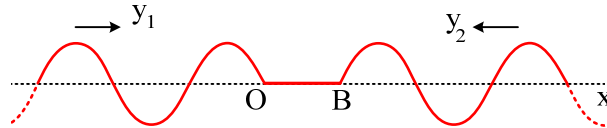


Δύο κύματα διαδίδονται αντίθετα.

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου διαδίδονται δύο κύματα με αντίθετες διευθύνσεις και σε μια στιγμή την οποία θεωρούμε ότι $t_0=0$, η εικόνα του μέσου, είναι αυτή του παρακάτω σχήματος.



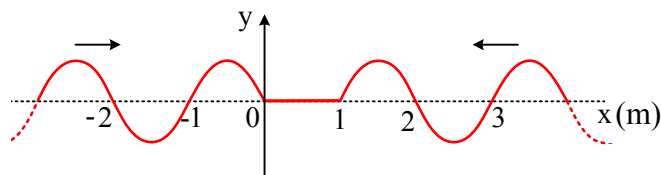
Το πλάτος των κυμάτων είναι $A=0,5\text{m}$, το μήκος κύματος $\lambda=2\text{m}$, ενώ το κύμα που διαδίδεται προς τα αριστερά φτάνει στο σημείο O τη στιγμή $t_1=0,5\text{s}$. Θεωρώντας ότι το σημείο O βρίσκεται στη θέση $x=0$, ενώ $(OB)=1\text{m}$:

- i) Να βρεθούν οι εξισώσεις των δύο κυμάτων.
- ii) Να βρεθεί η εξίσωση της απομάκρυνσης των διαφόρων σημείων του μέσου στην περιοχή $0 \leq x \leq 4\text{m}$, μετά από την συμβολή των δύο αυτών κυμάτων.
- iii) Να παραστήσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων την απομάκρυνση των διαφόρων σημείων της παραπάνω περιοχής τις χρονικές στιγμές $t_2=2\text{s}$ και $t_3=2,5\text{s}$.
- iv) Να βρεθεί η διαφορά φάσης μεταξύ δύο σημείων B και Γ στις θέσεις $1,2\text{m}$ και $1,5\text{m}$ για $t \geq 2\text{s}$.

Απάντηση:

Η ταχύτητα διάδοσης και των δύο κυμάτων (ίδιες και για τα δύο κύματα, αφού διαδίδονται στο ίδιο μέσον) είναι $v = \frac{d}{t} = \frac{1\text{m}}{0,5\text{s}} = 2\text{m/s}$, όπου d η απόσταση που διαδίδεται το κύμα προς τα αριστερά σε χρονικό διά-

στημα t_1 . Αλλά $v = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow T = \frac{\lambda}{v} = \frac{2\text{m}}{2\text{m/s}} = 1\text{s}$. Με βάση αυτά τα δεδομένα έχουμε:



- i) Για το κύμα που διαδίδεται προς τα δεξιά η εξίσωση θα είναι:

$$y_1 = 0,5 \cdot \eta \mu 2\pi \left(t - \frac{x}{2} \right) \quad (\text{S.I.})$$

Έστω τώρα ένα σημείο Σ, δεξιά του σημείου B, στη θέση x. Το σημείο αυτό εξαιτίας του κύματος που διαδίδεται προς τα αριστερά, ταλαντώνεται κατά χρονικό διάστημα $t_1 = \frac{x-1}{v}$ περισσότερο, από ότι το σημείο B στο οποίο έχει φτάσει το κύμα για $t=0$. Αλλά το σημείο B ταλαντώνεται με εξίσωση $y_B = 0,5 \cdot \eta \mu 2\pi t$, οπότε για το Σ έχουμε:

$$y_2 = 0,5 \cdot \eta \mu 2\pi \left(t + \frac{x-1}{2} \right) = 0,5 \cdot \eta \mu 2\pi \left(t + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \right) \quad (\text{S.I.})$$

- ii) Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, η απομάκρυνση ενός σημείου μετά την συμβολή των δύο παρα-

πάνω κυμάτων θα είναι:

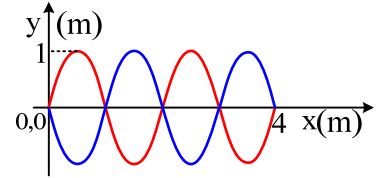
$$y=y_1+y_2=2\cdot 0,5\cdot \sin 2\pi \frac{t-\frac{x}{2}-t-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}{2}\cdot \eta\mu 2\pi \frac{t-\frac{x}{2}+t+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}{2} \quad \text{ή}$$

$$y=1\cdot \sin 2\pi \frac{x-\frac{1}{2}}{2}\cdot \eta\mu 2\pi \left(t-\frac{1}{4}\right) \quad \text{με } t\geq 2\text{s} \text{ μονάδες στο S.I.} \quad (1)$$

iii) Θέτοντας στη σχέση (1) $t=2\text{s}$ παίρνουμε:

$$y=1\cdot \sin 2\pi \left(\frac{2x-1}{4}\right)\cdot \eta\mu 2\pi \left(2-\frac{1}{4}\right)=1\cdot \sin \pi \frac{2x-1}{2}\cdot \eta\mu \left(4\pi-\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{ή}$$

$$y=-1\cdot \sin \pi \frac{2x-1}{2} \quad (\text{S.I.})$$



Το στιγμιότυπο είναι η καμπύλη με το μπλε χρώμα.

Αντικαθιστώντας τώρα στην εξίσωση (1) $t=2,5\text{s}$ παίρνουμε:

$$y=1\cdot \sin 2\pi \left(\frac{2x-1}{4}\right)\cdot \eta\mu 2\pi \left(2,5-\frac{1}{4}\right)=1\cdot \sin \pi \frac{2x-1}{2}\cdot \eta\mu \left(5\pi-\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{ή}$$

$$y=1\cdot \sin \pi \frac{2x-1}{2}\cdot \eta\mu \left(4\pi+\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{ή}$$

$$y=1\cdot \sin \pi \frac{2x-1}{2} \quad (\text{S.I.})$$

Το αντίστοιχο στιγμιότυπο είναι η κόκκινη καμπύλη.

iv) Για το σημείο Β έχουμε:

$$y=1\cdot \sin 2\pi \frac{x-\frac{1}{2}}{2}\cdot \eta\mu 2\pi \left(t-\frac{1}{4}\right) = 1\cdot \sin 2\pi \frac{1,2-0,5}{2}\cdot \eta\mu 2\pi \left(2\pi t-\frac{\pi}{2}\right) = 1\cdot \sin 0,7\pi \cdot \eta\mu 2\pi \left(2\pi t-\frac{\pi}{2}\right)$$

Ενώ για το σημείο Γ παίρνουμε:

$$y=1\cdot \sin 2\pi \frac{x-\frac{1}{2}}{2}\cdot \eta\mu 2\pi \left(t-\frac{1}{4}\right) = 1\cdot \sin 2\pi \frac{1,5-0,5}{2}\cdot \eta\mu 2\pi \left(2\pi t-\frac{\pi}{2}\right) = 1\cdot \sin \pi \cdot \eta\mu 2\pi \left(2\pi t-\frac{\pi}{2}\right)$$

Αλλά $\sin 0,7\pi < 0$ όπως και $\sin \pi < 0$, συνεπώς τα δύο σημεία έχουν την ίδια φάση.

Σχόλιο:

Ποια είναι η φάση του σημείου Β; Η παραπάνω εξίσωση της απομάκρυνσής του γράφεται:

$$y=1\cdot \sin 0,7\pi \cdot \eta\mu 2\pi \left(2\pi t-\frac{\pi}{2}\right) = -1\cdot |\sin 0,7\pi| \cdot \eta\mu 2\pi \left(2\pi t-\frac{\pi}{2}\right) = 1\cdot |\sin 0,7\pi| \cdot \eta\mu \left(2\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$$

οπότε η φάση του σημείου Β είναι $\varphi_B = 2\pi t + \frac{\pi}{2}$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.

Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης

Δυο κύματα προς την ίδια κατεύθυνση.

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και από αριστερά προς τα δεξιά διαδίδονται δύο αρμονικά κύματα με το ίδιο πλάτος $A=0,2\text{m}$ και την ίδια συχνότητα $f=2\text{Hz}$. Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων είναι ίση με $v=2\text{m/s}$. Σε ένα σημείο O , το οποίο θεωρούμε ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων ($x=0$), το πρώτο κύμα φτάνει κατά τη χρονική στιγμή $t=0$ και το δεύτερο κύμα κατά τη χρονική στιγμή $t_1=1\text{s}$. Θεωρείστε ότι εξαιτίας κάθε κύματος το σημείο O αρχίζει να κινείται προς την θετική φορά.

- i) Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας των σημείων του μέσου, του θετικού ημιάξονα, μετά από τη συμβολή των δύο κυμάτων.
- ii) Να σχεδιάστε τη μορφή του μέσου, για $x>0$, τη χρονική στιγμή $t_2=2\text{s}$
- iii) Ποιο το αντίστοιχο διάγραμμα αν το δεύτερο κύμα έφτανε στο σημείο O τη χρονική στιγμή $t_1'=0,25\text{s}$;

Απάντηση:

Από την θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής έχουμε $v=\lambda f \rightarrow \lambda=v/f=1\text{m}$

- i) Η εξίσωση του πρώτου κύματος που φτάνει τη στιγμή $t=0$ στη θέση $x=0$, θα είναι:

$$y_1 = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi (2t - x) \quad \text{με } t \geq 0 \text{ και } x \leq 2t \quad (\text{S.I.}) \quad (1)$$

Η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου O εξαιτίας του δεύτερου κύματος θα είναι $y=A \cdot \eta\mu\omega(t-1)$ ή $y=A \cdot \eta\mu 2\pi(2t-2)$, συνεπώς η εξίσωση του δεύτερου κύματος θα είναι της μορφής:

$$y_2 = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - 2 \right) = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi (2t - x - 2) \quad \text{με } t \geq 1\text{s} \text{ και } x \leq 2t-2 \text{ μονάδες στο (S.I.)} \quad (2)$$

Όταν τα δύο κύματα φτάνουν στο ίδιο σημείο, συμβάλλουν και από την αρχή της επαλληλίας έχουμε:

$$y = y_1 + y_2 = 2 \cdot 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{2t - x - 2t + x + 2}{2} \cdot \eta\mu 2\pi \frac{2t - x + 2t - x - 2}{2} \rightarrow$$

$$y = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \cdot \eta\mu 2\pi (2t - x - 1) \quad \text{ή}$$

$$y = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi (2t - x - 1) \quad \text{με } t \geq 1\text{s} \text{ και } x \leq 2t-2 \text{ μονάδες στο (S.I.)}^1 \quad (3)$$

- ii) Έτσι τη χρονική στιγμή $t_2=2\text{s}$, θα έχουμε συμβολή στην περιοχή $0 \leq x \leq 2\text{m}$ και η παραπάνω εξίσωση δίνει:

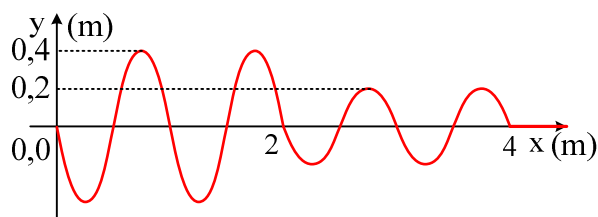
$$y = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi (2t - x - 1) = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi (4 - x - 1) = 0,4 \cdot \eta\mu (6\pi - 2\pi x) \quad \text{ή}$$

$$y = -0,4 \cdot \eta\mu 2\pi x$$

Εξάλλου στην περιοχή $2\text{m} \leq x \leq 4\text{m}$ έχει φτάσει το πρώτο κύμα, αλλά όχι το δεύτερο και η απομάκρυνση των διαφόρων σημείων είναι:

$$y_1 = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi (2t - x) = 0,2 \cdot \eta\mu (8\pi - 2\pi x) = -0,2 \cdot \eta\mu (2\pi x)$$

Με βάση αυτά η μορφή του μέσου, είναι αυτή που φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



iii) Αν το δεύτερο κύμα έφτανε στη θέση $x=0$ τη στιγμή $t_1=0,25s$, τότε αντίστοιχα η εξίσωση του δεύτερου κύματος θα ήταν:

$$y_2 = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{1}{2} \right) = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi (2t - x - 0,5) \quad \text{με } t \geq 0,25s \text{ και } x \leq 2t - 0,5 \text{ μονάδες στο (S.I.)} \quad (4)$$

Όταν τα δύο κύματα φτάνουν στο ίδιο σημείο, συμβάλουν και από την αρχή της επαλληλίας έχουμε:

$$y = y_1 + y_2 = 2 \cdot 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{2t - x - 2t + x + 0,5}{2} \cdot \eta\mu 2\pi \frac{2t - x + 2t - x - 0,5}{2} \rightarrow$$

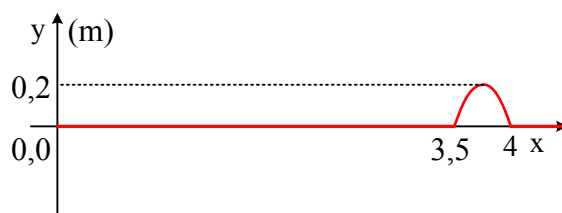
$$y = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{1}{4} \cdot \eta\mu 2\pi \left(2t - x - \frac{1}{4} \right) \quad \text{ή}$$

$$y=0 \quad \text{με } t \geq 0,25s \text{ και } x \leq 2t - 0,5 \text{ μονάδες στο (S.I.)}$$

Οπότε με αντικατάσταση όπου $t=2s$, θα πάρουμε από την παραπάνω εξίσωση για την περιοχή $0 \leq x \leq 3,5m$ θα έχουμε $y=0$, ενώ για την περιοχή $3,5m \leq x \leq 4m$ θα έχει διαδοθεί το πρώτο κύμα και από τη σχέση (4) έχουμε:

$$y_1 = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi (2t - x - 0,5) = 0,2 \cdot \eta\mu (7\pi - 2\pi x) = 0,2 \cdot \eta\mu\pi (2\pi x)$$

Και το αντίστοιχο στιγμιότυπα είναι;

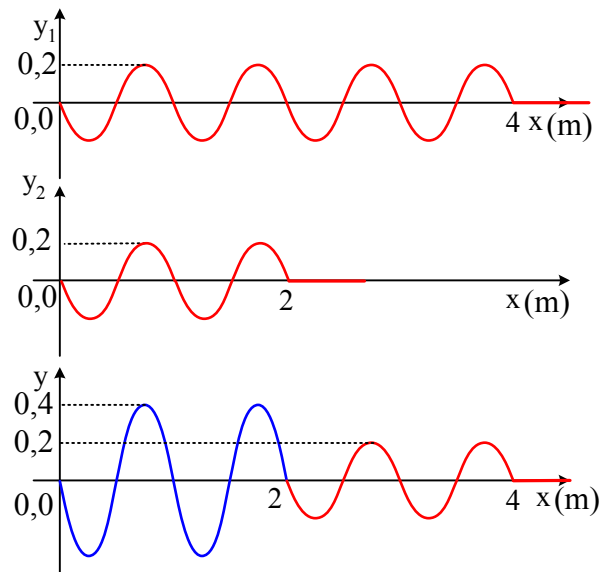


Σχόλια:

- 1) Η εξίσωση (3) $y = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi (2t - x - 1)$ είναι εξίσωση ενός τρέχοντος κύματος. Η συμβολή δηλαδή δύο κυμάτων που διαδίδονται προς την ίδια κατεύθυνση, είναι ένα νέο τρέχον κύμα. Δείτε το αυτό σε αντιδιαστολή με την περίπτωση που τα δύο κύματα διαδίδονται με αντίθετες κατευθύνσεις, οπότε προκύπτει στάσιμο κύμα.
- 2) Θα μπορούσε να δοθεί και μια δεύτερη «πρακτική» λύση στην παρουσίαση των στιγμιοτύπων. Ας την δούμε:

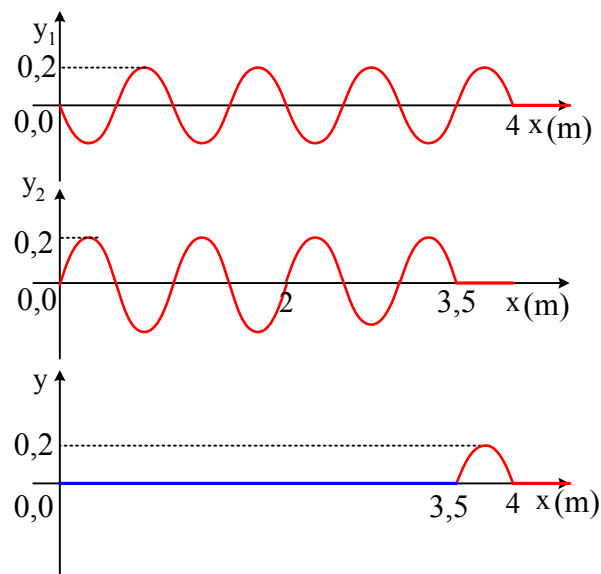
Με βάση την αρχή της επαλληλίας, το κάθε κύμα διαδίδεται ανεξάρτητα του άλλου και επειδή οι πηγές αρχίζουν να ταλαντώνονται προς την θετική κατεύθυνση, κάθε σημείο στο οποίο φτάνει το κύμα, αρχίζει επίσης να ταλαντώνονται προς τα πάνω και έτσι δημιουργείται «όρος». Το πρώτο τη στιγμή t_2 έχει διαδοθεί μέχρι τη θέση $x=vt=4m$, ενώ το μήκος κύματος είναι $2m$. Αντίστοιχα το δεύτερο κύμα έχει διαδο-

θεί μέχρι τη θέση $x_2 = v(t-1s) = 2m$. Έτσι σχεδιάζουμε τα δύο ανεξάρτητα κύματα και με πρόσθεση των αντίστοιχων απομακρύνσεων παίρνουμε το τελικό αποτέλεσμα, όπως φαίνεται στο σχήμα:



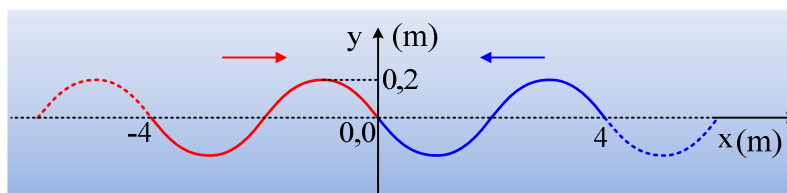
όπου με μπλε χρώμα έχει σχεδιαστεί το τμήμα, στο οποίο έχει συμβεί συμβολή.

Η αντίστοιχη κατάσταση για το iii) ερώτημα είναι:



dmargaris@sch.gr

Ένα στάσιμο κύμα με δεσμό στην αρχική θέση.



Κατά μήκος ενός ελαστικού μέσου διαδίδονται αντίθετα δύο κύματα με το ίδιο πλάτος $A=0,2\text{m}$ και το ίδιο μήκος κύματος $\lambda=4\text{m}$ και τη στιγμή $t=0$ τα δυο κύματα φτάνουν ταυτόχρονα σε ένα σημείο O , το οποίο θεωρούμε αρχή του άξονα ($x=0$). Η μορφή του μέσου τη στιγμή αυτή, εμφανίζεται στο παραπάνω σχήμα. Τα κύματα διαδίδονται με ταχύτητα $v=2\text{m/s}$.

- Να βρεθούν οι εξισώσεις των δύο κυμάτων.
- Να βρεθεί η εξίσωση του στάσιμου κύματος που προκύπτει από την συμβολή των δύο παραπάνω κυμάτων.
- Να σχεδιάσετε στιγμιότυπα του στάσιμου κύματος τις χρονικές στιγμές $t_1=2\text{s}$ και $t_2=3\text{s}$ και για την περιοχή που έχει σχηματισθεί το στάσιμο κύμα, στο ίδιο διάγραμμα.
- Να κάνετε τη γραφική παράσταση της δύναμης που ασκείται σε μια σημειακή μάζα Σ , μάζας $m=1\text{mg}$, η οποία βρίσκεται στη θέση $x_1=3\text{m}$, σε συνάρτηση με το χρόνο.

Απάντηση:

- Με βάση το σχήμα $\lambda=4\text{m}$, ενώ $v=\lambda f \rightarrow f=v/\lambda=0,5\text{Hz}$ και $T=2\text{s}$.

Για το κύμα προς τα δεξιά, το σημείο O στη θέση $x=0$ ξεκινά την ταλάντωσή του από τη θέση ισορροπίας κινούμενο προς τα πάνω (θετική κατεύθυνση), συνεπώς:

$$y_1 = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \rightarrow y_1 = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{2} - \frac{x}{4} \right) \text{ μονάδες στο S.I. και } x \leq 2t \text{ (m)}$$

Εξάλλου το O , εξαιτίας του κύματος προς τα αριστερά ξεκινά την ταλάντωσή του προς τα κάτω (αρνητική κατεύθυνση), συνεπώς η εξίσωση ταλάντωσής του θα είναι της μορφής $y = A \cdot \eta\mu(\omega t + \pi)$, οπότε η εξίσωση του κύματος προς τα αριστερά έχει εξίσωση:

$$y_2 = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} + \frac{1}{2} \right) \rightarrow y_2 = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{2} + \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \right) \text{ μονάδες στο S.I. και } x \geq -2t \text{ (m)}$$

- Με βάση την αρχή της επαλληλίας μετά την συμβολή των δύο κυμάτων, κάθε σημείο ταλαντώνεται με απομάκρυνση:

$$y = y_1 + y_2 = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{2} - \frac{x}{4} \right) + 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{2} + \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \right) \rightarrow$$

$$y = 0,2 \cdot 2\sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{\frac{t}{2} - \frac{x}{4} - \frac{t}{2} - \frac{x}{4} - \frac{1}{2}}{2} \eta\mu 2\pi \frac{\frac{t}{2} - \frac{x}{4} + \frac{t}{2} + \frac{x}{4} + \frac{1}{2}}{2} \rightarrow$$

$$y = 0,4 \sigma \nu \nu 2\pi \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{4} \right) \cdot \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \right) \text{ μονάδες στο S.I. με } t \geq 0 \text{ και } -2t \leq x \leq 2t$$

iii) Τη στιγμή $t_1=2s$ στάσιμο κύμα έχει δημιουργηθεί στην περιοχή $-2t \leq x \leq 2t$ ή $-4m \leq x \leq 4m$, οπότε με αντικατάσταση στην εξίσωση του κύματος παίρνουμε:

$$y = 0,4 \sigma \nu \nu 2\pi \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{4} \right) \cdot \eta \mu 2\pi \left(\frac{2}{2} + \frac{1}{4} \right) = 0,4 \sigma \nu \nu 2\pi \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{4} \right) \cdot \eta \mu \left(2\pi + \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow$$

$$y = 0,4 \sigma \nu \nu 2\pi \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{4} \right) = -0,4 \cdot \eta \mu \left(\frac{\pi x}{2} \right)$$

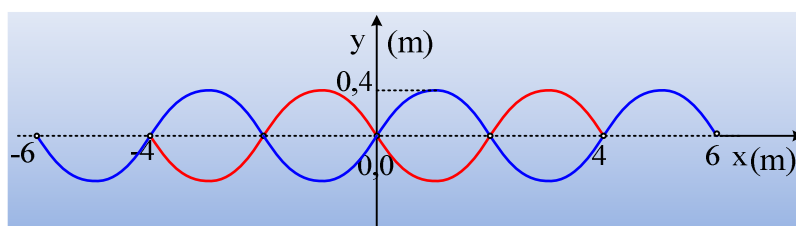
Και η αντίστοιχη γραφική παράσταση είναι η κόκκινη καμπύλη.

Αντίστοιχα τη στιγμή $t_2=3s$, στάσιμο κύμα υπάρχει στην περιοχή $-2t \leq x \leq 2t$ ή $-6m \leq x \leq 6m$, οπότε με αντικατάσταση στην εξίσωση του κύματος παίρνουμε:

$$y = 0,4 \sigma \nu \nu 2\pi \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{4} \right) \cdot \eta \mu 2\pi \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4} \right) = 0,4 \sigma \nu \nu 2\pi \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{4} \right) \cdot \eta \mu \left(3\pi + \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow$$

$$y = -0,4 \sigma \nu \nu 2\pi \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{4} \right) = 0,4 \cdot \eta \mu \left(\frac{\pi x}{2} \right)$$

Με γραφική παράσταση την μπλε καμπύλη.



iv) Το κύμα που κινείται προς τα αριστερά χρειάζεται χρόνο $\Delta t = \frac{d}{v} = \frac{3m}{2m/s} = 1,5s$ για να διαδοθεί από το

σημείο Σ στο Ο, συνεπώς το σημείο Σ, ξεκίνησε την ταλάντωσή του τη χρονική στιγμή $t_3=-1,5s$. Εξάλλου το κύμα προς τα δεξιά θα φτάσει στο Σ τη στιγμή $t_4=1,5s$.

Συνεπώς στο χρονικό διάστημα $-1,5s \leq t \leq 1,5s$ το σημείο ταλαντώνεται με εξίσωση απομάκρυνσης:

$$y_2 = 0,2 \cdot \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{2} + \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \right) = 0,2 \cdot \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \right) = 0,2 \cdot \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{2} + \frac{5}{4} \right),$$

οπότε η επιτάχυνση του Σ, δίνεται από την εξίσωση

$$a = -A\omega^2 \cdot \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{2} + \frac{5}{4} \right) = -0,2 \cdot \pi^2 \cdot \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{2} + \frac{5}{4} \right) \rightarrow$$

$$a \approx -2 \cdot \eta \mu \left(\pi + \frac{5\pi}{2} \right) = -2 \cdot \sigma \nu \nu (\pi t)$$

$$\text{Και η δύναμη } F = ma = -2 \cdot 10^{-6} \cdot \sigma \nu \nu (\pi t)$$

Από τη στιγμή της συμβολής, δηλαδή $t \geq 1,5s$, η αντίστοιχη απομάκρυνση θα είναι:

$$y = 0,4 \sin 2\pi \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{4} \right) \cdot \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \right) = 0,4 \cdot \sin 2\pi \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \right) \cdot \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \right) \rightarrow$$

$$y = 0,4 \cdot \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \right)$$

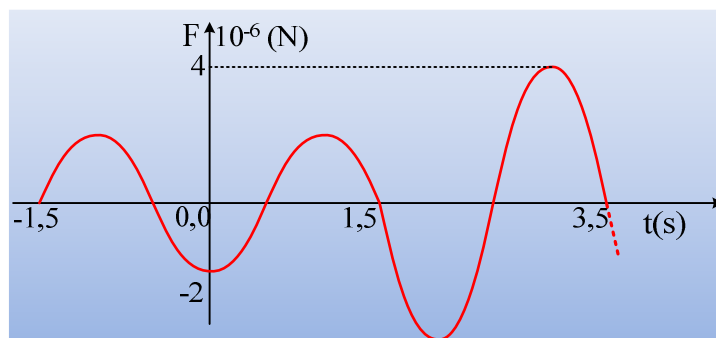
Οπότε η αντίστοιχη επιτάχυνση θα έχει τη μορφή:

$$a = -A\omega^2 \cdot \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \right) = -0,4 \cdot \pi^2 \cdot \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \right) \rightarrow$$

$$a = -4 \cdot \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \right) \rightarrow a \approx -4 \cdot \eta \mu \left(\pi t + \frac{\pi}{2} \right) = -4 \cdot \sin(\pi t) \quad (\text{S.I.})$$

$$\text{Και η δύναμη } F = ma = -4 \cdot 10^{-6} \cdot \sin(\pi t) \quad (\text{S.I.})$$

Με βάση αυτά η γραφική παράσταση είναι όπως στο παρακάτω σχήμα



Σχόλια:

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος $y = 0,4 \sin 2\pi \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{4} \right) \cdot \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \right)$ μπορεί να γραφεί:

$$y = 0,4 \cdot \sin \left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \eta \mu \left(\pi t + \frac{\pi}{2} \right) = -0,4 \cdot \eta \mu \left(\frac{\pi x}{2} \right) \cdot \sin(\pi t) \quad \text{ή}$$

$$y = 0,4 \cdot \eta \mu \left(\frac{\pi x}{2} \right) \cdot \sin(\pi t + \pi)$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι το πλάτος ταλάντωσης είναι ημιτονοειδής συνάρτηση του x και όχι συνημιτονοειδής, όπως η εξίσωση του βιβλίου. Το αποτέλεσμα βέβαια είναι στην θέση $x=0$, να δημιουργείται δεσμός και όχι κοιλία και κατά συνέπεια να έχουμε σε άλλες θέσεις τους δεσμούς και τις κοιλίες.

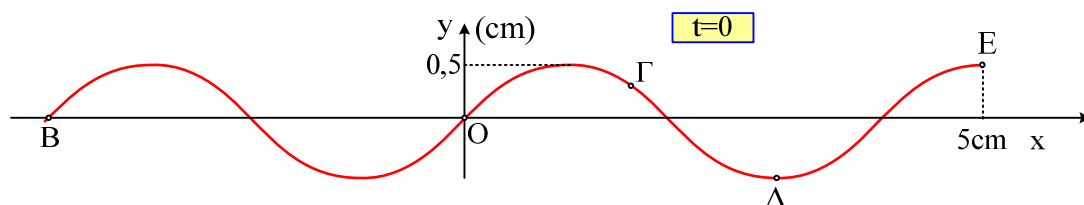
Αλλά τότε ισχύει η εξίσωση του βιβλίου μας; Όταν τα δυο κύματα τη στιγμή $t=0$ φτάνουν στη θέση $x=0$ και το σημείο αυτό εξαιτίας και των δύο κυμάτων αρχίζει να ταλαντώνεται προς τη θετική κατεύθυνση.

Αν δοθεί λοιπόν, ότι τα δύο κύματα φτάνουν ταυτόχρονα στη θέση $x=0$, τη στιγμή $t=0$, αλλά εξαιτίας του ενός το σημείο O , ξεκινά να ταλαντώνεται προς την θετική κατεύθυνση, αλλά εξαιτίας του άλλου προς την αρνητική, η κατάσταση, είναι αυτή που μελετήσαμε στην παραπάνω άσκηση.

dmargaris@sch.gr

Ένα στιγμιότυπο κύματος.

Ένα κύμα διαδίδεται προς τα δεξιά (θετική κατεύθυνση) κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και στο παρακάτω σχήμα δίνεται ένα τμήμα του στιγμιότυπου κάποια στιγμή, που θεωρούμε $t=0$, σε μια περιοχή του μέσου, μεταξύ των σημείων B και E. Δίνεται ότι τη στιγμή αυτή τα σημεία Δ και E έχουν μηδενική ταχύτητα ταλάντωσης.



Το σημείο O στη θέση $x=0$, θα φτάσει για πρώτη φορά σε απομάκρυνση 0,5cm τη χρονική στιγμή $t_1=0,3s$.

