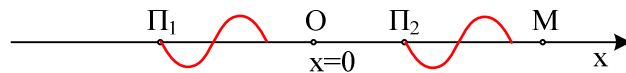


ΣΥΜΒΟΛΗ ΔΥΟ ΚΥΜΑΤΩΝ ΙΔΙΟΥ ΠΛΑΤΟΥΣ- ΙΔΙΑΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΠΟΥ

ΔΙΑΔΙΔΟΝΤΑΙ ΣΤΟ ΙΔΙΟ ΜΕΣΟ ΣΤΗΝ ΙΔΙΑ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΚΑΙ ΦΟΡΑ

Θεωρούμε δύο πηγές αρμονικών κυμάτων Π_1, Π_2 σ' ένα γραμμικό ομογενές ελαστικό μέσο. Οι πηγές απέχουν απόσταση $2d$. Αρχή μέτρησης των αποστάσεων θεωρούμε το σημείο O , που βρίσκεται στο μέσο της απόστασης των δύο πηγών, ενώ θετική φορά για τον άξονα x λαμβάνουμε προς τα δεξιά. Αρχή μέτρησης του χρόνου ($t=0$) θεωρούμε τη χρονική στιγμή που αρχίζουν να ταλαντώνονται εγκάρσια οι δύο πηγές, με την ίδια συχνότητα f και το ίδιο πλάτος A , εκτελώντας ΑΑΤ της μορφής: $y = A\eta\mu\omega t$.

Τα κύματα που προέρχονται από τις δύο πηγές διαδίδονται κατά την ίδια διεύθυνση και φορά για όλα τα σημεία του άξονα x που βρίσκονται δεξιά της Π_2 και αριστερά της Π_1 .



Έστω τυχαίο σημείο M του ελαστικού μέσου σε απόσταση x από το O , δεξιά της Π_2 . Οι εξισώσεις ταλάντωσης του M λόγω των δύο κυμάτων που φθάνουν σ' αυτό από τις πηγές Π_1, Π_2 δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις:

$$y_1 = A\eta\mu\omega(t - \frac{x+d}{v}) = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x+d}{\lambda})$$

$$y_2 = A\eta\mu\omega(t - \frac{x-d}{v}) = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x-d}{\lambda})$$

Η συνολική απομάκρυνση του M υπολογίζεται από την αρχή της επαλληλίας:

$$y = y_1 + y_2 = A \left[\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x+d}{\lambda}) + \eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x-d}{\lambda}) \right]$$

Με βάση τη γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta = 2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2}\eta\mu\frac{\alpha-\beta}{2}, \text{ η πιο πάνω σχέση γράφεται:}$$

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{2\pi d}{\lambda} - \frac{2\pi t}{T} + \frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{2\pi d}{\lambda}}{2}\eta\mu\frac{\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{2\pi d}{\lambda} + \frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{2\pi d}{\lambda}}{2} \Rightarrow$$

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu(-\frac{2\pi d}{\lambda})\eta\mu(\frac{\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}}{2}) \Rightarrow y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi d}{\lambda}\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$$

Η τελευταία σχέση εμφανίζει και **χρονική και τοπική περιοδικότητα στη φάση**, αφού:

$\varphi = 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$. Άρα **αντιστοιχεί σε κύμα ίδιας συχνότητας** με τη συχνότητα των

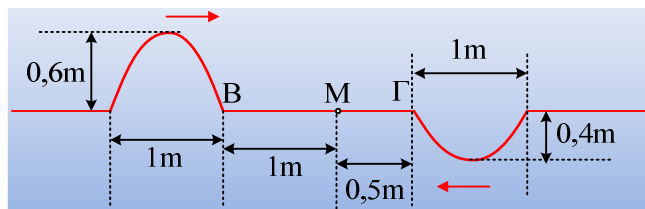
κυμάτων που συμβάλλουν, του οποίου το **πλάτος**: $|A'| = 2A \left| \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi d}{\lambda} \right|$ **εξαρτάται από την απόσταση $2d$ μεταξύ των πηγών.**

Παρατήρηση

Για τα σημεία που περιλαμβάνονται μεταξύ των δύο πηγών, τα κύματα συμβάλλουν έχοντας ίδια διεύθυνση αλλά αντίθετη φορά. Τι συμβαίνει στην περίπτωση αυτή; Μέχρι πριν λίγο θα έλεγα ότι σχηματίζεται στάσιμο. Μετά όμως από προβληματισμό, τείνω να συμφωνήσω ότι δε δημιουργείται στάσιμο, διότι αν σχηματίζονταν στάσιμο, **η ενέργεια θα παγιδευόταν** μεταξύ των δεσμών, με αποτέλεσμα δεξιά της Π_2 και αριστερά της Π_1 να διαδίδεται μόνο ένα κύμα. Κάτι τέτοιο φαίνεται να μην ισχύει, αφού σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας τα κύματα διαδίδονται ανεξάρτητα το ένα από το άλλο και ως εκ τούτου **στο διάστημα μεταξύ των πηγών η μελέτη πρέπει να βασίζεται στη συμβολή κυμάτων από σύγχρονες πηγές.**

Συμβολή δύο παλμών.

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, διαδίδονται αντίθετα δύο αρμονικοί παλμοί και σε μια στιγμή που θεωρούμε $t_0=0$, η μορφή του μέσου, είναι αυτή του παρακάτω σχήματος.



Το χρονικό διάστημα που διαρκεί η ταλάντωση του σημείου B είναι $\Delta t=1s$. Αντλώντας δεδομένα από το παραπάνω σχήμα, να υπολογίσετε για την χρονική στιγμή $t' = \frac{7}{6}s$, την απομάκρυνση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σημείου M.

Απάντηση:

Το σημείο B θα ταλαντώνεται, για όσο χρόνο ο παλμός θα χρειαστεί να μετακινηθεί κατά $d = \frac{1}{2}\lambda = 1m$, συνεπώς η ταχύτητα διάδοσης της κυματομορφής είναι $v = \frac{d}{\Delta t} = 1m/s$, ενώ $\lambda = 2m$ και $f = \frac{v}{\lambda} = 0,5Hz$. Με βάση αυτά η απομάκρυνση του σημείου B θα είναι της μορφής $y_B = A_1 \sin \omega t$ ή $y_B = 0,6 \cdot \eta \mu \pi t$. Αλλά τότε η αντίστοιχη εξίσωση απομάκρυνσης του σημείου M, θεωρώντας σαν πηγή του κύματος το σημείο B, θα είναι:

$$y_{M1} = 0,6 \cdot \eta \mu \pi (t - t_1) = 0,6 \cdot \eta \mu \pi \left(t - \frac{(BM)}{v} \right) \text{ ή}$$

$$y_{M1} = 0,6 \cdot \eta \mu \pi (t - 1) \quad (\text{μονάδες στο S.I.}) \text{ με } 1s \leq t \leq 2s$$

Εξάλλου, η απομάκρυνση του σημείου Γ, (το οποίο θα θεωρήσουμε πηγή του δεύτερου κύματος που διαδίδεται προς τα αριστερά) είναι $y_\Gamma = A_2 \cdot \eta \mu (\omega t + \pi)$ ή $y_\Gamma = 0,4 \cdot \eta \mu (\pi t + \pi)$. Οπότε η απομάκρυνση του σημείου M, που οφείλεται στο δεύτερο κύμα, θα είναι της μορφής:

$$y_{M2} = 0,4 \cdot \eta \mu (\pi (t - t_2) + \pi) = 0,4 \cdot \eta \mu \left(\pi \left(t - \frac{(GM)}{v} \right) + \pi \right) = 0,4 \cdot \eta \mu \left(\pi \left(t - \frac{1}{2} \right) + \pi \right) \text{ ή}$$

$$y_{M2} = 0,4 \cdot \eta \mu \left(\pi t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{μονάδες στο S.I.}) \text{ με } 0,5s \leq t \leq 1,5s$$

Τη στιγμή λοιπόν $t' = 7/6s$ το σημείο M εκτελεί σύνθετη ταλάντωση, αφού έχουν φτάσει και οι δυο κυματομορφές, οι οποίες συμβάλουν. Οπότε με βάση την αρχή της επαλληλίας για την απομάκρυνση έχουμε:

$$y = y_1 + y_2 = 0,6 \cdot \eta \mu \pi (t - 1) + 0,4 \cdot \eta \mu \left(\pi t + \frac{\pi}{2} \right) = 0,6 \cdot \eta \mu \pi \left(\frac{7}{6} - 1 \right) + 0,4 \cdot \eta \mu \left(\frac{7\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow$$

$$y = 0,6 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right) + 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 0,3\text{m} - 0,4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\text{m} \approx -0,05\text{m}$$

