ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{o}: ΡΕΥΣΤΑ ΣΕ ΚΙΝΗΣΗ

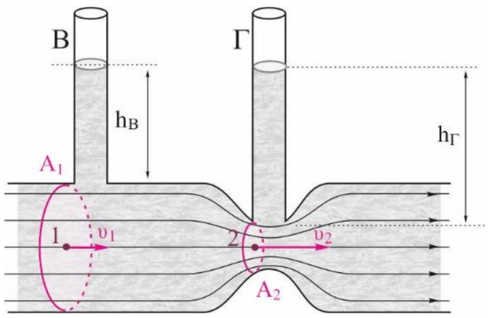
ΕΝΟΤΗΤΑ 3: Η ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΚΑΙ Η ΕΞΙΣΩΣΗ BERNOULLI

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Στο οριζόντιο σωλήνα του διπλανού σχήματος ρέει ιδανικό υγρό. Με τον οριζόντιο σωλήνα επικοινωνούν δύο κατακόρυφοι σωλήνες, Β και Γ. Για τα ύψη της στήλης του υγρού στο σωλήνα Β, h_B, και στο σωλήνα Γ, $h_Γ$, ισχύει



Α. $h_B > h_Γ$.

Β. $h_B < h_Γ$

Γ. $h_B = h_Γ$

Να διαλέξεις τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσεις.

<u>Λύση</u>

Σωστή είναι η πρόταση Α.

Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli για τα σημεία 1 και 2 της οριζόντιας φλέβας του υγρού.

$$\frac{1}{2}\rho υ_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho υ_2^2 + p_2 \qquad (1)$$

Σύμφωνα με το νόμο της συνέχειας, όπου υπάρχει στένωση του σωλήνα η ταχύτητα μεγαλώνει, δηλαδή $υ_2 > υ_1$. Από τη σχέση (1) προκύπτει $p_2<p_1$.

Το υγρό στις στήλες είναι ακίνητο. Αφού μεταξύ του κάτω μέρους της στήλης του υγρού και του πάνω μέρους του οριζόντιου σωλήνα το υγρό δεν κινείται οι πιέσεις είναι ίσες. Έτσι, στο κάτω μέρος της στήλης του σωλήνα Β επικρατεί συνολική πίεση p_B που είναι ίση με p_1 .

$$p_B = p_1 \quad ή \ p_{ατμ} + \rho g h_B = p_1 \qquad (2)$$

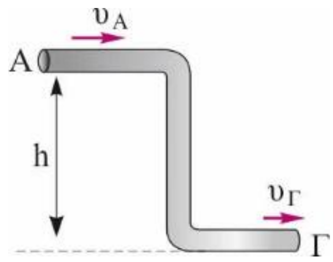
Αντίστοιχα για το σωλήνα Γ ισχύει:

$$p_Γ = p_2 \quad ή \ p_{ατμ} + \rho g h_Γ = p_2 \qquad (3)$$

Από τη σύγκριση των (2) και (3) προκύπτει $h_B > h_Γ$.

Ερώτηση 2.

Ο σωλήνας του διπλανού σχήματος έχει σταθερή διατομή και το υγρό ρέει με φορά από το Α προς το Γ. Τα σημεία Α και Γ απέχουν κατακόρυφα κατά h. Για τις ταχύτητες ροής στα Α και Γ ισχύει



Α. $\upsilon_A = \upsilon_\Gamma$

Β. $\upsilon_\Gamma = \sqrt{\upsilon_A^2 + 2gh}$

Γ. $\upsilon_\Gamma = \sqrt{2gh}$

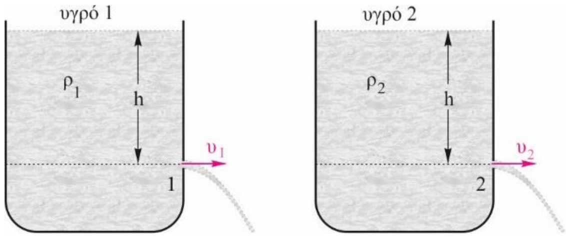
Να διαλέξεις τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσεις.