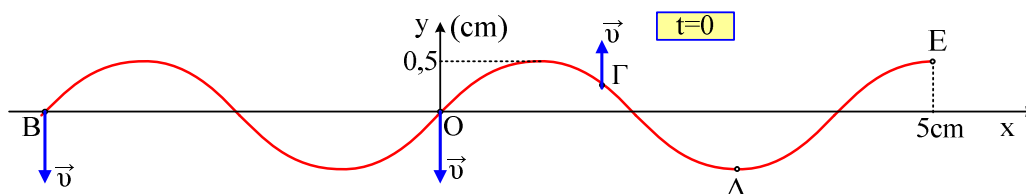
- Να σημειώσετε πάνω στο σχήμα τις ταχύτητες των σημείων B, O και Γ τη στιγμή που ελήφθη το παραπάνω στιγμιότυπο.
- Να υπολογίσετε το πλάτος του κύματος, το μήκος κύματος και την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.
- Να υπολογιστεί η επιτάχυνση του σημείου Δ, για $t=0$.
- Να εξετάσετε αν το κύμα αυτό μπορεί να περιγραφεί από μια εξίσωση της μορφής:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

- Να σχεδιάσετε ένα στιγμιότυπο του κύματος αυτού, για την ίδια περιοχή, τη χρονική στιγμή $t_2=0,1s$.

Απάντηση:

- Κάθε υλικό σημείο του μέσου ταλαντώνεται, επειδή «εξαναγκάζεται» σε ταλάντωση εξαιτίας των υλικών σημείων προς τα αριστερά του. Έτσι τείνει να κινηθεί προς την κατεύθυνση εκείνη που θα το φέρει κατακόρυφα σε μια θέση, όπου βρίσκονται τα σημεία στα αριστερά του. Άρα οι ταχύτητες των σημείων είναι όπως στο παρακάτω σχήμα



- Με βάση το σχήμα το πλάτος του κύματος είναι ίσο με 0,5cm, ενώ η οριζόντια απόσταση των σημείων O και E είναι ίση με $\lambda + \lambda/4$, άρα:

$$\begin{aligned} 5\lambda/4 &= 5\text{cm} \text{ ή} \\ \lambda &= 4\text{cm}. \end{aligned}$$

Εξάλλου τη στιγμή $t=0$ το σημείο O κινείται προς τα κάτω, συνεπώς θα χρειαστεί να περάσει χρονικό διάστημα $\Delta t = \frac{3}{4} T$ για να φτάσει σε μέγιστη θετική απομάκρυνση. Έτσι έχουμε:

$$T = \frac{4}{3} t_1 = 0,4s$$

Συνεπώς η ταχύτητα διάδοσης του κύματος θα είναι:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{4 \cdot 10^{-2} m}{0,4s} = 0,1 m/s$$

iii) Για την επιτάχυνση του σημείου Δ έχουμε:

$$a = -\omega^2 \cdot y$$

όπου $\omega = 2\pi/T = 5\pi \text{ rad/s}$ και τότε:

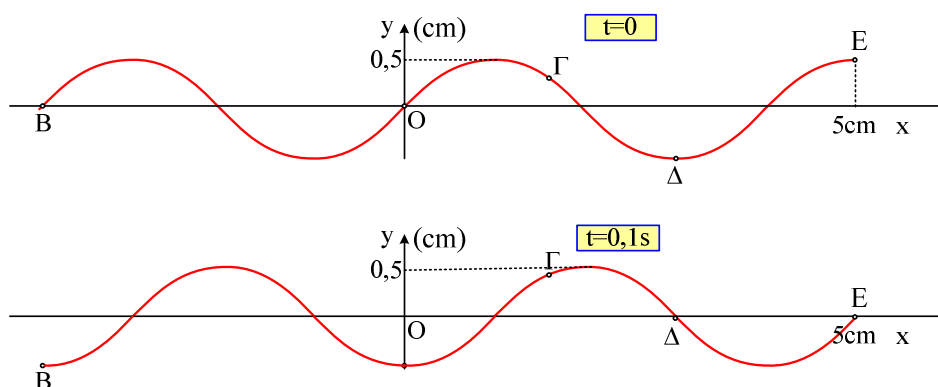
$$a = -\omega^2 \cdot y = -25 \pi^2 \cdot (-0,5 \cdot 10^{-2}) \text{ m/s}^2 \approx 1,25 \text{ m/s}^2.$$

iv) Εξίσωση που δίνεται:

$$y = A \cdot \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

περιγράφει ένα κύμα, αν το σημείο που βρίσκεται στη θέση $x=0$, για $t=0$ περνά από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο προς την θετική κατεύθυνση, πράγμα που δεν συμβαίνει στην περίπτωση μας, αφού το σημείο O , έχει ταχύτητα προς τα κάτω. Η εξίσωση αυτή λοιπόν δεν περιγράφει το παραπάνω κύμα.

v) Η χρονική στιγμή t_2 αντιστοιχεί σε $\frac{1}{4} T$, οπότε το αντίστοιχο στιγμιότυπο είναι αυτό στο παρακάτω σχήμα.



Εξισώσεις κυμάτων και συμβολή τους.

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και από αριστερά προς τα δεξιά (προς την θετική κατεύθυνση), διαδίδεται ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα, το οποίο φτάνει τη στιγμή $t_0=0$, στο σημείο O, στη θέση $x=0$. Το σημείο O αρχίζει την ταλάντωσή του από την θέση ισορροπίας του, κινούμενο προς την θετική κατεύθυνση και φτάνει στην ακραία θέση της ταλάντωσής του τη στιγμή $t_1=0,5s$, ενώ στο μεταξύ το κύμα έχει διαδοθεί κατά $0,25m$, δεξιότερα του O. Η απόσταση των δύο ακραίων θέσεων ταλάντωσης του O είναι $0,4m$.

- i) Να υπολογιστούν η περίοδος, το πλάτος και το μήκος του κύματος.
- ii) Να βρεθεί η εξίσωση του κύματος.
- iii) Να σχεδιάστε ένα στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_2=3s$, για τα σημεία του θετικού ημι-ξονα.

Κατά μήκος του ίδιου ελαστικού μέσου, διαδίδεται ταυτόχρονα ένα δεύτερο κύμα, από δεξιά προς τα αριστερά, με την ίδια συχνότητα και πλάτος, το οποίο τη στιγμή $t_0=0$ φτάνει σε ένα σημείο K, στη θέση $x_K=3,5m$, το οποίο επίσης αρχίζει να ταλαντώνεται προς την θετική κατεύθυνση.

- iv) Να βρεθεί η εξίσωση του κύματος αυτού.
- v) Τα δύο κύματα συμβάλλουν και έτσι προκύπτει ένα στάσιμο κύμα. Να βρείτε τις θέσεις των δεσμών στην περιοχή $0 \leq x \leq 3,5m$
- vi) Να σχεδιάστε ένα στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος στην παραπάνω περιοχή τη χρονική στιγμή $t_3=9s$.

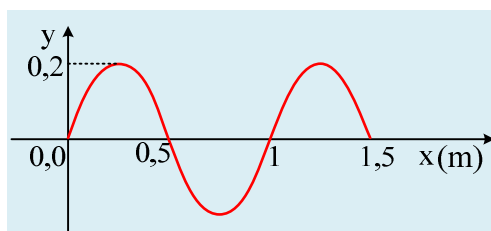
Απάντηση:

- i) Το σημείο O ξεκινά από την θέση ισορροπίας και για να φτάσει στην ακραία θέση περνά χρόνος $T/4$ συνεπώς $T=2s$, στον ίδιο χρόνο το κύμα διαδίδεται κατά $\lambda/4=0,25m$ ή $\lambda=1m$, ενώ αφού οι δύο ακραίες θέσεις απέχουν $0,4m$, σημαίνει ότι $2A=0,4m$ ή $A=0,2m$.
- ii) Το σημείο στη θέση $x=0$ ξεκινά την ταλάντωσή του από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο προς την θετική κατεύθυνση συνεπώς ισχύει η εξίσωση $y=A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$, άρα:

$$y_1 = 0,2\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2}-x\right) \quad t \geq 0 \text{ και } x \leq \frac{1}{2}t \text{ μονάδες στο S.I.} \quad (1)$$

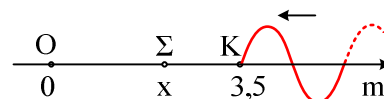
- iii) Θέτοντας στην (1) $t=3s$ παίρνουμε $y_1 = 0,2\eta\mu 2\pi\left(\frac{3}{2}-x\right)=0,2\eta\mu 2\pi x$.

Μέχρι ποιο σημείο θα χαράξουμε την γραφική παράσταση; Το κύμα διαδίδεται με ταχύτητα $v=\lambda \cdot f=\lambda/T=0,5m/s$, συνεπώς σε χρονικό διάστημα t_3 έχει διαδοθεί μέχρι τη θέση $x=vt=1,5m$ και το στιγμιότυπο έχει τη μορφή του παρακάτω σχήματος.



iv) Το σημείο K ταλαντώνεται σύμφωνα με την εξίσωση

$$y = A \sin \frac{2\pi t}{T} = 0,2 \sin \pi t. \text{ Ένα τυχαίο σημείο } \Sigma, \text{ στη θέση } x, \text{ θα καθυ-}$$



στερήσει να ταλαντωθεί κατά χρονικό διάστημα $t' = \frac{d}{v} = \frac{3,5 - x}{0,2} s$, οπότε η εξίσωση ταλάντωσής του

είναι:

$$y_2 = 0,2 \sin \pi(t - t') = 0,2 \sin \pi \left(t - \frac{3,5 - x}{0,2} \right) = 0,2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{2} + x - 3,5 \right), t \geq 0 \text{ και } x \geq \frac{7 - t}{2} \quad (2)$$

v) Με βάση την αρχή της επαλληλίας, για τη συμβολή των δύο κυμάτων έχουμε:

$$y = y_1 + y_2 = 0,2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{2} - x \right) + 0,2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{2} + x - 3,5 \right) \text{ ή}$$

$$y = 0,4 \sin \nu \frac{\pi t - 2\pi x - \pi t - 2\pi x + 7\pi}{2} \sin \mu \frac{\pi t - 2\pi x + \pi t + 2\pi x - 7\pi}{2} = 0,4 \sin(2\pi x - 3,5\pi) \sin(\pi t - 3,5\pi)$$

$$\text{Ή } y = -0,4 \sin 2\pi x \cdot \sin \pi t \quad (3)$$

Δεσμοί είναι τα σημεία όπου $A = |0,4 \cdot \sin 2\pi x| = 0$ ή $2\pi x = k\pi$ ή $x = \frac{1}{2} k$, ενώ και $x \leq 3,5m$. Έτσι οι θέσεις των δεσμών είναι: $x = 0, 0,5m, 1m, 1,5m, 2m, 2,5m, 3m, 3,5m$.

vi) Το χρονικό διάστημα για να φτάσει το πρώτο κύμα στο σημείο K, στη θέση $x = 3,5m$ είναι

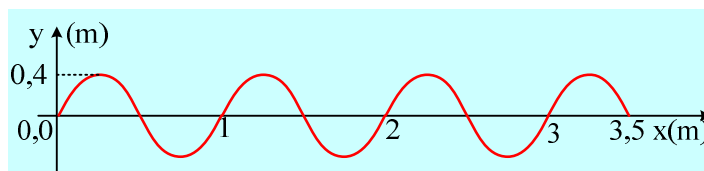
$$t_4 = \frac{d}{v} = \frac{x}{v} = 7s, \text{ συνεπώς τη στιγμή } t_3 = 9s \text{ έχει σχηματισθεί στάσιμο κύμα σε όλη την περιοχή:}$$

$$0 \leq x \leq 3,5m$$

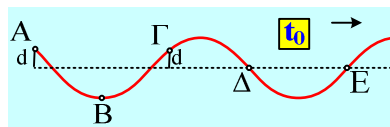
Αντικαθιστώντας $t = 9s$ στην (3) παίρνουμε:

$$y = -0,4 \sin 2\pi x \cdot \sin 9\pi = -0,4 \sin 2\pi x \cdot \sin \pi = 0,4 \sin 2\pi x,$$

οπότε το ζητούμενο στιγμιότυπο, είναι αυτό του παρακάτω διαγράμματος.



Κάποια ερωτήματα πάνω σε μια κυματομορφή.



Ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα, πλάτους $0,2\text{m}$, διαδίδεται κατά μήκος ενός ελαστικού γραμμικού μέσου, από αριστερά προς τα δεξιά και σε μια στιγμή t_0 , η μορφή μιας περιοχής του μέσου, είναι αυτή του σχήματος.

- i) Να σημειωθούν πάνω στο σχήμα οι ταχύτητες των σημείων A και E.
- ii) Αν το σημείο B έχει διπλάσια κατά μέτρο επιτάχυνση, από το σημείο A, να βρεθεί η απομάκρυνση d.
- iii) Να βρεθεί ο λόγος $\frac{v_A}{v_\Delta}$ των ταχυτήτων ταλάντωσης των σημείων A και Δ τη στιγμή t_0 .
- iv) Να βρεθεί η διαφορά φάσης μεταξύ των σημείων:

α) Δ και E β) B και Δ γ) Γ και Δ.

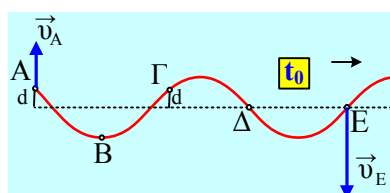
- v) Αν κάποια στιγμή η φάση της απομάκρυνσης του σημείου E είναι $\frac{13\pi}{4}$ ποια είναι η αντίστοιχες φάσεις

των σημείων Δ και Γ;

- vi) Να σχεδιάσετε τη μορφή της ίδιας περιοχής του μέσου διάδοσης, τη χρονική στιγμή $t_1 = t_0 + T/4$, όπου T η περίοδος του κύματος.

Απάντηση:

- i) Κάθε υλικό σημείο του μέσου εξαναγκάζεται σε ταλάντωση από το υλικό σημείο που βρίσκεται στα αριστερά του. Συνεπώς το σημείο A κινείται προς την ακραία θετική απομάκρυνσή του (θεωρώντας τα θετικά προς τα πάνω), ενώ το σημείο E προς τα κάτω, όπως στο παρακάτω σχήμα.



- ii) Αφού έχουμε αρμονικό κύμα, κάθε σημείο εκτελεί αρμονική ταλάντωση, για την οποία ισχύει:

$$a = -\omega^2 y \rightarrow a_A = -\omega^2 \cdot d \text{ και } a_B = -\omega^2 \cdot A \rightarrow \frac{a_A}{a_B} = \frac{d}{A} \rightarrow d = A \frac{a_A}{2a_A} = \frac{A}{2} = 0,1\text{m}$$

- iii) Το σημείο Δ έχει θετική ταχύτητα $v_\Delta = v_{\max} = \omega \cdot A$, ενώ και το σημείο A έχει θετική ταχύτητα μέτρου:

$$v_A = \omega \sqrt{A^2 - y^2}^* = \omega \sqrt{A^2 - \frac{A^2}{4}} = \omega A \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ οπότε:}$$

$$\frac{v_A}{v_\Delta} = \frac{\omega A \frac{\sqrt{3}}{2}}{\omega A} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

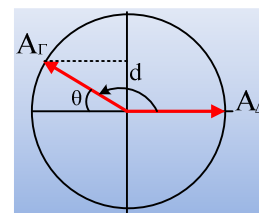
iv) Δύο σημεία που απέχουν οριζόντια κατά ένα μήκος κύματος εμφανίζουν διαφορά φάσης 2π , οπότε η διαφορά φάσης, αν η απόστασή του είναι Δx είναι:

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} \quad (1)$$

$$\text{Συνεπώς } \Delta\varphi_{\Delta E} = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} = 2\pi \frac{\frac{\lambda}{2}}{\lambda} = \pi, \quad \Delta\varphi_{B\Delta} = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} = 2\pi \frac{\frac{3\lambda}{4}}{\lambda} = \frac{3\pi}{2}$$

Για να βρούμε τη διαφορά φάσης μεταξύ των σημείων Γ και Δ, ας πάρουμε τα περιστρεφόμενα διανύσματα για τα πλάτη ταλάντωσης των δύο σημείων, όπου τη στιγμή t_0 είναι όπως στο σχήμα. Για τη γωνία θ έχουμε

$$\eta \mu \theta = \frac{d}{A} = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}, \text{ οπότε } \Delta\varphi_{\Gamma\Delta} = \pi - \theta = \frac{5\pi}{6}$$

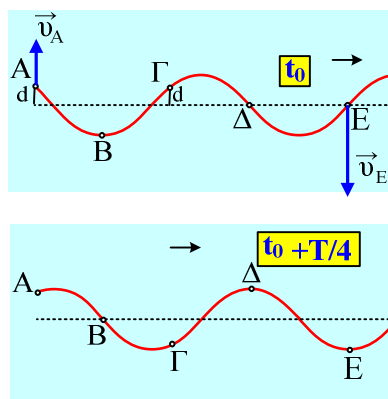


v) Για τις φάσεις των δύο σημείων έχουμε:

$$\varphi_\Delta = \varphi_E + \pi = \frac{13\pi}{4} + \pi = \frac{17\pi}{4} = \left(4\pi + \frac{\pi}{4}\right) \text{ rad και}$$

$$\varphi_\Gamma = \varphi_\Delta + \frac{5\pi}{6} = \frac{17\pi}{4} + \frac{5\pi}{6} = \frac{61\pi}{12} = \left(5\pi + \frac{\pi}{12}\right) \text{ rad}$$

vi) Προφανώς σε χρόνο $T/4$ το σημείο B θα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του ενώ τα σημεία Δ και E σε θέσεις πλάτους με αντίθετες απομακρύνσεις, οπότε λαμβάνοντας υπόψη και τις φορές των ταχυτήτων του i) ερωτήματος σχεδιάζουμε τη νέα μορφή όπως στο παρακάτω σχήμα.



Σχόλια:

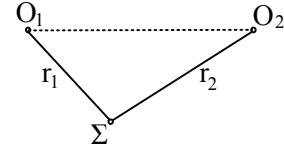
* Η εξίσωση αυτή έχει αποδειχθεί κατά την μελέτη των ταλαντώσεων και εδώ χρησιμοποιήθηκε χωρίς απόδειξη. Προφανώς στις εξετάσεις δεν θεωρείται γνωστή.

Οι απαντήσεις σε όλα τα ερωτήματα δόθηκαν χωρίς χρήση της εξίσωσης του κύματος. Θα μπορούσε δηλαδή κάποιος να απαντήσει χωρίς να έχει διδαχτεί καν την εξίσωση του κύματος. Με τη χρήση της εξίσωσης κάποιες απαντήσεις προφανώς θα ήταν ευκολότερες.

dmargaris@sch.gr

Μη σύγχρονες πηγές.

Δύο πηγές κυμάτων O_1 και O_2 , μπορούν να ταλαντώνονται σε κατακόρυφη διεύθυνση με συχνότητα 1Hz και πλάτος 0,1m και να δημιουργούν κύματα στην επιφάνεια ενός υγρού, τα οποία διαδίδονται με ταχύτητα 2m/s. Οι πηγές ξεκινούν την ταλάντωσή τους από τη θέση ισορροπίας κινούμενες προς τη θετική κατεύθυνση, η πρώτη για $t_0=0$ και η δεύτερη τη χρονική στιγμή $t_1=0,75s$.



- 1) Να βρεθούν οι εξισώσεις των δύο κυμάτων που δημιουργούνται.
- 2) Ένα σημείο Σ απέχει αποστάσεις $r_1=4m$ και $r_2=4,5m$ από τις δύο πηγές. Να βρεθεί η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Σ μετά από την συμβολή των δύο κυμάτων.
- 3) Πόση είναι η ενέργεια ταλάντωσης μιας στοιχειώδους μάζας $m=1mg$ που βρίσκεται στο σημείο Σ;

Απάντηση:

- 1) Από την θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής έχουμε:

$$v=\lambda f \rightarrow \lambda=2m.$$

Η εξίσωση ταλάντωσης της πηγής O_1 είναι:

$$y_1=0,1\cdot\eta\mu 2\pi ft=0,1\cdot\eta\mu 2\pi t$$

οπότε η εξίσωση του πρώτου κύματος θα είναι:

$$y_1=0,1\cdot\eta\mu 2\pi\left(t-\frac{r_1}{\lambda}\right) \rightarrow$$

$$y_1=0,1\cdot\eta\mu 2\pi\left(t-\frac{r_1}{2}\right) \quad (1)$$

Η δεύτερη πηγή ξεκινά επίσης από την θέση ισορροπίας κινούμενη προς τη θετική κατεύθυνση οπότε η εξίσωση ταλάντωσής της είναι:

$$y_2=0,1\cdot\eta\mu 2\pi ft' \text{ όπου } t'=t-t_1 \rightarrow$$

$$y_2=0,1\cdot\eta\mu 2\pi(t-0,75)$$

και η εξίσωση του δεύτερου κύματος είναι:

$$y_2=0,1\cdot\eta\mu 2\pi\left(t-\frac{r_2}{\lambda}-0,75\right) \rightarrow$$

$$y_2 = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi(t - \frac{r_2}{2} - \frac{3}{4}) \quad (2)$$

Από την αρχή της επαλληλίας για το σημείο Σ παίρνουμε:

$$y = y_1 + y_2 = 2 \cdot 0,1 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{t - \frac{r_1}{2} - t + \frac{r_2}{2} + \frac{3}{4}}{2} \cdot \eta\mu 2\pi \frac{t - \frac{r_1}{2} + t - \frac{r_2}{2} - \frac{3}{4}}{2} \quad \eta$$

$$y = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi(\frac{r_2 - r_1}{4} + \frac{3}{8}) \cdot \eta\mu 2\pi(t - \frac{r_1 + r_2}{4} - \frac{3}{8})$$

και με αντικατάσταση των r_1, r_2 παίρνουμε:

$$y = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi(\frac{0,5}{4} + \frac{3}{8}) \cdot \eta\mu 2\pi(t - \frac{8,5}{4} - \frac{3}{8}) \quad \eta$$

$$y = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu \pi \cdot \eta\mu 2\pi(t - \frac{5}{2}) = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu \pi \cdot \eta\mu(2\pi t - 5\pi) \rightarrow$$

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu(2\pi t - 5\pi + \pi) \rightarrow$$

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu(2\pi t - 4\pi)$$

2) Η ενέργεια ταλάντωσης της μάζας είναι:

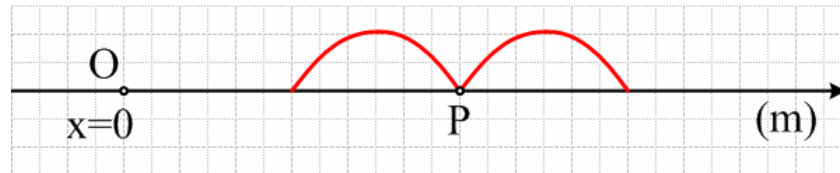
$$E = \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \rightarrow$$

$$E = \frac{1}{2} 10^{-6} \cdot 4\pi^2 \cdot 0,2^2 \text{ J} \simeq 8 \cdot 10^{-7} \text{ J.}$$

dmargaris@sch.gr

Μια πηγή και δύο κύματα.

Στη θέση $x_P=6\text{m}$ ενός γραμμικού ελαστικού μέσου υπάρχει μια πηγή κύματος P, η οποία για $t=0$, αρχίζει να ταλαντώνεται σύμφωνα με την εξίσωση $y=1\cdot\eta\mu(2\pi t)$ (μονάδες στο S.I.). Η μορφή του μέσου μετά από λίγο, τη στιγμή t_1 , είναι αυτή του παρακάτω σχήματος.



- Πόσο είναι το πλάτος του κύματος και πόσο το μήκος του κύματος, με βάση την παραπάνω εικόνα;;
- Να βρεθεί η στιγμή t_1 στην οποία ελήφθη η παραπάνω εικόνα.
- Να βρεθούν οι εξισώσεις των κυμάτων, $y_1=f(t,x)$ και $y_2=f(t,x)$, για τα δύο κύματα που κινούνται προς τα δεξιά και προς τ' αριστερά αντίστοιχα.
- Να σχεδιάσετε τη μορφή του μέσου τη χρονική στιγμή $t_2=1,5\text{s}$.

Απάντηση:

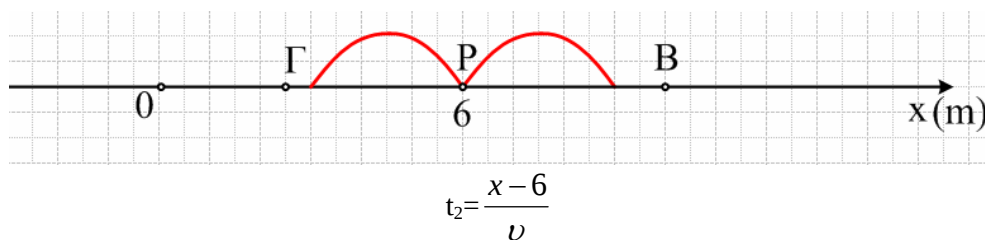
- Το πλάτος της ταλάντωσης της πηγής είναι 1m που αντιστοιχεί σε 2 γραμμές στο σχήμα μας, ενώ το $\lambda/2$ αντιστοιχεί σε 6 γραμμές. Άρα $\lambda/2=3\text{m}$ ή $\lambda=6\text{m}$.

Τη στιγμή που φαίνεται στο σχήμα δεξιά και αριστερά της πηγής, έχει διαδοθεί το κύμα σε απόσταση ίση με μισό μήκος κύματος, πράγμα που σημαίνει ότι η πηγή έχει εκτελέσει μισή ταλάντωση. Αλλά από την εξίσωση $y=2\cdot\eta\mu(2\pi t)$ έχουμε:

$$\omega=2\pi \rightarrow T=1\text{s}$$

Συνεπώς η εικόνα ελήφθη τη στιγμή $t_1=0,5\text{s}$.

- Το κύμα για να φτάσει σε ένα σημείο B δεξιά του E στη θέση x, θα χρειαστεί χρονικό διάστημα:



όπου $v=\lambda/T=6\text{m/s}$.

Άρα η εξίσωση ταλάντωσής του θα είναι:

$$y=1\cdot\eta\mu(2\pi(t-t_2))=1\cdot\eta\mu(2\pi(t-\frac{x-6}{6})) \quad \text{ή}$$

$$y_1=1\cdot\eta\mu(2\pi(t-\frac{x}{6}+1)) \quad (\text{S.I.}) \text{ με } t \geq 0 \text{ και } x \geq 6\text{m} \quad (1)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι η εξίσωση του κύματος που διαδίδεται προς τα δεξιά.

- iii) Έστω τώρα ένα σημείο Γ στη θέση x, αριστερά του Ρ. Το κύμα για να φτάσει στο Γ, θα χρειαστεί χρονικό διάστημα:

$$t_3 = \frac{6-x}{v}$$

Άρα η εξίσωση ταλάντωσής του θα είναι:

$$y_2 = 1 \cdot \eta\mu(2\pi(t-t_3)) = 1 \cdot \eta\mu(2\pi(t - \frac{6-x}{6})) \quad \text{ή}$$

$$y_2 = 1 \cdot \eta\mu(2\pi(t + \frac{x}{6} - 1)) \quad (\text{S.I.}) \quad \text{με } t \geq 0 \text{ και } x \leq 6\text{m} \quad (2)$$

Η εξίσωση (2) είναι η εξίσωση του κύματος που διαδίδεται προς τα αριστερά.

- iv) Θέτοντας στην (1) $t_2 = 1,5\text{s}$ παίρνουμε:

$$y_1 = 1 \cdot \eta\mu(2\pi(1,5 - \frac{x}{6} + 1)) = 1 \cdot \eta\mu(5\pi - \pi x/3) = 1 \cdot \eta\mu(\pi x/3)$$

Εξάλλου στο παραπάνω χρονικό διάστημα το κύμα έχει διαδοθεί κατά $\Delta x = v \cdot t_2 = 9\text{m}$, φτάνοντας στη θέση $x' = 15\text{m}$. Συνεπώς το πεδίο ορισμού της παραπάνω σχέσης είναι:

$$6\text{m} \leq x \leq 15\text{m}$$

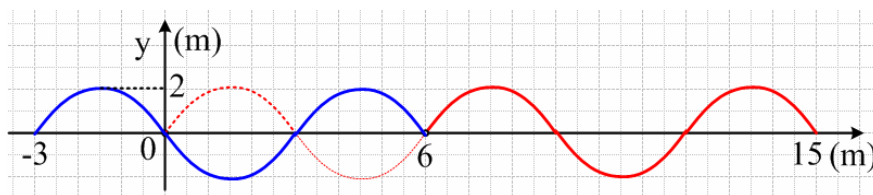
Αντίστοιχα αντικαθιστώντας $t_2 = 1,5\text{s}$ στην εξίσωση (2) θα πάρουμε:

$$y_2 = 1 \cdot \eta\mu(2\pi(t + \frac{x}{6} - 1)) = 1 \cdot \eta\mu(2\pi(1,5 + \frac{x}{6} - 1)) = 1 \cdot \eta\mu(\pi + \pi x/3) = -1 \cdot \eta\mu(\pi x/3)$$

Αλλά και αυτό το κύμα διαδόθηκε κατά 15m, οπότε το πεδίο ορισμού της παραπάνω σχέσης είναι:

$$-3\text{m} \leq x \leq 6\text{m}$$

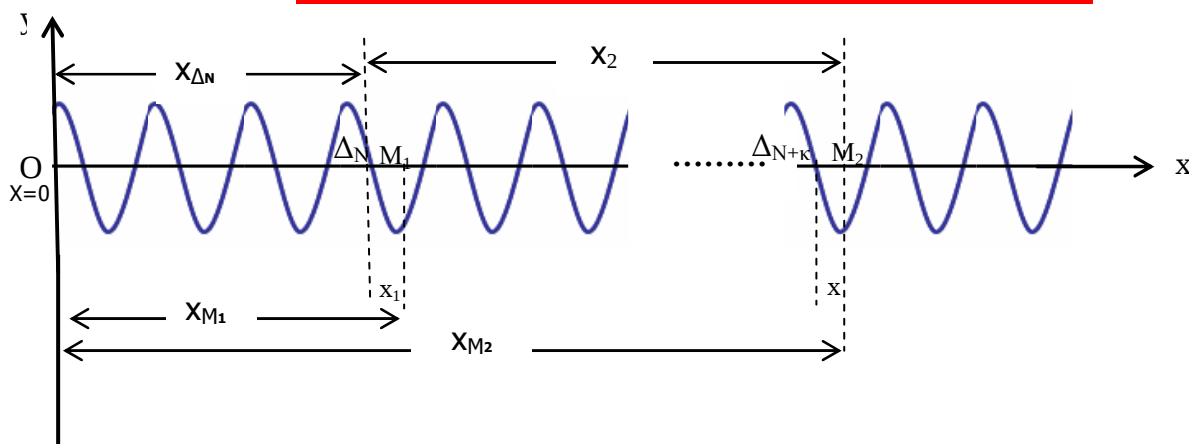
Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η μορφή του μέσου, όπου με κόκκινο είναι το μέρος που το κύμα διαδίδεται προς τα δεξιά και με μπλε το κύμα προς τα αριστερά.



