ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{Ο}: ΚΥΜΑΤΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ 2: ΕΠΑΛΛΗΛΙΑ ΚΥΜΑΤΩΝ – ΣΥΜΒΟΛΗ ΚΥΜΑΤΩΝ – ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Μελέτη της συμβολής κυμάτων στην επιφάνεια υγρού

Τι ονομάζουμε συμβολή κυμάτων;

Συμβολή ονομάζουμε την ταυτόχρονη διάδοση δύο ή περισσοτέρων διαταραχών στη ίδια περιοχή ενός ελαστικού μέσου.

Αρχή της επαλληλίας (ή υπέρθεσης) στην κυματική.

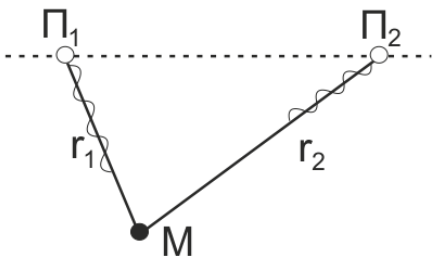
"Αν σ' ένα σημείο ενός ελαστικού μέσου συναντηθούν δύο ή περισσότερες κυματικές διαταραχές, τότε το σημείο αυτό θα κινηθεί έτσι ώστε η απομάκρυνση του να ισούται με τη συνισταμένη των απομακρύνσεων που θα είχε, εάν η κάθε διαταραχή διερχόταν από το σημείο ξεχωριστά."

Σημειώστε ότι η αρχή της επαλληλίας δεν ισχύει στις περιπτώσεις όπου οι διαταραχές είναι τόσο ισχυρές, ώστε οι δυνάμεις μεταξύ των μορίων του μέσου παύουν να είναι ανάλογες της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας ή μεταβάλλουν τις ιδιότητες του μέσου.

Μελέτη της συμβολής δύο επιφανειακών κυμάτων, τα οποία εκπέμπονται από δύο όμοιες και σύγχρονες πηγές.

Έστω Π_1, Π_2 δύο σύγχρονες πηγές (δηλαδή έχουν την ίδια συχνότητα και την ίδια αρχική φάση) στην επιφάνεια ενός υγρού, οι οποίες ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού, με το ίδιο πλάτος A. Έστω M ένα υλικό σημείο της επιφάνειας, το οποίο απέχει r_1 από την πηγή Π_1 και r_2 από την Π_2, τότε αν τη χρονική στιγμή t στο M έχουν φτάσει και οι δύο διαταραχές, οι επιμέρους απομακρύνσεις του M είναι:

$$\begin{cases} y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{r_1}{\lambda}\right) \\ y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{r_2}{\lambda}\right) \end{cases}$$



Η συνισταμένη απομάκρυνση του M είναι: $y = y_1 + y_2$ ή

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) + A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right).$$

Από την τριγωνομετρική ιδιότητα: $\eta\mu a + \eta\mu b = 2\eta\mu\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$.

Η παραπάνω γράφεται:

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\right)\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right)$$

Η εξίσωση αυτή, παριστάνει γραμμική αρμονική ταλάντωση, πλάτους $A' = 2A\cdot\left|\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\dfrac{r_1 - r_2}{2\lambda}\right)\right|$ και συχνότητας ίσης με τη συχνότητα των κυμάτων. Το πλάτος A' εξαρτάται από τη διαφορά των αποστάσεων του υλικού σημείου από τις πηγές.

Τι ονομάζουμε ενισχυτική συμβολή;

Αν στο σημείο M τα δύο κύματα φτάνουν έτσι ώστε να δίνουν ταυτόχρονα δύο όρη ή δύο κοιλάδες, το αποτέλεσμα της επαλληλίας θα είναι να δημιουργηθεί όρος με διπλάσιο ύψος ή κοιλάδα με διπλάσιο βάθος αντίστοιχα. Λέμε τότε ότι τα κύματα συμβάλουν ενισχυτικά ή ότι το M είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής. Στην εξίσωση της συμβολής παρατηρούμε ότι το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου M είναι μέγιστο και ίσο με $2\mathrm{A}$, δηλαδή είναι σημείο ενίσχυσης αν:

$$\mathrm{A}' = 2\mathrm{A} \Rightarrow 2\mathrm{A}\cdot\left|\sigma\upsilon\nu\left(\pi\frac{r_1 - r_2}{\lambda}\right)\right| = 2\mathrm{A} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\pi\frac{r_1 - r_2}{\lambda}\right) = \pm1 \Rightarrow |r_1 - r_2| = \mathrm{N}\cdot\lambda,\ \mathrm{N} = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

