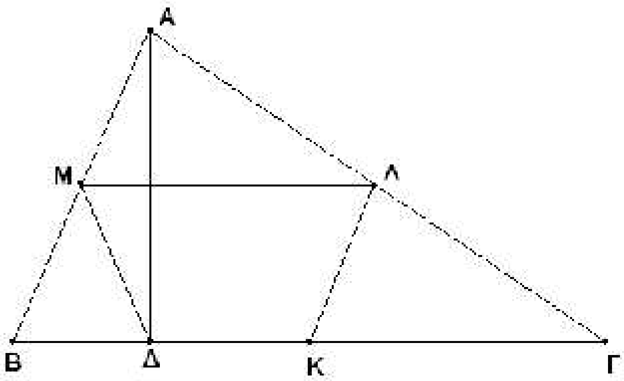
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ είναι $A\hat{\Delta}E = 30^o$ άρα ΑΕ=$\frac{1}{2}$ΑΔ (1).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ είναι $\hat{\Gamma} = 30^o$ άρα ΑΔ=$\frac{1}{2}$ΑΓ (2).

Από (1) και (2) έχω ΑΓ=4·ΑΕ.

- Σε ασκήσεις που έχουμε μέσα τμημάτων τι πρέπει να θυμόμαστέ:
  - Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το μισό της υποτείνουσας.
  - Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα πλευρών τετραπλεύρου είναι παράλληλο και ίσο με το μισό της τρίτης πλευράς.
  - Η διάμεσος τραπεζίου είναι παράλληλη στις βάσεις του και ίση με ημιάθροισμα αυτών.
  - Το απόστημα χορδής.

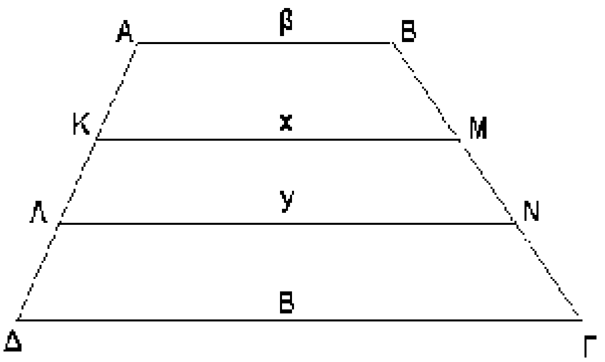
12. Στο οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε το ύψος του ΑΔ και τα μέσα Κ, Λ, Μ των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντιστοίχως. Να αποδειχθεί ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Λύση

Το ΜΛ ενώνει τα μέσα πλευρών του ΑΒΓ άρα ΜΛ//ΒΓ, συνεπώς το τετράπλευρο ΚΛΜΔ είναι παραλληλόγραμμο.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ η ΜΔ ως διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ΜΔ=$\frac{1}{2}$ΑΒ.
Επίσης το ΚΛ ενώνει τα μέσα πλευρών του ΑΒΓ άρα ΚΛ=$\frac{1}{2}$ΑΒ. Άρα ΜΔ=ΚΛ. Τελικά το ΚΛΜΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

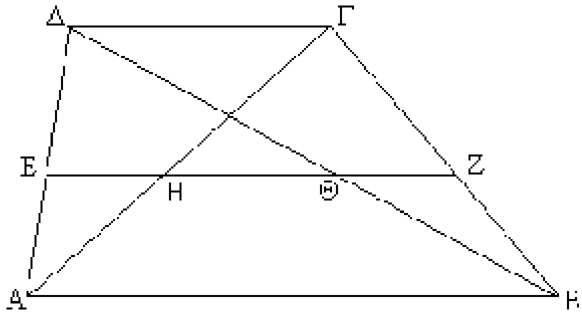
13. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ, ΑΒ<ΓΔ και στη πλευρά του ΑΔ παίρνω τα σημεία Κ, Λ έτσι ώστε ΑΚ=ΚΛ=ΛΔ. Από τα α Κ, Λ φέρνω παράλληλες στις βάσεις του που τέμνουν την ΒΓ στα Μ, Ν αντίστοιχα. Να βρεθούν τα μήκη των ΚΜ, ΛΝ συναρτήσει των βάσεων ΑΒ=β, ΓΔ=Β.



Λύση

Αφού ΑΒ // ΚΜ // ΛΝ // ΔΓ και ΑΚ=ΚΛ=ΛΔ θα είναι ΒΜ=ΜΝ=ΝΓ.
Στο τραπέζιο ΑΒΜΚ η ΚΜ είναι διάμεσος άρα 2x=β+y (1). Ομοίως στο ΚΜΓΔ 2y=x+Β (2).
Από τη λύση του συστήματος των (1), (2) προκύπτει ότι : $x = \frac{2\beta + B}{3}$, $y = \frac{2B + \beta}{3}$.

Μερικές ασκήσεις για επανάληψη



14. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ=2ΓΔ. Να δειχθεί ότι η διάμεσός του τριχοτομείται από τις διαγώνιες του.

Λύση

Γνωρίζω ότι η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη στις βάσεις του και διέρχεται από τα μέσα των διαγωνίων του.
Στο τρίγωνο ΑΔΓ το τμήμα ΕΗ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του άρα ΕΗ=$\frac{1}{2}$ΔΓ. Για τον ίδιο λόγο ΘΖ=$\frac{1}{2}$ΔΓ. Επίσης γνωρίζω ότι ΗΘ=$\frac{1}{2}$(ΑΒ – ΓΔ)= $\frac{1}{2}$(2ΓΔ – ΓΔ)= $\frac{1}{2}$ΓΔ, επομένως ΕΗ = ΗΘ = ΘΖ.

15. **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}$ Ζ $2\hat{\Gamma}$. Από το μέσο Μ της ΑΓ φέρνουμε παράλληλη προς τη διχοτόμο ΒΔ της γωνίας $\hat{B}$, που τέμνει την ΒΓ στο Ν. Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΑΝΓ είναι ορθογώνιο στο Ν.**

Λύση

Ισχύει $\Delta\hat{B}\Gamma$ Ζ $M\hat{N}\Gamma$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΒΔ και ΝΜ που τέμνονται από την ΒΓ. Όμως $\Delta\hat{B}\Gamma$ Ζ $\frac{\hat{B}}{2}$ Ζ $\hat{\Gamma}$ από υπόθεση. Άρα $\hat{\Gamma}$ Ζ $M\hat{N}\Gamma$ δηλαδή το ΝΜΓ είναι ισοσκελές και ΝΜ=ΜΓ=$\frac{1}{2}$ΑΓ. Η διάμεσος ΝΜ του τριγώνου ΑΝΓ ισούται με το μισό της απέναντι πλευράς άρα το ΑΝΓ είναι ορθογώνιο στο Ν.