Παρατηρείστε ότι η κατάσταση δεξιά και αριστερά της πηγής είναι απολύτως όμοια.

dmargaris@sch.gr

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΑΣ ΦΑΣΗΣ ΣΤΟ ΣΤΑΣΙΜΟ ΚΥΜΑ



ΠΡΟΤΑΣΗ. Να αποδειχτεί ότι κατά τη δημιουργία στασίμου κύματος δύο οποιαδήποτε σημεία του μέσου που ταλαντώνονται, έχουν διαφορά φάσης $\Delta\phi=0$ ή $\Delta\phi=\pi$ rad.

Έστω δύο τυχαία σημεία M_1 και M_2 μιας χορδής Ox στην οποία έχει σχηματιστεί στάσιμο κύμα της μορφής $y=2A\sin\frac{2\pi x}{\lambda} \eta\mu\frac{2\pi t}{T}$. Εάν Δ_N είναι ένας τυχαίος δεσμός πάνω στη χορδή

Ox και $x_{\Delta_N}=(2N+1) \cdot \frac{\lambda}{4}$ **(1)** με $N=0,1,2,\dots$ είναι η απόσταση του δεσμού Δ_N από τη θέση

$O(x=0)$, x_1 =η απόσταση του σημείου M_1 από το δεσμό Δ_N , x_2 =η απόσταση του σημείου M_2 από το δεσμό Δ_N , τότε υποθέτοντας ότι μεταξύ των σημείων M_1 και M_2 παρεμβάλλονται

κ δεσμοί (με $\kappa=0,1,2,3,\dots$) η απόσταση x_2 γράφεται $x_2=\kappa \cdot \frac{\lambda}{2} + x$ **(2)** όπου

x = η απόσταση του M_2 από το δεσμό $\Delta_{N+\kappa}$ (τελευταίο δεσμό) μεταξύ των M_1 και M_2 .

Εάν η απόσταση του σημείου M_1 από τη θέση $O(x=0)$ είναι x_{M1} , η εξίσωση της Α.Α.Τ. του

σημείου M_1 είναι: $y_1=2A \sin\frac{2\pi x_{M1}}{\lambda} \eta\mu\frac{2\pi t}{T} \Rightarrow y_1=2A \sin\frac{2\pi(x_{\Delta_N} + x_1)}{\lambda} \eta\mu\frac{2\pi t}{T} \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$

$y_1=2A \sin\frac{2\pi}{\lambda} \left[(2N+1) \frac{\lambda}{4} + x_1 \right] \eta\mu\frac{2\pi t}{T} \Rightarrow y_1=2A \sin\left(N\pi + \frac{\pi}{2} + 2\pi \frac{x_1}{\lambda}\right) \eta\mu\frac{2\pi t}{T} \Rightarrow$

$y_1=-2A \eta\mu\left(N\pi + 2\pi \frac{x_1}{\lambda}\right) \eta\mu\frac{2\pi t}{T} \Rightarrow y_1=2A \eta\mu\left(N\pi + 2\pi \frac{x_1}{\lambda}\right) \eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T} + \pi\right)$ **(3)**

με $2\pi \frac{x_1}{\lambda} < \pi$ (διότι $x_1 < \frac{\lambda}{2}$) και $N=0,1,2,\dots$

Εάν η απόσταση του σημείου M_2 από τη θέση $O(x=0)$ είναι x_{M2} , αντίστοιχα η εξίσωση της

Α.Α.Τ. του σημείου M_2 είναι: $y_2=2A \sin\frac{2\pi x_{M2}}{\lambda} \eta\mu\frac{2\pi t}{T} \Rightarrow y_2=2A \sin\frac{2\pi(x_{\Delta_N} + x_2)}{\lambda} \eta\mu\frac{2\pi t}{T}$

$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} y_2= 2A \sin\frac{2\pi}{\lambda} \left[(2N+1) \frac{\lambda}{4} + \kappa \cdot \frac{\lambda}{2} + x \right] \eta\mu\frac{2\pi t}{T} \Rightarrow$

$y_2=2A \sin\left(N\pi + \frac{\pi}{2} + \kappa\pi + 2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \eta\mu\frac{2\pi t}{T} \Rightarrow y_2=-2A \eta\mu\left(N\pi + \kappa\pi + 2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \eta\mu\frac{2\pi t}{T} \Rightarrow$

$y_2=2A \eta\mu\left(N\pi + \kappa\pi + 2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T} + \pi\right)$ **(4)**

με $2\pi \frac{x}{\lambda} < \pi$ (διότι $x < \frac{\lambda}{2}$) και $N=0,1,2,\dots$

Αν μεταξύ των σημείων M_1 και M_2 παρεμβάλλεται **άρτιος αριθμός δεσμών $\kappa=2\mu$** (με $\mu=0,1,2,\dots$) από την **(4)**: $y_2=2A \eta\mu(N\pi+2\mu\pi+2\pi\frac{x}{\lambda}) \eta\mu(\frac{2\pi t}{T}+\pi) \Rightarrow$

$$y_2=2A \eta\mu(N\pi+2\pi\frac{x}{\lambda}) \eta\mu(\frac{2\pi t}{T}+\pi) \quad \textbf{(4α)}.$$

Από **(3)** και **(4α)** **$\Delta\varphi_{M_1 M_2}=0$** . Άρα δύο τυχαία σημεία της χορδής που ταλαντώνονται και μεταξύ τους παρεμβάλλεται **άρτιος αριθμός δεσμών (2μ) ΠΑΝΤΑ ΕΧΟΥΝ ΔΙΑΦΟΡΑ ΦΑΣΗΣ $\Delta\varphi=0$** .

Αν μεταξύ των σημείων M_1 και M_2 παρεμβάλλεται **περιττός αριθμός δεσμών $\kappa=2\mu+1$** (με $\mu=0,1,2,\dots$) από την **(4)**: $y_2=2A \eta\mu(N\pi+2\mu\pi+\pi+2\pi\frac{x}{\lambda}) \eta\mu(\frac{2\pi t}{T}+\pi) \Rightarrow$

$$y_2=2A \eta\mu(N\pi+\pi+2\pi\frac{x}{\lambda}) \eta\mu(\frac{2\pi t}{T}+\pi) \Rightarrow y_2=-2A \eta\mu(N\pi+2\pi\frac{x}{\lambda}) \eta\mu(\frac{2\pi t}{T}+\pi) \Rightarrow$$

$$y_2=2A \eta\mu(N\pi+2\pi\frac{x}{\lambda}) \eta\mu(\frac{2\pi t}{T}+2\pi) \quad \textbf{(4β)}$$

Από **(3)** και **(4β)** **$\Delta\varphi_{M_1 M_2}=\pi \text{ rad}$** . Άρα δύο τυχαία σημεία της χορδής που ταλαντώνονται και μεταξύ τους παρεμβάλλεται **περιττός αριθμός δεσμών (2μ+1) ΠΑΝΤΑ ΕΧΟΥΝ ΔΙΑΦΟΡΑ ΦΑΣΗΣ $\Delta\varphi=\pi \text{ rad}$** .

ΠΟΡΙΣΜΑ

Ως συνέπεια της παραπάνω γενίκευσης έχουμε ότι:

Αν μεταξύ των M_1 και M_2 δεν παρεμβάλλεται κανένας δεσμός (άρα βρίσκονται μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών) τότε $\kappa=0$ που ισχύει **μόνον όταν** $\kappa=2\mu$ και $\mu=0$, άρα θα έχουν διαφορά φάσης **$\Delta\varphi_{M_1 M_2}=0$** .

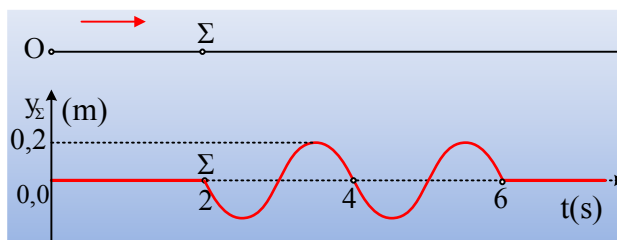
Αν μεταξύ των M_1 και M_2 παρεμβάλλεται ένας (1) δεσμός (άρα βρίσκονται εκατέρωθεν του ιδίου δεσμού και σε αποστάσεις μικρότερες από $\frac{\lambda}{2}$ από αυτόν) τότε $\kappa=1$ που ισχύει **μόνον**

όταν $\kappa=2\mu+1$ και $\mu=0$, άρα θα έχουν διαφορά φάσης **$\Delta\varphi_{M_1 M_2}=\pi \text{ rad}$** .

ΣΧΟΛΙΟ

Η παραπάνω απόδειξη στηρίζεται στη γεωμετρία του σχήματος του προβλήματος που διερευνούμε και στους διαδοχικούς τριγωνομετρικούς μετασχηματισμούς της εξίσωσης του στασίμου κύματος. Αφιερώνεται δε στη μνήμη του αειμνήστου δασκάλου μου Β.Κάρκαλου.

Πληροφορίες από την ταλάντωση ενός σημείου.



Στο άκρο Ο ενός γραμμικού ελαστικού μέσου όπου παίρνουμε $x=0$, υπάρχει μια πηγή εγκάρσιου αρμονικού κύματος, η οποία αρχίζει να ταλαντώνεται τη στιγμή $t_0=0$. Το κύμα διαδίδεται προς τα δεξιά και το γράφημα της απομάκρυνσης ενός σημείου Σ, το οποίο απέχει κατά $2m$ από την πηγή, είναι αυτό του παραπάνω σχήματος. Αντλώντας πληροφορίες από το διάγραμμα αυτό, να απαντήσετε στις ακόλουθες ερωτήσεις:

i) Να βρεθούν η περίοδος, το πλάτος και το μήκος του κύματος.

ii) Πόσες συνολικά ταλαντώσεις εκτέλεσε η πηγή του κύματος;

iii) Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.

iv) Να σχεδιάστε στιγμιότυπα του κύματος τις χρονικές στιγμές:

$$\alpha) t_1=1,5s, \quad \beta) t_2=3s \quad \text{και} \quad \gamma) t_3=7,5s.$$

Πάνω στα στιγμιότυπα αυτά να σημειωθεί η θέση του σημείου Σ.

Απάντηση:

i) Από το σχήμα βλέπουμε ότι η περίοδος της ταλάντωσης του σημείου Σ είναι $2s$, ενώ το πλάτος του είναι $0,2m$, οπότε και για το κύμα $T=2s$ και $A=0,2m$. Εξάλλου το κύμα χρειάστηκε χρονικό διάστημα $2s$ για να διαδοθεί από το Ο στο Σ, οπότε:

$$v = \frac{x_\Sigma - 0}{\Delta t} = \frac{2m}{2s} = 1m/s \rightarrow \lambda = v \cdot T = 1 \cdot 2m = 2m$$

ii) Στο γράφημα που μας δίνεται, βλέπουμε ότι το σημείο Σ εκτελεί συνολικά δύο ταλαντώσεις, συνεπώς και η πηγή εκτέλεσε και αυτή μόνο δύο ταλαντώσεις.

iii) Το σημείο Σ ξεκίνησε την ταλάντωσή του κινούμενο προς την αρνητική κατεύθυνση, συνεπώς το ίδιο είχε κάνει και η πηγή του κύματος, όταν ξεκινούσε την ταλάντωσή της. Έτσι η εξίσωση της απομάκρυνσης της πηγής ήταν $y=A \cdot \eta\mu(\omega t + \pi)$, οπότε η εξίσωση του κύματος είναι της μορφής:

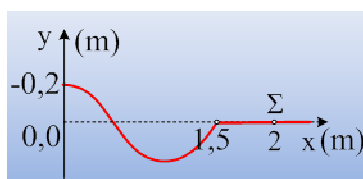
$$y = A \cdot \eta\mu \left(\frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) + \pi \right) = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{S.I.})$$

iv) α) Αντικαθιστώντας στην εξίσωση του κύματος $t_1=1,5s$ παίρνουμε:

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{1,5}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) = 0,2 \cdot \eta\mu (2,5\pi - \pi x) \rightarrow$$

$$y = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x) \quad \text{με} \quad x \leq v \cdot t_1 \quad \text{ή} \quad x \leq 1,5m$$

Με βάση αυτά το στιγμιότυπο είναι όπως στο παρακάτω σχήμα.

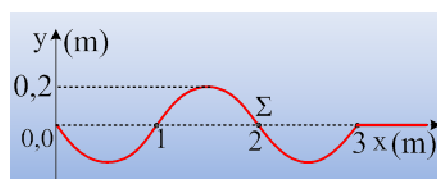


β) Αντικαθιστώντας στην εξίσωση του κύματος $t_2=3s$ παίρνουμε:

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{3}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) = 0,2 \cdot \eta\mu(4\pi - \pi x) \rightarrow$$

$$y = -0,2 \cdot \eta\mu(\pi x) \text{ με } x \leq v \cdot t_2 \text{ ή } x \leq 3m$$

Οπότε παίρνουμε την εικόνα:



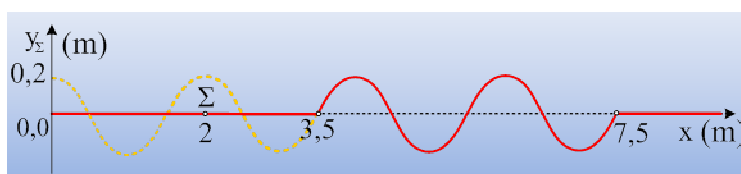
γ) Αντικαθιστώντας στην εξίσωση του κύματος $t_3=7,5s$ παίρνουμε:

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{7,5}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) = 0,2 \cdot \eta\mu(8,5\pi - \pi x) \rightarrow$$

$$y = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x) \text{ με } v \cdot t_2 - 4m \leq x \leq v \cdot t_2 \text{ ή } 3,5m \leq x \leq 7,5m$$

Αφού η πηγή έχει σταματήσει, κύμα θα υπάρχει σε μια περιοχή ίση με δυο μήκη κύματος, συνεπώς αφού το κύμα έχει φτάσει στη θέση $x=7,5m$, σε ταλάντωση θα βρίσκονται αυτή τη στιγμή, τα σημεία με $3,5m \leq x \leq 7,5m$.

Οπότε παίρνουμε την εικόνα:



dmargaris@sch.gr

ΣΤΑΣΙΜΟ ΚΥΜΑ

Δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα, ίδιου πλάτους A και συχνότητας f διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις σε γραμμικό ελαστικό μέσο που ταυτίζεται με το θετικό ημιάξονα Ox . Από τη συμβολή των δύο κυμάτων δημιουργείται στάσιμο κύμα και στην αρχή O ($x = 0m$) του ημιάξονα εμφανίζεται κοιλία που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Θεωρούμε ως $t = 0s$ τη χρονική στιγμή, μετά το σχηματισμό του στάσιμου κύματος που το σημείο O βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του κινούμενο προς τη θετική κατεύθυνση της ταλάντωσης του.

Η εξίσωση του κύματος που διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση είναι η: $y_1 = 10^{-2} \eta\mu \left[\pi \left(8t - \frac{2x}{\lambda} \right) \right]$ (S.I.)

Ένα σημείο K με $x_K = 2m$ είναι το πλησιέστερο σημείο στην αρχή O που έχει μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης μέτρου $u_{\max,K} = 16\pi \cdot 10^{-2} m/s$.

α) Να ελέγξετε αν το σημείο K βρίσκεται σε θέση όπου το στάσιμο κύμα εμφανίζει κοιλία και να γράψετε την εξίσωση i. του κύματος που διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση και ii. του στάσιμου που δημιουργείται.

β) Να σχεδιάσετε τα στιγμιότυπα του στάσιμου κύματος μέχρι τη θέση του 4^{ου} δεσμού τις χρονικές στιγμές $t_1 = \frac{1}{8} s$

και $t_2 = t_1 + \frac{T}{4}$, όπου T η περίοδος των αρμονικών κυμάτων.

γ) Να βρείτε τις θέσεις των τεσσάρων πλησιέστερων στην αρχή O , στοιχειωδών τμημάτων του ελαστικού μέσου που το πλάτος ταλάντωσης του είναι $|A'| = \sqrt{2}A$.

δ) Αν κάθε στοιχειώδες τμήμα του ελαστικού μέσου έχει μάζα $m = 4 \cdot 10^{-3} Kg$, να απεικονίσετε γραφικά τη μεταβολή του μέτρου της μέγιστης δύναμης επαναφοράς για την ταλάντωση των στοιχειωδών τμημάτων του μέσου σε συνάρτηση με την απόσταση τους από την αρχή O μέχρι τη θέση του 4^{ου} δεσμού.

Δίνεται: $\pi^2 = 10$.

Λύση

α) Από τη εξίσωση του κύματος που διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση:

$$y_1 = 10^{-2} \eta\mu \left[\pi \left(8t - \frac{2x}{\lambda} \right) \right] = 10^{-2} \eta\mu \left[2\pi \left(4t - \frac{x}{\lambda} \right) \right] \text{ προκύπτει: } A = 10^{-2} m, f = 4Hz \text{ και } T = \frac{1}{f} \text{ ή } T = 0,25s.$$

Παρατηρούμε πως η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης των κοιλιών του στάσιμου κύματος είναι:

$$u_{\max} = \omega \cdot |A'|_{\max} \text{ ή } u_{\max} = \omega \cdot 2A \text{ ή } u_{\max} = \frac{2\pi}{T} 2A \text{ ή } u_{\max} = 16\pi \cdot 10^{-2} m/s.$$

Παρατηρούμε πως $u_{\max,K} = u_{\max}$. Επομένως στο σημείο K βρίσκεται η επόμενη κοιλία μετά αυτή στο σημείο O .

Αφού δύο διαδοχικές κοιλίες απέχουν $d = \frac{\lambda}{2}$ μεταξύ τους, ισχύει: $x_K = d$ ή $x_K = \frac{\lambda}{2}$ ή $\lambda = 2 \cdot x_K$ ή $\lambda = 4m$.

Η εξίσωση του κύματος που διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση είναι: $y_2 = 10^{-2} \eta\mu \left[2\pi \left(4t + \frac{x}{4} \right) \right]$ (S.I.)

και η εξίσωση του στάσιμου είναι: $y = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu \left(2\pi \frac{x}{\lambda} \right) \eta\mu \left(2\pi \frac{t}{T} \right)$ ή $y = 2 \cdot 10^{-2} \sigma\upsilon\nu \left(2\pi \frac{x}{4} \right) \eta\mu(8\pi t)$ (S.I.)

β) Οι θέσεις των δεσμών του στάσιμου κύματος πάνω στο θετικό ημιάξονα Ox προκύπτουν από τη σχέση:

$$x_\delta = (2\kappa + 1) \frac{\lambda}{4}, \kappa = 0, 1, 2, \dots$$

Η θέση του 4^{ου} δεσμού προκύπτει για $\kappa = 3$, δηλ. $x = (2 \cdot 3 + 1) \frac{4}{4} m$ ή $x = 7m$.

Από την εξίσωση του στάσιμου κύματος $y = 2 \cdot 10^{-2} \sigma\upsilon\nu \left(2\pi \frac{x}{4} \right) \eta\mu(8\pi t)$ έχουμε:

- για τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{1}{8} s$

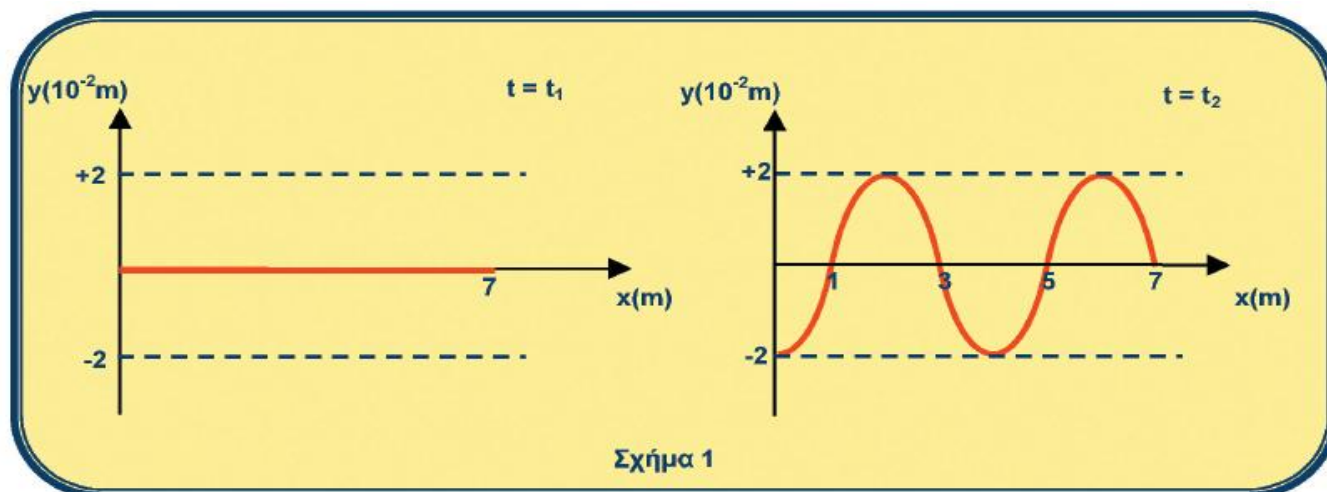
$$y_{t_1} = 2 \cdot 10^{-2} \sigma\upsilon\nu \left(2\pi \frac{x}{4} \right) \cdot \eta\mu\pi \text{ ή } y_{t_1} = 0 \text{ (S.I.)}$$

Επομένως, όλα τα σημεία του στάσιμου κύματος τη στιγμή $t = t_1$ διέρχονται από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης τους.

- για τη χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + \frac{T}{4} = \frac{0,75}{4} s$

$$y_{t_2} = 2 \cdot 10^{-2} \sigma\upsilon\nu \left(2\pi \frac{x}{4} \right) \cdot \eta\mu \frac{3\pi}{2} \text{ ή } y_{t_2} = -2 \cdot 10^{-2} \sigma\upsilon\nu \left(2\pi \frac{x}{4} \right) \text{ (S.I.)}$$

Τα ζητούμενα στιγμιότυπα μέχρι τη θέση του 4^{ου} δεσμού φαίνονται στο σχήμα 1.



γ) Για τις ζητούμενες θέσεις των στοιχειωδών τμημάτων ισχύει:

$$|A'| = \sqrt{2}A \quad \text{ή} \quad A' = \pm\sqrt{2}A \quad \text{ή} \quad 2A \cdot \sin 2\pi \frac{x}{4} = \pm\sqrt{2}A \quad \text{ή}$$

$$\pm\sqrt{2} \cdot 10^{-2} = 2 \cdot 10^{-2} \sin\left(2\pi \frac{x}{4}\right) \quad \text{ή} \quad \sin 2\pi \frac{x}{4} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Όταν

- $\sin\left(2\pi \frac{x}{4}\right) = +\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \quad \text{ή} \quad 2\pi \frac{x}{4} = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad \text{ή} \quad x = 4\kappa \pm 0,5 \text{ (S.I.)}$

Για $\kappa = 0$, προκύπτει: $x = \pm 0,5\text{m}$ ή $x = +0,5\text{m}$ (αφού $x > 0$)

Για $\kappa = 1$, προκύπτει: $x = 4 \pm 0,5\text{m}$ ή $\begin{cases} x = +3,5\text{m} \\ x = +4,5\text{m} \end{cases}$

- $\sin\left(2\pi \frac{x}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{5\pi}{4} \quad \text{ή} \quad 2\pi \frac{x}{4} = 2\kappa\pi \pm \frac{5\pi}{4} \quad \text{ή} \quad x = 4\kappa \pm 2,5 \text{ (S.I.)}$

Για $\kappa = 0$, προκύπτει: $x = \pm 2,5\text{m}$ ή $x = +2,5\text{m}$ (αφού $x > 0$)

Για $\kappa = 1$, προκύπτει: $x = 4 \pm 2,5\text{m}$ ή $\begin{cases} x = +1,5\text{m} \\ x = +6,5\text{m} \end{cases}$

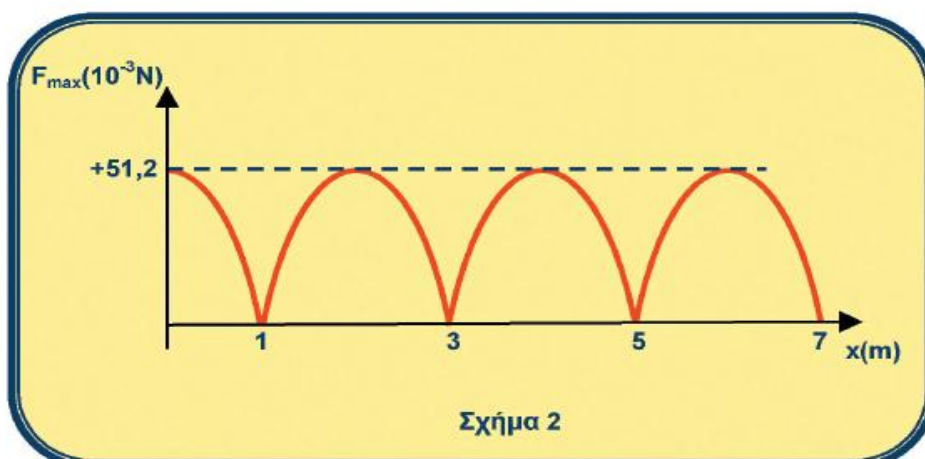
Έτσι τα τέσσερα πλησιέστερα στην αρχή O , στοιχειώδη τμήματα που εκτελούν ταλάντωση με $|A'| = \sqrt{2}A$ βρίσκονται στις θέσεις: $x = +0,5\text{m}$, $x = +1,5\text{m}$, $x = +2,5\text{m}$, $x = +3,5\text{m}$.

δ) Το μέτρο της μέγιστης δύναμης επαναφοράς για την ταλάντωση κάθε στοιχειώδους τμήματος του μέσου δίνεται από τη σχέση:

$$F_{\max} = D|A'| \quad \text{ή} \quad F_{\max} = m\omega^2|A'| \quad \text{ή} \quad F_{\max} = 2A \cdot m \cdot \omega^2 \left| \sin \frac{2\pi \cdot x}{\lambda} \right| \quad \text{ή} \quad F_{\max} = 8A \cdot m \cdot \pi^2 f^2 \left| \sin \frac{2\pi \cdot x}{\lambda} \right| \quad \text{ή}$$

$$F_{\max} = 80A \cdot m \cdot f^2 \left| \sin \frac{2\pi \cdot x}{\lambda} \right| \quad \text{ή} \quad F_{\max} = 51,2 \cdot 10^{-3} \left| \sin \frac{\pi \cdot x}{2} \right| \text{ (S.I.)}$$

Η γραφική παράσταση του μέτρου της μέγιστης δύναμης επαναφοράς της ταλάντωσης των σημείων του θετικού ημιιάξονα του στάσιμου κύματος έως τη θέση του 4^{ου} δεσμού ($x = 7\text{m}$) σε συνάρτηση με την απόσταση τους x από την πηγή O φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



ΣΤΑΣΙΜΟ ΚΥΜΑ

Δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα, ίδιου πλάτους $A = 20\text{cm}$ και συχνότητας f διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις σε γραμμικό ελαστικό μέσο που ταυτίζεται με το θετικό ημιάξονα Ox . Από τη συμβολή των δύο κυμάτων δημιουργείται στάσιμο κύμα και στην αρχή O ($x = 0$) του ημιάξονα εμφανίζεται κοιλία που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Θεωρούμε ως $t = 0$ τη χρονική στιγμή, μετά το σχηματισμό του στάσιμου κύματος σε όλο το μήκος του ελαστικού μέσου κατά την οποία το σημείο του μέσου στη θέση O διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο προς τη θετική κατεύθυνση της ταλάντωσης του.

Το ελάχιστο χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών διελεύσεων ενός σημείου K ($x_K = +2,5\text{cm}$) του ελαστικού μέσου από τη θέση ισορροπίας του είναι $\Delta t = 2\text{s}$. Το σημείο K βρίσκεται μεταξύ του πρώτου και του δεύτερου δεσμού στον ημιάξονα Ox και είναι το πρώτο του ελαστικού μέσου μεταξύ αυτών των δύο δεσμών που εκτελεί ταλάντωση πλάτους $|A|_K = 20\sqrt{3}\text{cm}$.

- α) Να υπολογίσετε το μήκος κύματος λ του στάσιμου κύματος και την ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων που το δημιουργήσαν.
- β) Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος και να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του μέχρι τη θέση $x = 9\text{cm}$ τη χρονική στιγμή $t = 2\text{s}$.
- γ) Να παραστήσετε γραφικά την απομάκρυνση y_K του σημείου K από τη θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με το χρόνο t .
- δ) Να υπολογίσετε τον αριθμό και να προσδιορίσετε τις θέσεις των σημείων του στάσιμου κύματος που εκτελούν ταλάντωση με μέγιστο πλάτος μεταξύ των σημείων K και L ($x_L = +11,5\text{cm}$).
- ε) Μεταβάλλουμε τη συχνότητα ταλάντωσης των σημείων του στάσιμου κύματος έτσι ώστε να εμφανίζεται κοιλία σε κάθε ένα από τα σημεία O και M ($x_M = +10,5\text{cm}$) του ελαστικού μέσου. Μεταξύ των σημείων O και M υπάρχει ένα μόνο σημείο που παραμένει ακίνητο. Να υπολογίσετε τη μεταβολή Δf της συχνότητας.