Για την ταχύτητα ταλάντωσης του Μ:

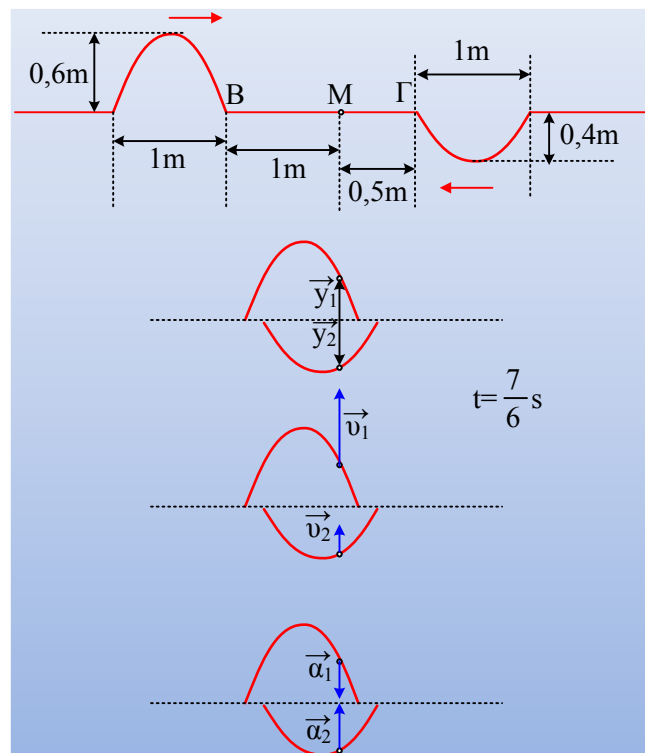
$$\begin{aligned} v &= v_1 + v_2 = 0,6\pi \cdot \sigma\upsilon\nu(t-1) + 0,4\pi \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0,6\pi \cdot \eta\mu\pi\left(\frac{7}{6} - 1\right) + 0,4\pi \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \\ v &= 0,6\pi \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6}\right) - 0,4\pi \cdot \eta\mu\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 0,6\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\text{m/s} - 0,4\pi \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\text{m/s} \approx 2,26\text{m/s} \end{aligned}$$

Τέλος για την επιτάχυνση του Μ έχουμε:

$$a = a_1 + a_2 = -\omega^2 y_1 - \omega^2 y_2 = -\omega^2 (y_1 + y_2) = -\omega^2 y = -\pi^2 \cdot (-0,05)\text{m/s}^2 \approx 0,5\text{m/s}^2$$

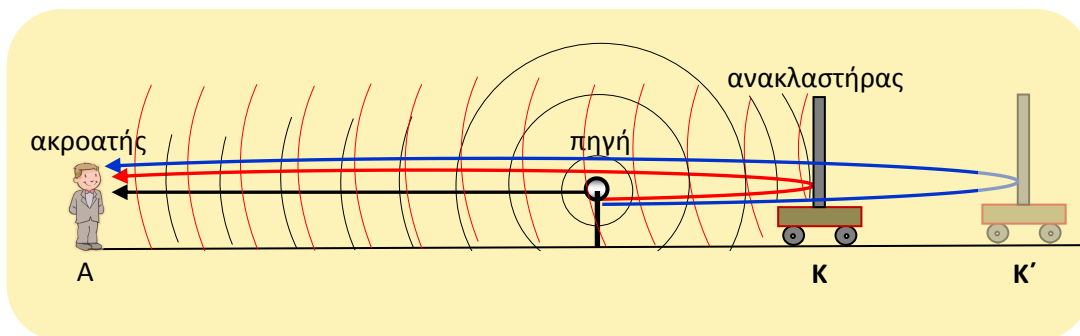
Σχόλιο:

Τη στιγμή t' η κατάσταση στο σημείο Μ, είναι αυτή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, όπου έχουν σχεδιαστεί οι επιμέρους απομακρύνσεις, ταχύτητες και επιταχύνσεις του σημείου Μ.



dmargaris@sch.gr

ΣΥΜΒΟΛΗ ΑΠΟ ΑΝΑΚΛΑΣΗ



Από μία ηχογόνο πηγή Π εκπέμπονται ηχητικά κύματα τα οποία μπορούν να φτάσουν στον ακροατή Α ή απευθείας (ακολουθώντας τη διαδρομή ΠΑ) ή αφού ανακλαστούν στον ανακλαστήρα Κ, ακολουθώντας τη διαδρομή ΠΚΑ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Έτσι, ο ακροατής Α ακούει συγχρόνως και τους δύο ήχους (τον απ' ευθείας και τον από ανάκλαση). Αρχικά, το αποτέλεσμα της συμβολής των δύο ήχων στα αυτιά του ακροατή είναι ένας ήχος μέγιστης έντασης. Απομακρύνουμε αργά – αργά τον ανακλαστήρα, οπότε ο ακροατής διαπιστώνει ότι η ένταση του ήχου βαθμιαία ελαττώνεται και κάποια στιγμή μηδενίζεται για πρώτη φορά. Τότε ο ανακλαστήρας έχει μετατοπιστεί κατά 42,5 cm.

Αν η ταχύτητα του ήχου είναι $v_H = 340 \text{ m/sec}$, πόσο είναι το μήκος κύματος και η συχνότητα του ήχου;

Η απάντηση:



Απάντηση.

Με τον ανακλαστήρα στη θέση Κ ισχύει: $(ΠΚΑ) - (ΠΑ) = κλ.$ (1)

Όταν ο ανακλαστήρας έλθει στη θέση Κ': $(ΠΚ'Α) - (ΠΑ) = κλ. + \frac{\lambda}{2}$ (2)

Αφαιρώντας την (1) από τη (2) βρίσκουμε:

$$(ΠΚ'Α) - (ΠΚΑ) = \frac{\lambda}{2}$$

$$\rightarrow 2(KK') = \frac{\lambda}{2}$$

$$\rightarrow (KK') = \frac{\lambda}{4}$$

$$\rightarrow \lambda = 4(KK') = \underline{1,7 \text{ m}}$$

$$\text{Άρα: } f = \frac{v}{\lambda} = \frac{340}{1,7} = \underline{200 \text{ Hz}}$$

Παρατήρηση 1^η: Η άσκηση προφανώς σας θυμίζει τη 2.47 σελ.83 του σχολικού.

Παρατήρηση 2^η: Επειδή ο ανακλαστήρας μετατοπίζεται αργά- αργά το φαινόμενο Doppler είναι αμελητέο.

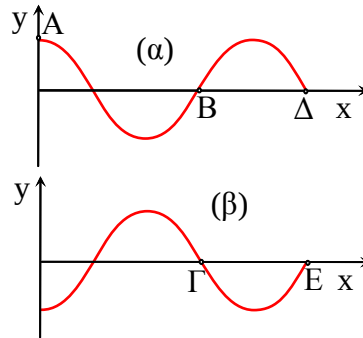
Τάσος Τζανόπουλος



Email to: tasos_tzanopoulos@yahoo.com

Στιγμιότυπο κύματος και φάσεις.

Δίνεται το στιγμιότυπο (α) του παρακάτω σχήματος κάποια χρονική στιγμή t_0 , για ένα κύμα που διαδίδεται προς τα δεξιά, χωρίς αρχική φάση, ξεκινώντας από την πηγή που θεωρούμε ότι βρίσκεται στη θέση $x=0$.



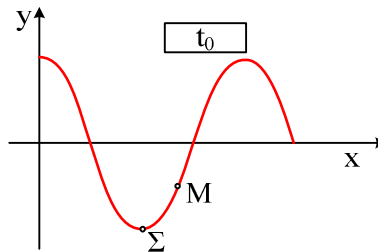
- Ποια η φάση του σημείου Δ;
- Για πόσο χρόνο ταλαντώνεται το σημείο B;
- Πόσες ταλαντώσεις έχει εκτελέσει η πηγή του κύματος;
- Αναφερόμενοι στο (β) σχήμα που το κύμα διαδίδεται επίσης προς τα δεξιά ξεκινώντας επίσης από τη θέση $x=0$:
 - Ποιες οι φάσεις των σημείων Γ και E;
 - Ποια η αρχική φάση της πηγής;

Απάντηση:

- Το σημείο Δ είναι έτοιμο να ξεκινήσει την ταλάντωσή του, ξεκινώντας την κίνησή του από τη θέση ισορροπίας, κινούμενο προς την θετική κατεύθυνση. Συνεπώς η φάση του είναι μηδενική.
- Αφού το κύμα έχει διαδοθεί κατά $\lambda/2$ πέραν του B, σημαίνει ότι το σημείο αυτό έχει εκτελέσει μισή ταλάντωση σε χρόνο $T/2$.
- Έχει διαδοθεί κύμα σε απόσταση $\lambda + \lambda/4$, συνεπώς η πηγή του κύματος έχει εκτελέσει 1,25 ταλαντώσεις.
 - Το σημείο E είναι έτοιμο να ξεκινήσει την ταλάντωσή του, ξεκινώντας την κίνησή του από τη θέση ισορροπίας, κινούμενο προς την αρνητική κατεύθυνση. Συνεπώς η φάση του είναι ίση με π . Άρα η φάση του Γ, το οποίο έχει κάνει ήδη μισή ταλάντωση, θα έχει φάση ίση με 2π .
 - Αφού το διαδιδόμενο κύμα στο σημείο που φτάνει έχει φάση π κινούμενο προς την αρνητική κατεύθυνση, συμπαιρνουμε ότι και όταν ξεκίνησε η πηγή την ταλάντωσή της κινήθηκε προς την αρνητική κατεύθυνση, έχοντας αρχική φάση π .