<u>Λύση</u>

Σωστή είναι η πρόταση Α.

Εφόσον η παροχή διατηρείται χρονικά σταθερή και έχουμε σωλήνα σταθερής διατομής, η ταχύτητα του υγρού στο σωλήνα θα είναι σταθερή σε κάθε σημείο του.

Ερώτηση 3.



Τα δύο ίδια δοχεία του σχήματος περιέχουν υγρά με πυκνότητες ρ_1 και ρ_2 όπου $\rho_1 = 2\rho_2$. Οι τρύπες που υπάρχουν σε βάθος h από την ελεύθερη επιφάνεια κάθε υγρού έχουν διατομές A_1 και A_2 όπου $A_2 = 2A_1$. Θεωρούμε ότι η διατομή κάθε τρύπας είναι πολύ μικρότερη από αυτήν της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού και ότι η πίεση γύρω από το δοχείο είναι ίση με την ατμοσφαιρική. Για τις παροχές των ρευστών που ρέουν από τις τρύπες 1 και 2 ισχύει

Α. $\Pi_1 = \Pi_2$

Β. $\Pi_1 = 2\Pi_2$

Γ. $\Pi_2 = 2\Pi_1$.

Να διαλέξεις τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσεις.

<u>Λύση</u>

Σωστή είναι η πρόταση Γ.

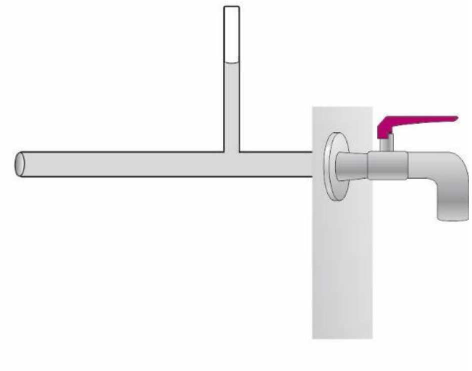
Η παροχή Π δίνεται από τη σχέση $\Pi = A\upsilon$.

Σύμφωνα με το θεώρημα Toriccelli, η ταχύτητα εκροής υ είναι ίση με αυτήν που θα είχε το υγρό αν έπεφτε ελεύθερα από ύψος h και δεν εξαρτάται από την πυκνότητα του υγρού. Επομένως, επειδή οι τρύπες βρίσκονται στο ίδιο βάθος, η ταχύτητα εκροής είναι ίδια και στα δύο δοχεία. Άρα

$$\Pi_1 = A_1\upsilon \quad \text{και} \quad \Pi_2 = A_2\upsilon = 2A_1\upsilon \quad \text{ή} \quad \Pi_2 = 2\Pi_1.$$

Ερώτηση 4.

Σε μια υδραυλική εγκατάσταση, λίγο πριν τη βρύση, είναι τοποθετημένος ένας κατακόρυφος σωλήνας ο οποίος είναι κλειστός στο επάνω μέρος του και περιέχει αέρα. Ο σωλήνας αυτός τοποθετείται ώστε να προστατεύεται ο οριζόντιος σωλήνας από την απότομη αύξηση της πίεσης όταν



Α. κλείνουμε τη βρύση.

Β. ανοίγουμε τη βρύση

Να διαλέξεις τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσεις.

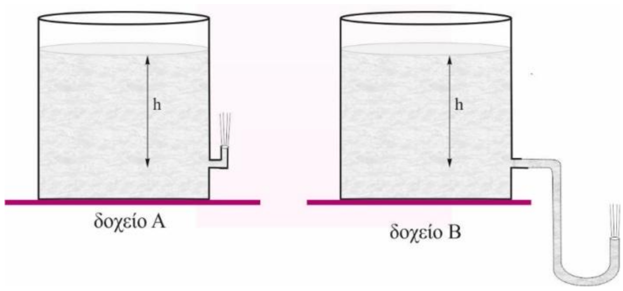
Λύση

Σωστή είναι η πρόταση Α.