Λύση

- α) Οι θέσεις των σημείων του ελαστικού μέσου τα οποία εκτελούν ταλάντωση με πλάτος ίσο με το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου K προκύπτουν:

$$|A| = |A|_K \text{ ή } 2A \left| \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} x \right) \right| = |A|_K \text{ ή } \left| \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} x \right) \right| = \frac{|A|_K}{2A} \text{ ή } \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} x \right) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ή}$$

$$\begin{cases} \frac{2\pi}{\lambda} x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \text{ ή } x = k\lambda \pm \frac{\lambda}{12}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ \text{ή} \\ \frac{2\pi}{\lambda} x = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6} \text{ ή } x = k\lambda \pm \frac{5\lambda}{12}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

Αφού το σημείο K βρίσκεται μεταξύ του πρώτου και του δεύτερου δεσμού του θετικού ημιάξονα ισχύει:

$$\frac{\lambda}{4} \leq x \leq \frac{3\lambda}{4}$$

Έτσι

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{\lambda}{4} \leq k\lambda \pm \frac{\lambda}{12} \leq \frac{3\lambda}{4} &\text{ ή } 3 \leq 12k \pm 1 \leq 9 \text{ ή } \begin{cases} \frac{1}{6} \leq k \leq \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \leq k \leq \frac{5}{6} \end{cases} \text{ ή } \frac{1}{6} \leq k \leq \frac{5}{6} \\ \bullet \quad \frac{\lambda}{4} \leq k\lambda \pm \frac{5\lambda}{12} \leq \frac{3\lambda}{4} &\text{ ή } 3 \leq 12k \pm 5 \leq 9 \text{ ή } \begin{cases} 3 \leq 12k + 5 \leq 9 \text{ ή } -\frac{1}{6} \leq k \leq \frac{1}{3} \text{ ή } k = 0 \\ 3 \leq 12k - 5 \leq 9 \text{ ή } \frac{2}{3} \leq k \leq \frac{7}{6} \text{ ή } k = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Από τη σχέση } x = k\lambda + \frac{5\lambda}{12} \text{ για } k = 0 \text{ προκύπτει: } x = \frac{5\lambda}{12}$$

$$\text{Από τη σχέση } x = k\lambda - \frac{5\lambda}{12} \text{ για } k = 1 \text{ προκύπτει: } x = \frac{7\lambda}{12}$$

Αφού το σημείο K είναι το πρώτο σημείο μεταξύ του πρώτου και του δεύτερου δεσμού στο θετικό ημιάξονα που

$$\text{εκτελεί ταλάντωση πλάτους } |A|_K, \text{ ισχύει: } x_K = \frac{5\lambda}{12} \text{ ή } \lambda = \frac{12x_K}{5} \text{ ή } \lambda = 6\text{cm}$$

$$\text{Ακόμα ισχύει: } \Delta t = \frac{T}{2} \text{ ή } T = 2\Delta t \text{ ή } T = 4\text{s}$$

$$\text{Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής προκύπτει: } u = \frac{\lambda}{T} \text{ ή } u = 1,5\text{cm/s}$$

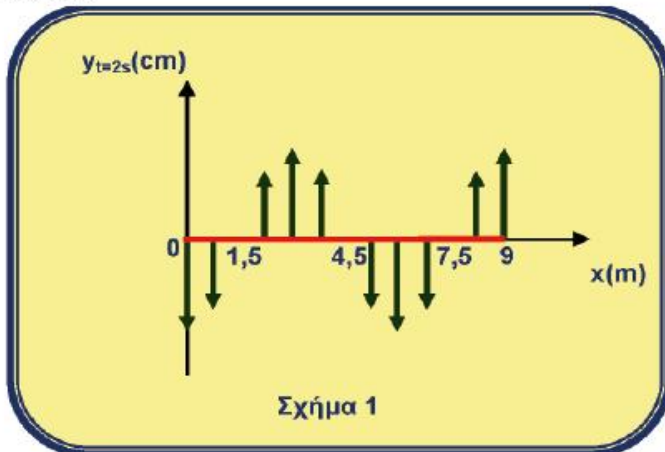
β) Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι: $y = 2A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$ ή

$$y = 40 \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) \eta\mu\left(\frac{\pi t}{2}\right) \quad (x, y \text{ σε cm, } t \text{ σε s})$$

Για τη χρονική στιγμή $t = 2\text{s}$ η εξίσωση του στιγμιότυπου προκύπτει:

$$y_{t=2\text{s}} = 40 \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) \eta\mu\left(\frac{\pi 2}{2}\right) \quad \text{ή } y_{t=2\text{s}} = 0$$

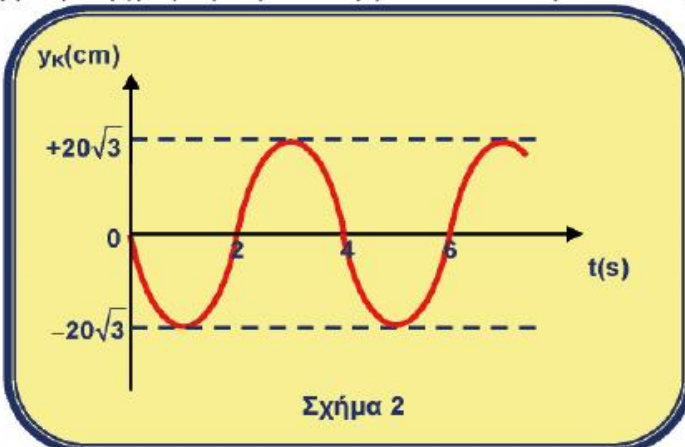
Το ζητούμενο στιγμιότυπο (με τις ταχύτητες των σημείων του ελαστικού μέσου) φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



γ) Από την εξίσωση του στάσιμου κύματος για $x = x_K$, η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Κ από τη θέση ισορροπίας προκύπτει:

$$y_K = 40 \sin\left(\frac{\pi 2,5}{3}\right) \eta\mu\left(\frac{\pi t}{2}\right) \quad \text{ή } y_K = -20\sqrt{3} \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} t\right) \quad (y_K \text{ σε cm, } t \text{ σε s})$$

Η ζητούμενη γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



δ) Οι θέσεις στο θετικό ημιάξονα Οx, των σημείων του στάσιμου κύματος που εκτελούν ταλάντωση με μέγιστο πλάτος (κοιλίες) προκύπτουν από τη σχέση:

$$x_K = \kappa \frac{\lambda}{2} \quad \text{ή } x_K = 3\kappa \text{ cm, } \kappa = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{Ισχύει: } x_K \leq x_K \leq x_M \quad \text{ή } +2,5 \leq 3\kappa \leq +11,5 \quad \text{ή } \frac{2,5}{3} \leq \kappa \leq \frac{11,5}{3} \quad \text{ή } \kappa = 1, 2, 3$$

Οι θέσεις των κοιλιών προκύπτουν:

- για $\kappa = 1$, $x = 3\text{cm}$
- για $\kappa = 2$, $x = 6\text{cm}$
- για $\kappa = 3$, $x = 9\text{cm}$

ε) Αφού μεταξύ των σημείων Ο και Μ υπάρχει ένα μόνο σημείο που παραμένει ακίνητο και στα σημεία αυτά το νέο

στάσιμο κύμα εμφανίζει κοιλίες, για το νέο μήκος κύματος λ' ισχύει: $\frac{\lambda'}{2} = x_M$ ή $\lambda' = 2x_M$ ή $\lambda' = 21\text{cm}$

$$\text{Η ζητούμενη μεταβολή } \Delta f \text{ της συχνότητας είναι: } \Delta f = f' - f \quad \text{ή } \Delta f = \frac{v}{\lambda'} - \frac{v}{\lambda} = v \left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda} \right) \quad \text{ή } \Delta f = -\frac{5}{28} \text{ Hz}$$

ΣΤΑΣΙΜΟ ΚΥΜΑ

Δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα, ίδιου πλάτους και συχνότητας διαδίδονται με ταχύτητα μέτρου $u_s = 2\text{ m/s}$ προς αντίθετες κατευθύνσεις σε γραμμικό ελαστικό μέσο που ταυτίζεται με το θετικό ημιάξονα Ox . Από τη συμβολή των δύο κυμάτων δημιουργείται στάσιμο κύμα και στην αρχή O ($x = 0$) του ημιάξονα εμφανίζεται κοιλία που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Θεωρούμε ως αρχή μέτρησης του χρόνου ($t = 0$) τη χρονική στιγμή, μετά το σχηματισμό του στάσιμου κύματος κατά την οποία το σημείο στη θέση O βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του κινούμενο προς τη θετική κατεύθυνση της ταλάντωσης του. Η απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων της ταλάντωσης που εκτελεί μια κοιλία του στάσιμου κύματος είναι $S = 40\text{ cm}$ ενώ το ελάχιστο χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών διελεύσεων της από τη θέση ισορροπίας της είναι $\Delta t = 1\text{ s}$.

α) Να γράψετε τις εξισώσεις των κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα.

β) Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης ενός σημείου K του στάσιμου κύματος με $x_K = \frac{3}{2}\text{ m}$.

γ) Να γράψετε και να παραστήσετε γραφικά την χρονική εξίσωση της ταχύτητας ενός σημείου A του στάσιμου κύματος με $x_A = \frac{7}{3}\text{ m}$.

δ) Να προσδιορίσετε τις θέσεις των πλησιέστερων στο δεύτερο δεσμό, σημείων Λ , N ($x_\Lambda > x_N$) του θετικού ημιάξονα των οποίων η μέγιστη επιτάχυνση είναι ίση με $a_{\max} = 1\text{ m/s}^2$. Ποια είναι η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των σημείων N και Λ ;

ε) Να σχεδιάσετε τα στιγμιότυπα του στάσιμου κύματος μέχρι τη θέση του δεύτερου δεσμού τις χρονικές στιγμές $t_1 = \frac{1}{6}\text{ s}$ και $t_2 = \frac{1}{2}\text{ s}$.

Δίνεται: $\pi^2 = 10$.

Λύση

α) Το πλάτος της ταλάντωσης μιας κοιλίας του στάσιμου κύματος είναι: $|A'|_{\text{κοιλ}} = 2A$ (1), όπου A το πλάτος των κυμάτων που συμβάλλοντας δημιουργούν το στάσιμο κύμα.

Η απόσταση των ακραίων θέσεων της κοιλίας είναι: $S = 2|A'|_{\text{κοιλ}}$ ή μέσω της σχέσης (1) $S = 4A$ ή $A = \frac{S}{4}$ ή $A = 10\text{ cm} = 0,1\text{ m}$.

Ακόμα ισχύει: $\Delta t = \frac{T}{2}$ ή $T = 2\Delta t$ ή $T = 2\text{ s}$.

Από την θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής προκύπτει: $u_s = \frac{\lambda}{T}$ ή $\lambda = u_s T$ ή $\lambda = 4\text{ m}$.

Επομένως η εξίσωση του κύματος που διαδίδεται προς

- τη θετική κατεύθυνση είναι: $y_1 = 0,1\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{4}\right)\right]$ (S.I.)
- την αρνητική κατεύθυνση είναι: $y_2 = 0,1\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{2} + \frac{x}{4}\right)\right]$ (S.I.)

β) Το πλάτος $|A'|$ της ταλάντωσης των σημείων του στάσιμου κύματος δίνεται από τη σχέση: $|A'| = 2A\left|\sin\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\right|$

ή $|A'| = 0,2\left|\sin\left(2\pi\frac{x}{4}\right)\right|$ ή $|A'| = 0,2\left|\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right|$ (S.I.)

Για $x = x_K = \frac{3}{2}\text{ m}$ προκύπτει: $|A'|_K = 0,2\left|\sin\left(\frac{\pi x_K}{2}\right)\right|$ ή $|A'|_K = 0,2\left|\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right|\text{ m}$ ή $|A'|_K = 0,1\sqrt{2}\text{ m}$.

γ) Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι: $y = 2A\sin\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\eta\mu\left(2\pi\frac{t}{T}\right)$ ή στο S.I. $y = 0,2\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\eta\mu(\pi t)$ (2)

Από την εξίσωση του στάσιμου κύματος για $x = x_A$, η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου A από τη θέση

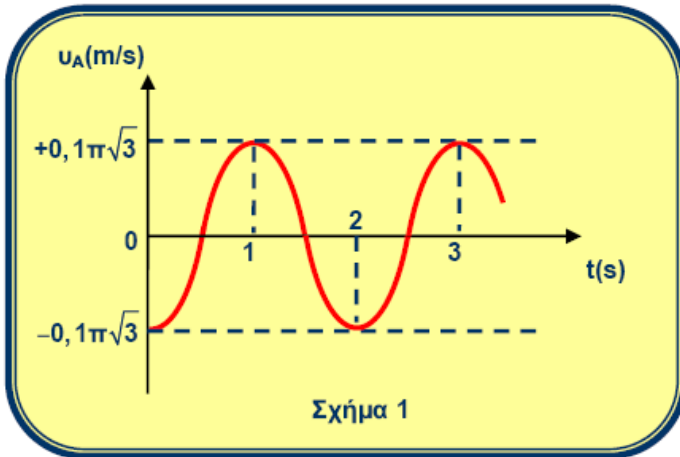
ισορροπίας του προκύπτει: $y_A = 0,2\sin\left(\frac{\pi x_A}{2}\right)\eta\mu(\pi t)$ ή $y_A = 0,2\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\eta\mu(\pi t)$ ή $y_A = -0,1\sqrt{3}\eta\mu(\pi t)$ ή

$y_A = 0,1\sqrt{3}\eta\mu(\pi t + \pi)$ (S.I.)

Επομένως η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σημείου A προκύπτει: $u_A = 0,1\pi\sqrt{3}\sin(\pi t + \pi)$ ή

$u_A = -0,1\pi\sqrt{3}\sin(\pi t)$ (S.I.)

Η ζητούμενη γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



δ) Ο δεύτερος δεσμός του στάσιμου κύματος βρίσκεται στη θέση: $x = 3\frac{\lambda}{4}$ ή $x = 3\text{m}$.

Για τα ζητούμενα σημεία ισχύει:

$$a_{\max} = 1 \text{ ή } \omega^2 |A| = 1 \text{ ή } \pi^2 0,2 \left| \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right| = 1 \text{ ή } 2 \left| \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right| = 1 \text{ ή } \left| \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right| = \frac{1}{2}$$

Επομένως:

$$\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{1}{2} \text{ ή } \frac{\pi x}{2} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \text{ ή } x = 4k \pm \frac{2}{3} \text{ με } k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = -\frac{1}{2} \text{ ή } \frac{\pi x}{2} = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \text{ ή } x = 4k \pm \frac{4}{3} \text{ με } k \in \mathbb{Z}$$

Οι θέσεις των ζητούμενων σημείων του στάσιμου κύματος πρέπει να ικανοποιούν την ανισωτική σχέση: $\frac{\lambda}{2} < x < \lambda$
ή $2\text{m} < x < 4\text{m}$.

➤ Για $k = 0$ προκύπτουν:

- $x = \pm \frac{2}{3} \text{ m}$ ή $x = + \frac{2}{3} \text{ m}$ αφού ισχύει $x > 0$
- $x = \pm \frac{4}{3} \text{ m}$ ή $x = + \frac{4}{3} \text{ m}$ αφού ισχύει $x > 0$

➤ Για $k = 1$ προκύπτουν:

- $x = 4 \pm \frac{2}{3}$ ή $x = \frac{14}{3} \text{ m}$ και $x = \frac{10}{3} \text{ m}$
- $x = 4 \pm \frac{4}{3}$ ή $x = \frac{16}{3} \text{ m}$ και $x = \frac{8}{3} \text{ m}$

Επομένως τα πλησιέστερα στο δεύτερο δεσμό, σημεία του θετικού

ημιάξονα είναι τα: $x_A = \frac{10}{3} \text{ m}$ και $x_N = \frac{8}{3} \text{ m}$

Αφού τα σημεία Ν, Α βρίσκονται εκατέρωθεν του ίδιου δεσμού και απέχουν από αυτόν απόσταση μικρότερη από $\frac{\lambda}{2}$, οι φάσεις των ταλαντώσεων τους διαφέρουν κάθε χρονική στιγμή κατά:
 $\Delta\phi = \pi \text{ rad}$.

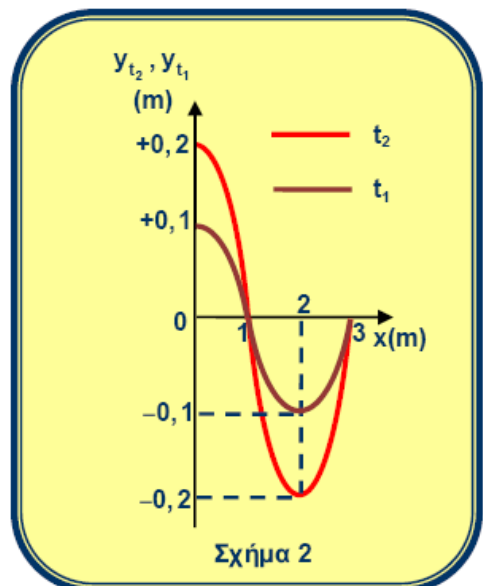
ε) Από τη σχέση (2) για $t = t_1 = \frac{1}{6} \text{ s}$ προκύπτει:

$$y_{t_1} = 0,2 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \eta \mu\left(\frac{\pi}{6}\right) \text{ ή } y_{t_1} = 0,1 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

Ομοίως για $t = t_2 = \frac{1}{2} \text{ s}$ προκύπτει:

$$y_{t_2} = 0,2 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \eta \mu\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ ή } y_{t_2} = 0,2 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

Τα ζητούμενα στιγμιότυπα φαίνονται στο διπλανό διάγραμμα.





ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ, ΘΕΜΑ 1^ο

ι) Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής.

(Κυκλώστε πάνω στην κόλλα σας το γράμμα της φράσης που συμπληρώνει σωστά καθεμιά από τις παρακάτω ημιτελείς προτάσεις 1 – 4)

1. Σε μια χορδή, που οι θέσεις ισορροπίας των μορίων της βρίσκονται πάνω στον άξονα x' , έχει σχηματιστεί στάσιμο κύμα. Το πλάτος της ταλάντωσης ενός σημείου της χορδής:

- α) είναι συνάρτηση της θέσης x ,
- β) είναι συνάρτηση του χρόνου t ,
- γ) είναι συνάρτηση και της θέσης x και του χρόνου t ,
- δ) δεν εξαρτάται από τη θέση x , ούτε κι από το χρόνο t .

2. Σε ένα ηχητικό στάσιμο κύμα η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών της έντασης του ήχου είναι 17 m. Αν η ταχύτητα διάδοσης του ήχου είναι 340 m/sec, τότε η συχνότητα ταλάντωσης των μορίων του αέρα είναι:

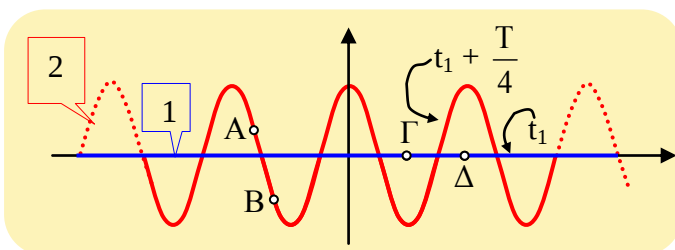
- α) 10 Hz, β) 5 Hz, γ) 50 Hz, δ) 100 Hz

3. Σε ένα στάσιμο κύμα, τα σημεία που βρίσκονται μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών:

- α) παρουσιάζουν διαφορά φάσης π ,
- β) έχουν ίδιο πλάτος ταλάντωσης,
- γ) έχουν ίδια μέγιστη ταχύτητα,
- δ) εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση με ίδια συχνότητα και ίδια φάση.

4. Σε γραμμικό ομογενές ελαστικό μέσο δημιουργείται ένα στάσιμο εγκάρσιο

κύμα, που περιγράφεται από την εξίσωση: $\psi = 2A \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \eta \mu 2\pi \frac{t}{T}$



Στο σχήμα δίνονται δύο στιγμιότυπα (1) και (2) του κύματος τις χρονικές στιγμές t_1 και $t_1 + T/4$.

α) Στο στιγμιότυπο (1) η δυναμική ενέργεια όλων των μορίων του ελαστικού

μέσου είναι μέγιστη.

β) στο στιγμιότυπο (2) η κινητική ενέργεια όλων των μορίων είναι μέγιστη,

γ) τα υλικά σημεία A και B έχουν την ίδια φάση ταλάντωσης,

δ) τα υλικά σημεία Γ και Δ τη χρονική στιγμή t_1 έχουν ταχύτητες $v_\Gamma = -4A \frac{\pi}{T}$

και $v_\Delta = +4A \frac{\pi}{T}$, αντίστοιχα.



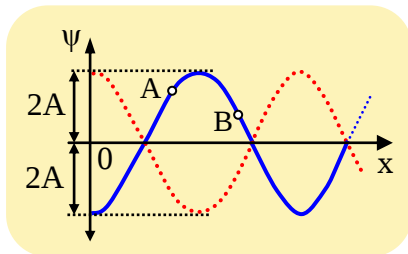
ii) Ερωτήσεις του τύπου: Σωστό – Λάθος

5. Κατά μήκος μιας χορδής έχει δημιουργηθεί ένα στάσιμο κύμα. Η εξίσωση ταλάντωσης ενός σημείου M της χορδής για το οποίο είναι $x_M = 0,3 \text{ m}$ είναι:

$$\psi = 0,04 \sin 2\pi \frac{x_M}{0,6} \cdot \eta \mu 2\pi t \text{ (S.I)}$$

Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος):

- α) Το πλάτος ταλάντωσης των κυμάτων που συμβάλλουν είναι $0,02 \text{ m}$.
- β) Το μήκος κύματος των κυμάτων που συμβάλλουν είναι $0,3 \text{ m}$.
- γ) Η κυκλική συχνότητα των κυμάτων που συμβάλλουν είναι $2\pi \text{ rad/sec}$.
- δ) Το πλάτος ταλάντωσης του σημείου M είναι $0,04 \text{ m}$.
- ε) Το σημείο M αποτελεί την πρώτη μετά την αρχή αξόνων κοιλία του στάσιμου κύματος.



6. Στο διπλανό σχήμα απεικονίζονται δύο στιγμιότυπα ενός τμήματος μιας χορδής στην οποία έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα, που προήλθε από τη συμβολή δύο αντίθετα κινούμενων αρμονικών κυμάτων πλάτους A και περιόδου T.

Να σημειώσετε (Σ) στις σωστές και (Λ) στις λανθασμένες προτάσεις:

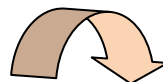
- α) Τα σημεία A και B ταλαντώνονται με διαφορά φάσης μηδέν.
- β) Όλα τα σημεία της χορδής, εκτός των δεσμών, εκτελούν α.α.τ με την ίδια συχνότητα.
- γ) Τα σημεία A και B αποκτούν ταυτόχρονα τη μέγιστη επιτάχυνση ταλάντωσής τους.
- δ) Το σημείο A έχει μεγαλύτερη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης από ότι το σημείο B.
- ε) Από το σημείο A μεταφέρεται ενέργεια στο σημείο B.

Τάσος Τσανάβουλος

Email to:



Οι απαντήσεις:





Οι απαντήσεις:



1.α, 2.α, 3.δ, 4.δ, 5. Σ, Λ, Σ, Σ, Σ, 6. Σ, Σ, Σ, Σ, Λ



ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ

Κατά μήκος ενός ομογενούς γραμμικού ελαστικού μέσου που ταυτίζεται με τον οριζόντιο άξονα $x'Ox$

διαδίδονται ταυτόχρονα δύο κύματα. Το πρώτο περιγράφεται από την εξίσωση: $y = 4\eta\mu 2\pi(2t - \frac{x}{\lambda})$ (S.I.)

ενώ το δεύτερο έχει τα ίδια χαρακτηριστικά με το πρώτο αλλά η ταχύτητα διάδοσης του είναι αντίθετη. Λόγω της συμβολής των δύο κυμάτων δημιουργείται στάσιμο κύμα. Θεωρούμε ως αρχή O ($x=0m$) του άξονα $x'Ox$ ένα σημείο όπου σχηματίζεται κοιλία και ως $t=0s$ τη χρονική στιγμή, μετά το σχηματισμό του στάσιμου κύματος που όλα τα σημεία του βρίσκονται στη θέση ισορροπίας τους και το O έχει θετική ταχύτητα.

Έτσι στη θέση B με $x_B = 5,25m$ βρίσκεται ο τέταρτος δεσμός του θετικού ημιάξονα.

- Να βρείτε το μήκος κύματος των τρεχόντων κυμάτων που δημιούργησαν το στάσιμο κύμα και την ταχύτητα διάδοσης τους στο γραμμικό μέσο.
- Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος.
- Να υπολογίσετε την απομάκρυνση ενός σημείου A του στάσιμου κύματος με $x_A = 0,375m$ τη χρονική στιγμή $t = 0,625s$.
- Να προσδιορίσετε τις θέσεις των πλησιέστερων σημείων ως προς τη δεύτερη κοιλία του θετικού ημιάξονα των οποίων το πλάτος ταλάντωσης είναι ίσο με $4\sqrt{3}m$.
- Να βρείτε τις θέσεις των δεσμών του θετικού ημιάξονα έως το σημείο B και να σχεδιάσετε τα στιγμιότυπα του στάσιμου κύματος στο θετικό ημιάξονα τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,375s$ και $t_2 = t_1 + T/4$ όπου T η περίοδος των κυμάτων που συμβάλλοντας δημιουργούν το στάσιμο κύμα.
- Πόσο πρέπει να μεταβληθεί η συχνότητα των τρεχόντων κυμάτων ώστε να δημιουργηθεί ένας δεσμός λιγότερος μεταξύ των O και B χωρίς να μεταβληθεί η ενεργειακή τους κατάσταση;
- Να παραστήσετε γραφικά σε βαθμολογημένους άξονες τη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης των σημείων του στάσιμου κύματος σε συνάρτηση με τη συντεταγμένη x για τα σημεία του θετικού ημιάξονα.

ΛΥΣΗ

- Από τη εξίσωση του πρώτου κύματος $y = 4\eta\mu 2\pi(2t - \frac{x}{\lambda})$ έχουμε: $A = 4m$, $f = 2Hz$ και

$$T = \frac{1}{f} \text{ ή } T = 0,5s. \text{ Εφόσον στη θέση } B \text{ βρίσκεται ο τέταρτος δεσμός του στάσιμου κύματος πάνω}$$

$$\text{στο θετικό ημιάξονα, ισχύει: } x_B = \frac{\lambda}{4} + 3\frac{\lambda}{2} \text{ ή } x_B = \frac{7\lambda}{4} \text{ ή } \lambda = \frac{4x_B}{7} \text{ ή } \lambda = 3m.$$

$$\text{Από το νόμο της κυματικής παίρνουμε: } u = \lambda \cdot f \text{ ή } u = 6m/s$$

- Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι: $y = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x}{\lambda}\eta\mu 2\pi\frac{t}{T}$ ή $y = 8\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x}{3}\eta\mu 4\pi t$ (S.I.)

- Για την απομάκρυνση του σημείου A τη χρονική στιγμή $t = 0,625s$ έχουμε:

$$y_A = 8\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{0,375}{3}\eta\mu(4\pi \cdot 0,625) \text{ ή } y_A = 8\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4}\eta\mu(2,5\pi) \text{ ή } y_A = 4\sqrt{2}m$$

- Η δεύτερη κοιλία του στάσιμου κύματος βρίσκεται στη θέση: $x = \frac{\lambda}{2}$ ή $x = 1,5m$.

$$\text{Για τα ζητούμενα σημεία ισχύει: } |A'| = 4\sqrt{3} \text{ ή } 8\left|\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi x}{3}\right| = 4\sqrt{3} \text{ ή } \left|\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi x}{3}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Επομένως, } \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi x}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi x}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ή } \frac{2\pi x}{3} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \text{ με } k \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{2\pi x}{3} = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6} \text{ με } k \in \mathbb{Z}. \text{ Οι θέσεις των σημείων του στάσιμου κύματος που βρίσκονται}$$

$$\text{πλησιέστερα στη δεύτερη κοιλία πρέπει να πληρούν την ανισότητα: } \frac{\lambda}{4} < x < 3\frac{\lambda}{4} \text{ ή } 0,75m < x < 2,25m$$

Για $k = 0$ παίρνουμε:

- $\frac{2\pi x}{3} = \pm \frac{\pi}{6} \text{ ή } x = \pm 0,25m$

Όμως για τα σημεία του θετικού ημιάξονα ισχύει $x > 0$ και συνεπώς $x = 0,25m$

- $\frac{2\pi x}{3} = \pm \frac{5\pi}{6} \text{ ή } x = \pm 1,25m$

Όμως για τα σημεία του θετικού ημιάξονα ισχύει $x > 0$ και συνεπώς $x = 1,25m$

Για $k = 1$ παίρνουμε:

- $\frac{2\pi x}{3} = \frac{7\pi}{6} \text{ ή } x = 2,25m \text{ και } \frac{2\pi x}{3} = \frac{13\pi}{6} \text{ ή } x = 2,75m$

$$\bullet \quad \frac{2\pi x}{3} = \frac{11\pi}{6} \quad \text{ή} \quad x = 1,75\text{m} \quad \text{και} \quad \frac{2\pi x}{3} = \frac{17\pi}{6} \quad \text{ή} \quad x = 4,25\text{m}$$

Επομένως τα πλησιέστερα σημεία στη δεύτερη κοιλία του θετικού ημιιάξονα είναι τα: $x=1,25\text{m}$ και $x=1,75\text{m}$.

ε) Οι θέσεις των δεσμών βρίσκονται από την σχέση: $x_B = (2N + 1) \frac{\lambda}{4}$. Έτσι από το σημείο Ο μέχρι το Β θα

βρίσκονται όσοι δεσμοί ικανοποιούν την ανισοτική σχέση: $0 \leq (2N + 1) \frac{\lambda}{4} \leq x_B$ ή $0 \leq 2N + 1 \leq \frac{4x_B}{\lambda}$ ή

$$-1 \leq 2N \leq \frac{4x_B}{\lambda} - 1 \quad \text{ή} \quad -\frac{1}{2} \leq N \leq \frac{4x_B}{2\lambda} - \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad -0,5 \leq N \leq 3 \quad \text{ή} \quad N = 0, 1, 2, 3. \text{ Επομένως από το Ο έως το Β υπάρχουν}$$

4 δεσμοί συμπεριλαμβανομένου του δεσμού στο σημείο Β. Οι θέσεις των δεσμών είναι:

- $N = 0 \rightarrow x = \frac{\lambda}{4} \quad \text{ή} \quad x = 0,75\text{m}$
- $N = 1 \rightarrow x = 3 \frac{\lambda}{4} \quad \text{ή} \quad x = 2,25\text{m}$
- $N = 2 \rightarrow x = 5 \frac{\lambda}{4} \quad \text{ή} \quad x = 3,75\text{m}$
- $N = 3 \rightarrow x = 7 \frac{\lambda}{4} \quad \text{ή} \quad x = 5,25\text{m} \text{ (σημείο Β)}$

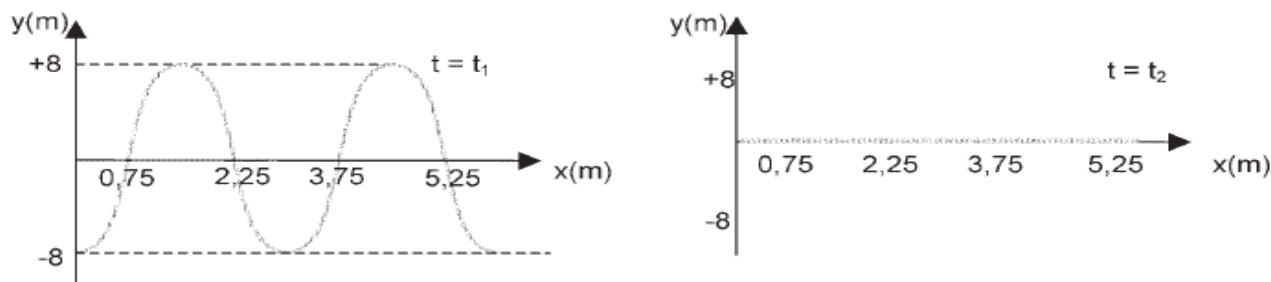
Από την εξίσωση του στάσιμου κύματος $y = 8 \sin 2\pi \frac{x}{3}$ ή $4\pi t$ για τη χρονική στιγμή $t = 0,375\text{s}$ παίρνουμε:

$$y_{\text{στ}} = 8 \sin 2\pi \frac{x}{3} \quad \text{ή} \quad y_{\text{στ}} = 8 \sin 2\pi \frac{x}{3} \quad \text{ή} \quad y_{\text{στ}} = -8 \sin 2\pi \frac{x}{3} \quad (\text{S.I.}).$$

ενώ για τη χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + T/4 = 0,5\text{s}$

$$y_{\text{στ}} = 8 \sin 2\pi \frac{x}{3} \quad \text{ή} \quad y_{\text{στ}} = 0, \text{ δηλαδή τα σημεία του στάσιμου κύματος διέρχονται από τη θέση ισορροπίας τους.}$$

Τα στιγμιότυπα του στάσιμου κύματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,375\text{s}$ και $t_2 = 0,5\text{s}$ για τα σημεία του θετικού ημιιάξονα φαίνονται στα παρακάτω σχήματα.