Στιγμιότυπα τρέχοντος και στάσιμου κύματος

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ένα στιγμιότυπο τη χρονική στιγμή t_0 , όπου η ταχύτητα του σημείου Σ είναι μηδενική.



Η περίοδος ταλάντωσης του σημείου Σ είναι $T=1\text{s}$.

A) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο τη χρονική στιγμή $t' = t_0 + 1,5\text{s}$, αν το κύμα είναι:

i) Τρέχον που διαδίδεται προς τα δεξιά.

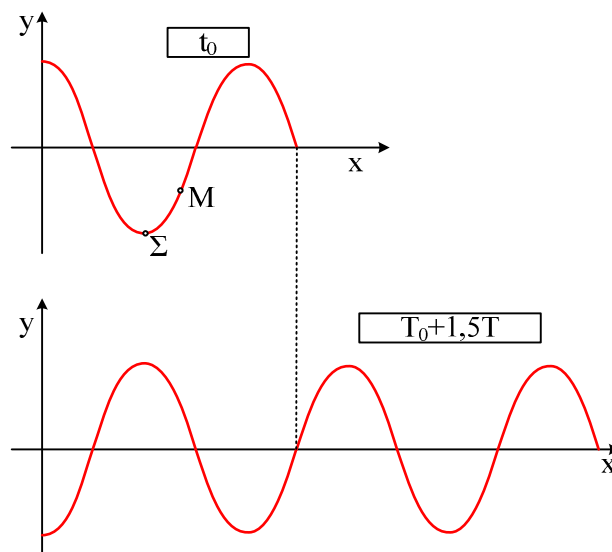
ii) Στάσιμο.

B) Αν η οριζόντια απόσταση των σημείων Σ και M είναι $d=\lambda/8$ πόση είναι η διαφορά φάσης μεταξύ τους στις δύο παραπάνω περιπτώσεις;

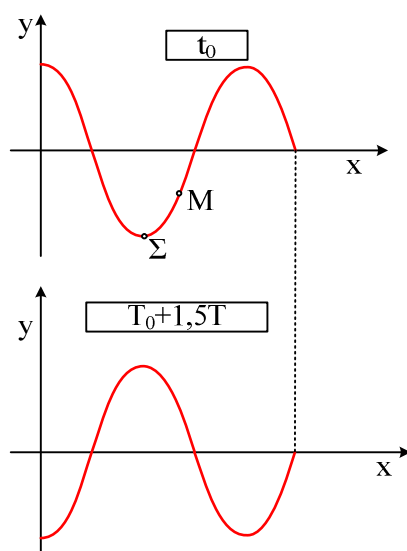
Απάντηση:

A) Το χρονικό διάστημα $1,5\text{s}$ αντιστοιχεί σε $T+T/2 = 3T/2$ και το σημείο στη θέση $x=0$ έχει εκτελέσει μιάμιση ταλάντωση και βρίσκεται στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσής του.

i) Αν το κύμα είναι τρέχον θα έχει διαδοθεί κατά $\Delta x = v \cdot \Delta t = v \cdot 1,5T = 1,5\lambda$ και το ζητούμενο στιγμιότυπο είναι:



ii) Αν το κύμα είναι στάσιμο θα έχουμε:



B) Αν το κύμα είναι τρέχον, για τη διαφορά φάσης μεταξύ Σ και Μ έχουμε:

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} = 2\pi \frac{\lambda/8}{\lambda} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

(η παραπάνω σχέση πρέπει να αποδεικνύεται)

Αν έχουμε στάσιμο κύμα η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο σημείων είναι μηδέν, αφού και τα δύο είναι μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών.

dmargaris@sch.gr

Στάσιμο κύμα πάνω σε χορδή.

Τεντωμένη χορδή από καουτσούκ έχει μήκος ℓ και τα δύο άκρα της Α και Β στερεωμένα σε ακλόνητα σημεία, ενώ η χορδή διατηρείται οριζόντια. Στο μέσο της χορδής Ο προκαλούμε απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση $y=0,05\eta\mu 20\pi t$ (S.I.). Τα παραγόμενα κύματα έχουν ταχύτητα διάδοσης στη χορδή $v=4\text{m/s}$. Όταν αποκατασταθεί μόνιμο φαινόμενο στην χορδή, διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν 4 σημεία που παραμένουν ακίνητα, εκτός των Α και Β.

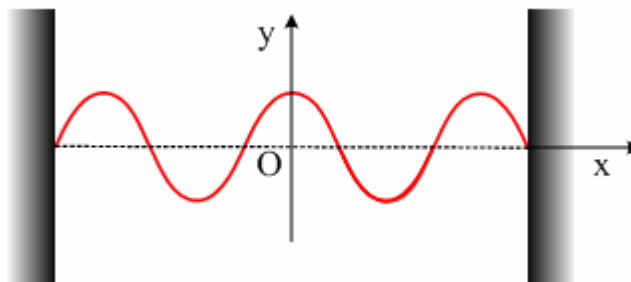
- Να βρείτε το μήκος της χορδής.
- Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος, αν τη χρονική στιγμή $t=0$ για το σημείο του μέσου της χορδής, το οποίο θεωρούμε ως αρχή του άξονα $x'x$, είναι $y=0$ και $V>0$.
- Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος την χρονική στιγμή $t=1/40\text{s}$.
- Αν το μέσον Ο της χορδής τεθεί σε ταλάντωση με εξίσωση $y=0,05\eta\mu 22\pi t$ (S.I.) θα δημιουργηθεί πάνω στη χορδή στάσιμο κύμα;
- Αν το μέσον Ο της χορδής τεθεί σε ταλάντωση με εξίσωση $y=0,05\eta\mu 32\pi t$ (S.I.) ποιο το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας του σημείου Ο;

Απάντηση:

Από την εξίσωση του κύματος έχουμε: $\omega=20\pi \rightarrow 2\pi f=20\pi \rightarrow f=10\text{Hz}$

Και από την θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής $v=\lambda f \rightarrow \lambda=v/f=4/10\text{m}=0,4\text{m}$.

- Αφού πάνω στη χορδή έχουμε 4 δεσμούς εκτός από τα δύο άκρα της, ένα στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος που δημιουργείται είναι αυτή του σχήματος.



Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών είναι $\lambda/2$ όπου λ το μήκος του τρέχοντος κύματος. Άρα $\ell=5\cdot\lambda/2 \rightarrow$

$$\ell = 5 \cdot 0,4/2 \text{ m} = 1 \text{ m}.$$

ii) Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι:

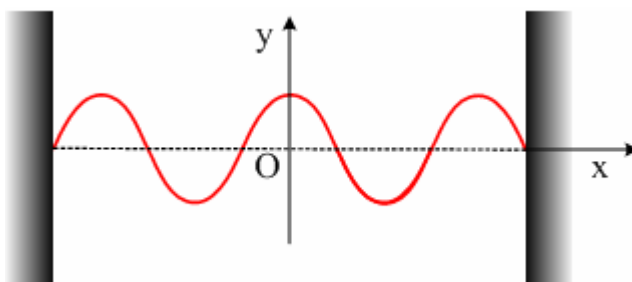
$$y = 2A \sin(2\pi x/\lambda) \cdot \eta\mu(2\pi t/T) \quad \text{ή}$$

$$y = 0,1 \cdot \sin(5\pi x) \cdot \eta\mu(20\pi t)$$

iii) Τη χρονική στιγμή $t = 1/40 \text{ s}$ η εξίσωση (1) δίνει:

$$y = 0,1 \cdot \sin(5\pi x) \cdot \eta\mu(20\pi t) = 0,1 \cdot \sin(5\pi x) \cdot \eta\mu(20\pi \frac{1}{40}) = 0,1 \sin(5\pi x)$$

Η γραφική παράσταση της σχέσης (2) είναι του παρακάτω σχήματος.



iv) Αν $y = 0,05 \eta\mu 22\pi t \rightarrow f_1 = 11 \text{ Hz}$ τότε $\lambda_1 = v/f_1 = 4/11 \text{ m}$

Για να έχουμε δημιουργία στάσιμου κύματος θα πρέπει πάνω στη χορδή να δημιουργηθούν ακέραιο πλήθος $\frac{\lambda}{2}$ (ακέραιο πλήθος «στάσιμων»). Δηλαδή πρέπει:

$$\ell = N \cdot \frac{\lambda}{2} \rightarrow$$

$$N = \frac{l}{\lambda/2} = \frac{1}{2/11} = \frac{11}{2} = 5,5.$$

Προφανώς δεν μπορούν να δημιουργηθούν 5,5 στάσιμα και να έχουμε δεσμούς στα δύο άκρα. Άρα δεν σχηματίζεται στάσιμο κύμα πάνω στη χορδή, αλλά μια πολύπλοκη κυματική κατάσταση.