ή ισοδύναμα:

$r_1 - r_2 = \mathrm{N}\cdot\lambda,\ \mathrm{N} = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$ (*συνθήκη ενίσχυσης*)

Συνεπώς τα υλικά σημεία της επιφάνειας των οποίων οι αποστάσεις από τις πηγές διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος.

! Για $\mathrm{N} = 0$ είναι $r_1 = r_2$, συνθήκη που επαληθεύεται από τα σημεία της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει τις δύο πηγές.

Τι ονομάζουμε απόσβεση ή ακυρωτική συμβολή;

Αν στο υλικό σημείο M τα κύματα συναντώνται έτσι ώστε το ένα να δίνει όρος και το άλλο κοιλάδα, τότε συνεχώς οι επιμέρους απομακρύνσεις που προκαλούν θα είναι αντίθετες. Συνεπώς η συνισταμένη απομάκρυνση του M θα είναι μηδενική, δηλαδή το σημείο θα παραμένει ακίνητο. Λέμε τότε ότι έχουμε απόσβεση και το M είναι σημείο αποσβεστικής (ή αναιρετικής ή ακυρωτικής) συμβολής. Στην εξίσωση της συμβολής το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου M είναι μηδενικό. Δηλαδή:

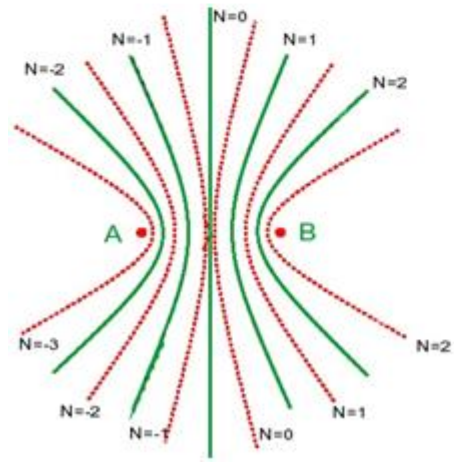
$$A' = 0 \Rightarrow 2A\left|\sigma\upsilon\nu\left(\pi\frac{r_1 - r_2}{\lambda}\right)\right| = 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\pi\frac{r_1 - r_2}{\lambda}\right) = 0 \Rightarrow |r_1 - r_2| = (2N+1)\frac{\lambda}{2},$$

όπου $N = 0, 1, 2, 3, \ldots$

ή ισοδύναμα: $r_1 - r_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2},\ N = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ (συνθήκη ακυρωτικής συμβολής)

Άρα τα σημεία της επιφάνειας των οποίων οι αποστάσεις από τις πηγές διαφέρουν κατά περιττό πολλαπλάσιο του $\frac{\lambda}{2}$ παραμένουν ακίνητα.

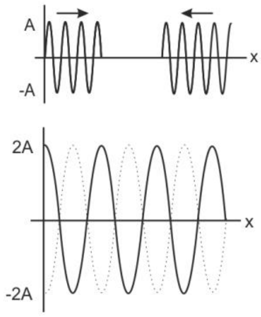
! Αν $r_1 - r_2 \neq N\lambda$ και $r_1 - r_2 \neq (2N+1)\frac{\lambda}{2}$, τότε προφανώς το πλάτος της ταλάντωσης A' A' του σημείου της επιφάνειας είναι: $0 < A' < 2A$.

Υπερβολές ενίσχυσης και απόσβεσης	
Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων για τα οποία $\left|r_1 - r_2\right| =$σταθερή είναι υπερβολή. Έτσι τα σημεία ενίσχυσης και απόσβεσης βρίσκονται πάνω σε υπερβολές με εστίες τις πηγές A και B, για τους διάφορους ακεραίους N. Σημειώστε ότι μεταξύ των πηγών παρεμβάλλεται περιττό πλήθος υπερβολών ενίσχυσης και άρτιο πλήθος υπερβολών απόσβεσης.	