στ) Για να δημιουργηθούν τρεις δεσμοί μεταξύ των Ο και Β χωρίς να μεταβληθεί η ενεργειακή τους κατάσταση (δηλαδή το Ο να παραμείνει κοιλία και το Β δεσμός) πρέπει το μήκος κύματος λ' να είναι

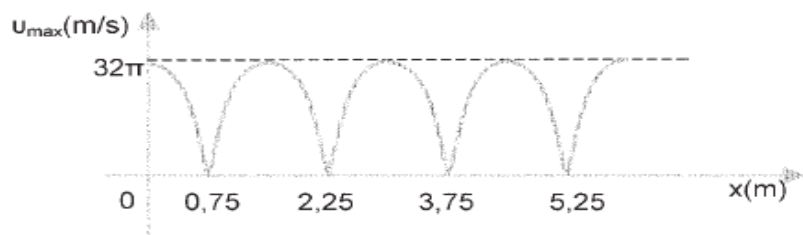
$$\text{τέτοιο ώστε } x_B = \frac{\lambda'}{4} + 2 \frac{\lambda'}{2} \quad \text{ή} \quad x_B = \frac{5\lambda'}{4} \quad \text{ή} \quad \text{η συχνότητα } f \text{ να είναι τέτοια ώστε: } x_B = \frac{5v}{4f} \quad \text{ή} \quad f = \frac{5v}{4x_B} \quad \text{ή}$$

$$f = \frac{30}{21} \text{ Hz. Επομένως η μεταβολή της συχνότητας είναι: } \Delta f = f - f \quad \text{ή} \quad \Delta f = -\frac{12}{21} \text{ Hz.}$$

ζ) Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης των σημείων του ελαστικού μέσου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$u_{\text{max}} = \omega \cdot |A'| \quad \text{ή} \quad u_{\text{max}} = 2A\omega \cdot \left| \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \right| \quad \text{ή} \quad u_{\text{max}} = 4\pi f A \cdot \left| \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \right| \quad \text{ή} \quad u_{\text{max}} = 32\pi \left| \sin \frac{2\pi x}{3} \right| \quad (\text{S.I.})$$

Η γραφική παράσταση της μέγιστης ταχύτητας ταλάντωσης των σημείων του θετικού ημιιάξονα του στάσιμου κύματος σε συνάρτηση με τη συντεταγμένη x φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ ΑΠΟ ΑΝΑΚΛΑΣΗ

Ένα στάσιμο κύμα μπορεί να δημιουργηθεί από τη συμβολή ενός κύματος (**προσπίπτον**) και του κύματος που προκύπτει από την ανάκλαση (**ανακλώμενο**) του αρχικού κύματος πάνω σε **ακλόνητο** σημείο.

Έστω αρμονικό κύμα το οποίο διαδίδεται κατά μήκος ενός σχοινιού, που έχει το ένα του άκρο ακλόνητο και το άλλο ελεύθερο. Όταν η διαταραχή φθάνει στο ακλόνητο άκρο, το σχοινί ασκεί στο ακλόνητο σημείο δύναμη με φορά προς τα πάνω. Σύμφωνα όμως με τον 3ο Νόμο του Newton το ακλόνητο σημείο ασκεί στο σχοινί αντίθετη δύναμη, δηλαδή κατακόρυφη με φορά προς τα κάτω, υπό την επίδραση της οποίας **δημιουργείται διαταραχή αντίθετη της αρχικής**, η οποία διαδίδεται από το ακλόνητο άκρο προς το ελεύθερο. Αυτό σημαίνει ότι **η ανάκλαση του κύματος σε ακλόνητο σημείο, προκαλεί μεταβολή της φάσης του κύματος κατά π rad**.

Το αποτέλεσμα της συμβολής του προσπίπτοντος και του ανακλώμενου κύματος **δεν είναι πάντοτε** η δημιουργία στάσιμου κύματος. Για να δημιουργηθεί στάσιμο, πρέπει η **συχνότητα ταλάντωσης του ελεύθερου άκρου** να είναι **ίση** με μία από τις **φυσικές ιδιοσυχνότητες** ταλάντωσης του σχοινιού. Τότε το σχοινί βρίσκεται σε **συντονισμό** με το διεγέρτη και το πλάτος ταλάντωσης στις κοιλίες είναι πολύ μεγαλύτερο από το πλάτος στο **ελεύθερο** άκρο, του οποίου η **συμπεριφορά πλησιάζει πολύ περισσότερο σε δεσμό** παρά σε κοιλία. Οι φυσικές ιδιοσυχνότητες του σχοινιού υπολογίζονται ως εξής:

Θεωρούμε χορδή μήκους l στερεωμένη στα δύο της άκρα. Για να σχηματισθεί στάσιμο στη χορδή πρέπει: $l = \kappa \frac{\lambda}{2}$, $\kappa = 1, 2, 3, \dots$. Τότε όμως:

$$\lambda = \frac{2l}{\kappa} \Rightarrow \frac{v}{f} = \frac{2l}{\kappa} \Rightarrow f = \frac{\kappa}{2l} \cdot v \Rightarrow f = \frac{\kappa}{2l} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

όπου F η τάση της χορδής και μ η μάζα ανά μονάδα μήκους.

« Οι **θέσεις των δεσμών** ως προς το άκρο του σχοινιού ($x=0$) που είναι συζευγμένο με τον ενεργειακό πομπό, **διαφοροποιούνται καθώς η συχνότητα μεταβάλλεται**. Εάν $l = k \frac{\lambda}{2}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ όπου l το μήκος του σχοινιού και λ το μήκος κύματος των κυμάτων που συμβάλλουν, τότε θα σχηματίζεται **δεσμός στο θέση $x=0$** . Καθώς η συχνότητα αυξάνεται, το μήκος κύματος μειώνεται, προκαλώντας τη μετατόπιση του δεσμού μακριά από τη θέση $x=0$. Για συχνότητα τέτοια ώστε $l = (2k+1) \frac{\lambda}{4}$, $k = 1, 2, 3, \dots$

στη **θέση $x=0$ σχηματίζεται κοιλία.**» (Απόσπασμα από τον οδηγό μελέτης για την Κυματική, των Κ. Ευταξία, Π. Σκούντζου, Πανεπιστήμιο Αθήνας 1985)

Εφαρμογή

Το ένα άκρο Η ομογενούς χορδής μήκους l συνδέεται με διεγέρτη, ο οποίος εκτελεί αρμονική ταλάντωση πλάτους A και συχνότητας f . Το άλλο άκρο Β είναι ακλόνητα στερεωμένο. Ο διεγέρτης προκαλεί εγκάρσιες ταλαντώσεις με αποτέλεσμα να διαδίδεται πάνω στη χορδή αρμονικό κύμα προς τα δεξιά, το οποίο ανακλάται στο άκρο Β. **Πάνω στη χορδή σχηματίζεται σταθερό σύστημα στάσιμων κυμάτων**. Αν το μήκος κύματος

του προσπίπτοντος και του ανακλώμενου κύματος είναι λ , να βρεθεί η εξίσωση του στάσιμου και να καθοριστούν οι θέσεις των δεσμών και των κοιλιών πάνω στη χορδή.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Θεωρούμε ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων ($x = 0$) το άκρο Η, θετική φορά προς τα δεξιά και ως αρχή μέτρησης του χρόνου ($t = 0$) τη στιγμή που αρχίζει να ταλαντώνεται εγκάρσια ο διεγέρτης. Η πηγή του προσπίπτοντος κύματος εκτελεί ΑΑΤ της μορφής: $y = A\eta\mu\omega t$.

Θεωρούμε τυχαίο σημείο Μ σε απόσταση x από το άκρο Η της χορδής. Εξαιτίας του προσπίπτοντος κύματος το σημείο Μ εκτελεί ταλάντωση της μορφής:

$$y_1 = A\eta\mu\omega(t - \frac{x}{v}) = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}).$$

Όταν το κύμα φθάνει στο άκρο Β της χορδής ανακλάται και παρουσιάζει μεταβολή της φάσης του κατά π . Συγκεκριμένα η εξίσωση ταλάντωσης του Β εξαιτίας του προσπίπτοντος κύματος είναι: $y_{1(B)} = A\eta\mu\omega(t - \frac{l}{v})$. Επειδή το Β είναι ακλόνητο, πρέπει η συνολική απομάκρυνση εξαιτίας προσπίπτοντος και ανακλώμενου κύματος να είναι συνεχώς μηδέν. Άρα:

$$y_{(B)} = y_{1(B)} + y_{2(B)} = 0 \Rightarrow y_{2(B)} = -y_{1(B)} = -A\eta\mu\omega(t - \frac{l}{v})$$

Το σημείο Μ εξαιτίας του ανακλώμενου κύματος αρχίζει να ταλαντώνεται μετά από χρόνο $\Delta t = \frac{l-x}{v}$ από τη στιγμή που το προσπίπτον κύμα έφθασε στο Β. Η εξίσωση ταλάντωσης του Μ εξαιτίας του ανακλώμενου κύματος είναι:

$$y_2 = -A\eta\mu\omega(t - \frac{l}{v} - \frac{l-x}{v}) = -A\eta\mu\omega(t - \frac{2l}{v} + \frac{x}{v}) \Rightarrow y_2 = -A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{2l}{\lambda} + \frac{x}{\lambda})$$

Η εξίσωση της συνισταμένης κίνησης του Μ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$y = y_1 + y_2 = A \left[\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) - \eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{2l}{\lambda} + \frac{x}{\lambda}) \right]$$

Με βάση την τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta = 2\eta\mu\frac{\alpha - \beta}{2} \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha + \beta}{2}$$

η πιο πάνω σχέση μετασχηματίζεται στη μορφή:

$$y = 2A\eta\mu 2\pi(\frac{l-x}{\lambda}) \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda})$$

Η σχέση αυτή για ορισμένο x , περιγράφει μια ΑΑΤ με περίοδο ίδια με την περίοδο των κυμάτων που συμβάλλουν και πλάτος:

$$|A'| = 2A \left| \eta\mu 2\pi(\frac{l-x}{\lambda}) \right| \text{ όπου: } 0 \leq |A'| \leq 2A$$

Η ταλάντωση των σημείων της χορδής με **πλάτος που εξαρτάται από τη θέση** του σημείου πάνω στη χορδή, αντιστοιχεί σε **στάσιμο** κύμα.

Οι θέσεις των σημείων της χορδής τα οποία παραμένουν ακίνητα, **δεσμοί του στάσιμου**, υπολογίζονται ως εξής:

$$A' = 0 \Rightarrow \eta\mu 2\pi \left(\frac{l - x_\delta}{\lambda} \right) = 0 = \eta\mu \kappa\pi \Rightarrow 2\pi \left(\frac{l - x_\delta}{\lambda} \right) = \kappa\pi \Rightarrow$$

$$2\pi \left(\frac{l - x_\delta}{\lambda} \right) = \kappa\pi \Rightarrow l - x_\delta = \kappa \frac{\lambda}{2} \Rightarrow x_\delta = l - \kappa \frac{\lambda}{2}, \kappa = 0, 1, 2, \dots$$

Ο πρώτος δεσμός σχηματίζεται στη θέση: $\kappa = 0 \Rightarrow x_{\delta(1)} = l$, δηλαδή ο **πρώτος δεσμός** σχηματίζεται στο **ακλόνητο σημείο B**.

Οι θέσεις των σημείων της χορδής τα οποία ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος, **κοιλίες του στάσιμου**, υπολογίζονται ως εξής:

$$|A| = 2A \Rightarrow \eta\mu 2\pi \left(\frac{l - x_\kappa}{\lambda} \right) = \pm 1 = \eta\mu (2\kappa + 1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\pi \left(\frac{l - x_\kappa}{\lambda} \right) = (2\kappa + 1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$l - x_\kappa = (2\kappa + 1) \frac{\lambda}{4} \Rightarrow x_\kappa = l - (2\kappa + 1) \frac{\lambda}{4}, \kappa = 0, 1, 2, \dots$$

Η πρώτη κοιλία σχηματίζεται στη θέση: $\kappa = 0 \Rightarrow x_{\kappa(1)} = l - \frac{\lambda}{4}$, δηλαδή **απέχει απόσταση**

$\frac{\lambda}{4}$ **από το ακλόνητο άκρο B**.

Σχόλιο

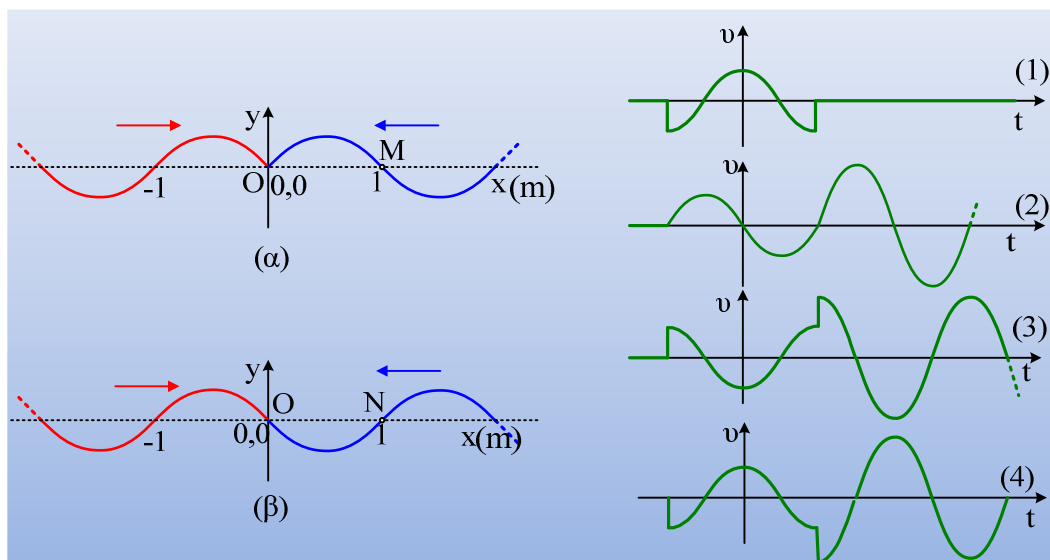
Το ακλόνητο άκρο B είναι δεσμός, ενώ το **ελεύθερο** άκρο H είναι **σχεδόν δεσμός**. Ανάμεσα στα H, B υπάρχουν σημεία που είναι σχεδόν δεσμοί αφού το πλάτος ταλάντωσης είναι πολύ μικρό. Τα σημεία αυτά δεν είναι δυνατό να είναι πραγματικοί δεσμοί, γιατί κατά μήκος της χορδής πρέπει να μεταφέρεται ενέργεια από την πηγή παραγωγής των κυμάτων.

Παραθέτω το παρακάτω απόσπασμα από τους **Halliday-Resnick**, σελίδα 490 Φυσική Μέρος Α: «Όταν υπάρχει απόσβεση η συχνότητα συντονισμού είναι σχεδόν, αλλά όχι απόλυτα ίση με μια φυσική συχνότητα του σχοινιού. Το ένα άκρο είναι δεσμός, **το άλλο σχεδόν δεσμός**. Ανάμεσα σ' αυτά υπάρχουν σημεία που είναι σχεδόν δεσμοί, σημεία στα οποία **το πλάτος είναι πολύ μικρό**. Τα σημεία αυτά δεν μπορούν να είναι πραγματικοί δεσμοί, γιατί κατά μήκος του σχοινιού και ανάμεσά τους **πρέπει να ρέει ενέργεια** από το διεγέρτη. Η κατάσταση είναι ανάλογη με τη συνθήκη συντονισμού ενός αρμονικού ταλαντωτή με αποσβέσεις. Και εκεί, η συχνότητα συντονισμού είναι σχεδόν η ίδια με τη φυσική συχνότητα του συστήματος και το πλάτος μεγάλο όχι όμως άπειρο. Αν δεν υπήρχαν απώλειες, η συχνότητα συντονισμού θα ήταν ακριβώς ίση με τη φυσική συχνότητα. Τότε το πλάτος θα αυξανόταν μέχρι το άπειρο καθώς η ενέργεια προσφέρεται περιοδικά σ' αυτό.»

Θοδωρής Παπασγουρίδης.

Στάσιμα κύματα και ταχύτητες σημείων.

Κατά μήκος δυο γραμμικών ελαστικών μέσων διαδίδονται αντίθετα δύο όμοια κύματα, τα οποία συμβάλουν δημιουργώντας στάσιμα κύματα. Στα σχήματα αριστερά δίνονται οι μορφές των μέσων μια στιγμή που θεωρούμε $t=0$.



- i) Στο (α) ελαστικό μέσον θα δημιουργηθεί στάσιμο κύμα και στις θέσεις 0,5m, 1,5m, 2,5m, θα δημιουργηθούν δεσμοί.
- ii) Στο (β) ελαστικό μέσον στα σημεία $x=0$, 1m, 2m θα δημιουργηθούν δεσμοί.
- iii) Στα δεξιά σχήματα έχουμε σχεδιάσει την ταχύτητα ταλάντωσης δύο σημείων M και N των δύο ελαστικών μέσων τα οποία βρίσκονται στις θέσεις $x=1$ m. Ποια καμπύλη αντιστοιχεί σε κάθε σημείο;

Να χαρακτηρίστε ως σωστές ή λανθασμένες τις δύο πρώτες προτάσεις και να κάνετε την αντιστοίχιση για την iii) δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

Απάντηση:

- i) Στο ελαστικό μέσο (α), τα δύο κύματα συμβάλουν στη θέση $x=0$, σε φάση. Το σημείο O εξαιτίας και των δύο κυμάτων, θα ξεκινήσει την ταλάντωσή του από τη θέση ισορροπίας, κινούμενο προς τα πάνω (θετική κατεύθυνση). Συνεπώς στο σημείο αυτό θα έχουμε ενίσχυση και το πλάτος ταλάντωσης θα είναι $2A$, ή με άλλα λόγια στο σημείο αυτό θα δημιουργηθεί κοιλία. Αλλά τότε ο πρώτος δεσμός, προς τα δεξιά, θα δημιουργηθεί σε απόσταση $\lambda/4=0,5$ m, όπου $\lambda=2$ m το μήκος των δύο τρεχόντων κυμάτων, τα οποία συμβάλουν.
Ο επόμενος δεσμός θα απέχει κατά $\lambda/2=1$ m από τον προηγούμενο, συνεπώς δεσμούς θα έχουμε στις θέσεις 0,5m, 1,5m, 2,5m... (προφανώς θα δημιουργηθούν και άλλοι δεσμοί και στα αριστερά του O). Η πρόταση λοιπόν είναι σωστή.
- ii) Στο ελαστικό μέσον (β) τα δύο κύματα συμβάλουν σε αντίθεση φάσης. Εξαιτίας του κύματος προς τα δεξιά το σημείο O, τείνει να κινηθεί προς τα πάνω, αλλά εξαιτίας του (β) προς τα κάτω. Συνεπώς το

σημείο O θα παραμείνει ακίνητο, με αποτέλεσμα στο σημείο αυτό να δημιουργηθεί δεσμός. Αλλά αφού η απόσταση μεταξύ δύο δεσμών είναι ίση με $\lambda/2=1\text{m}$, προφανώς θα σχηματισθούν δεσμοί στις θέσεις $x=0, 1\text{m}, 2\text{m}, \dots$

Και αυτή η πρόταση είναι σωστή.

- iii) Στα σημεία M και N το κύμα προς τα αριστερά, φτάνει κάποια στιγμή, πριν φτάσει στο O, οπότε τα σημεία αυτά αρχίζουν την ταλάντωσή τους, κάποια στιγμή πριν τη στιγμή $t=0$. Εξάλλου το σημείο M θα ξεκινήσει την ταλάντωσή του κινούμενο με μέγιστη ταχύτητα με κατεύθυνση προς τα πάνω, ενώ το N προς τα κάτω (αρνητική κατεύθυνση). Εξάλλου μετά τη συμβολή στο σημείο M θα δημιουργηθεί κοιλία, ενώ στο N δεσμός. Με βάση αυτά οι αντιστοιχίες είναι:

$$(\alpha) \rightarrow (3) \text{ και } (\beta) \rightarrow (1).$$

dmargaris@sch.gr

Στάσιμο κύμα από ανάκλαση. Στιγμιότυπο.

Μια οριζόντια τεντωμένη χορδή OK μήκους $L=6\text{m}$ έχει σταθερό το άκρο της K. Το άκρο O τίθεται σε κατακόρυφη ταλάντωση της μορφής $y=0,1\cdot\eta\mu 2\pi t$ (S.I.), οπότε δημιουργείται ένα κύμα κατά μήκος της χορδής, το οποίο χρειάζεται χρόνο 3s για να φτάσει και να ανακλασθεί στο άκρο K. Η διάδοση του κύματος πραγματοποιείται χωρίς αποσβέσεις. Ένα σημείο M απέχει $x=4,5\text{m}$ από το άκρο O.

i) Να βρεθεί η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου M τις χρονικές στιγμές:

$$\alpha) t_1=2\text{s}, \quad \beta) t_2=2,75\text{s} \text{ και} \quad \gamma) t_3=4,75\text{s}.$$

ii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της απομάκρυνσης των διαφόρων σημείων της χορδής σε συνάρτηση με την απόσταση x από το άκρο O, τη χρονική στιγμή $t_3=5\text{s}$.

Απάντηση:

i) Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι $v=\frac{L}{t}=\frac{6\text{m}}{3\text{s}}=2\text{m/s}$ ενώ η περίοδος τα-

λάντωσης της πηγής είναι $T=2\pi/\omega=1\text{s}$. Αλλά $v=\lambda/T \rightarrow \lambda=v/T=2\text{m}$.

Έτσι η εξίσωση του κύματος που διαδίδεται προς τα δεξιά είναι:

$$y_1 = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{x}{2} \right) \text{ (μονάδες στο S.I.)} \quad (1)$$

Ενώ το κύμα προς τα αριστερά έχει εξίσωση

$$y_2 = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{2L}{\lambda} + \frac{x}{\lambda} \right)$$

Δες της προηγούμενη ανάρτηση: **ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ ΑΠΟ ΑΝΑΚΛΑΣΗ.**

Και η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι:

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu(6\pi - \pi x) \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi t - 6\pi) \quad (2)$$

Έτσι για το σημείο M:

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu(6\pi - 4,5\pi) \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi t - 6\pi) \rightarrow$$

$$y = -0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi t - 6\pi) = -0,2\eta\mu(2\pi t - 6\pi + \pi/2) \text{ ή}$$

$$y = 0,2\eta\mu(2\pi t - 5,5\pi) \quad (3)$$

Το κύμα προς τα δεξιά για να φτάσει στο σημείο M απαιτείται χρόνος

$$t' = \frac{x}{v} = \frac{4,5}{2}\text{s} = 2,25\text{s}$$

Ενώ το κύμα προς τα αριστερά θα φτάσει την χρονική στιγμή $t'' = \frac{d}{v} = \frac{2L - x}{v} = 3,75\text{s}$

Έτσι για $t_1=2\text{s}$ δεν έχει φτάσει ακόμη το κύμα στο Μ το οποίο δεν έχει αρχίσει την ταλάντωσή του και $v=0$.

Τη χρονική στιγμή $t_2=2,75\text{s}$ έχει φτάσει το κύμα που διαδίδεται προς τα δεξιά ενώ η απομάκρυνση της ταλάντωσης θα υπακούει στην εξίσωση (1):

$$y_1 = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi(t - \frac{x}{2}) = 0,1 \cdot \eta\mu(2\pi t - \pi x) = 0,1 \cdot \eta\mu(2\pi t - 4,5\pi)$$

Οπότε η ταχύτητα ταλάντωσης θα είναι:

$$v_1 = A\omega \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi t - 4,5\pi) = 0,1 \cdot 2\pi \sigma\upsilon\nu(5,5\pi - 4,5\pi) = -0,2 \cdot \pi \text{ m/s.}$$

Τη στιγμή $t_2=4,75\text{s}$ με ισχύει η εξίσωση (3) και για την ταχύτητα ταλάντωσης έχουμε:

$$v_2 = A \cdot \omega \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi t - 5,5\pi) = 0,2 \cdot 2\pi \cdot \sigma\upsilon\nu(9,5\pi - 5,5\pi) = 0,4 \cdot \pi \text{ m/s.}$$

- ii) Για $t=5\text{s}$ το κύμα από ανάκλαση δεν έχει φτάσει ακόμη στο άκρο Ο, αφού για να φτάσει το κύμα στο άκρο Κ πέρασε χρόνος $t_4=L/v=3\text{s}$ και στα επόμενα 2s διένυσε προς τα αριστερά απόσταση $d=v \cdot \Delta t=4\text{m}$ φτάνοντας στη θέση $x=2\text{m}$. Με άλλα λόγια τη στιγμή $t=5\text{s}$ στην περιοχή από $0-2\text{m}$ υπάρχει μόνο το κύμα που διαδίδεται προς τα δεξιά και η συνάρτηση που περιγράφει το στιγμιότυπο προκύπτει από την σχέση (1):

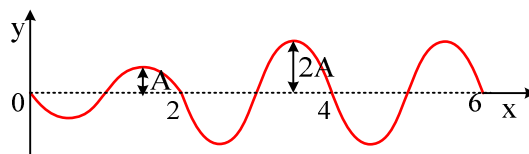
$$y_1 = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi(t - \frac{x}{2}) = 0,1 \cdot \eta\mu(10\pi - \pi x) = -0,1 \cdot \eta\mu \pi x$$

Ενώ από $2\text{m}-6\text{m}$ έχει δημιουργηθεί στάσιμο και η αντίστοιχη συνάρτηση είναι:

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu(6\pi - \pi x) \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi t - 6\pi) \rightarrow$$

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu(-\pi x) \cdot \sigma\upsilon\nu(10\pi - 6\pi) = -0,2 \eta\mu \pi x$$

Οπότε το διάγραμμα φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ ΑΠΟ ΑΝΑΚΛΑΣΗ

Ένα στάσιμο κύμα μπορεί να δημιουργηθεί από τη συμβολή ενός κύματος (**προσπίπτον**) και του κύματος που προκύπτει από την ανάκλαση (**ανακλώμενο**) του αρχικού κύματος πάνω σε **ακλόνητο** σημείο.

Έστω αρμονικό κύμα το οποίο διαδίδεται κατά μήκος ενός σχοινιού, που έχει το ένα του άκρο ακλόνητο και το άλλο ελεύθερο. Όταν η διαταραχή φθάνει στο ακλόνητο άκρο, το σχοινί ασκεί στο ακλόνητο σημείο δύναμη με φορά προς τα πάνω. Σύμφωνα όμως με τον 3ο Νόμο του Newton το ακλόνητο σημείο ασκεί στο σχοινί αντίθετη δύναμη, δηλαδή κατακόρυφη με φορά προς τα κάτω, υπό την επίδραση της οποίας **δημιουργείται διαταραχή αντίθετη της αρχικής**, η οποία διαδίδεται από το ακλόνητο άκρο προς το ελεύθερο. Αυτό σημαίνει ότι **η ανάκλαση του κύματος σε ακλόνητο σημείο, προκαλεί μεταβολή της φάσης του κύματος κατά $\pi \text{ rad}$** .

Το αποτέλεσμα της συμβολής του προσπίπτοντος και του ανακλώμενου κύματος **δεν είναι πάντοτε** η δημιουργία στάσιμου κύματος. Για να δημιουργηθεί στάσιμο, πρέπει η **συχνότητα ταλάντωσης του ελεύθερου άκρου να είναι ίση** με μία από τις **φυσικές ιδιοσυχνότητες** ταλάντωσης του σχοινιού. Τότε το σχοινί βρίσκεται σε **συντονισμό** με το διεγέρτη και το πλάτος ταλάντωσης στις κοιλίες είναι πολύ μεγαλύτερο από το πλάτος στο **ελεύθερο** άκρο, του οποίου η **συμπεριφορά πλησιάζει πολύ περισσότερο σε δεσμό** παρά σε κοιλία. Οι φυσικές ιδιοσυχνότητες του σχοινιού υπολογίζονται ως εξής:

Θεωρούμε χορδή μήκους l στερεωμένη στα δύο της άκρα. Για να σχηματισθεί στάσιμο στη χορδή πρέπει: $l = \kappa \frac{\lambda}{2}, \kappa = 1, 2, 3, \dots$. Τότε όμως:

$$\lambda = \frac{2l}{\kappa} \Rightarrow \frac{v}{f} = \frac{2l}{\kappa} \Rightarrow f = \frac{\kappa}{2l} \cdot v \Rightarrow f = \frac{\kappa}{2l} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

όπου F η τάση της χορδής και μ η μάζα ανά μονάδα μήκους.