Σύμφωνα με την εξίσωση του Bernoulli, σε μια οριζόντια φλέβα υγρού, όπου η ταχύτητα μεγαλώνει, η πίεση μικραίνει και αντίστροφα. Με το κλείσιμο της βρύσης, η ταχύτητα του νερού στο σημείο της βρύσης μηδενίζεται απότομα με αποτέλεσμα τη δημιουργία στιγμιαία μεγάλης πίεσης (υπερπίεση) στην περιοχή που θέτει σε κίνδυνο την όλη εγκατάσταση. Η αυξημένη πίεση συμπιέζει τον εγκλωβισμένο αέρα στον κατακόρυφο σωλήνα ο οποίος λειτουργώντας ως αμορτισέρ απορροφά την αύξηση της πίεσης.

Ερώτηση 5.

Τα δύο δοχεία του σχήματος έχουν το ίδιο εμβαδό βάσης, περιέχουν νερό και σε βάθος h υπάρχει τρύπα εμβαδού πολύ μικρότερου από αυτό της ελεύθερης επιφάνειας. Το νερό μετά την έξοδό του από την τρύπα κάθε δοχείου φθάνει



A. σε μεγαλύτερο ύψος στο δοχείο Α

B. σε μεγαλύτερο ύψος στο δοχείο Β.

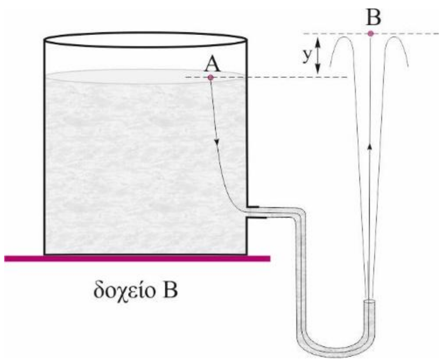
Γ. στο ίδιο ύψος.

Να διαλέξεις τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσεις.

<u>Λύση</u>

Σωστή είναι η πρόταση Γ.

Εφαρμόζουμε στο δοχείο Β το θεώρημα του Bernoulli για μια φλέβα του υγρού στα σημεία Α (σημείο της ελεύθερης επιφάνειας) και Β που είναι το υψηλότερο σημείο. Θεωρούμε επίπεδο αναφοράς για τη δυναμική ενέργεια του ρευστού, το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το Α.



$$\frac{1}{2}\rho \upsilon_A^2 + p_A = \frac{1}{2}\rho \upsilon_B^2 + p_B + \rho g y$$

Στο Α έχουμε $p_A = p_{atm}$ και $\upsilon_A = 0$. Στο Β έχουμε $p_B = p_{atm}$ και $\upsilon_B = 0$. Επομένως η παραπάνω σχέση γίνεται

$$0 + p_{atm} = 0 + p_{atm} + \rho g y \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε εφαρμόζοντας την εξίσωση Bernoulli στο δοχείο Α. Το παραπάνω συμπέρασμα είναι **συνέπεια της αρχής διατήρησης της ενέργειας.**

Ερώτηση 6.

Σε μια μάζα ιδανικού ρευστού που ρέει σε σωλήνα, προσφέρεται ποσόν ενέργειας ανά μονάδα όγκου Ε και η μάζα αυτή αυξάνει την κινητική της ενέργεια ανά μονάδα όγκου κατά Ε΄ > Ε. Το ρευστό ρέει

Α. σε σωλήνα που ανέρχεται και στενεύει.

Β. σε σωλήνα που κατέρχεται και στενεύει.

Γ. σε οριζόντιο σωλήνα σταθερής διατομής.

Να διαλέξεις τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσεις.

<u>Λύση</u>

Σωστή είναι η πρόταση Β.

Εφόσον η μάζα αυξάνει την κινητική της ενέργεια, η ταχύτητά της αυξάνεται. Αφού η παροχή διατηρείται σταθερή από το νόμο της συνέχειας προκύπτει ότι ο σωλήνας στενεύει.

<u>*Α' τρόπος*</u>

Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας (εξίσωση Bernoulli) Ε=Ε΄+(U/ΔV) όπου (U/ΔV) είναι η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας της μάζας ανά μονάδα όγκου. Ε΄>Ε, άρα (U/ΔV)<0 και συνεπώς η μάζα κατέρχεται.