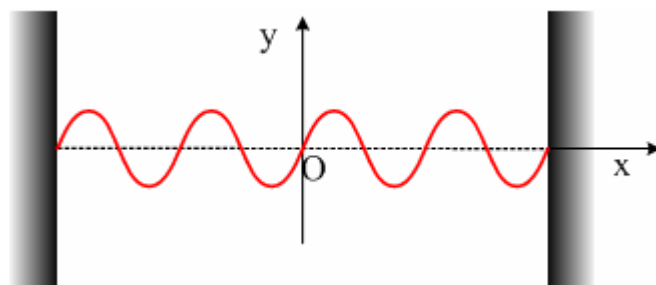
v) Αν το μέσον O της χορδής τεθεί σε ταλάντωση με εξίσωση $y = 0,05 \eta\mu 32\pi t$ τότε

$$f = 16 \text{ Hz} \text{ και } \lambda_2 = \frac{v}{f} = \frac{4}{16} = 0,25 \text{ m}$$

Αν δημιουργηθεί στάσιμο κύμα τότε:

$$\ell = N \cdot \frac{\lambda}{2} \rightarrow N = \frac{l}{\lambda/2} = \frac{1}{0,25/2} = \frac{2}{0,25} = 8$$

Πάνω στη χορδή δηλαδή δημιουργούνται 8 στάσιμα κύματα, οπότε στη θέση $x=0$ θα δημιουργηθεί δεσμός, αφού ένα στιγμιότυπο μπορεί να είναι το παρακάτω.



Το πλάτος ταλάντωσης του Ο είναι λοιπόν μηδενικό και $v_{\max}=0$.

dmargaris@sch.gr

Στάσιμα κύματα πάνω σε χορδή με σταθερά άκρα.

Τεντωμένη χορδή από καουτσούκ έχει μήκος l και τα δύο άκρα της A και B στερεωμένα σε ακλόνητα σημεία, ενώ η χορδή διατηρείται οριζόντια.. Στο μέσο της χορδής O προκαλούμε απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση $y = 0,05\eta\mu 20\pi t$ (S.I.). Τα παραγόμενα κύματα έχουν ταχύτητα διάδοσης στην χορδή $v = 4$ m/s. Όταν αποκατασταθεί μόνιμο φαινόμενο στην χορδή, διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν 4 σημεία που παραμένουν ακίνητα, εκτός των A και B.

A. Να βρείτε το μήκος l της χορδής.

B. Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος, αν την χρονική στιγμή $t = 0$ για το σημείο του μέσου της χορδής, το οποίο θεωρούμε ως αρχή του άξονα $x'x$, είναι $y = 0$ και $V > 0$.

Γ. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος την χρονική στιγμή $t = \frac{1}{40}$ s .

Δ. Να βρείτε την εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου M με $x_1 = 0,15$ m σε συνάρτηση με τον χρόνο.

E. Πόσοι δεσμοί θα δημιουργηθούν στην χορδή αν η συχνότητα της ταλάντωσης της πηγής γίνει 18 Hz;

ΣΤ. Αν η συχνότητα γίνει 25 Hz θα δημιουργηθούν στάσιμα κύματα στην χορδή; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Z. Αντικαθιστούμε την χορδή με άλλη ατσάλινη, ίδιου μήκους l . Θέτουμε το μέσο της χορδής σε ταλάντωση με εξίσωση $y = 0,05\eta\mu 20\pi t$ (S.I.) και παρατηρούμε ότι δημιουργούνται στάσιμα κύματα στην χορδή όπου υπάρχουν συνολικά 8 δεσμοί. Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων στην ατσάλινη χορδή.

H. Να βρείτε τον λόγο των μέγιστων ταχυτήτων ταλάντωσης του σημείου O στις δύο παραπάνω χορδές.

Λύση

A. Η εξίσωση της απλής αρμονικής ταλάντωσης είναι: $y = A\eta\mu\omega t$. Συγκρίνοντας την γενική αυτή εξίσωση με την εξίσωση της ταλάντωσης της πηγής, που μας δίνεται,

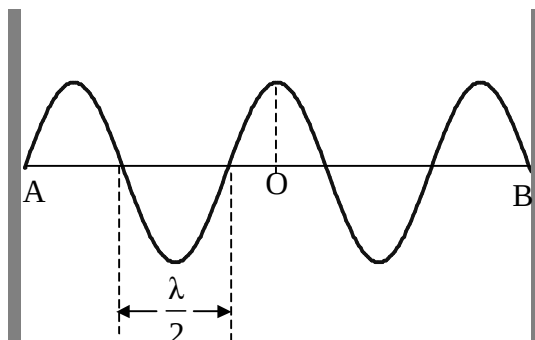
έχουμε: $A = 0,05$ m, $\omega = 20\pi$ rad/s. Από την σχέση: $\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow f = 10$ Hz .

Αφού τα δύο άκρα ης χορδής είναι ακλόνητα, στα σημεία αυτά δημιουργούνται

δεσμοί. Αφού οι δεσμοί είναι συνολικά 6, το μήκος της χορδής θα είναι $l = \frac{5\lambda}{2}$ (1) ,

όπως φαίνεται και στο σχήμα. Από την θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής, έχουμε:

$v = \lambda \cdot f \Rightarrow \lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow \lambda = 0,4$ m . Οπότε η (1) δίνει: $l = 1$ m.



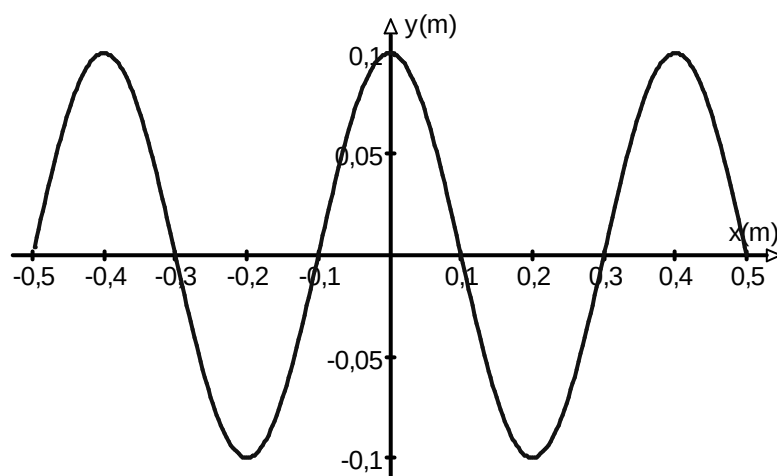
Β. Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι: $y = 2A \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \eta \mu \frac{2\pi t}{T}$. Με

αντικατάσταση, έχουμε: $y = 0,1 \sin \frac{2\pi x}{0,4} \eta \mu \frac{2\pi t}{\frac{1}{10}} \Rightarrow \boxed{y = 0,1 \sin 5\pi x \eta \mu 20\pi t}$ (2)

Γ. Το στιγμιότυπο του κύματος προκύπτει, αν αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (2) την τιμή για τον χρόνο $t = \frac{1}{40}$ s. Έτσι έχουμε:

$$y = 0,1 \sin 5\pi x \eta \mu 20\pi \frac{1}{40} \Rightarrow y = 0,1 \sin 5\pi x \quad (-0,5 \text{ m} \leq x \leq 0,5 \text{ m}).$$

Η γραφική παράσταση της σχέσης αυτής αποτελεί το στιγμιότυπο του κύματος.