« Οι **θέσεις των δεσμών** ως προς το άκρο του σχοινιού ($x=0$) που είναι συζευγμένο με τον ενεργειακό πομπό, **διαφοροποιούνται καθώς η συχνότητα μεταβάλλεται**. Εάν $l = k \frac{\lambda}{2}, k = 1, 2, 3, \dots$ όπου l το μήκος του σχοινιού και λ το μήκος κύματος των κυμάτων που συμβάλλουν, τότε θα σχηματίζεται **δεσμός στο θέση $x=0$** . Καθώς η συχνότητα αυξάνεται, το μήκος κύματος μειώνεται, προκαλώντας τη μετατόπιση του δεσμού μακριά από τη θέση $x=0$. Για συχνότητα τέτοια ώστε $l = (2k+1) \frac{\lambda}{4}, k = 1, 2, 3, \dots$

στη **θέση $x=0$ σχηματίζεται κοιλία.**» (Απόσπασμα από τον οδηγό μελέτης για την Κυματική, των Κ. Ευταξία, Π. Σκούντζου, Πανεπιστήμιο Αθήνας 1985)

Εφαρμογή

Το ένα άκρο Η ομογενούς χορδής μήκους l συνδέεται με διεγέρτη, ο οποίος εκτελεί αρμονική ταλάντωση πλάτους A και συχνότητας f . Το άλλο άκρο Β είναι ακλόνητα στερεωμένο. Ο διεγέρτης προκαλεί εγκάρσιες ταλαντώσεις με αποτέλεσμα να διαδίδεται πάνω στη χορδή αρμονικό κύμα προς τα δεξιά, το οποίο ανακλάται στο άκρο Β. **Πάνω στη χορδή σχηματίζεται σταθερό σύστημα στάσιμων κυμάτων**. Αν το μήκος κύματος

του προσπίπτοντος και του ανακλώμενου κύματος είναι λ , να βρεθεί η εξίσωση του στάσιμου και να καθοριστούν οι θέσεις των δεσμών και των κοιλιών πάνω στη χορδή.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Θεωρούμε ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων ($x = 0$) το άκρο Η, θετική φορά προς τα δεξιά και ως αρχή μέτρησης του χρόνου ($t = 0$) τη στιγμή που αρχίζει να ταλαντώνεται εγκάρσια ο διεγέρτης. Η πηγή του προσπίπτοντος κύματος εκτελεί ΑΑΤ της μορφής: $y = A\eta\mu\omega t$.

Θεωρούμε τυχαίο σημείο Μ σε απόσταση x από το άκρο Η της χορδής. Εξαιτίας του προσπίπτοντος κύματος το σημείο Μ εκτελεί ταλάντωση της μορφής:

$$y_1 = A\eta\mu\omega(t - \frac{x}{v}) = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}).$$

Όταν το κύμα φθάνει στο άκρο Β της χορδής ανακλάται και παρουσιάζει μεταβολή της φάσης του κατά π . Συγκεκριμένα η εξίσωση ταλάντωσης του Β εξαιτίας του προσπίπτοντος κύματος είναι: $y_{1(B)} = A\eta\mu\omega(t - \frac{l}{v})$. Επειδή το Β είναι ακλόνητο, πρέπει η συνολική απομάκρυνση εξαιτίας προσπίπτοντος και ανακλώμενου κύματος να είναι συνεχώς μηδέν. Άρα:

$$y_{(B)} = y_{1(B)} + y_{2(B)} = 0 \Rightarrow y_{2(B)} = -y_{1(B)} = -A\eta\mu\omega(t - \frac{l}{v})$$

Το σημείο Μ εξαιτίας του ανακλώμενου κύματος αρχίζει να ταλαντώνεται μετά από χρόνο $\Delta t = \frac{l-x}{v}$ από τη στιγμή που το προσπίπτον κύμα έφθασε στο Β. Η εξίσωση ταλάντωσης του Μ εξαιτίας του ανακλώμενου κύματος είναι:

$$y_2 = -A\eta\mu\omega(t - \frac{l}{v} - \frac{l-x}{v}) = -A\eta\mu\omega(t - \frac{2l}{v} + \frac{x}{v}) \Rightarrow y_2 = -A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{2l}{\lambda} + \frac{x}{\lambda})$$

Η εξίσωση της συνισταμένης κίνησης του Μ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$y = y_1 + y_2 = A \left[\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) - \eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{2l}{\lambda} + \frac{x}{\lambda}) \right]$$

Με βάση την τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta = 2\eta\mu\frac{\alpha - \beta}{2} \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha + \beta}{2}$$

η πιο πάνω σχέση μετασχηματίζεται στη μορφή:

$$y = 2A\eta\mu 2\pi(\frac{l-x}{\lambda}) \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda})$$

Η σχέση αυτή για ορισμένο x , περιγράφει μια ΑΑΤ με περίοδο ίδια με την περίοδο των κυμάτων που συμβάλλουν και πλάτος:

$$|A'| = 2A \left| \eta\mu 2\pi(\frac{l-x}{\lambda}) \right| \text{ όπου: } 0 \leq |A'| \leq 2A$$

Η ταλάντωση των σημείων της χορδής με **πλάτος που εξαρτάται από τη θέση** του σημείου πάνω στη χορδή, αντιστοιχεί σε **στάσιμο** κύμα.

Οι θέσεις των σημείων της χορδής τα οποία παραμένουν ακίνητα, **δεσμοί του στάσιμου**, υπολογίζονται ως εξής:

$$A' = 0 \Rightarrow \eta\mu 2\pi\left(\frac{l-x_\delta}{\lambda}\right) = 0 = \eta\mu\kappa\pi \Rightarrow 2\pi\left(\frac{l-x_\delta}{\lambda}\right) = \kappa\pi \Rightarrow$$

$$2\pi\left(\frac{l-x_\delta}{\lambda}\right) = \kappa\pi \Rightarrow l-x_\delta = \kappa\frac{\lambda}{2} \Rightarrow x_\delta = l - \kappa\frac{\lambda}{2}, \kappa = 0, 1, 2, \dots$$

Ο πρώτος δεσμός σχηματίζεται στη θέση: $\kappa = 0 \Rightarrow x_{\delta(1)} = l$, δηλαδή ο **πρώτος δεσμός** σχηματίζεται στο **ακλόνητο σημείο B**.

Οι θέσεις των σημείων της χορδής τα οποία ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος, **κοιλίες του στάσιμου**, υπολογίζονται ως εξής:

$$|A| = 2A \Rightarrow \eta\mu 2\pi\left(\frac{l-x_\kappa}{\lambda}\right) = \pm 1 = \eta\mu(2\kappa+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\pi\left(\frac{l-x_\kappa}{\lambda}\right) = (2\kappa+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$l-x_\kappa = (2\kappa+1)\frac{\lambda}{4} \Rightarrow x_\kappa = l - (2\kappa+1)\frac{\lambda}{4}, \kappa = 0, 1, 2, \dots$$

Η πρώτη κοιλία σχηματίζεται στη θέση: $\kappa = 0 \Rightarrow x_{\kappa(1)} = l - \frac{\lambda}{4}$, δηλαδή **απέχει απόσταση**

$\frac{\lambda}{4}$ **από το ακλόνητο άκρο B**.

Σχόλιο

Το ακλόνητο άκρο B είναι δεσμός, ενώ το **ελεύθερο** άκρο H είναι **σχεδόν δεσμός**. Ανάμεσα στα H, B υπάρχουν σημεία που είναι σχεδόν δεσμοί αφού το πλάτος ταλάντωσης είναι πολύ μικρό. Τα σημεία αυτά δεν είναι δυνατό να είναι πραγματικοί δεσμοί, γιατί κατά μήκος της χορδής πρέπει να μεταφέρεται ενέργεια από την πηγή παραγωγής των κυμάτων.

Παραθέτω το παρακάτω απόσπασμα από τους **Halliday-Resnick**, σελίδα 490 Φυσική Μέρος Α: «Όταν υπάρχει απόσβεση η συχνότητα συντονισμού είναι σχεδόν, αλλά όχι απόλυτα ίση με μια φυσική συχνότητα του σχοινιού. Το ένα άκρο είναι δεσμός, **το άλλο σχεδόν δεσμός**. Ανάμεσα σ' αυτά υπάρχουν σημεία που είναι σχεδόν δεσμοί, σημεία στα οποία **το πλάτος είναι πολύ μικρό**. Τα σημεία αυτά δεν μπορούν να είναι πραγματικοί δεσμοί, γιατί κατά μήκος του σχοινιού και ανάμεσά τους **πρέπει να ρέει ενέργεια** από το διεγέρτη. Η κατάσταση είναι ανάλογη με τη συνθήκη συντονισμού ενός αρμονικού ταλαντωτή με αποσβέσεις. Και εκεί, η συχνότητα συντονισμού είναι σχεδόν η ίδια με τη φυσική συχνότητα του συστήματος και το πλάτος μεγάλο όχι όμως άπειρο. Αν δεν υπήρχαν απώλειες, η συχνότητα συντονισμού θα ήταν ακριβώς ίση με τη φυσική συχνότητα. Τότε το πλάτος θα αυξανόταν μέχρι το άπειρο καθώς η ενέργεια προσφέρεται περιοδικά σ' αυτό.»

Θοδωρής Παπασγουρίδης.

ΣΤΑΣΙΜΟ ΚΥΜΑ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΑ ΦΑΣΗΣ

Πώς βρίσκουμε τη διαφορά φάσης δύο σημείων της χορδής, πάνω στην οποία έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα.

Γενικά δύο σημεία του μέσου έχουν διαφορά φάσης $\Delta\phi = 0$ ή $\Delta\phi = \pi$.

- 1) Αν δύο σημεία βρίσκονται μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών, έχουν την ίδια φάση ($\Delta\phi = 0$) ενώ αν βρίσκονται εκατέρωθεν ενός δεσμού, τότε έχουν διαφορά φάσης π ($\Delta\phi = \pi$).
- 2) Γενικότερα για δύο **τυχαία** σημεία της χορδής, μπορούμε να βρούμε τη διαφορά φάσης ως εξής:.

Ελέγχουμε το πρόσημο του γινομένου $y_1 \cdot y_2$.

Αν $y_1 y_2 > 0$, διαφορά φάσης ($\Delta\phi = 0$), αφού τα σημεία έχουν σε κάθε στιγμή ομόσημες απομακρύνσεις.

Αν $y_1 y_2 < 0$, διαφορά φάσης π ($\Delta\phi = \pi$), αφού τα σημεία έχουν σε κάθε στιγμή ετερόσημες απομακρύνσεις.

Παράδειγμα:

Κατα μήκος μιας χορδής δημιουργείται στάσιμο κύμα που περιγράφεται από την εξίσωση:

$$y = 4\sigma\sigma\nu \frac{\pi x}{5} \eta\mu 20\pi t \quad (x, y \text{ σε cm και } t \text{ σε s}).$$

Να βρείτε τη διαφορά φάσης των σημείων Α και Β που απέχουν από το άκρο της χορδής ($x = 0$) αποστάσεις: $x_A = 3 \text{ cm}$ και $x_B = 24 \text{ cm}$.

Λύση:

$$y_A \cdot y_B =$$

$$\begin{aligned} & 4\sigma\sigma\nu \frac{3\pi}{5} \eta\mu 20\pi t \cdot 4\sigma\sigma\nu \frac{24\pi}{5} \eta\mu 20\pi t = \\ & = 16\eta\mu^2 20\pi t \cdot \sigma\sigma\nu \frac{3\pi}{5} \sigma\sigma\nu \left(4\pi + \frac{4\pi}{5} \right) = \\ & = 16\eta\mu^2 20\pi t \cdot \sigma\sigma\nu \frac{3\pi}{5} \sigma\sigma\nu \frac{4\pi}{5} > 0 \end{aligned}$$

αφού $\sigma\sigma\nu \frac{3\pi}{5} < 0$ και $\sigma\sigma\nu \frac{4\pi}{5} < 0$ και έτσι τα σημεία έχουν συνεχώς ομόσημες απομακρύνσεις δηλαδή $\Delta\phi = 0$

ΣΤΑΣΙΜΟ ΚΥΜΑ - ΣΥΜΒΟΛΗ ΚΥΜΑΤΩΝ

Γνωρίζουμε ότι το **στάσιμο κύμα** είναι το **αποτέλεσμα της συμβολής** δύο κυμάτων της ίδιας συχνότητας και του ίδιου πλάτους, τα οποία διαδίδονται στο ίδιο μέσο με **αντίθετες** κατευθύνσεις (δηλαδή στην ίδια διεύθυνση αλλά με αντίθετη φορά). Προφανώς στάσιμο κύμα μπορεί να δημιουργηθεί στην ευθεία που ορίζεται από δύο σύγχρονες πηγές, **στο διάστημα μεταξύ των πηγών**.

Ας αντιμετωπίσουμε λοιπόν το παρακάτω πρόβλημα με βάση όσα γνωρίζουμε για το στάσιμο κύμα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δύο εγκάρσια κύματα με ίδιο μήκος κύματος $\lambda = 4\text{cm}$, ίδια συχνότητα και ίδιο πλάτος, διαδίδονται κατά μήκος του άξονα $x'x$ με αντίθετη φορά και συμβάλλουν. Τα κύματα ξεκίνησαν ταυτόχρονα από δύο πηγές Π_1, Π_2 ίδιας φάσης, οι οποίες απέχουν μεταξύ τους $d = 16\text{cm}$. Θεωρούμε ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων το σημείο O , μέσο της απόστασης των δύο πηγών και ως αρχή μέτρησης του χρόνου ($t = 0$) τη στιγμή που τα κύματα συναντώνται στο σημείο O ($y = 0, v > 0$). Ποιος ο αριθμός των δεσμών και των κοιλιών του στάσιμου κύματος που προκύπτει από τη συμβολή, στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τις δύο πηγές;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Οι θέσεις των κοιλιών ως προς την αρχή μέτρησης των αποστάσεων, δηλαδή το σημείο O , δίνονται από τη σχέση: $x_k = k \frac{\lambda}{2} = 2k$ όπου $k \in \mathbb{Z}$.

Πρέπει όμως:

$$-8 \leq x_k \leq 8 \Rightarrow -8 \leq 2k \leq 8 \Rightarrow -4 \leq k \leq 4 \Rightarrow k = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$$

Δηλαδή δημιουργούνται 9 κοιλίες στις θέσεις:

$$-8\text{cm}, -6\text{cm}, -4\text{cm}, -2\text{cm}, 0, 2\text{cm}, 4\text{cm}, 6\text{cm}, 8\text{cm}.$$

Οι θέσεις των δεσμών αντίστοιχα δίνονται από τη σχέση: $x_\delta = (2k+1) \frac{\lambda}{4} = 2k+1$

όπου $k \in \mathbb{Z}$. Πρέπει όμως:

$$-8 \leq x_\delta \leq 8 \Rightarrow -8 \leq 2k+1 \leq 8 \Rightarrow -9 \leq 2k \leq 7 \Rightarrow -4,5 \leq k \leq 3,5 \Rightarrow$$

$$k = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

Δηλαδή δημιουργούνται 8 δεσμοί στις θέσεις:

$$-7\text{cm}, -5\text{cm}, -3\text{cm}, -1\text{cm}, 1\text{cm}, 3\text{cm}, 5\text{cm}, 7\text{cm}$$

Ας αντιμετωπίσουμε τώρα το ίδιο πρόβλημα με βάση όσα γνωρίζουμε για τη συμβολή κυμάτων από σύγχρονες πηγές.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα με μήκος κύματος $\lambda = 4\text{cm}$, παράγονται από δύο πηγές Π_1, Π_2 που βρίσκονται σε φάση και απέχουν μεταξύ τους $d = 16\text{cm}$. Πόσα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος Π_1, Π_2 μένουν συνεχώς ακίνητα και πόσα εκτελούν ταλάντωση μέγιστου πλάτους;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έστω ένα σημείο Μ του ευθύγραμμου τμήματος Π_1, Π_2 που εκτελεί ταλάντωση μέγιστου πλάτους. Για το σημείο αυτό ισχύει ότι: $r_1 - r_2 = k\lambda = 4k$ όπου $k \in \mathbb{Z}$. Επίσης: $r_1 + r_2 = d$. Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$2r_1 = d + k\lambda \Rightarrow r_1 = \frac{d}{2} + k\frac{\lambda}{2} \Rightarrow r_1 = 8 + 2k \quad \text{όπου } k \in \mathbb{Z}.$$

Όμως:

$$0 \leq r_1 \leq d \Rightarrow 0 \leq 8 + 2k \leq 16 \Rightarrow -8 \leq 2k \leq 8 \Rightarrow -4 \leq k \leq 4 \Rightarrow k = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$$

Άρα υπάρχουν 9 σημεία που εκτελούν ταλάντωση μέγιστου πλάτους σε αποστάσεις από την πηγή Π_1 : $r_1 = 0, 2\text{cm}, 4\text{cm}, 6\text{cm}, 8\text{cm}, 10\text{cm}, 12\text{cm}, 14\text{cm}, 16\text{cm}$

Έστω ένα σημείο Η του ευθύγραμμου τμήματος Π_1, Π_2 που παραμένει συνεχώς ακίνητο. Για το σημείο αυτό ισχύει ότι: $r_1 - r_2 = (2k+1)\frac{\lambda}{2} = (2k+1) \cdot 2$ όπου $k \in \mathbb{Z}$.

Επίσης: $r_1 + r_2 = d$. Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$2r_1 = d + (2k+1) \cdot 2 \Rightarrow r_1 = 8 + 2k + 1 \Rightarrow r_1 = 9 + 2k \quad \text{όπου } k \in \mathbb{Z}.$$

Όμως:

$$0 \leq r_1 \leq d \Rightarrow 0 \leq 9 + 2k \leq 16 \Rightarrow -9 \leq 2k \leq 7 \Rightarrow -4,5 \leq k \leq 3,5 \Rightarrow k = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

Άρα υπάρχουν 8 σημεία που παραμένουν συνεχώς ακίνητα σε αποστάσεις από την πηγή Π_1 : $r_1 = 1\text{cm}, 3\text{cm}, 5\text{cm}, 7\text{cm}, 9\text{cm}, 11\text{cm}, 13\text{cm}, 15\text{cm}$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

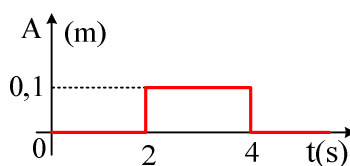
Είτε δουλέψουμε με βάση το στάσιμο, είτε με βάση τη συμβολή κυμάτων καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.

Μπαίνω στον πειρασμό να ρωτήσω: Αν στις πανελλαδικές ένας μαθητής αντιμετωπίσει το πρόβλημα που ζητάει αριθμό και θέσεις των δεσμών και των κοιλιών του στάσιμου, ως πρόβλημα συμβολής και προσδιορίσει αριθμό και θέσεις των υπερβολών ακυρωτικής και ενισχυτικής συμβολής στο διάστημα μεταξύ των

πηγών, κινδυνεύει να μη βαθμολογηθεί αφού δεν ακολούθησε την προτεινόμενη λύση από την ΚΕΓΕ, με το ίδιο σκεπτικό που δεν συνίσταται να χρησιμοποιεί περιστρεφόμενα διανύσματα στις ταλαντώσεις;

Θοδωρής Παπασγουρίδης

Στάσιμο κύμα πάνω σε νήμα.



Ένα τεντωμένο οριζόντιο νήμα ΟΓ έχει δεμένο σε σταθερό σημείο το άκρο Γ. Για $t=0$ το άκρο Ο τίθεται σε κατακόρυφη ΑΑΤ, με εξίσωση $y=A\eta\mu 2\pi t$, οπότε κατά μήκος του νήματος διαδίδεται ένα εγκάρσιο κύμα με $\lambda=2\text{m}$. Η γραφική παράσταση του πλάτους ταλάντωσης ενός σημείου Μ του νήματος δίνεται στο παραπάνω διάγραμμα, ενώ το άκρο Ο συνεχίζει να ταλαντώνεται και μετά από τη στιγμή $t=4\text{s}$.

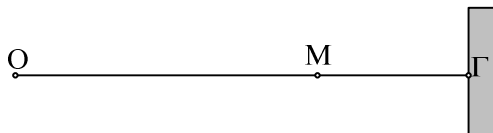
- Πόσο απέχει το Μ από το άκρο Ο και πόσο είναι το μήκος του νήματος;
- Ένα σημείο Ν είναι δεξιότερα του Μ σε απόσταση $(MN)=0,5\text{m}$. Να κάνετε τη γραφική παράσταση του πλάτους ταλάντωσης του σημείου Ν σε συνάρτηση με το χρόνο.
- Να γίνει το διάγραμμα της απομάκρυνσης του άκρου Ο σε συνάρτηση με το χρόνο.

Απάντηση:

- Αφού $\omega=2\pi$, $f=1\text{Hz}$ και η ταχύτητα του κύματος είναι $v=\lambda \cdot f=2\text{m/s}$.

Με βάση το διάγραμμα το κύμα για να φτάσει στο σημείο Μ χρειάζεται χρόνο $t_1=2\text{s}$, συνεπώς το σημείο βρίσκεται σε απόσταση $d=vt=2 \cdot 2\text{m}=4\text{m}$ από το άκρο Ο.

Το σημείο Μ ταλαντώνεται μέχρι την χρονική στιγμή $t_2=4\text{s}$ με πλάτος A , γιατί μετά το πλάτος ταλάντωσης μηδενίζεται. Γιατί; Το άκρο Ο ταλαντώνεται και μετά τη στιγμή $t=4\text{s}$, άρα προφανώς το κύμα από αριστερά προς τα δεξιά συνεχίζει να διαδίδεται. Απλά το κύμα ανακλάστηκε στο άκρο Γ και μετά από την συμβολή προέκυψε στάσιμο κύμα, όπου στο Μ έχουμε δεσμό.

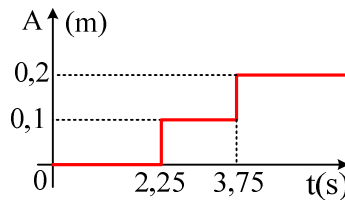


Συνεπώς το κύμα για να πάει από το Μ στο Γ και να επιστρέψει θα χρειαστεί χρόνο $\Delta t=4\text{s}-2\text{s}=2\text{s}$, διανύοντας απόσταση $s=v \cdot \Delta t = 4\text{m}$. Άρα η απόσταση $(M\Gamma)=2\text{m}$ και το μήκος του νήματος είναι $4\text{m}+2\text{m}=6\text{m}$.

- Το σημείο Ν απέχει κατά $0,5\text{m}=\lambda/4$ από έναν δεσμό, συνεπώς αντιστοιχεί σε

κοιλία του στάσιμου κύματος. Το κύμα προς τα δεξιά για να φτάσει στο Ν θα χρειαστεί χρόνο $t_3 = x/v = 4,5/2 = 2,25\text{s}$, ενώ συμβολή θα έχουμε στο Ν μετά από χρονικό διάστημα $\Delta t_3 = d/v = 2 \cdot 1,5/2 = 1,5\text{s}$. Δηλαδή δημιουργείται κοιλία στο Ν την χρονική στιγμή $t_4 = t_3 + \Delta t_3 = 2,25 + 1,5 = 3,75\text{s}$.

Συνεπώς η γραφική παράσταση του πλάτους ταλάντωσης του Ν είναι η του παρακάτω σχήματος.



- iii) Το κύμα μετά από ανάκλαση φτάνει στο άκρο Ο τη χρονική στιγμή $t_5 = s/v = 2L/v = 2 \cdot 6/2 = 6\text{s}$.

Μετά από την συμβολή το άκρο Ο παραμένει ακίνητο. Γιατί; Στο άκρο Γ δημιουργείτε δεσμός. Η απόσταση μεταξύ δύο δεσμών είναι ίση με $\lambda/2 = 1\text{m}$, συνεπώς οι αποστάσεις των δεσμών από το άκρο Γ είναι:

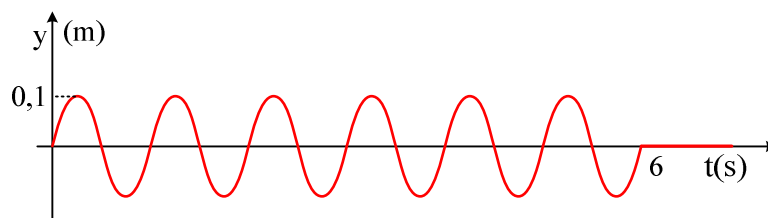
$$0\text{m}, 1\text{m}, 2\text{m}, 3\text{m}, 4\text{m}, 5\text{m}, 6\text{m}.$$

Δηλαδή και στο άκρο Ο έχουμε δεσμό.

Έτσι η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Ο σε συνάρτηση με το χρόνο είναι:

$$y = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi t$$

μέχρι $t_5 = 6\text{s}$ γιατί μετά το σημείο παραμένει ακίνητο (δεσμός).





ΕΝΑΣ ΚΥΜΑΤΙΚΟΣ ΠΛΗΜΟΣ ...

Το άκρο Ο ενός γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου που εκτείνεται κατά τη διεύθυνση του ημιάξονα Οx αρχίζει, τη στιγμή $t = 0$, να ταλαντώνεται σύμφωνα με την εξίσωση $\psi = 0,2\eta\mu 2\pi t$ (S.I.). Η ταλάντωση του υλικού σημείου Ο διαδίδεται στο μέσο με ταχύτητα $v = 5 \text{ m/sec}$. Τη στιγμή $t_1 = 2,5 \text{ sec}$ διακόπτεται η ταλάντωσή του.

α) Να σχεδιαστεί το στιγμιότυπο της παραχθείσας διαταραχής τη στιγμή $t_2 = 3 \text{ sec}$.

β) Να γίνει το διάγραμμα των φάσεων των υλικών σημείων του μέσου στο οποίο διαδίδεται η διαταραχή (παλμός) σε συνάρτηση με την απόσταση x από το άκρο Ο τη στιγμή $t_2 = 3 \text{ sec}$.

γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $\psi - t$, της απομάκρυνσης με το χρόνο, ενός υλικού σημείου που βρίσκεται σε απόσταση $x = 10 \text{ m}$ από την αρχή Ο.

δ) Να γίνει το διάγραμμα $\Phi - t$, φάσης - χρόνου, του παραπάνω σημείου.



Τάσος Τζανόπουλος

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Από την εξίσωση ταλάντωσης $\psi = 0,2\eta\mu 2\pi t$ (S.I) του σημείου Ο προκύπτει ότι η περίοδος T ισούται με **1 sec**.

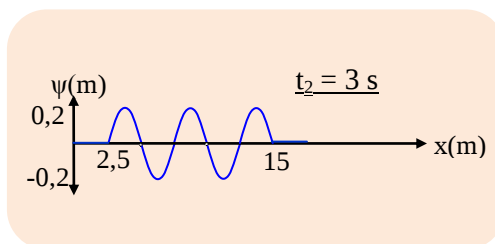
Το μήκος κύματος θα είναι $\lambda = vT = (5 \text{ m/s})(1 \text{ s}) = \mathbf{5 \text{ m}}$.

Έτσι μέχρι τη στιγμή $t_1 = 2,5 \text{ sec}$, που διακόπτεται η ταλάντωση, το Ο έχει εκτελέσει $t_1/T = 2,5/1 = \mathbf{2,5 \text{ ταλαντώσεις}}$ και έχει δημιουργηθεί μια κυματική διαταραχή που περιλαμβάνει 2,5 κύματα τα οποία εκτείνονται από την αρχή αξόνων μέχρι τη θέση $vt_1 = (5 \text{ m/s})(2,5 \text{ s}) = 12,5 \text{ m}$. Η εξίσωση αυτής της κυματικής διαταραχής είναι:

$$\psi = 0,2\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = 0,2\eta\mu 2\pi \left(t - \frac{x}{5} \right) \text{ (S.I)} \quad \text{με } 0 \text{ m} \leq x \leq 12,5 \text{ m}$$

Μισό sec αργότερα (τη στιγμή $t_2 = 3 \text{ sec}$) τα 2,5 αυτά κύματα έχουν μετατοπιστεί κατά $(5 \text{ m/s})(0,5 \text{ s}) = 2,5 \text{ m}$ δεξιότερα, δηλαδή η αρχή τους βρίσκεται στη θέση $x_{\max} = 12,5 + 2,5 = 15 \text{ m}$ και το τέλος τους στη θέση $x_{\min} = 2,5 \text{ m}$.

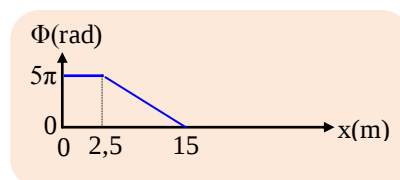
Άρα το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_2 = 3 \text{ sec}$ θα είναι όπως στο σχήμα:



β) Για τις φάσεις των σημείων του μέσου τη στιγμή $t_2 = 3 \text{ sec}$ ισχύει η σχέση:

$$\Phi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = 2\pi \left(3 - \frac{x}{5} \right) \text{ (S.I)} \quad \text{με } 2,5 \text{ m} \leq x \leq 15 \text{ m}$$

Παρακάτω η σχέση αυτή παριστάνεται γραφικά σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων $\Phi - x$.

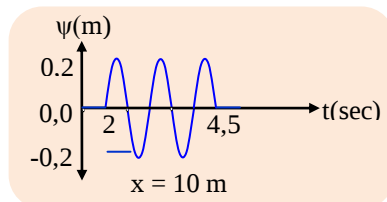


(Όλα τα μόρια του ελαστικού μέσου μεταξύ των θέσεων 0 ως 2,5 m έχουν κάνει 2,5 ταλαντώσεις κι έτσι μπορούμε να πούμε ότι η φάση τους έχει “παγώσει” στην τιμή των $2,5 \cdot 2\pi = 5\pi \text{ rad}$).



γ) Το σημείο αυτό τίθεται σε ταλάντωση τη χρονική στιγμή $\frac{10\text{ m}}{5\text{ m/s}} = 2\text{ s}$ η οποία

είναι όμοια με αυτή του σημείου Ο (πλάτος 0,2 m, γωνιακή συχνότητα $\omega = 2\pi\text{ rad/s}$, αρχική φάση μηδέν) που διαρκεί όσο διαρκεί και η ταλάντωση του Ο, δηλαδή 2,5 s. Στο χρονικό αυτό διάστημα εκτελεί, όπως και η πηγή Ο 2,5 ταλαντώσεις κι ύστερα, τη στιγμή $t = 2 + 2,5 = 4,5\text{ s}$, ακινητοποιείται. Άρα το διάγραμμα $\psi - t$ του σημείου αυτού έχει ως εξής:

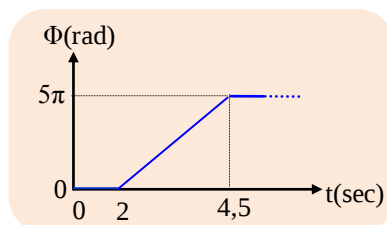


δ) Η φάση του παραπάνω σημείου είναι μηδέν μέχρι τη στιγμή $t = \frac{10\text{ m}}{5\text{ m/s}} = 2\text{ s}$

που αρχίζει να ταλαντώνεται. Από κει και μετά μέχρι τη στιγμή $2 + 2,5 = 4,5\text{ s}$ εκτελεί 2,5 ταλαντώσεις και η φάση του,

$$\Phi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = 2\pi \left(\frac{t}{1\text{ s}} - \frac{10\text{ m}}{5\text{ m}} \right) = 2\pi(t - 2) \quad (\text{S.I})$$

αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο μέχρι την τιμή 5π . Στη συνέχεια σταματάει η ταλάντωσή του και η φάση “παγώνει” στην τιμή 5π . Έτσι το ζητούμενο διάγραμμα είναι το παρακάτω:

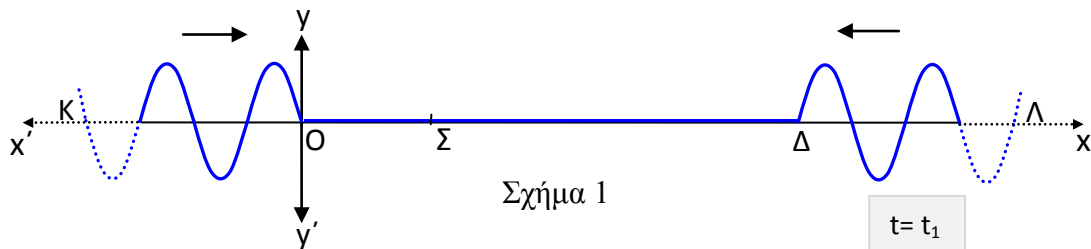


Τάσος Τζανόπουλος

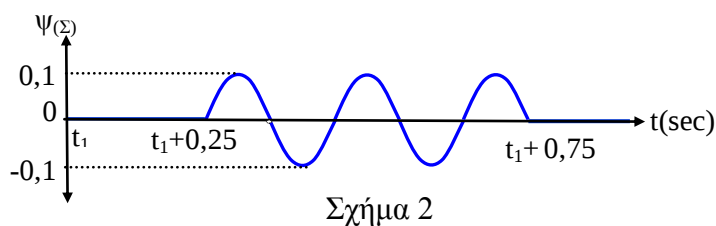


ΠΩΣ ΤΟ ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΤΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ ΕΝΟΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΜΑΣ ΑΠΟΚΑΛΥΠΤΕΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ ΓΙΑ ΕΝΑ ΣΤΑΣΙΜΟ ΚΥΜΑ.