<u>*Β' τρόπος*</u>

Το ΘΜΚΕ για μια στοιχειώδη μάζα του ρευστού γράφεται:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{F\varepsilon\xi} + W_w \text{ ή } \frac{K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi}}{V} = \frac{W_{F\varepsilon\xi}}{V} + \frac{W_w}{V} \qquad \textbf{(1)}$$

Όμως $\frac{K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi}}{V} = E'$ και $\frac{W_{F\varepsilon\xi}}{V} = E$.

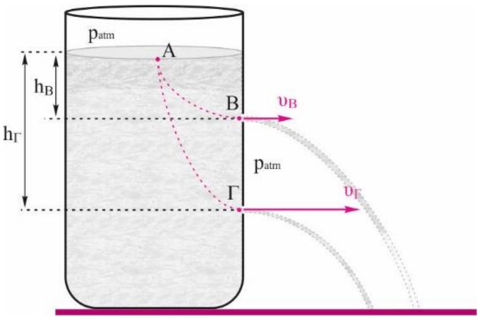
Η **(1)** γίνεται: $E' = E + \frac{W_w}{V}$

Επειδή $E' > E$, το $\frac{W_w}{V} > 0$. Αφού το έργο του βάρους είναι θετικό, ο σωλήνας κατέρχεται.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1

Το ανοικτό δοχείο του σχήματος περιέχει υγρό πυκνότητας ρ και στο σημείο Β που βρίσκεται σε βάθος h_B = 0,2m από την ελεύθερη επιφάνεια του, υπάρχει μια μικρή οπή εμβαδού διατομής A=3*10^{-4}m^2. Το υγρό εκρέει από την οπή με ταχύτητα μέτρου υ.



Α. Να υπολογιστεί το μέτρο της ταχύτητας εκροής (**θεώρημα Torricelli**).

Β. Να βρεθεί η παροχή του υγρού από την οπή.

Γ. Να βρεθεί σε ποιο βάθος $h_Γ$ θα πρέπει να ανοιχθεί μια δεύτερη οπή ώστε το υγρό να εξέρχεται από αυτήν με ταχύτητα διπλάσιου μέτρου.

Δίνεται ότι η πίεση στην επιφάνεια του υγρού είναι ίση με p_{atm}, ότι το εμβαδόν της ελεύθερης επιφάνειας είναι πολύ μεγαλύτερο από αυτό της οπής και g = 10m/s^2.

Λύση

Α. Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bernoulli για μια φλέβα υγρού, μεταξύ του σημείου Α που βρίσκεται στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού του δοχείου και του σημείου Β, αμέσως μόλις το υγρό εξέλθει στην ατμόσφαιρα. Θεωρούμε επίπεδο αναφοράς για τη δυναμική ενέργεια του ρευστού, το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το σημείο Β.

$$\frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2 + p_A + \rho g h_B = \frac{1}{2}\rho\upsilon_B^2 + p_B$$

Όταν το υγρό εκρέει από την οπή, η πίεσή του γίνεται ίση με την ατμοσφαιρική, επομένως p_A = p_B = p_{atm} και επειδή το εμβαδόν της ελεύθερης επιφάνειας είναι συγκριτικά πολύ μεγαλύτερο από αυτό της οπής, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $υ_A$=0. Έτσι η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\rho g h_B = \frac{1}{2}\rho\upsilon_B^2 \quad \Rightarrow \quad \upsilon_B = \sqrt{2gh_B}$$

Η τελευταία σχέση είναι η μαθηματική έκφραση του **θεωρήματος του Torricelli** . Σύμφωνα με αυτό η ταχύτητα εκροής είναι ίση με αυτήν που θα είχε το υγρό αν έπεφτε ελεύθερα από ύψος h. Επίσης παρατηρούμε ότι η ταχύτητα εκροής δεν εξαρτάται από την πυκνότητα του υγρού.