Δ. Το σημείο Μ με συντεταγμένη $x_1 = 0,15$ m, θα έχει πλάτος

$$|A'| = 0,1 |\sin 5\pi x_1| \Rightarrow |A'| = 0,1 |\sin 5\pi \cdot 0,15| \Rightarrow |A'| = 0,1 \left| \sin \frac{3\pi}{4} \right| \Rightarrow$$

$$|A'| = 0,1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow |A'| = 0,05\sqrt{2} \text{ m}$$

Η εξίσωση της ταχύτητας του σημείου Μ, είναι:

$$v = \omega A' \sin \omega t \Rightarrow \boxed{v = -\pi\sqrt{2} \sin 20\pi t} \text{ (S.I.)}$$

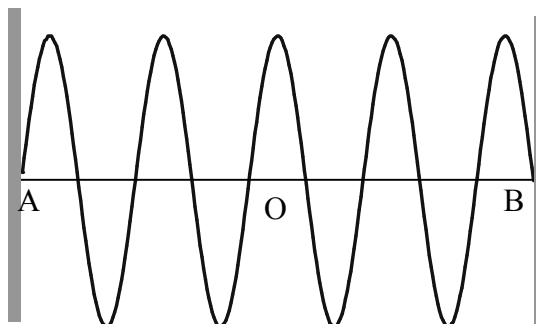
Ε. Αν η συχνότητα της ταλάντωσης της πηγής γίνει $f_2 = 18$ Hz, θα έχουμε:

$$v = \lambda_2 f_2 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{v}{f_2} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{2}{9} \text{ m}. \quad (\text{Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων δεν αλλάζει,}$$

γιατί εξαρτάται από το μέσο διάδοσης και όχι από την συχνότητα). Τα άκρα Α και Β της χορδής είναι δεσμοί, ενώ το μέσο Ο κοιλία. Άρα στην χορδή θα έχουμε περιττό

$$\text{αριθμό ημικυμάτων. Δηλ. } l = (2k+1) \frac{\lambda}{2} \Rightarrow 2k+1 = \frac{2l}{\lambda} \Rightarrow k = \frac{l}{\lambda} - \frac{1}{2} \Rightarrow k = 4. \text{ Άρα}$$

στην χορδή έχουμε $2k+1 = 9$ ημικύματα, επομένως οι δεσμοί είναι συνολικά 10 (συμπεριλαμβάνονται και τα σημεία Α, Β).



Στ. Όπως είδαμε στο ερώτημα Ε, για να δημιουργηθούν στάσιμα κύματα στην χορδή, πρέπει να ισχύει η σχέση:

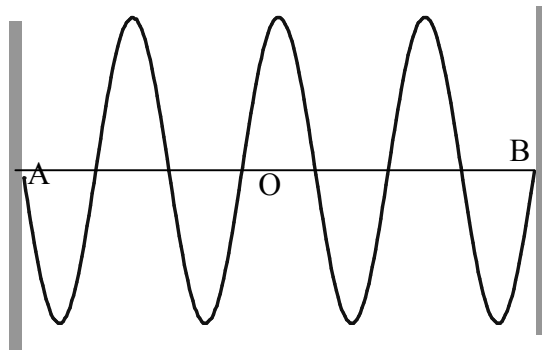
$$l = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2l}{2k+1} \Rightarrow \frac{v}{f} = \frac{2l}{2k+1} \Rightarrow f = \frac{(2k+1)v}{2l} \Rightarrow f = (2k+1) \cdot 2 \text{ Hz}$$

Η συχνότητα $f = 25 \text{ Hz}$ δεν ικανοποιεί την παραπάνω σχέση, άρα δεν δημιουργούνται στάσιμα κύματα στην χορδή για αυτήν την συχνότητα.

Ζ. Αφού δημιουργούνται 8 συνολικά δεσμοί στην χορδή, έχουμε:

$$l = \frac{7\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2l}{7} \Rightarrow \lambda = \frac{2}{7} \text{ m. Από την θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής έχουμε:}$$

$$v = \lambda \cdot f \Rightarrow v = \frac{20}{7} \text{ m/s.}$$



Η. Το σημείο Ο είναι κοιλία και στις δύο περιπτώσεις, δηλ. ταλαντώνεται με μέγιστο πλάτος $2A = 0,1 \text{ m}$. Η κυκλική συχνότητα και στις δύο περιπτώσεις είναι η ίδια $\omega = 20\pi \text{ rad/s}$. Επομένως από την σχέση $v_{\max} = \omega A$, οι δύο μέγιστες ταχύτητες είναι ίσες. Άρα ο λόγος των μέγιστων ταχυτήτων, για τις δύο χορδές, είναι 1.

Μιχάλης Κοκολίνας

Στάσιμα κύματα πάνω σε χορδή με σταθερά άκρα.

Τεντωμένη χορδή από καουτσούκ έχει μήκος l και τα δύο άκρα της A και B στερεωμένα σε ακλόνητα σημεία, ενώ η χορδή διατηρείται οριζόντια.. Στο μέσο της χορδής O προκαλούμε απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση $y = 0,05\eta\mu 20\pi t$ (S.I.). Τα παραγόμενα κύματα έχουν ταχύτητα διάδοσης στην χορδή $v = 4$ m/s. Όταν αποκατασταθεί μόνιμο φαινόμενο στην χορδή, διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν 4 σημεία που παραμένουν ακίνητα, εκτός των A και B.

A. Να βρείτε το μήκος l της χορδής.

B. Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος, αν την χρονική στιγμή $t = 0$ για το σημείο του μέσου της χορδής, το οποίο θεωρούμε ως αρχή του άξονα $x'x$, είναι $y = 0$ και $V > 0$.

Γ. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος την χρονική στιγμή $t = \frac{1}{40}$ s .

Δ. Να βρείτε την εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου M με $x_1 = 0,15$ m σε συνάρτηση με τον χρόνο.

E. Πόσοι δεσμοί θα δημιουργηθούν στην χορδή αν η συχνότητα της ταλάντωσης της πηγής γίνει 18 Hz;

ΣΤ. Αν η συχνότητα γίνει 25 Hz θα δημιουργηθούν στάσιμα κύματα στην χορδή; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Z. Αντικαθιστούμε την χορδή με άλλη ατσάλινη, ίδιου μήκους l . Θέτουμε το μέσο της χορδής σε ταλάντωση με εξίσωση $y = 0,05\eta\mu 20\pi t$ (S.I.) και παρατηρούμε ότι δημιουργούνται στάσιμα κύματα στην χορδή όπου υπάρχουν συνολικά 8 δεσμοί. Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων στην ατσάλινη χορδή.

H. Να βρείτε τον λόγο των μέγιστων ταχυτήτων ταλάντωσης του σημείου O στις δύο παραπάνω χορδές.

Λύση

A. Η εξίσωση της απλής αρμονικής ταλάντωσης είναι: $y = A\eta\mu\omega t$. Συγκρίνοντας την γενική αυτή εξίσωση με την εξίσωση της ταλάντωσης της πηγής, που μας δίνεται,

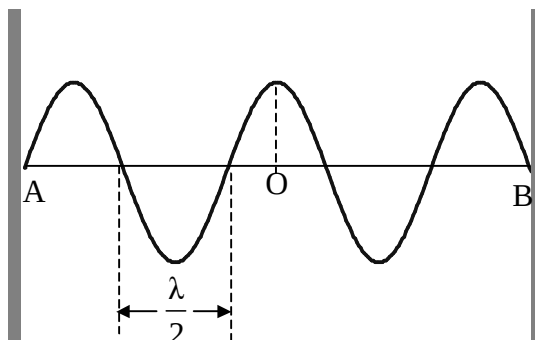
έχουμε: $A = 0,05$ m, $\omega = 20\pi$ rad/s. Από την σχέση: $\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow f = 10$ Hz .

Αφού τα δύο άκρα ης χορδής είναι ακλόνητα, στα σημεία αυτά δημιουργούνται

δεσμοί. Αφού οι δεσμοί είναι συνολικά 6, το μήκος της χορδής θα είναι $l = \frac{5\lambda}{2}$ (1) ,

όπως φαίνεται και στο σχήμα. Από την θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής, έχουμε:

$v = \lambda \cdot f \Rightarrow \lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow \lambda = 0,4$ m . Οπότε η (1) δίνει: $l = 1$ m.