Τα δύο άκρα Κ, Λ μιας τεντωμένης οριζόντιας χορδής, που είναι τοποθετημένη κατά μήκος του άξονα $x'x$, ξεκινούν ταυτόχρονα να εκτελούν α.α.τ., κάθετα στη διεύθυνση της χορδής, με ίδιο πλάτος Α, ίδια συχνότητα και μηδενική αρχική φάση. Έτσι, κατά μήκος της χορδής διαδίδονται, προς αντίθετες κατευθύνσεις, δύο εγκάρσια κύματα με ταχύτητα $v = 10 \text{ m/s}$. Κάποια στιγμή t_1 τα δύο κύματα



έχουν φτάσει ως τα σημεία Ο και Δ της χορδής, έχοντας διανύσει δύο ίσες αποστάσεις ΚΟ και ΛΔ. Τη στιγμή αυτή τα σημεία Ο και Δ ξεκινούν να εκτελούν α.α.τ. με ίδιο πλάτος Α, ίδια συχνότητα και μηδενική αρχική φάση. Τα δύο κύματα τελικά συμβάλλουν και σε όλο το μήκος της χορδής ΚΛ εμφανίζεται στάσιμο κύμα.



Στο σχήμα 2 παριστάνεται γραφικά η απομάκρυνση ενός σημείου Σ της χορδής σε συνάρτηση με το χρόνο. Το Ο το θεωρούμε αρχή των τετμημένων του άξονα xx' και, όπως φαίνεται στο σχήμα 1, το σημείο Σ βρίσκεται ανάμεσα στα Ο, Δ και πιο κοντά στο Ο. Να βρεθούν:

- Α.** Τα μήκη κύματος των κυμάτων από τα οποία δημιουργείται το στάσιμο κύμα.
- Β.** Η απόσταση ΣΟ του Σ από το Ο και το μήκος L του τμήματος ΟΔ της χορδής.
- Γ.** Σε πόσο χρόνο, μετά τη στιγμή t_1 , θα αλλάξει το πλάτος ταλάντωσης των σημείων Ο και Δ της χορδής, και πόσο τοις %.
- Δ.** Η εξίσωση του στάσιμου κύματος που έχει αναπτυχθεί πάνω στο τμήμα ΟΔ της χορδής, αν ως αρχή μέτρησης του χρόνου ($t = 0$) θεωρηθεί η χρονική στιγμή που αλλάζει το πλάτος ταλάντωσης των σημείων Ο και Δ.



Τάσος Τζανόπουλος

ΛΥΣΗ

Γ.1. Από τη γραφική παράσταση ταλάντωσης του Σ προκύπτει ότι $T = 0,2 \text{ sec}$.

Άρα $\lambda = v \cdot T = (10 \text{ m/s})(0,2 \text{ s}) = \underline{2 \text{ m}}$

Γ.2. Είναι:

$$O\Sigma = v \cdot (\text{χρόνος μετάβασης του κύματος από το } O \text{ στο } \Sigma) = (10 \text{ m/s})(0,25 \text{ s}) = \underline{2,5 \text{ m}}$$

Από το διάγραμμα $\psi - t$ της κίνησης του Σ προκύπτει ότι στο σημείο αυτό φτάνει, τη χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + 0,25 \text{ sec}$, πρώτα (αφού το Σ είναι πιο κοντά στο Ο) το κύμα που δημιουργεί η ταλάντωση του Κ, κάνει δύο πλήρεις ταλαντώσεις και τη στιγμή $t_3 = t_1 + 0,75 \text{ sec}$ σταματάει. Αυτό σημαίνει ότι τη στιγμή t_3 φτάνει στο Σ και το κύμα που δημιουργεί η ταλάντωση του Λ και η συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο αυτό προκαλεί απόσβεση της ταλάντωσης του. Είναι φανερό, ότι ο χρόνος που χρειάστηκε το κύμα, που δημιούργησε η ταλάντωση του Λ, να πάει από το Δ στο Σ είναι $0,75 \text{ sec}$ και το μήκος της διαδρομής, που διάνυσε, ισούται με

$$\Delta\Sigma = v \cdot t = (10 \text{ m/sec}) \cdot (0,75 \text{ sec}) = 7,5 \text{ m}$$

Άρα το μήκος του τμήματος ΟΔ της χορδής είναι

$$O\Delta = O\Sigma + \Sigma\Delta = 2,5 \text{ m} + 7,5 \text{ m} = \underline{10 \text{ m}}$$

Γ.3. Τα δύο κύματα τη στιγμή t_1 έχουν φτάσει ως τις θέσεις Ο και Δ του ευθυγράμμου τμήματος ΟΔ. Τη στιγμή αυτή κανένα σημείο του ΟΔ (εκτός από τα Ο, Δ) δεν έχει διεγερθεί ακόμη σε ταλάντωση, ενώ λίγο αργότερα, μετά από χρόνο $t = O\Delta / v = 10 \text{ m} : 10 \text{ m/s} = \underline{1 \text{ s}}$, τα δύο κύματα έχουν διανύσει και συμβάλλει σε όλο το μήκος του τμήματος ΟΔ. Αυτή τη στιγμή, $t_1 + 1 \text{ sec}$, τα δύο υλικά σημεία Ο, Δ της χορδής αρχίζουν, ταυτόχρονα, να εκτελούν σύνθετη ταλάντωση και, επομένως, αυτή τη στιγμή αλλάζει το πλάτος ταλάντωσης του καθενός.

Τώρα, πόσο αλλάζει το πλάτος του καθενός;

Για τις αποστάσεις του Σ από τα σημεία Ο και Δ της χορδής ισχύουν:

$$O\Sigma = 2,5 \text{ m} = 5 \cdot \frac{2}{4} \text{ m} = 5 \cdot \frac{\lambda}{4} \quad \text{και} \quad \Delta\Sigma = 7,5 \text{ m} = 15 \cdot \frac{2}{4} \text{ m} = 15 \cdot \frac{\lambda}{4}$$

Και δεδομένου ότι το Σ είναι δεσμός, τα άκρα του ΟΔ πρέπει να καταστούν κοιλίες (αφού απέχουν από ένα δεσμό περιττό πολλαπλάσιο του $\lambda/4$). Έτσι σε χρόνο $\underline{t = 1 \text{ sec}}$ μετά τη στιγμή t_1 , το πλάτος με το οποίο τα σημεία Ο, Δ ταλαντώνονταν μέχρι εκείνη τη στιγμή, διπλασιάζεται, δηλαδή αυξάνεται κατά 100%.

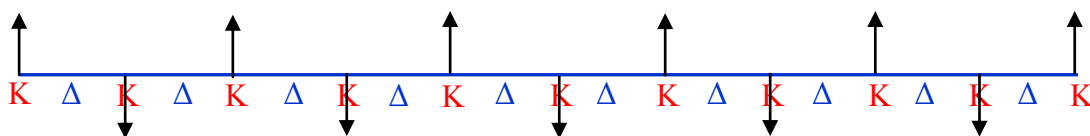
(Κάποιες παρατηρήσεις για περισσότερη εμβάθυνση:

1. Επειδή στο χρονικό διάστημα t_1 ως $t_1 + 1 \text{ sec}$, κάθε άκρο του ευθυγράμμου τμήματος ΟΔ θα έχει εκτελέσει $t/T = 1/0,2 = 5$ πλήρεις ταλαντώσεις, θα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας κινούμενο προς τα θετικά. Εκείνη τη στιγμή στην ταχύτητα ταλάντωσης κάθε άκρου θα προστεθεί και μια παρόμοια ταχύτητα, που θα του επιβάλλει το κύμα που καταφτάνει προερχόμενο από το άλλο άκρο. Έτσι, τη στιγμή $t_1 + 1 \text{ sec}$ διπλασιάζεται η ταχύτητα

ταλάντωσης κάθε άκρου, γι αυτό (σύμφωνα με τη σχέση $u_{μεγ} = \omega A$) θα διπλασιαστεί και το πλάτος της ταλάντωσής του.

2. Επειδή στα στάσιμα κύματα όλα τα μόρια της χορδής διέρχονται ταυτόχρονα από τη θέση ισορροπίας, τη στιγμή $t_1 + 1 \text{ sec}$ η χορδή θα είναι εντελώς ευθύγραμμη και η κινητική ενέργεια ταλάντωσης των υλικών σημείων της, εκτός των δεσμών, μέγιστη.

3. Δεδομένου ότι η απόσταση κάθε δεσμού από τις γειτονικές κοιλίες είναι $\lambda/4 = 0,5 \text{ m}$ και ότι στα άκρα O, Δ του τμήματος $O\Delta$ της χορδής έχουμε κοιλίες, εύκολα προκύπτει ότι κατά μήκος του $O\Delta$ εμφανίζονται 11 κοιλίες και 10 δεσμοί και ότι το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος στο τμήμα $O\Delta$, τη στιγμή $t = t_1 + 1 \text{ sec}$, είναι το παρακάτω. Τα κατακόρυφα βέλη δείχνουν τις ταχύτητες των κοιλιών τη στιγμή αυτή).



Γ.4. Από το διάγραμμα $\psi - t$ της κίνησης του Σ στο χρονικό διάστημα πριν τη συμβολή των κυμάτων, προκύπτει ότι κάθε κύμα έχει πλάτος $A = 0,1 \text{ m}$. Αφού το σημείο O θεωρείται αρχή μέτρησης των αποστάσεων x , είναι κοιλία και, τη θεωρούμενη ως χρονική στιγμή $t = 0$, διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο προς τα θετικά (δείτε παρατήρηση 1) η εξίσωση του στάσιμου κύματος

$$\text{θα είναι: } \psi = 2 \cdot 0,1 \sin \frac{2\pi x}{2} \eta \mu \frac{2\pi t}{0,2}$$

ή $\psi = 0,2 \sin \pi x \eta \mu 10\pi t$ (τα μεγέθη στο S.I)

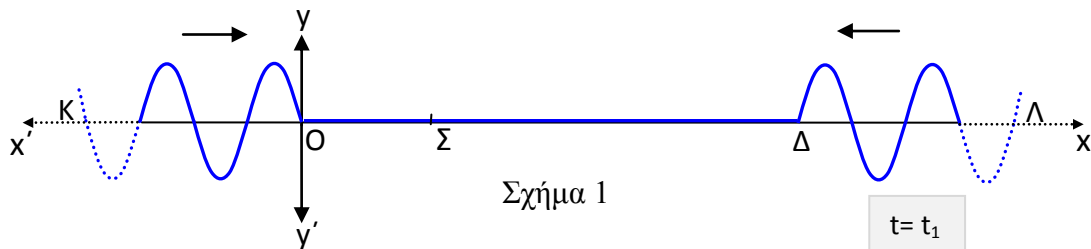


Τάσος Τζανόπουλος

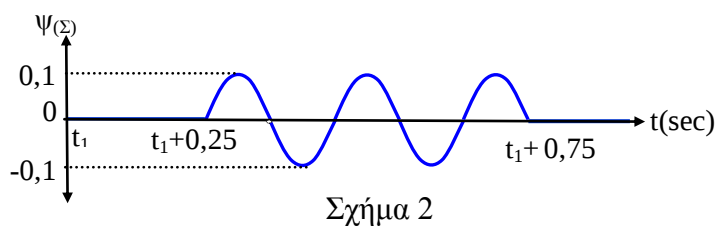


ΠΩΣ ΤΟ ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΤΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ ΕΝΟΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΜΑΣ ΑΠΟΚΑΛΥΠΤΕΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ ΓΙΑ ΕΝΑ ΣΤΑΣΙΜΟ ΚΥΜΑ.

Τα δύο άκρα Κ, Λ μιας τεντωμένης οριζόντιας χορδής, που είναι τοποθετημένη κατά μήκος του άξονα $x'x$, ξεκινούν ταυτόχρονα να εκτελούν α.α.τ., κάθετα στη διεύθυνση της χορδής, με ίδιο πλάτος Α, ίδια συχνότητα και μηδενική αρχική φάση. Έτσι, κατά μήκος της χορδής διαδίδονται, προς αντίθετες κατευθύνσεις, δύο εγκάρσια κύματα με ταχύτητα $v = 10 \text{ m/s}$. Κάποια στιγμή t_1 τα δύο κύματα



έχουν φτάσει ως τα σημεία Ο και Δ της χορδής, έχοντας διανύσει δύο ίσες αποστάσεις ΚΟ και ΛΔ. Τη στιγμή αυτή τα σημεία Ο και Δ ξεκινούν να εκτελούν α.α.τ. με ίδιο πλάτος Α, ίδια συχνότητα και μηδενική αρχική φάση. Τα δύο κύματα τελικά συμβάλλουν και σε όλο το μήκος της χορδής ΚΛ εμφανίζεται στάσιμο κύμα.



Στο σχήμα 2 παριστάνεται γραφικά η απομάκρυνση ενός σημείου Σ της χορδής σε συνάρτηση με το χρόνο. Το Ο το θεωρούμε αρχή των τετμημένων του άξονα xx' και, όπως φαίνεται στο σχήμα 1, το σημείο Σ βρίσκεται ανάμεσα στα Ο, Δ και πιο κοντά στο Ο. Να βρεθούν:

- Α.** Τα μήκη κύματος των κυμάτων από τα οποία δημιουργείται το στάσιμο κύμα.
- Β.** Η απόσταση ΣΟ του Σ από το Ο και το μήκος L του τμήματος ΟΔ της χορδής.
- Γ.** Σε πόσο χρόνο, μετά τη στιγμή t_1 , θα αλλάξει το πλάτος ταλάντωσης των σημείων Ο και Δ της χορδής, και πόσο τοις %.
- Δ.** Η εξίσωση του στάσιμου κύματος που έχει αναπτυχθεί πάνω στο τμήμα ΟΔ της χορδής, αν ως αρχή μέτρησης του χρόνου ($t = 0$) θεωρηθεί η χρονική στιγμή που αλλάζει το πλάτος ταλάντωσης των σημείων Ο και Δ.



Τάσος Τζανόπουλος

ΛΥΣΗ

Γ.1. Από τη γραφική παράσταση ταλάντωσης του Σ προκύπτει ότι $T = 0,2 \text{ sec}$.

Άρα $\lambda = v \cdot T = (10 \text{ m/s})(0,2 \text{ s}) = \underline{2 \text{ m}}$

Γ.2. Είναι:

$$O\Sigma = v \cdot (\text{χρόνος μετάβασης του κύματος από το } O \text{ στο } \Sigma) = (10 \text{ m/s})(0,25 \text{ s}) = \underline{2,5 \text{ m}}$$

Από το διάγραμμα $\psi - t$ της κίνησης του Σ προκύπτει ότι στο σημείο αυτό φτάνει, τη χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + 0,25 \text{ sec}$, πρώτα (αφού το Σ είναι πιο κοντά στο Ο) το κύμα που δημιουργεί η ταλάντωση του Κ, κάνει δύο πλήρεις ταλαντώσεις και τη στιγμή $t_3 = t_1 + 0,75 \text{ sec}$ σταματάει. Αυτό σημαίνει ότι τη στιγμή t_3 φτάνει στο Σ και το κύμα που δημιουργεί η ταλάντωση του Λ και η συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο αυτό προκαλεί απόσβεση της ταλάντωσης του. Είναι φανερό, ότι ο χρόνος που χρειάστηκε το κύμα, που δημιούργησε η ταλάντωση του Λ, να πάει από το Δ στο Σ είναι $0,75 \text{ sec}$ και το μήκος της διαδρομής, που διάνυσε, ισούται με

$$\Delta\Sigma = v \cdot t = (10 \text{ m/sec}) \cdot (0,75 \text{ sec}) = 7,5 \text{ m}$$

Άρα το μήκος του τμήματος ΟΔ της χορδής είναι

$$O\Delta = O\Sigma + \Sigma\Delta = 2,5 \text{ m} + 7,5 \text{ m} = \underline{10 \text{ m}}$$

Γ.3. Τα δύο κύματα τη στιγμή t_1 έχουν φτάσει ως τις θέσεις Ο και Δ του ευθυγράμμου τμήματος ΟΔ. Τη στιγμή αυτή κανένα σημείο του ΟΔ (εκτός από τα Ο, Δ) δεν έχει διεγερθεί ακόμη σε ταλάντωση, ενώ λίγο αργότερα, μετά από χρόνο $t = O\Delta / v = 10 \text{ m} : 10 \text{ m/s} = \underline{1 \text{ s}}$, τα δύο κύματα έχουν διανύσει και συμβάλλει σε όλο το μήκος του τμήματος ΟΔ. Αυτή τη στιγμή, $t_1 + 1 \text{ sec}$, τα δύο υλικά σημεία Ο, Δ της χορδής αρχίζουν, ταυτόχρονα, να εκτελούν σύνθετη ταλάντωση και, επομένως, αυτή τη στιγμή αλλάζει το πλάτος ταλάντωσης του καθενός.

Τώρα, πόσο αλλάζει το πλάτος του καθενός;

Για τις αποστάσεις του Σ από τα σημεία Ο και Δ της χορδής ισχύουν:

$$O\Sigma = 2,5 \text{ m} = 5 \cdot \frac{2}{4} \text{ m} = 5 \cdot \frac{\lambda}{4} \quad \text{και} \quad \Delta\Sigma = 7,5 \text{ m} = 15 \cdot \frac{2}{4} \text{ m} = 15 \cdot \frac{\lambda}{4}$$

Και δεδομένου ότι το Σ είναι δεσμός, τα άκρα του ΟΔ πρέπει να καταστούν κοιλίες (αφού απέχουν από ένα δεσμό περιττό πολλαπλάσιο του $\lambda/4$). Έτσι σε χρόνο $\underline{t = 1 \text{ sec}}$ μετά τη στιγμή t_1 , το πλάτος με το οποίο τα σημεία Ο, Δ ταλαντώνονταν μέχρι εκείνη τη στιγμή, διπλασιάζεται, δηλαδή αυξάνεται κατά 100%.

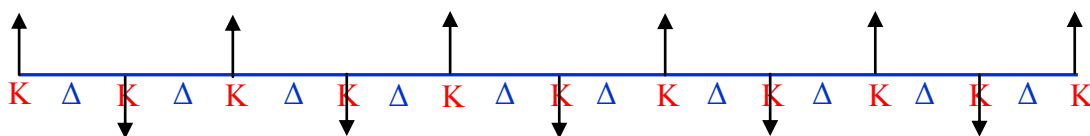
(Κάποιες παρατηρήσεις για περισσότερη εμβάθυνση:

1. Επειδή στο χρονικό διάστημα t_1 ως $t_1 + 1 \text{ sec}$, κάθε άκρο του ευθυγράμμου τμήματος ΟΔ θα έχει εκτελέσει $t/T = 1/0,2 = 5$ πλήρεις ταλαντώσεις, θα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας κινούμενο προς τα θετικά. Εκείνη τη στιγμή στην ταχύτητα ταλάντωσης κάθε άκρου θα προστεθεί και μια παρόμοια ταχύτητα, που θα του επιβάλλει το κύμα που καταφτάνει προερχόμενο από το άλλο άκρο. Έτσι, τη στιγμή $t_1 + 1 \text{ sec}$ διπλασιάζεται η ταχύτητα

ταλάντωσης κάθε άκρου, γι αυτό (σύμφωνα με τη σχέση $u_{μεγ} = \omega A$) θα διπλασιαστεί και το πλάτος της ταλάντωσής του.

2. Επειδή στα στάσιμα κύματα όλα τα μόρια της χορδής διέρχονται ταυτόχρονα από τη θέση ισορροπίας, τη στιγμή $t_1 + 1 \text{ sec}$ η χορδή θα είναι εντελώς ευθύγραμμη και η κινητική ενέργεια ταλάντωσης των υλικών σημείων της, εκτός των δεσμών, μέγιστη.

3. Δεδομένου ότι η απόσταση κάθε δεσμού από τις γειτονικές κοιλίες είναι $\lambda/4 = 0,5 \text{ m}$ και ότι στα άκρα O, Δ του τμήματος $O\Delta$ της χορδής έχουμε κοιλίες, εύκολα προκύπτει ότι κατά μήκος του $O\Delta$ εμφανίζονται 11 κοιλίες και 10 δεσμοί και ότι το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος στο τμήμα $O\Delta$, τη στιγμή $t = t_1 + 1 \text{ sec}$, είναι το παρακάτω. Τα κατακόρυφα βέλη δείχνουν τις ταχύτητες των κοιλιών τη στιγμή αυτή).



Γ.4. Από το διάγραμμα $\psi - t$ της κίνησης του Σ στο χρονικό διάστημα πριν τη συμβολή των κυμάτων, προκύπτει ότι κάθε κύμα έχει πλάτος $A = 0,1 \text{ m}$. Αφού το σημείο O θεωρείται αρχή μέτρησης των αποστάσεων x , είναι κοιλία και, τη θεωρούμενη ως χρονική στιγμή $t = 0$, διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο προς τα θετικά (δείτε παρατήρηση 1) η εξίσωση του στάσιμου κύματος

$$\text{θα είναι: } \psi = 2 \cdot 0,1 \sin \frac{2\pi x}{2} \eta \mu \frac{2\pi t}{0,2}$$

ή $\psi = 0,2 \sin \pi x \eta \mu 10\pi t$ (τα μεγέθη στο S.I)



Τάσος Τζανόπουλος

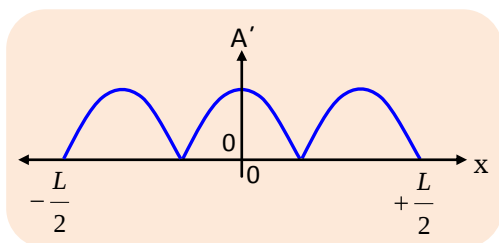


ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ ΣΕ ΓΕΦΥΡΑ ΚΑΙ ΜΙΑ ΠΙΘΑΝΗ ΚΑΤΑΣΤΡΟΦΗ

Εξαιτίας μιας σεισμικής δόνησης κατά μήκος μιας οριζόντιας, ευθύγραμμης και ελαστικής γέφυρας μήκους L , που είναι στερεωμένη στα δύο της άκρα, διαδίδονται δύο αντίθετα εγκάρσια

αρμονικά κύματα με ίδιο πλάτος και ίδια συχνότητα, με αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός στάσιμου κύματος όπου τα υλικά σημεία της γέφυρας εκτελούν ταλάντωση σε κατακόρυφη διεύθυνση. Στο κέντρο της γέφυρας (που το θεωρούμε στη θέση $x = 0$) εμφανίζεται κοιλία του στασίμου κύματος, του οποίου η εξίσωση είναι:

$$\psi = 2A \sin \nu \frac{2\pi x}{1800} \eta \mu 6t \quad (S.I), \quad \text{για } -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}.$$



Το διάγραμμα παριστάνει το πλάτος A' της ταλάντωσης των σημείων της γέφυρας σε σχέση με τη συντεταγμένη θέσης τους x .

A. Πόσο είναι το μήκος L της γέφυρας;

B. Να προσδιορίσετε τις θέσεις δύο σημείων Σ_1 και Σ_2 της γέφυρας, εκατέρωθεν

του κέντρου της, που έχουν το μέγιστο πλάτος επιτάχυνσης.

Γ. Πόσο πρέπει να είναι το πλάτος των κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα ώστε η επιτάχυνση των σημείων Σ_1 και Σ_2 να έχει μέγιστο μέτρο ίσο με την επιτάχυνση βαρύτητας g ;

Δ. Θεωρείστε ότι σε όλο το μήκος της γέφυρας βρίσκονται σταματημένα αυτοκίνητα. Δείξτε ότι, αν το πλάτος των κυμάτων είναι αυτό που βρήκατε πιο πριν, η κάθετη αντίδραση του δαπέδου στους τροχούς των αυτοκινήτων που βρίσκονται στις θέσεις Σ_1 και Σ_2 θα μηδενίζεται στιγμιαία ανά χρονικά διαστήματα ίσα με την περίοδο των κυμάτων.

Αγνοήστε την οποιαδήποτε συμμετοχή του συστήματος ανάρτησης των αυτοκινήτων στην ταλάντωσή τους.

Ε. Τα υλικά σημεία της γέφυρας μπορούν να ταλαντώνονται, χωρίς αυτή να κοπεί, με πλάτος ταλάντωσης μικρότερο από 30 cm. Αν για κάποιο λόγο το πλάτος των αντίθετα κινουμένων κατά μήκος της γέφυρας αρμονικών κυμάτων γίνει 15 cm και η συχνότητά τους διπλασιαστεί, σε πόσα σημεία θα κοπεί η γέφυρα;

Δίνεται $g = 9,9 \text{ m/s}^2$



Τάσος Τζανόπουλος

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Από την εξίσωση ταλάντωσης $\psi = 0,2\eta\mu 2\pi t$ (S.I) του σημείου Ο προκύπτει ότι η περίοδος T ισούται με **1 sec**.

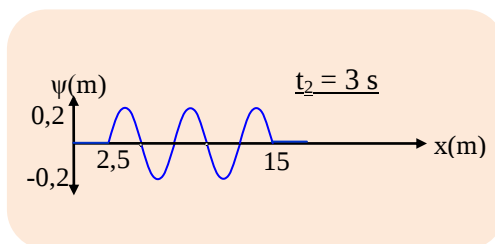
Το μήκος κύματος θα είναι $\lambda = vT = (5 \text{ m/s})(1 \text{ s}) = \mathbf{5 \text{ m}}$.

Έτσι μέχρι τη στιγμή $t_1 = 2,5 \text{ sec}$, που διακόπτεται η ταλάντωση, το Ο έχει εκτελέσει $t_1/T = 2,5/1 = \mathbf{2,5 \text{ ταλαντώσεις}}$ και έχει δημιουργηθεί μια κυματική διαταραχή που περιλαμβάνει 2,5 κύματα τα οποία εκτείνονται από την αρχή αξόνων μέχρι τη θέση $vt_1 = (5 \text{ m/s})(2,5 \text{ s}) = 12,5 \text{ m}$. Η εξίσωση αυτής της κυματικής διαταραχής είναι:

$$\psi = 0,2\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = 0,2\eta\mu 2\pi \left(t - \frac{x}{5} \right) \text{ (S.I)} \quad \text{με } 0 \text{ m} \leq x \leq 12,5 \text{ m}$$

Μισό sec αργότερα (τη στιγμή $t_2 = 3 \text{ sec}$) τα 2,5 αυτά κύματα έχουν μετατοπιστεί κατά $(5 \text{ m/s})(0,5 \text{ s}) = 2,5 \text{ m}$ δεξιότερα, δηλαδή η αρχή τους βρίσκεται στη θέση $x_{\max} = 12,5 + 2,5 = 15 \text{ m}$ και το τέλος τους στη θέση $x_{\min} = 2,5 \text{ m}$.

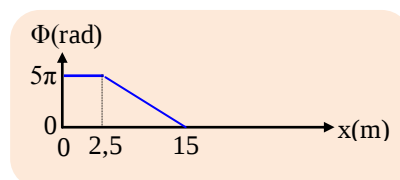
Άρα το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_2 = 3 \text{ sec}$ θα είναι όπως στο σχήμα:



β) Για τις φάσεις των σημείων του μέσου τη στιγμή $t_2 = 3 \text{ sec}$ ισχύει η σχέση:

$$\Phi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = 2\pi \left(3 - \frac{x}{5} \right) \text{ (S.I)} \quad \text{με } 2,5 \text{ m} \leq x \leq 15 \text{ m}$$

Παρακάτω η σχέση αυτή παριστάνεται γραφικά σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων $\Phi - x$.

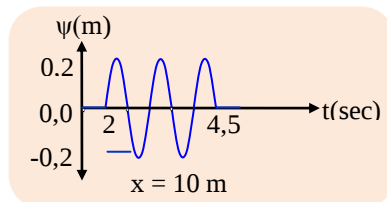


(Όλα τα μόρια του ελαστικού μέσου μεταξύ των θέσεων 0 ως 2,5 m έχουν κάνει 2,5 ταλαντώσεις κι έτσι μπορούμε να πούμε ότι η φάση τους έχει “παγώσει” στην τιμή των $2,5 \cdot 2\pi = 5\pi \text{ rad}$).