Μελέτη της συμβολής κυμάτων με αντίθετες διευθύνσεις, εξίσωση στάσιμου κύματος

Τι ονομάζουμε στάσιμο κύμα;

Έστω ότι δύο κύματα με το ίδιο πλάτος και την ίδια συχνότητα διαδίδονται ταυτόχρονα στο ίδιο γραμμικό ελαστικό μέσο με αντίθετη φορά. Το αποτέλεσμα της συμβολής τους αποτελεί μία ιδιαίτερη κυματική διαμόρφωση που ονομάζεται **στάσιμο κύμα**.

Στο γραμμικό μέσο που συμβάλλουν τα δύο κύματα εμφανίζονται σημεία τα οποία είναι ακίνητα και ονομάζονται δεσμοί. Όλα τα υπόλοιπα σημεία του μέσου ταλαντώνονται με τη συχνότητα των κυμάτων. Δύο διαδοχικοί δεσμοί απέχουν σταθερή απόσταση μεταξύ τους, ενώ στο μέσο αυτής της απόστασης βρίσκονται σημεία που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος, διπλάσιο από αυτό των κυμάτων και ονομάζονται κοιλίες.	

Σε μια ελαστική χορδή διαδίδονται δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα, με το ίδιο πλάτος, την ίδια φάση, την ίδια συχνότητα αλλά προς αντίθετη κατεύθυνση, δημιουργώντας στάσιμο κύμα. Να προσδιορίσετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος.

Έστω ότι κατά μήκος ενός γραμμικού και ελαστικού μέσου το οποίο ταυτίζεται με τον οριζόντιο άξονα x΄Ox διαδίδονται δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα. Το κύμα που διαδίδεται κατά τη θετική φορά του άξονα έχει εξίσωση:

$$y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$$

ενώ το διαδιδόμενο προς την αρνητική φορά: $y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)$

Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας η απομάκρυνση ενός σημείου όταν και τα δύο κύματα έχουν φτάσει σε αυτό είναι:

$$y = y_1 + y_2 \Rightarrow y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right) + A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)$$

Με τη βοήθεια της: $\eta\mu a + \eta\mu b = 2\eta\mu\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{a-b}{2}\right)$

είναι:

$$\boxed{y = 2A\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\cdot\eta\mu\left(2\pi\frac{t}{T}\right)}$$

Η τελευταία παριστάνει αρμονική ταλάντωση συχνότητας ίσης με αυτή των οδεύοντων κυμάτων και πλάτους $A' = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\right|$ <u>το οποίο εξαρτάται από τη θέση των σημείων</u>.

Σε ποιες θέσεις του μέσου βρίσκονται οι κοιλίες;

Για μία κοιλία θα πρέπει:

$$A' = 2A \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm 1 \text{ ή}$$

$$\boxed{x = k\frac{\lambda}{2} \text{ με } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots}$$ *Συνθήκη κοιλιών*

Σε ποιες θέσεις του μέσου βρίσκονται οι δεσμοί;

Για τα ακίνητα σημεία (δεσμοί) είναι:

$$A' = 0 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda} = 0 \text{ ή}$$

$$\boxed{x = (2k+1)\frac{\lambda}{4} \text{ με } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots}$$ *Συνθήκη δεσμών*

* Για $k < 0$ προκύπτουν οι δεσμοί και οι κοιλίες του αρνητικού ημιάξονα.

(! Στην παραπάνω μελέτη το σημείο Ο(x=0) που χρησιμοποιήσαμε ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων είναι κοιλία.)

Πόσο απέχουν δύο διαδοχικές κοιλίες;

Οι θέσεις δύο διαδοχικών κοιλιών θα είναι $x = k\frac{\lambda}{2}$ και $x' = k'\frac{\lambda}{2}$ όπου $k' = k+1$. Άρα η απόσταση μεταξύ τους θα ισούται με: $d = x' - x$ ή $d = k'\frac{\lambda}{2} - k\frac{\lambda}{2}$ ή $d = (k+1)\frac{\lambda}{2} - k\frac{\lambda}{2}$ ή

$$\boxed{d = \frac{\lambda}{2}}$$

Πόσο απέχουν δύο διαδοχικοί δεσμοί;

Οι θέσεις δύο διαδοχικών δεσμών είναι $x = (2k+1)\frac{\lambda}{4}$ και $x' = (2k'+1)\frac{\lambda}{4}$, όπου $k' = k+1$.