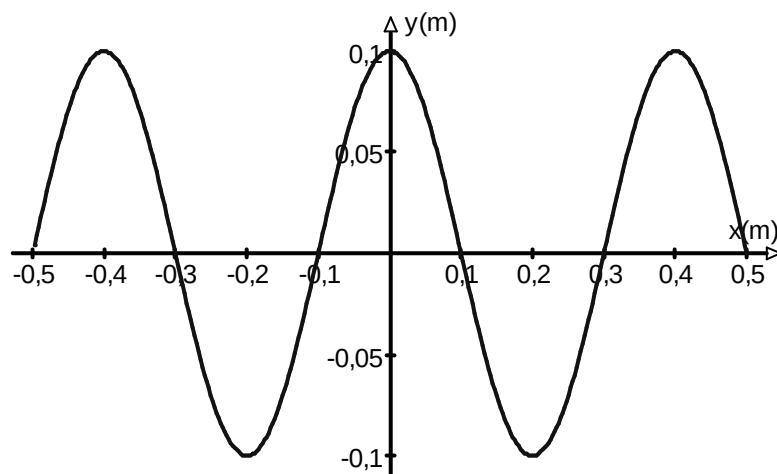
Β. Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι: $y = 2A \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \eta \mu \frac{2\pi t}{T}$. Με

αντικατάσταση, έχουμε: $y = 0,1 \sin \frac{2\pi x}{0,4} \eta \mu \frac{2\pi t}{\frac{1}{10}} \Rightarrow \boxed{y = 0,1 \sin 5\pi x \eta \mu 20\pi t}$ (2)

Γ. Το στιγμιότυπο του κύματος προκύπτει, αν αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (2) την τιμή για τον χρόνο $t = \frac{1}{40}$ s. Έτσι έχουμε:

$$y = 0,1 \sin 5\pi x \eta \mu 20\pi \frac{1}{40} \Rightarrow y = 0,1 \sin 5\pi x \quad (-0,5 \text{ m} \leq x \leq 0,5 \text{ m}).$$

Η γραφική παράσταση της σχέσης αυτής αποτελεί το στιγμιότυπο του κύματος.



Δ. Το σημείο Μ με συντεταγμένη $x_1 = 0,15$ m, θα έχει πλάτος

$$|A'| = 0,1 |\sin 5\pi x_1| \Rightarrow |A'| = 0,1 |\sin 5\pi \cdot 0,15| \Rightarrow |A'| = 0,1 \left| \sin \frac{3\pi}{4} \right| \Rightarrow$$

$$|A'| = 0,1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow |A'| = 0,05\sqrt{2} \text{ m}$$

Η εξίσωση της ταχύτητας του σημείου Μ, είναι:

$$v = \omega A' \sin \omega t \Rightarrow \boxed{v = -\pi\sqrt{2} \sin 20\pi t} \text{ (S.I.)}$$

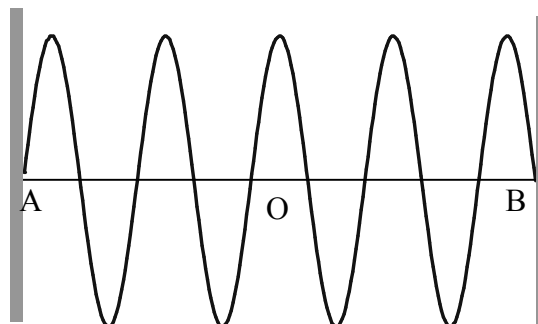
Ε. Αν η συχνότητα της ταλάντωσης της πηγής γίνει $f_2 = 18$ Hz, θα έχουμε:

$$v = \lambda_2 f_2 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{v}{f_2} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{2}{9} \text{ m}. \quad (\text{Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων δεν αλλάζει,}$$

γιατί εξαρτάται από το μέσο διάδοσης και όχι από την συχνότητα). Τα άκρα Α και Β της χορδής είναι δεσμοί, ενώ το μέσο Ο κοιλία. Άρα στην χορδή θα έχουμε περιττό

$$\text{αριθμό ημικυμάτων. Δηλ. } l = (2k+1) \frac{\lambda}{2} \Rightarrow 2k+1 = \frac{2l}{\lambda} \Rightarrow k = \frac{l}{\lambda} - \frac{1}{2} \Rightarrow k = 4. \text{ Άρα}$$

στην χορδή έχουμε $2k+1 = 9$ ημικύματα, επομένως οι δεσμοί είναι συνολικά 10 (συμπεριλαμβάνονται και τα σημεία Α, Β).



Στ. Όπως είδαμε στο ερώτημα Ε, για να δημιουργηθούν στάσιμα κύματα στην χορδή, πρέπει να ισχύει η σχέση:

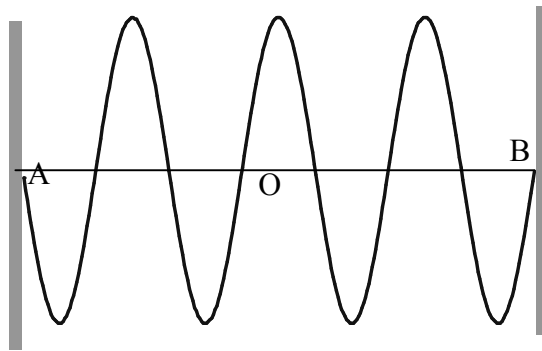
$$l = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2l}{2k+1} \Rightarrow \frac{v}{f} = \frac{2l}{2k+1} \Rightarrow f = \frac{(2k+1)v}{2l} \Rightarrow f = (2k+1) \cdot 2 \text{ Hz}$$

Η συχνότητα $f = 25 \text{ Hz}$ δεν ικανοποιεί την παραπάνω σχέση, άρα δεν δημιουργούνται στάσιμα κύματα στην χορδή για αυτήν την συχνότητα.

Ζ. Αφού δημιουργούνται 8 συνολικά δεσμοί στην χορδή, έχουμε:

$$l = \frac{7\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2l}{7} \Rightarrow \lambda = \frac{2}{7} \text{ m. Από την θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής έχουμε:}$$

$$v = \lambda \cdot f \Rightarrow v = \frac{20}{7} \text{ m/s.}$$

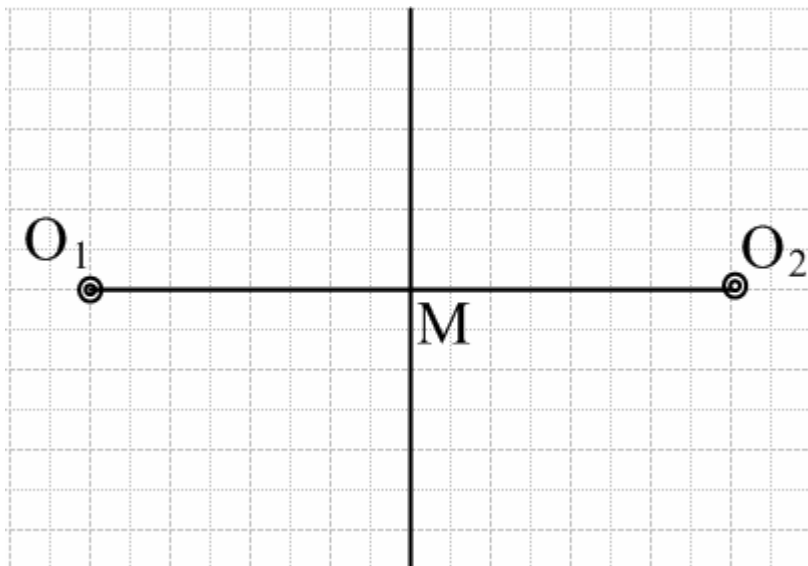


Η. Το σημείο Ο είναι κοιλία και στις δύο περιπτώσεις, δηλ. ταλαντώνεται με μέγιστο πλάτος $2A = 0,1 \text{ m}$. Η κυκλική συχνότητα και στις δύο περιπτώσεις είναι η ίδια $\omega = 20\pi \text{ rad/s}$. Επομένως από την σχέση $v_{\max} = \omega A$, οι δύο μέγιστες ταχύτητες είναι ίσες. Άρα ο λόγος των μέγιστων ταχυτήτων, για τις δύο χορδές, είναι 1.

Μιχάλης Κοκολίνης

Υπερβολές ενίσχυσης και απόσβεσης κατά τη συμβολή.

Με αφορμή την ανάρτηση [Συμβολή κυμάτων από σύγχρονες πηγές](#), και τα σχόλια που ακολούθησαν, ας δούμε πιο αναλυτικά ποια σημεία στην επιφάνεια ενός υγρού, στην οποία διαδίδονται δύο κύματα από σύγχρονες πηγές ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος και ποια παραμένουν ακίνητα.



Στην επιφάνεια ενός υγρού διαδίδονται (ας υποθέσουμε με σταθερό πλάτος!!!) δύο κύματα που προέρχονται από δύο σύγχρονες πηγές, με μήκος κύματος $\lambda=20\text{cm}$.

α) Να βρεθούν τα σημεία που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος και να σημειωθούν πάνω στο σχήμα, όταν η απόσταση των πηγών είναι:

- i) $d=39\text{cm}$ ii) $d=40\text{cm}$ iii) $d=41\text{cm}$, iv) 30cm

β) Πάνω στα παραπάνω σχήματα να σχεδιαστούν και οι αντίστοιχες γραμμές που να εμφανίζουν τα σημεία που παραμένουν διαρκώς ακίνητα.