Με αριθμητική αντικατάσταση παίρνουμε: $\upsilon_B = \sqrt{2\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot 0{,}2m} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_B = 2\frac{m}{s}$

Β. Η παροχή της δημιουργούμενης φλέβας του υγρού είναι:

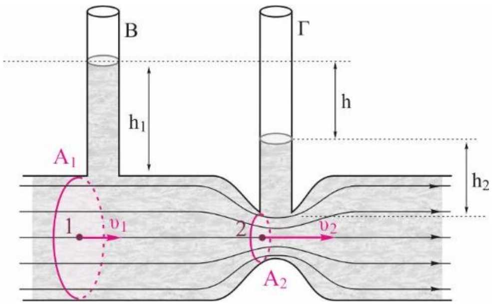
$$\Pi = A\upsilon_B = 3\cdot 10^{-4}\,m^2 \cdot 2\frac{m}{s} \Rightarrow \Pi = 0{,}6\cdot 10^{-3}\frac{m^3}{s} \text{ ή } \Pi = 0{,}6\frac{L}{s}$$

Γ. Η ταχύτητα εκροής δίνεται από τη σχέση $\upsilon = \sqrt{2gh}$

$$\upsilon_\Gamma = 2\upsilon_B \Rightarrow \sqrt{2gh_\Gamma} = 2\sqrt{2gh_B} \Rightarrow h_\Gamma = 4h_B = 0{,}8m$$

Άσκηση 2

Η διάταξη του σχήματος δείχνει έναν τρόπο υπολογισμού της ταχύτητας ενός ρευστού που ρέει σε οριζόντιο σωλήνα (ροόμετρο του Ventouri). Το εμβαδό της διατομής του σωλήνα A_1 στη θέση 1 είναι τριπλάσια της διατομής A_2 στη θέση 2. Λόγω της διαφοράς πίεσης, η υψομετρική διαφορά στη στάθμη του υγρού των δύο κατακόρυφων ανοικτών σωλήνων Β και Γ είναι h = 10cm.



Α. Να βρεθεί η σχέση που συνδέει τις ταχύτητες ροής μεταξύ των θέσεων 1και 2.

Β. Να βρεθεί η διαφορά πίεσης μεταξύ των θέσεων 1 και 2.

Γ. Να βρεθεί η ταχύτητα του ρευστού στη θέση 1.

Να θεωρείστε το ρευστό ιδανικό.

Δίνονται $g = 10 m/s^2$, $\rho_v = 1000\ kg/m^3$

<u>Λύση</u>

Α. Από την εξίσωση συνέχειας μεταξύ των θέσεων 1 και 2 έχουμε:

$$A_1 \upsilon_1 = A_2 \upsilon_2 \;\Rightarrow\; \upsilon_2 = \frac{A_1 \upsilon_1}{A_2} \quad (1)$$

Με αντικατάσταση προκύπτει $\upsilon_2 = 3\upsilon_1$

Β. Το υγρό στις στήλες είναι ακίνητο. Αφού μεταξύ του κάτω μέρους της στήλης του υγρού και του πάνω μέρους του οριζόντιου σωλήνα το υγρό δεν κινείται οι πιέσεις είναι ίσες. Έτσι, στο κάτω μέρος της στήλης του σωλήνα Β επικρατεί συνολική πίεση p_B που είναι ίση με p_1 .

$p_1 = p_B$. Όμως από την υδροστατική $p_B = p_{atm} + \rho g h_1$, άρα $p_1 = p_{atm} + \rho g h_1$, (2)

Ομοίως και $p_2 = p_{atm} + \rho g h_2$, (3)

Αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε $p_1 - p_2 = \rho g(h_1 - h_2)$, (4)

Με αριθμητική αντικατάσταση παίρνουμε: $p_1 - p_2 = 10^3\ N/m^2$

Γ. Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Bernoulli για μια οριζόντια φλέβα του υγρού που διέρχεται από τις θέσεις 1 και 2. Σε μια οριζόντια φλέβα ανεξάρτητα από στενώσεις θεωρούμε ότι η δυναμική ενέργεια του ρευστού δεν μεταβάλλεται, οπότε ο όρος $\rho g h$ παραμένει σταθερός.

$$\frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + p_2 \;\Rightarrow\; p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho\left(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2\right), \qquad (5)$$