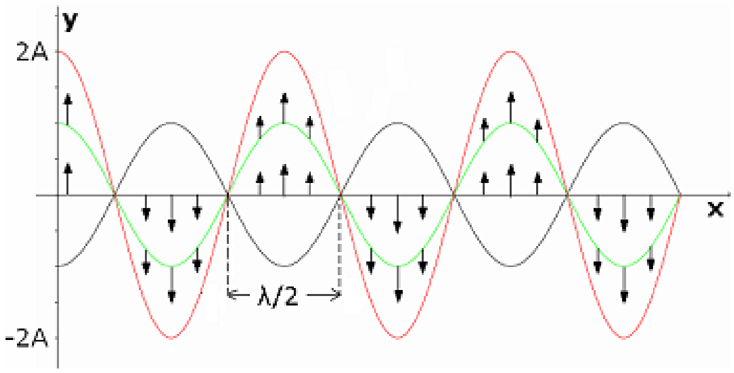
Η μεταξύ τους απόσταση θα είναι: $d = x' - x$ ή $d = (2k'+1)\frac{\lambda}{4} - (2k+1)\frac{\lambda}{4}$ ή $d = (2(k+1)+1)\frac{\lambda}{4} - (2k+1)\frac{\lambda}{4}$ ή

$$\boxed{d = \frac{\lambda}{2}}$$

Πόσο απέχει μία κοιλία από τον πλησιέστερο δεσμό;

Για τον ίδιο ακέραιο k η θέση της κοιλίας θα είναι $x_k = k\frac{\lambda}{2}$ και του δεσμού $x_\delta = (2k+1)\frac{\lambda}{4}$.

Άρα η απόσταση μεταξύ τους θα είναι: $d = |x_k - x_\delta| = \left|(2k+1)\frac{\lambda}{4} - k\frac{\lambda}{2}\right|$ ή $d = \frac{\lambda}{4}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ	
Η διαταραχή που περιγράψαμε δεν αποτελεί κύμα, αφού η ενέργεια δεν διαδίδεται αλλά παραμένει εντοπισμένη μεταξύ των δεσμών. Για το λόγο αυτό έχει δοθεί στη διαταραχή αυτή το όνομα "στάσιμο κύμα". Επίσης, τα υλικά σημεία του μέσου δεν εκτελούν διαδοχικά την ίδια κίνηση όπως σε ένα οδεύον κύμα, αλλά ταλαντώνονται (με εξαίρεση τους δεσμούς) με την ίδια συχνότητα και διαφορετικό πλάτος. Δύο σημεία του μέσου μπορεί να βρίσκονται είτε σε συμφωνία φάσης $(\Delta\phi = 0)$ είτε σε αντίθεση φάσης $(\Delta\phi = \pi\ \text{rad})$. Τα σημεία μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών (άτρακτος) βρίσκονται σε συμφωνία φάσης, άρα περνούν ταυτόχρονα από τη θέση ισορροπίας κινούμενα προς την ίδια κατεύθυνση και ταυτόχρονα φτάνουν στις ακραίες θέσεις προς την ίδια κατεύθυνση. Αντίστοιχα, τα σημεία εκατέρωθεν ενός δεσμού και σε διαδοχικές ατράκτους βρίσκονται σε αντίθεση φάσης, άρα περνούν ταυτόχρονα από τη θέση ισορροπίας κινούμενα προς αντίθετη κατεύθυνση και φτάνουν ταυτόχρονα στις ακραίες θέσεις προς την αντίθετη κατεύθυνση. Προφανώς, ανά $\Delta t = \frac{T}{2}$ όλα τα σημεία διέρχονται από τη θέση ισορροπίας και η χορδή ευθυγραμμίζεται.	

Ημερομηνία τροποποίησης: 21/07/2011

<u>Επιμέλεια</u>: Αλεξόπουλος Ιωάννης
<u>Επιστημονικός έλεγχος</u>: Ζησιμόπουλος Γεώργιος