Απάντηση:

α) Έστω ένα σημείο Σ μεταξύ των δύο πηγών όπου έχουμε ενίσχυση. Τότε:

$$|r_1 - r_2| = N \cdot \lambda \text{ όπου } N \text{ θετικός ακέραιος ή}$$

$$r_1 - r_2 = k \cdot \lambda, \text{ όπου } k \text{ ακέραιος. (1)}$$

i) Αλλά για $d=39\text{cm}$ έχουμε και $r_1 + r_2 = 39\text{cm}$ (2)

Από (1) και (2) με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$2r_1 = 39 + 20k \quad (\text{σε cm})$$

$$r_1 = 19,5 + 10k$$

$$\text{Αλλά } 0 < r_1 < 39 \text{ ή}$$

$$0 < 19,5 + 10k < 39 \text{ ή}$$

$$-1,95 < k < 1,95$$

Συνεπώς οι δυνατές τιμές του k είναι: $-1, 0, 1$.

Και οι αντίστοιχες τιμές για την απόσταση r_1 είναι:

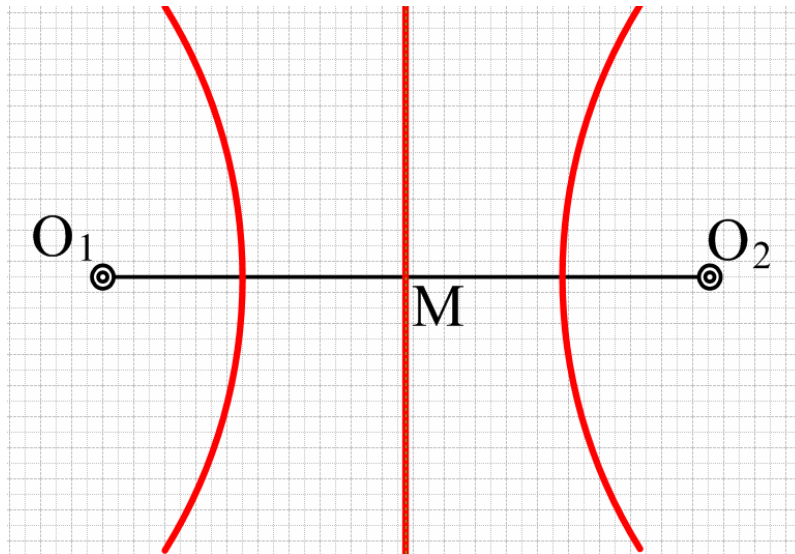
9,5cm, 19,5 cm και 29,5 cm

Συνεπώς έχουμε ενισχυτική συμβολή για όλα τα σημεία που βρίσκονται πάνω στη μεσοκάθετο και σε δύο υπερβολές, συμμετρικές ως προς αυτήν, που απέχουν κατά $\lambda/2$ (πάνω στην ευθεία που συνδέει τις δύο πηγές).

Ας πάρουμε τώρα ένα σημείο πάνω στην ευθεία O_1O_2 δεξιά της πηγής O_2 , το οποίο απέχει κατά x από την O_2 :

$$r_1 - r_2 = (d+x) - x = d = 39 \neq k \cdot \lambda$$

Έτσι τα σημεία που έχουμε ενίσχυση φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.

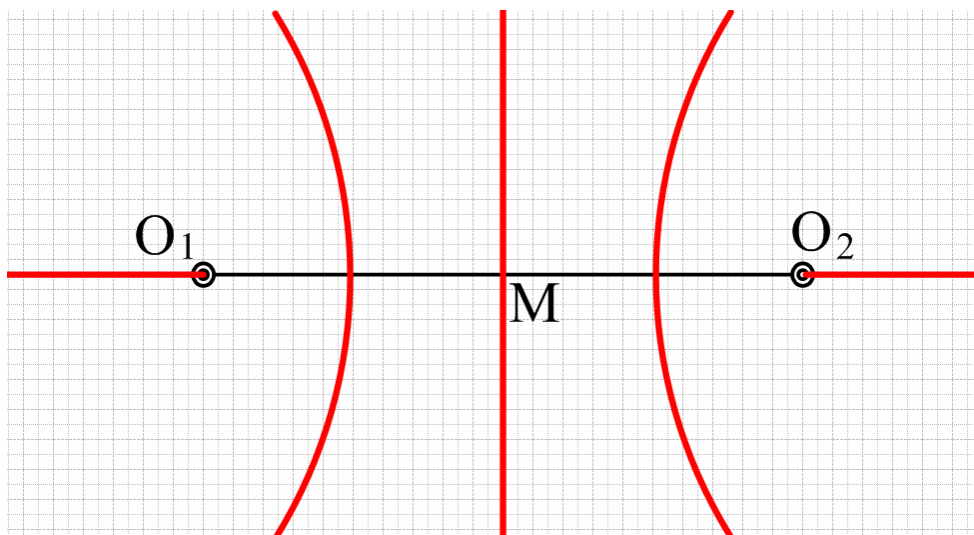


- ii) Για $d=40\text{cm}$ και για αποφύγουμε όλη την προηγούμενη ανάλυση, ας στηριχθούμε σε ένα συμπέρασμα που προέκυψε από το προηγούμενο ερώτημα. Τα σημεία ενισχυτικής συμβολής είναι τα σημεία της μεσοκαθέτου και τόξα υπερβολών δεξιά και αριστερά ανά $10\text{cm} = \lambda/2$ (πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα O_1O_2).

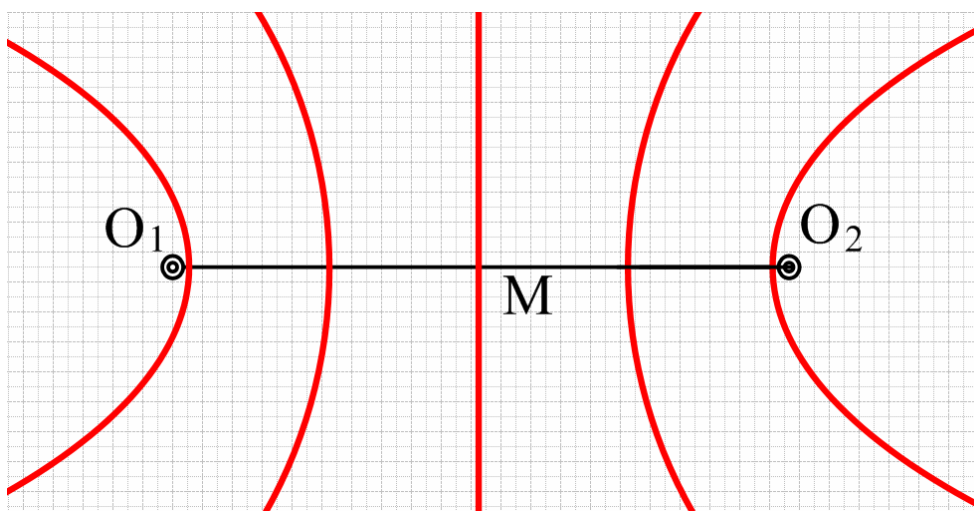
Ας πάρουμε τώρα ένα σημείο πάνω στην ευθεία O_1O_2 δεξιά της πηγής O_2 , το οποίο απέχει κατά x από την O_2 :

$$r_1 - r_2 = (d+x) - x = d = 40\text{cm} = 2\lambda$$

συνεπώς σε όλα τα σημεία πάνω στην ευθεία που συνδέει τις δύο πηγές, εξωτερικά του ευθύγραμμου τμήματος O_1O_2 έχουμε επίσης ενίσχυση. Έτσι τα σημεία που έχουμε ενίσχυση φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.