Συνδυάζοντας τις (5),(1) έχουμε

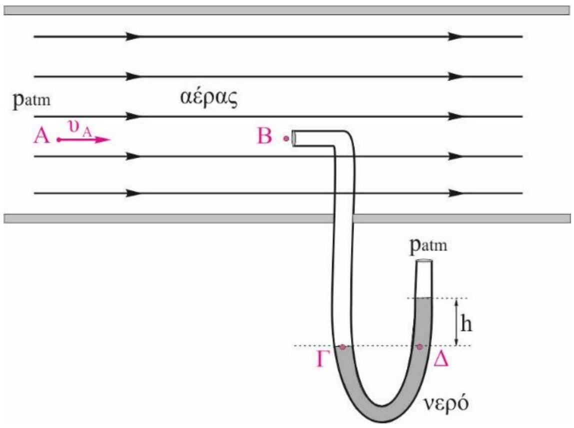
$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2\left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right), \quad (6)$$

Αντικαθιστώντας την (4) στην (6) και λύνοντας ως προς υ_1 παίρνουμε

$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1}} = \sqrt{\frac{2\cdot 10\frac{m}{s^2}0{,}1m}{3^2 - 1}}$$ ή υ_1=0,5 m/s

Άσκηση 3

Στον οριζόντιο σωλήνα του σχήματος ρέει αέρας και ο υοειδής σωλήνας χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της ταχύτητας του αέρα. Στο σημείο Β υπάρχει ανακοπή του ρεύματος του αέρα (σημείο ανακοπής) οπότε η ταχύτητα του αέρα στο σημείο Β είναι μηδενική. Το υγρό στον υοειδή σωλήνα είναι νερό και η υψομετρική διαφορά στα δύο σκέλη του σωλήνα είναι h = 10cm.



Α. Να βρεθεί η πίεση στο σημείο ανακοπής Β σε συνάρτηση με την ταχύτητα του αέρα.

Β. Να υπολογιστεί η ταχύτητα του αέρα στον οριζόντιο σωλήνα.

Δίνονται: πυκνότητα αέρα ρ_α = 1,25 kg/m^3, πυκνότητα νερού ρ_ν = 1000 kg/m^3 , p_{atm} = 10^5N/m^2 και g = 10m/s^2.

<u>Λύση</u>

Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Bernoulli για μια οριζόντια φλέβα του αέρα που διέρχεται από τις θέσεις Α και Β.

$$\frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2 + p_A = \frac{1}{2}\rho\upsilon_B^2 + p_B$$

Στο Α, $p_A = p_{atm}$ και στο Β $\upsilon_B = 0$ άρα

$$p_B = \frac{1}{2}\rho_{\alpha\varepsilon\rho}\upsilon_A^2 + p_{atm} \Rightarrow p_B = \left(0{,}625\upsilon_A^2 + 10^5\right)\frac{N}{m^2} \quad , \quad (1)$$

Β. Η πίεση στο Β είναι ίση με αυτή στο Γ καθώς στο αριστερό σκέλος περιέχεται αέρας. Όμως η πίεση στο σημείο Γ είναι ίση με αυτή του σημείου Δ καθώς τα δύο σημεία βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο σε ένα ακίνητο ρευστό.

$$p_B = p_\Gamma = p_{atm} + \rho_\nu gh \ , \ (2)$$

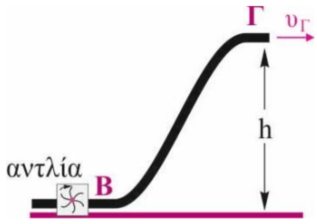
Συνδυάζοντας τις (1),(2) παίρνουμε

$$\frac{1}{2}\rho_{\alpha\varepsilon\rho}\upsilon_A^2 = \rho_\nu gh \Rightarrow \upsilon_A = \sqrt{\frac{2\rho_\nu gh}{\rho_{\alpha\varepsilon\rho}}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1000\frac{kg}{m^3}0{,}1m}{1{,}25\frac{kg}{m^3}}} \Rightarrow \upsilon_A = 40\frac{m}{s}$$

Σχόλιο: Η παραπάνω μέθοδος χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της ταχύτητας των αεροπλάνων με τον σωλήνα Pitot να τοποθετείται στο φτερό του αεροπλάνου.