γ) Το σημείο αυτό τίθεται σε ταλάντωση τη χρονική στιγμή $\frac{10\text{ m}}{5\text{ m/s}} = 2\text{ s}$ η οποία

είναι όμοια με αυτή του σημείου Ο (πλάτος 0,2 m, γωνιακή συχνότητα $\omega = 2\pi\text{ rad/s}$, αρχική φάση μηδέν) που διαρκεί όσο διαρκεί και η ταλάντωση του Ο, δηλαδή 2,5 s. Στο χρονικό αυτό διάστημα εκτελεί, όπως και η πηγή Ο 2,5 ταλαντώσεις κι ύστερα, τη στιγμή $t = 2 + 2,5 = 4,5\text{ s}$, ακινητοποιείται. Άρα το διάγραμμα $\psi - t$ του σημείου αυτού έχει ως εξής:

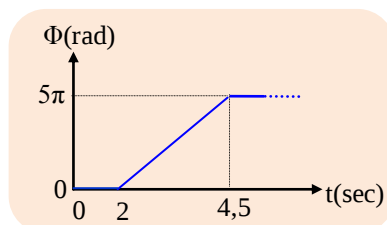


δ) Η φάση του παραπάνω σημείου είναι μηδέν μέχρι τη στιγμή $t = \frac{10\text{ m}}{5\text{ m/s}} = 2\text{ s}$

που αρχίζει να ταλαντώνεται. Από κει και μετά μέχρι τη στιγμή $2 + 2,5 = 4,5\text{ s}$ εκτελεί 2,5 ταλαντώσεις και η φάση του,

$$\Phi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = 2\pi \left(\frac{t}{1\text{ s}} - \frac{10\text{ m}}{5\text{ m}} \right) = 2\pi(t - 2) \quad (\text{S.I})$$

αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο μέχρι την τιμή 5π . Στη συνέχεια σταματάει η ταλάντωσή του και η φάση “παγώνει” στην τιμή 5π . Έτσι το ζητούμενο διάγραμμα είναι το παρακάτω:

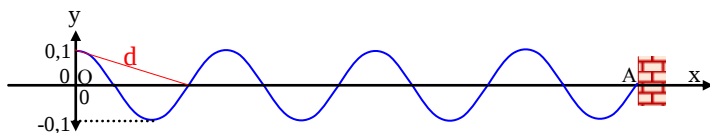


Τάσος Τζανόπουλος



Στάσιμο κύμα, με στοιχεία ταλάντωσης, σε χορδή συγκεκριμένου μήκους

Μια τεντωμένη οριζόντια χορδή ΟΑ μήκους L εκτείνεται κατά τη διεύθυνση του άξονα x . Το άκρο Α είναι ακλόνητα στερεωμένο, ενώ το άκρο Ο που βρίσκεται στη θέση $x = 0$ είναι ελεύθερο, έτσι ώστε με κατάλληλη διαδικασία να δημιουργείται στάσιμο κύμα. Στη θέση $x = 0$ εμφανίζεται κοιλία και το σημείο του μέσου στη θέση αυτή εκτελεί απλή αρμονική



ταλάντωση. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σημείο $x = 0$ βρίσκεται στη θέση μηδενικής απομάκρυνσης κινούμενο κατά τη θετική φορά. Στο σχήμα απεικονίζεται το στιγμιότυπο του συγκεκριμένου στάσιμου κύματος τη στιγμή κατά την οποία όλα τα σημεία της χορδής βρίσκονται στις θέσεις μέγιστης απομάκρυνσής τους. Η μέγιστη απόσταση μεταξύ της πρώτης κοιλίας και του δεύτερου δεσμού είναι $d_{\text{μεγ}} = 0,1\sqrt{10} \text{ m}$. Ο ελάχιστος χρόνος που χρειάζεται κάθε υλικό σημείο του ελαστικού μέσου που ταλαντώνεται, για να διέλθει δύο φορές από τη θέση $\psi_1 = \frac{|A'|}{2}$ είναι $\Delta t = \frac{1}{60} \text{ sec}$, όπου $|A'|$ είναι το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου.

A. Να γραφεί η εξίσωση του στάσιμου κύματος.

$$(\psi = 0,1 \sin 5\pi x \cdot \eta \mu 40\pi t)$$

B. Να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας και το μέτρο της επιτάχυνσης μιας κοιλίας, όταν έχει απομάκρυνση $\psi_1 = 6 \cdot 10^{-2} \text{ m}$.

$$(3,2\pi \text{ m/s}, 960 \text{ m/s}^2)$$

Γ. Να υπολογιστεί το μήκος της χορδής, εάν στο στάσιμο κύμα έχουν δημιουργηθεί οκτώ δεσμοί (συμπεριλαμβανομένου και του δεσμού στο άκρο Α).

$$(1,5 \text{ m})$$

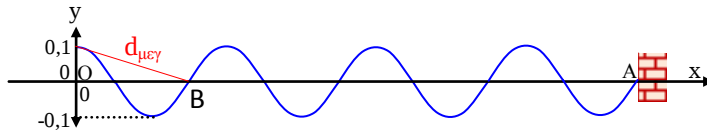
Δ. Εάν η συχνότητα των κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα γίνει $f = 20/3 \text{ Hz}$ να βρεθεί ο αριθμός των δεσμών που σχηματίζονται στην ίδια χορδή, με δεδομένο ότι στην αρχή της χορδής έχουμε πάλι κοιλία και στο τέλος δεσμό. Δίνεται $\pi^2 = 10$.

$$(3)$$



Τάσος Τζανόπουλος

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



Σχήμα 1

Α. Φράσεις Κλειδιά στην εκφώνηση είναι:

η μέγιστη απόσταση ... και ο ελάχιστος χρόνος ...

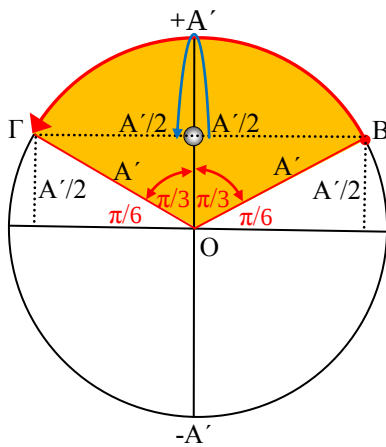
Η μέγιστη απόσταση φαίνεται στο σχήμα 1 με κόκκινη γραμμή ως υποτεινούσα ορθογωνίου τριγώνου και ο ελάχιστος χρόνος είναι ίσος με το χρόνο που χρειάζεται να διαγραφεί το κυκλικό τόξο $B(+A')\Gamma$ του κύκλου αναφοράς στο σχήμα 2.

Από το σχήμα 1 προκύπτει:

$2A = 0,1 \text{ m}$, $OB = 3\lambda/4$, άρα:

$$\begin{aligned} d_{\text{μεγ}}^2 &= (0,1)^2 + (OB)^2 \rightarrow 0,1\sqrt{10} \text{ m}^2 = (0,1\text{m})^2 + (OB)^2 \\ &\rightarrow 0,1^2 \cdot 10 \text{ m}^2 = 0,1^2 \text{ m}^2 + (OB)^2 \\ &\rightarrow (OB)^2 = 9 \cdot 0,1^2 \text{ m}^2 \\ &\rightarrow OB = 3 \cdot 0,1 \text{ m} \end{aligned}$$

Επομένως: $\frac{3\lambda}{4} = 0,3 \text{ m} \rightarrow \lambda = 0,4 \text{ m}$



Σχήμα 2

Είναι φανερό ότι το δεδομένο ελάχιστο χρονικό διάστημα Δt αντιστοιχεί στο χρόνο που χρειάζεται κάθε ταλαντούμενο υλικό σημείο της χορδής να μεταβεί από τη θέση $+A'/2$ στην $+A'$, απ' ευθείας, και από εκεί ξανά στην $A'/2$. Από τον κύκλο αναφοράς της ταλάντωσης των σημείων της χορδής διαπιστώνουμε ότι αυτός ο χρόνος είναι ίσος με το χρόνο που απαιτείται για να διαγραφεί το τόξο $B(+A')\Gamma$. Από το σχήμα φαίνεται ότι το τόξο αυτό αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία $\Delta\varphi = 2\pi/3 \text{ rad}$.

$$\text{Άρα: } \omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi/3 \text{ rad}}{1/60 \text{ s}} = 40\pi \text{ rad/s}$$

$$\text{και } f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{40\pi \text{ rad/s}}{2\pi} = 20 \text{ Hz}, \quad T = \frac{1}{f} = \frac{1}{20/\text{s}} = 0,05 \text{ s}$$

Επομένως, η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι:

$$\psi = 2A \sin \nu \frac{2\pi x}{\lambda} \eta \mu \frac{2\pi t}{T} = 0,1 \sin \nu \frac{2\pi x}{0,4} \eta \mu \omega t = \underline{0,1 \sin 5\pi x \cdot \eta \mu 40\pi t}$$

Β. Από την Α.Δ.Ε_{ταλ} προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m \omega^2 \psi_1^2 + \frac{1}{2} m v_1^2 &= \frac{1}{2} m \omega^2 (A'_{\mu\epsilon\gamma})^2 \\ \rightarrow v_1^2 &= \omega^2 (A'^2_{\mu\epsilon\gamma} - \psi_1^2) \end{aligned}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} v_1 &= \pm \omega \sqrt{(A'_{\mu\epsilon\gamma})^2 - \psi_1^2} = \pm (40\pi \text{ rad / s}) \sqrt{(0,1\text{m})^2 - (6 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2} \\ &= \pm 40\pi \sqrt{(10 \cdot 10^{-2})^2 - (6 \cdot 10^{-2})^2} \text{ m / s} \\ &= \pm 40\pi \sqrt{64 \cdot 10^{-4}} \text{ m / s} \\ &= \pm 40\pi \cdot 8 \cdot 10^{-2} \text{ m / s} \end{aligned}$$

Άρα το μέτρο της v_1 είναι: $\underline{v_1 = 3,2\pi \text{ m / s}}$

Για το ζητούμενο μέτρο της επιτάχυνσης έχουμε:

$$\alpha_1 = \omega^2 \psi_1 = (40\pi \text{ rad / s})^2 \cdot (6 \cdot 10^{-2} \text{ m}) = \underline{960 \text{ m / s}^2}$$

$$\Gamma. L = \frac{\lambda}{4} + 7 \frac{\lambda}{2} = 0,1\text{m} + 7 \cdot (0,2\text{m}) = \underline{1,5\text{m}}$$

$$\Delta. v = \lambda \cdot f = \lambda' \cdot f' \rightarrow (0,4\text{m})(20\text{Hz}) = \lambda' \left(\frac{20}{3} \text{ Hz} \right)$$

$$\rightarrow \underline{\lambda' = 1,2\text{m}}$$

Επειδή ο πρώτος δεσμός βρίσκεται στη θέση $x = \lambda'/4$ και οι υπόλοιποι, έστω k , βρίσκονται σε απόσταση $\lambda'/2$ μεταξύ τους θα ισχύει:

$$\begin{aligned} L &= \frac{\lambda'}{4} + k \frac{\lambda'}{2} \rightarrow 1,5\text{m} = (0,3\text{m}) + k \cdot (0,6\text{m}) \\ &\rightarrow k = 2 \end{aligned}$$

Συνεπώς θα δημιουργηθούν **τρεις δεσμοί**.



Τάσος Τζανόπουλος



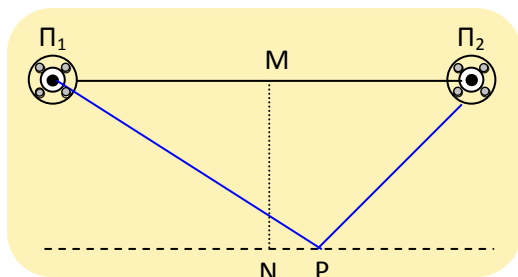
ΣΥΜΒΟΛΗ ΚΥΜΑΤΩΝ ΣΤΗΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΥΓΡΟΥ - ΘΕΜΑ Β

1. Δύο σύγχρονες πηγές Π_1 και Π_2 δημιουργούν στην επιφάνεια ενός υγρού κύματα, που έχουν μήκος κύματος $\lambda = 8$ cm. Σε ένα σημείο P, το οποίο βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $\Pi_1\Pi_2$ που συνδέει τις δύο πηγές, έχουμε ενισχυτική συμβολή. Η ελάχιστη απόσταση μεταξύ του σημείου P και ενός άλλου σημείου Λ του $\Pi_1\Pi_2$, όπου συμβαίνει απόσβεση, είναι:

α) 2 cm, β) 8 cm, γ) 4 cm, δ) 12 cm

i) Επιλέξτε τη σωστή απάντηση.

ii) Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



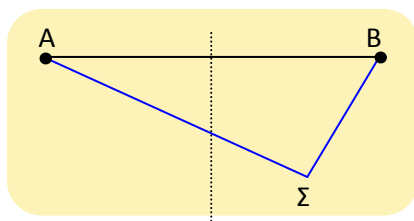
2. Δύο ηχητικές πηγές, που βρίσκονται στις θέσεις Π_1 και Π_2 , ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα και βρίσκονται σε φάση. Τα ηχητικά κύματα, που εκπέμπουν, έχουν μήκος κύματος 1 m. Ένας ακροατής μετακινείται από το σημείο N προς το σημείο P παράλληλα προς στο

ευθύγραμμο τμήμα $\Pi_1\Pi_2$. Η MN είναι μεσοκάθετος στο $\Pi_1\Pi_2$. Κατά την κίνησή του ο ακροατής αντιλαμβάνεται ότι η ένταση του ήχου βαθμιαία εξασθενίζει, ώσπου στο P γίνεται μηδέν για πρώτη φορά. Αν $\Pi_2P = 3$ m, τότε η απόσταση Π_1P είναι:

α) 3,3 m, β) 3,5 m, γ) 3,8 m, δ) 2,2 m.

i) Επιλέξτε τη σωστή απάντηση.

ii) Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



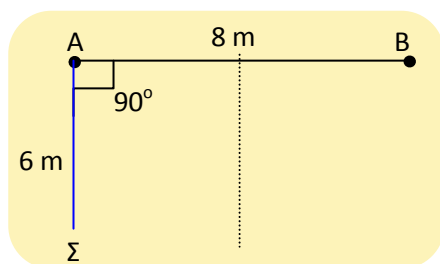
3. Στο διπλανό σχήμα οι πηγές A και B είναι σύγχρονες πηγές κυμάτων με μήκος κύματος ένα από τα παρακάτω:

α) 0,22 m, β) 0,33 m, γ) 0,18 m, δ) 0,27 m.

Αν για ένα σημείο Σ στο οποίο συμβαίνει απόσβεση είναι: $A\Sigma - B\Sigma = 0,27$ m τότε:

i) Ποιο είναι το μήκος κύματος;

ii) Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



4. Στα σημεία A και B του σχήματος βρίσκονται δύο σύγχρονες πηγές, που δημιουργούν στην επιφάνεια ενός υγρού, κύματα πλάτους $A = 2 \text{ cm}$ και συχνότητας 2 Hz . Αν η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων στο ελαστικό μέσο είναι 3 m/sec , $(AB) = 8 \text{ m}$ και $(A\Sigma) = 6 \text{ m}$, τότε το πλάτος ταλάντωσης

του σημείου Σ μετά τη συμβολή θα είναι:

α) 0, β) 1 cm, γ) 2 cm, δ) 4 cm.

i) Επιλέξτε τη σωστή απάντηση.

ii) Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

5. Δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων ταλαντώνονται σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\psi = 0,3\mu 8\pi t, \quad (\text{τα μεγέθη } \psi \text{ και } t \text{ στο S.I}),$$

και παράγουν κύματα στην επιφάνεια ενός υγρού, τα οποία διαδίδονται με ταχύτητα $v = 4 \text{ m/sec}$.

i) Είναι σωστός ή λάθος ο ισχυρισμός ότι ένας φελλός που βρίσκεται στην επιφάνεια του υγρού σε απόσταση $3,25 \text{ m}$ από τη μια πηγή και $2,75 \text{ m}$ από την άλλη, θα ξεκινήσει λίγο μετά την έναρξη ταλάντωσης των πηγών, θα κάνει μισή ταλάντωση κι ύστερα θα παραμείνει ακίνητος;

ii) Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



6. Δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων Π_1 και Π_2 ταλαντώνονται με

συχνότητα $f = 10 \text{ Hz}$ και παράγουν κύματα ίδιου πλάτους στην επιφάνεια ενός υγρού, τα οποία διαδίδονται με ταχύτητα $v = 4 \text{ m/sec}$.

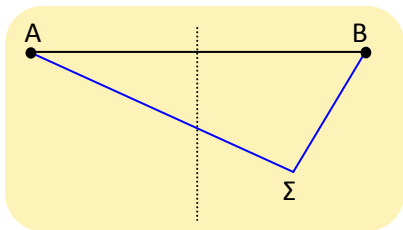
α) Υπολογίστε την απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων της ευθείας $\Pi_1\Pi_2$ που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος.

β) Δείξτε ότι το σημείο που είναι στη μέση της παραπάνω απόστασης, παραμένει διαρκώς ακίνητο.



7. Στην επιφάνεια μιας λίμνης έχουν συμβάλλει τα κύματα δύο σύγχρονων πηγών, που ταλαντώνονται με πλάτος $A = 10 \text{ cm}$. Πόσο είναι το πλάτος ταλάντωσης των σημείων της επιφάνειας για τα οποία ισχύει: $|d_1 - d_2| = \frac{\lambda}{3}$, και πόσο των σημείων για τα οποία: $|d_1 - d_2| = 2k + 1 \frac{\lambda}{4}$, όπου $k = 1, 2, 3, \dots$

8. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων, που βρίσκονται στα σημεία A και B του διπλανού σχήματος, αρχίζουν να ταλαντώνονται ταυτόχρονα στην επιφάνεια ενός υγρού με πλάτος $A = 10 \text{ cm}$ και αρχική φάση μηδέν. Τα παραγόμενα κύματα έχουν μήκος κύματος $\lambda = 0,5 \text{ m}$ και διαδίδονται στην επιφάνεια του υγρού με ταχύτητα $v = 6$



m/sec . Τα δύο κύματα φτάνουν σε ένα σημείο Σ της επιφάνειας του υγρού με χρονική διαφορά $0,25 \text{ sec}$. Να επιλέξετε, σε καθεμιά από τις παρακάτω τρεις προτάσεις A, B και Γ, την ορθή απάντηση, αναφέροντας και την κατάλληλη αιτιολόγηση.

A. Το πλάτος ταλάντωσης του σημείου Σ, έπειτα από την άφιξη των κυμάτων σ' αυτό, είναι: α) $0,05 \text{ m}$ β) $0,2 \text{ m}$, γ) $0,1 \text{ m}$, δ) 0 m .

B. Ο αριθμός των ταλαντώσεων του Σ ανά sec, μετά τη συμβολή των κυμάτων σ' αυτό, θα είναι: α) 10 β) 16, γ) 12, δ) 20.

Γ. Αν $(A\Sigma) = 2(B\Sigma)$, η εξίσωση ταλάντωσης του Σ μετά την άφιξη των κυμάτων σ' αυτό θα είναι:

α) $\psi = -0,2\eta\mu 2\pi(12t - 4,5) \text{ (S.I.)}$, β) $\psi = 0,2\eta\mu 2\pi(12t - 1,5)$

Παρατήρηση:

Σε όλες τις παραπάνω ερωτήσεις θεωρούμε ότι τα κύματα φτάνουν στα σημεία συμβολής με πλάτος ίσο με το πλάτος ταλάντωσης των πηγών. (Αυτή η υπόθεση ισχύει με καλή προσέγγιση για σημεία κοντά στις πηγές).

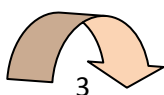
Τάσος Τσαντάουλος



Email to:

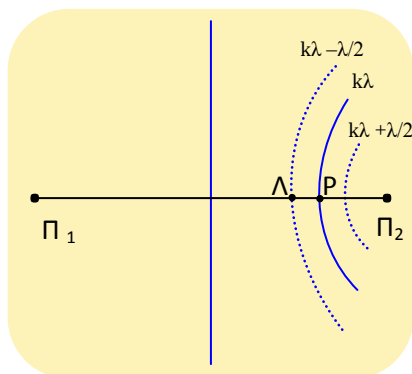
○ Αναλυτικές απαντήσεις στην ερώτηνη ανάρτηση.

■ Μέχρι τότε, Προσπαθήστε!





ΣΥΜΒΟΛΗ ΚΥΜΑΤΩΝ ΣΤΗΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΥΓΡΟΥ - ΘΕΜΑ Β, οι αιτιολογήσεις



1. i) Σωστό είναι το (α).

ii) Τα σημεία στα οποία έχουμε ενισχυτική συμβολή και τα σημεία στα οποία έχουμε απόσβεση, βρίσκονται πάνω σε υπερβολές. Οι υπερβολές αυτές έχουν άξονα συμμετρίας την ευθεία που διέρχεται από τις δύο πηγές και παρατάσσονται εκατέρωθεν της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος που συνδέει τις δύο πηγές. Στα σημεία της μεσοκαθέτου, για τα οποία η διαφορά $r_1 - r_2$

των αποστάσεων από τις δύο πηγές είναι μηδέν, έχουμε ενισχυτική συμβολή. Κάθε υπερβολή ενισχυτικής συμβολής πλαισιώνεται και από τις δύο πλευρές από υπερβολές απόσβεσης που οι αποστάσεις των σημείων τους από τις δύο πηγές διαφέρουν λιγότερο ή περισσότερο κατά $\lambda/2$ απ' ότι οι αποστάσεις των σημείων της υπερβολής ενισχυτικής συμβολής (δείτε το σχήμα).

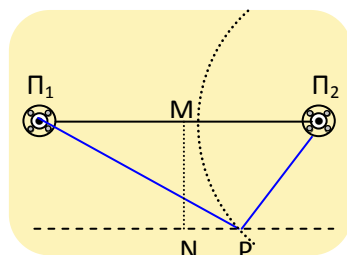
Για τις αποστάσεις των Λ και Ρ από τις πηγές ισχύει:

$$RP_1 - RP_2 = k\lambda \quad (1)$$

$$AP_1 - AP_2 = k\lambda - \lambda/2 \quad (2)$$

Με αφαίρεση των (1) και (2) προκύπτει: $(RP_1 - AP_1) + (AP_2 - RP_2) = \lambda/2$.

Δηλαδή: $2(AP) = \lambda/2$ ή $(AP) = \lambda/4 = 2\text{cm}$.



2. i) Σωστό είναι το (β).

ii) Από τα δεδομένα προκύπτει ότι το Ρ βρίσκεται στην πρώτη υπερβολή απόσβεσης των κυμάτων δεξιά από τη μεσοκάθετο, άρα $\Pi_1 P - \Pi_2 P = \lambda/2$ ή $\Pi_1 P = (\lambda/2 + 3) m = 3,5 m$.

3. Πρέπει: $0,27 m = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$, άρα $\lambda = \frac{0,54 m}{2k+1}$

$k=0$

$0,54 m$

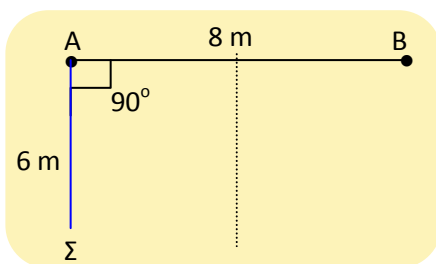
$0,18 m$

$k=1$

$0,108 m, \dots$

$k=2$

α. Σωστό είναι το γ.
β. Το Σ βρίσκεται στη 2^η υπερβολή απόσβεσης.



4. i) Σωστό είναι το (γ).

ii) Είναι: $\lambda = v / f = \frac{3 \text{ m/sec}}{2 \text{ sec}^{-1}} = 1,5 \text{ m}$, και

$$(B\Sigma) = \sqrt{(8 \text{ m})^2 + (6 \text{ m})^2} = 10 \text{ m}.$$

$$\text{Άρα } (B\Sigma) - (A\Sigma) = 4 \text{ m}.$$

Η διαφορά αυτή δεν είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του λ , ούτε περιττό πολλαπλάσιο του $\lambda/2$. Γι αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή σχέση για το πλάτος:

$$|A'| = \left| 2A \sin 2\pi \frac{r_1 - r_2}{2\lambda} \right| = 2A \left| \sin 2\pi \frac{4}{2 \cdot 1,5} \right| = 2A \left| \sin \frac{8\pi}{3} \right| = 2A \left| \sin \frac{2\pi}{3} \right| = 2A \left| \frac{1}{2} \right|$$

Δηλαδή: $|A'| = A = 2 \text{ cm}$

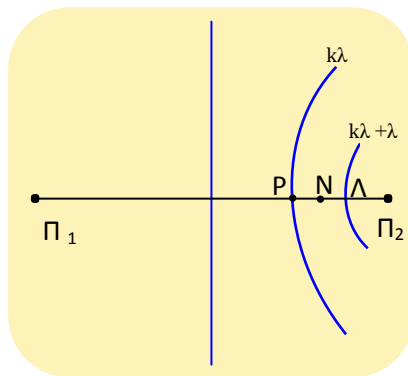
5. Είναι: $\omega = 8\pi \text{ rad/sec}$, άρα $f = 4 \text{ Hz}$ και $T = 1/4 \text{ sec}$, $\lambda = vT = 4 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \cdot \frac{1}{4} \text{ sec} = 1 \text{ m}$

Το κύμα της πλησιέστερης πηγής φτάνει στο φελλό τη στιγμή $t_1 = \frac{2,75}{4} \text{ sec}$ και τον θέτει σε ταλάντωση χωρίς αρχική φάση με αρχική ταχύτητα $+0,3 \cdot 8\pi \text{ m/sec}$ και πλάτος $0,3 \text{ m}$. Τη στιγμή $t_2 = \frac{3,25}{4} \text{ sec}$ καταφτάνει και το κύμα της δεύτερης

πηγής. Το χρονικό διάστημα $t_2 - t_1 = \frac{0,5 \text{ m}}{4 \text{ m/sec}} = \frac{0,5}{4} \text{ sec}$ είναι ίσο με το μισό της

περίοδου της ταλάντωσης, άρα ο φελλός έχοντας εκτελέσει μισή ταλάντωση πλάτους $A = 0,3 \text{ m}$ θα βρίσκεται τη στιγμή t_2 στη θέση ισορροπίας του κινούμενος προς τα κάτω με ταχύτητα $-A\omega$. Την ίδια στιγμή, το κύμα της δεύτερης πηγής εξαναγκάζει το φελλό να ξεκινήσει και μια νέα ταλάντωση χωρίς αρχική φάση με αρχική ταχύτητα $+A\omega$. Το αποτέλεσμα είναι να αλληλοαναιρεθούν οι δύο ταχύτητες κι έτσι ο φελλός να ακινητοποιηθεί. Τα δύο κύματα θα φτάνουν πλέον στο φελλό με διαφορά φάσης π κι έτσι θα παραμένει ακίνητος.

Παρατήρηση: η διαφορά των αποστάσεων του φελλού από τις δύο πηγές, η οποία είναι: $r_1 - r_2 = 3,25 \text{ m} - 2,75 \text{ m} = 0,5 \text{ m}$, δηλαδή $r_1 - r_2 = \lambda/2$, μας πληροφορεί ότι **μετά τη συμβολή** ο φελλός θα παραμένει ακίνητος, δε μας πληροφορεί όμως τι συμβαίνει πριν τη συμβολή των κυμάτων. Έτσι, η απάντηση ότι ο ισχυρισμός που αναφέρεται στην εκφώνηση είναι λάθος γιατί στη θέση του φελλού έχουμε απόσβεση κι έτσι θα παραμένει ακίνητος δεν πρέπει να θεωρηθεί σωστή.



6. α) Στο σχήμα φαίνονται δύο διαδοχικές υπερβολές ενίσχυσης που η διαφορά των αποστάσεων των σημείων τους από τις δύο πηγές είναι $k\lambda$ και $k\lambda + \lambda$, αντίστοιχα. Είναι:

$$\Lambda\Pi_1 - \Lambda\Pi_2 = k\lambda + \lambda \quad (1) \text{ και}$$

$$P\Pi_1 - P\Pi_2 = k\lambda \quad (2)$$

με αφαίρεση της (2) από την (1) προκύπτει :

$$(\Lambda\Pi_1 - P\Pi_1) + (P\Pi_2 - \Lambda\Pi_2) = \lambda$$

$$\text{ή } 2(AP) = \lambda \rightarrow (AP) = \frac{\lambda}{2}$$

β) Έστω N το μέσον του PΛ, οπότε $(PN) = (NA) = \frac{\lambda}{4}$. Είναι:

$$N\Pi_1 - N\Pi_2 = \left(\Lambda\Pi_1 - \frac{\lambda}{4} \right) - \left(\frac{\lambda}{4} + \Lambda\Pi_2 \right) = (\Lambda\Pi_1 - \Lambda\Pi_2) - \frac{\lambda}{2} = k\lambda + \lambda - \frac{\lambda}{2} = k\lambda + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

Δηλαδή η διαφορά των αποστάσεων του N από τις δύο πηγές ικανοποιεί τη συνθήκη για απόσβεση, μετά τη συμβολή των κυμάτων, στο σημείο αυτό.

7. Στην πρώτη περίπτωση είναι:

$$|A'| = \left| 2A \sin 2\pi \frac{d_1 - d_2}{2\lambda} \right| = 2A \left| \sin 2\pi \frac{\lambda/3}{2\lambda} \right| = 2A \left| \sin \frac{\pi}{3} \right| = 2A \left| \frac{1}{2} \right| = A = 10 \text{ cm}$$

$$\text{Δηλαδή: } |A'| = A = 10 \text{ cm}$$

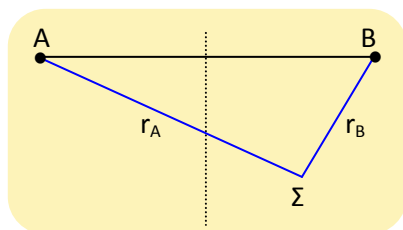
Ενώ στη δεύτερη περίπτωση είναι:

$$|A'| = \left| 2A \sin 2\pi \frac{d_1 - d_2}{2\lambda} \right| = 2A \left| \sin \cancel{\pi} \frac{(2k+1)\cancel{\lambda}}{\cancel{2}\cancel{\lambda}} \right| = 2A \left| \sin (2k+1)\frac{\pi}{4} \right| = \cancel{2}A \left| \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \right| = A\sqrt{2} = 10\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\text{Δηλαδή: } |A'| = 10\sqrt{2} \text{ cm}$$



8. Α. Σωστή είναι η (β).



Είναι: $r_A - r_B = v\Delta t = 6 \frac{m}{sec} \cdot 0,25 \cancel{sec} = 1,5 m = 3\lambda$,

άρα στο Σ έχουμε ενισχυτική συμβολή και το πλάτος ταλάντωσής του θα είναι:

$A' = 2A = 20 \text{ cm}$ ή $0,2 \text{ m}$.

Β. Σωστή είναι η (γ). Είναι: $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{6 \text{ m/sec}}{0,5 \text{ m}} = \underline{12 \text{ Hz}}$.

Γ. Η (α). Επειδή: $r_A - r_B = 1,5 \text{ m}$ και $r_A = 2r_B$, προκύπτει: $r_B = 1,5 \text{ m}$ και $r_A = 3 \text{ m}$.

Άρα η εξίσωση ταλάντωσης του Σ μετά τη συμβολή των κυμάτων σ' αυτό θα είναι:

$$\begin{aligned} \psi &= 0,2 \sin 2\pi \frac{r_A - r_B}{2\lambda} \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_A + r_B}{2\lambda} \right) = 0,2 \sin \cancel{\pi} \frac{3\cancel{\lambda}}{\cancel{\lambda}} \eta \mu 2\pi \left(12t - \frac{3 + 1,5}{2 \cdot 0,5} \right) \\ &= 0,2 \sin 3\pi \cdot \eta \mu 2\pi (12t - 4,5) \end{aligned}$$

Άρα: $\psi = -0,2 \eta \mu 2\pi (12t - 4,5)$ (S.I)

Τάσος Τζανόπουλος



Email to: tasos_tzanopoulos@yahoo.com