Άσκηση 4

Μια αντλία νερού βρίσκεται στον πυθμένα ενός πηγαδιού που έχει βάθος h = 5m. Η διατομή του σωλήνα είναι σταθερή και ίση με $A = 10cm^2$. Το νερό εξέρχεται από την άκρη Γ του σωλήνα με ταχύτητα $υ_Γ = 10m/s$. Να βρεθούν:



Α. η ταχύτητα του νερού μόλις αυτό εξέρχεται από την αντλία (θέση Β)

Β. Η διαφορά πίεσης μεταξύ των Β και Γ.

Γ. ο ρυθμός παραγωγής έργου λόγω της διαφοράς πίεσης μεταξύ των Β και Γ.

Δ. ο ρυθμός παραγωγής έργου (ισχύς) της αντλίας.

Το νερό να θεωρηθεί ιδανικό ρευστό. Δίνονται: $ρ_ν = 1000kg/m^3$, $g = 10m/s^2$.

<u>Λύση</u>

Α. Ο σωλήνας έχει σταθερή διατομή, επομένως αφού η παροχή είναι ίδια σε όλο το μήκος του σωλήνα (νόμος συνέχειας) η ταχύτητα σε κάθε σημείο του σωλήνα θα είναι η ίδια, άρα $υ_B = υ_Γ = 10m/s$.

Β. Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Bernoulli για μια φλέβα νερού μεταξύ των σημείων Β και Γ.

$$\frac{1}{2}\rho\upsilon_B^2 + p_B = \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2 + p_\Gamma + \rho_\nu gh \text{ , } (\upsilon_B = \upsilon_\Gamma) \Rightarrow$$

$$p_B - p_\Gamma = \rho_\nu gh = 1000\frac{kg}{m^3}\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot 5m \Rightarrow p_B - p_\Gamma = 5\cdot 10^4\frac{N}{m^2}$$

Γ. Ο ρυθμός παραγωγής έργου που οφείλεται στη διαφορά πίεσης μεταξύ των Β και Γ.

$$\frac{dW}{dt} = \frac{(p_B - p_\Gamma)\cdot dV}{dt} = \rho_\nu gh\cdot A\upsilon \Rightarrow \frac{dW}{dt} = \left(1000\frac{kg}{m^3}\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot 5m\right)\cdot\left(10\cdot 10^{-4}m^2\cdot 10\frac{m}{s}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{dW}{dt} = 500\,W$$

Σχόλιο: Ο παραπάνω είναι και ο ρυθμός αύξησης της δυναμικής ενέργειας των μαζών.

Δ. Ο ρυθμός παραγωγής έργου (ισχύς) της αντλίας είναι:

$$P_{αντλ} = \frac{dW_{αντλ}}{dt}$$

Το έργο της αντλίας το βρίσκουμε με εφαρμογή του θεωρήματος έργου- ενέργειας κατά τη μετακίνηση μικρής μάζας νερού από το την αντλία μέχρι την έξοδο του σωλήνα. Με W_w δηλώνουμε το έργο του βάρους.

$$\frac{1}{2}\Delta m\upsilon^2 - 0 = W_{\alpha\nu\tau\lambda} + W_w \Rightarrow \frac{1}{2}\Delta m\upsilon^2 - 0 = W_{\alpha\nu\tau\lambda} - \Delta m \cdot gh \Rightarrow$$

$$W_{\alpha\nu\tau\lambda} = \frac{1}{2}\Delta m\upsilon^2 + \Delta m \cdot gh$$

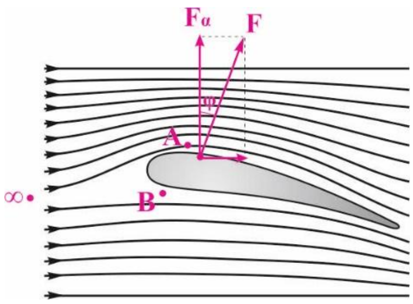
Άρα, η ισχύς P της αντλίας ή ο ρυθμός παραγωγής έργου είναι:

$$P_{\alpha\nu\tau\lambda} = \frac{dW_{\alpha\nu\tau\lambda}}{dt} = \left(\frac{1}{2}\upsilon^2 + gh\right)\frac{dm}{dt} = \left(\frac{1}{2}\upsilon^2 + gh\right)\rho_\nu A\upsilon \Rightarrow$$

$$P_{\alpha\nu\tau\lambda} = \left(\frac{1}{2}\left(10\frac{m}{s}\right)^2 + 10\frac{m}{s^2}5m\right)1000\frac{kg}{m^3}\cdot 10\cdot 10^{-4}m^2\cdot 10\frac{m}{s} \Rightarrow P_{\alpha\nu\tau\lambda} = 1000W$$

Άσκηση 5

Μια μέρα με άπνοια, ένα Boeing 737 πετάει οριζόντια πάνω από την Αθήνα σε σταθερό ύψος . Τα πτερύγιά του έχουν συνολικό εμβαδό Α = 70m^2 το καθένα. Η ταχύτητα του αέρα στο πάνω τμήμα των πτερυγίων, λόγω της στένωσης των ρευματικών γραμμών, είναι $υ_A$ = 756km/h, ενώ στο κάτω τμήμα λόγω της αραίωσής τους είναι $υ_B$ = 684km/h. Να βρεθούν:



Α. η διαφορά πιέσεων μεταξύ του κάτω και πάνω τμήματος των πτερυγίων του αεροπλάνου.

Β. Η αεροδύναμη που ασκείται στο αεροπλάνο.

Γ. Το βάρος του Boeing 737 για τη συγκεκριμένη πτήση, αν η γωνία μεταξύ αεροδύναμης και δυναμικής άνωσης είναι φ = 20^o.

Δίνονται: $ρ_{αέρα}$ = 1,25kg/m^3, p_{atm} = 10^{5}N/m^2, συν20^o = 0,94

<u>Λύση</u>

Α. Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli μεταξύ των σημείων ∞, Α και ∞, Β όπου ∞ θεωρείται ένα σημείο της ρευματικής γραμμής που βρίσκεται πολύ μακριά από το αεροπλάνο με $υ_\infty = υ_{αερ}$.

$$p_\infty + \frac{1}{2}ρυ_\infty^2 = p_A + \frac{1}{2}ρυ_A^2 \;\Rightarrow\; p_A = p_\infty + \frac{1}{2}ρ\left(υ_{αερ}^2 - υ_A^2\right)$$

$$p_\infty + \frac{1}{2}ρυ_\infty^2 = p_B + \frac{1}{2}ρυ_B^2 \;\Rightarrow\; p_B = p_\infty + \frac{1}{2}ρ\left(υ_{αερ}^2 - υ_B^2\right)$$

Η αφαίρεση κατά μέλη των δύο σχέσεων δίνει:

$$p_B - p_A = \frac{1}{2}ρ\left(υ_A^2 - υ_B^2\right) = 5000\frac{N}{m^2}$$

Β. Η προκαλούμενη αεροδύναμη, F, είναι κάθετη στα πτερύγια και έχει μέτρο

$$F = \left(p_A - p_B\right)\cdot 2A$$

όπου 2Α είναι το συνολικό εμβαδόν των δύο πτερυγίων του αεροπλάνου.

$$F = \left(p_A - p_B\right)\cdot 2A = 5000\frac{N}{m^2}140m^2 \;\Rightarrow\; F = 700.000\,N$$

Γ. Η κατακόρυφη συνιστώσα $F_α$ αποτελεί την δυναμική άνωση και εξισορροπεί το βάρος του αεροπλάνου, αφού αυτό πετά οριζόντια.

$$w = F_α = Fσυνφ = 700.000\,N \cdot 0{,}94 \text{ ή } w = 658.000 N$$

Ημερομηνία τροποποίησης: 11/01/2016

Επιμέλεια: Ηλίας Ποντικός
Επιστημονικός έλεγχος: Αντώνιος Παλόγος, Κωνσταντίνος Στεφανίδης