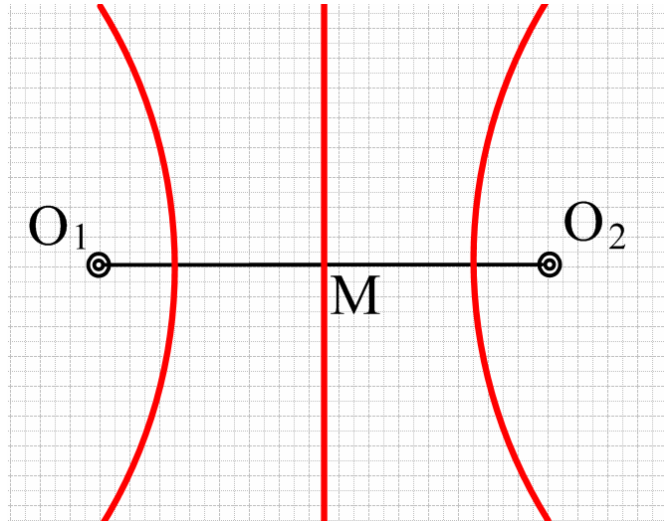


iii) Με την ίδια συλλογιστική και για $d=41\text{cm}$, θα πάρουμε την παρακάτω εικόνα:



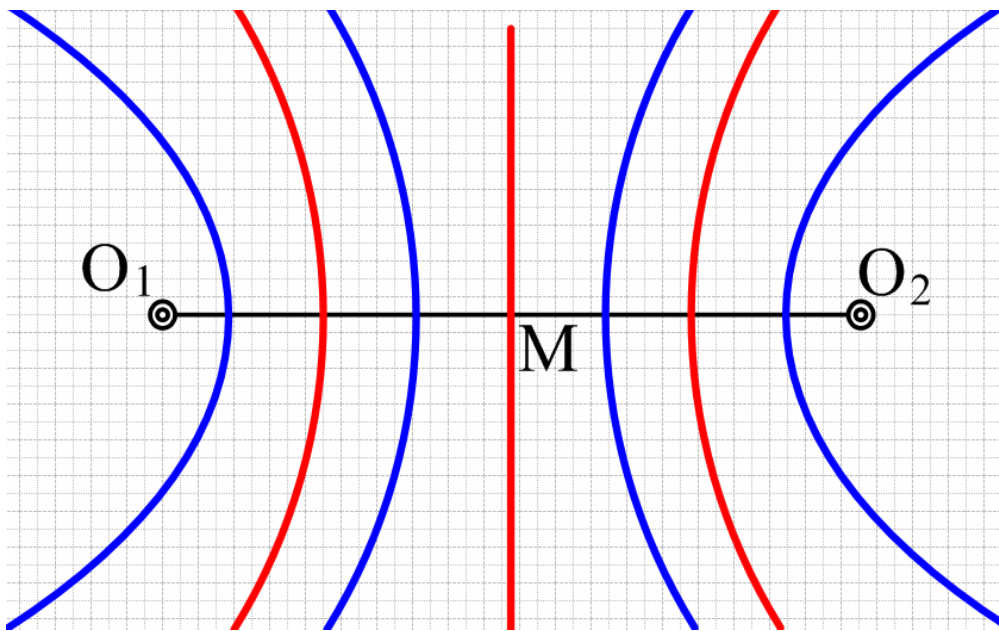
Προφανώς εξωτερικά του O_1O_2 δεν έχουμε πλάτος 2 A αφού η απόσταση $d=41\text{cm}$ δεν είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του λ , αλλά ούτε και μηδέν αφού δεν είναι περιττό πολλαπλάσιο του $\lambda/2$.

iv) Και για την απόσταση $d=30\text{cm}$ θα έχουμε:

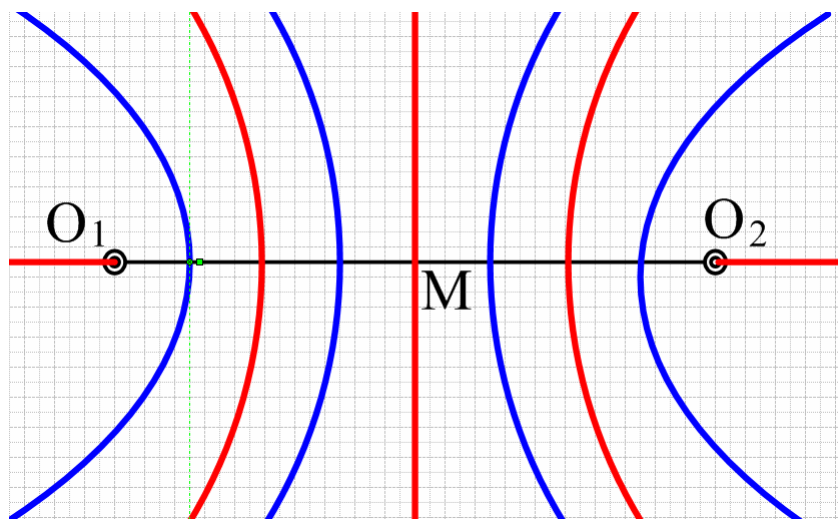


β) Για τις υπερβολές απόσβεσης (μπλε γραμμές), αρκεί να τονίσουμε ότι παρεμβάλλονται μεταξύ των υπερβολών απόσβεσης, έτσι ώστε κινούμενοι μεταξύ των δύο πηγών, η απόσταση μεταξύ ενός σημείου απόσβεσης και ενός σημείου ενίσχυσης να είναι ίση με $\lambda/4 = 5\text{cm}$. Με βάση αυτό οι αντίστοιχες εικόνες θα είναι:

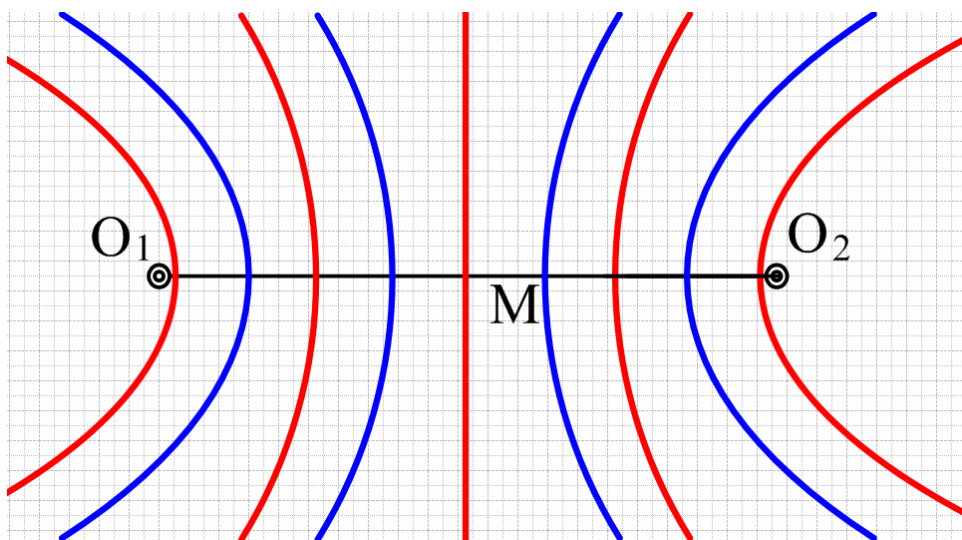
Για $d=39\text{cm}$



Για $d=40\text{cm}$

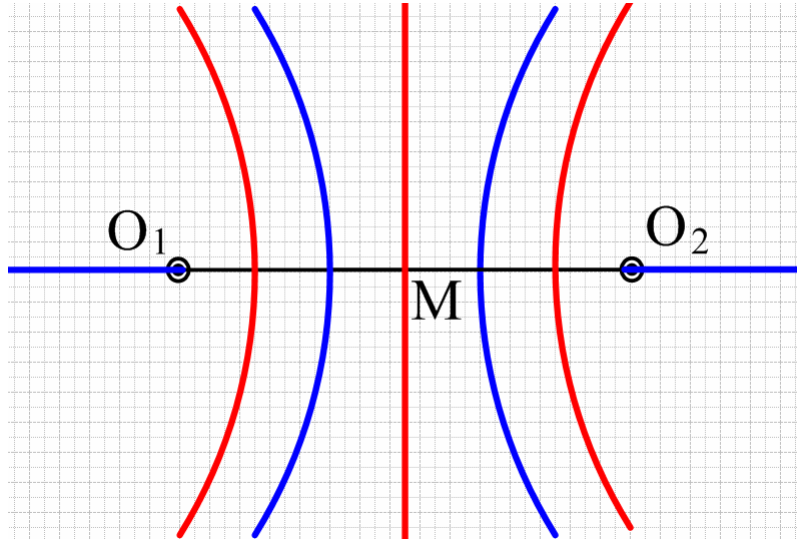


Για $d=41\text{cm}$



Για $d=30\text{cm}$

Εδώ αν πάρουμε ένα σημείο εξωτερικά των πηγών θα έχουμε $(d+x)-x=d=30\text{cm}=3\cdot\lambda/2$, συνεπώς τα σημεία αυτά παραμένουν ακίνητα.



Συμπέρασμα:

Από τις δύο πηγές δεν περνάνε υπερβολές ενίσχυσης ή απόσβεσης. Αν η απόσταση των δύο πηγών είναι $d=k\lambda$, τότε οι υπερβολές που θα πέρασαν από τις πηγές έχουν εκφυλιστεί στις δύο ημιευθείες δεξιά και αριστερά των πηγών. Όμοια αν $d=(2k+1)\lambda/2$ οι αντίστοιχες υπερβολές απόσβεσης έχουν εκφυλιστεί στις δύο ημιευθείες απόσβεσης.

dmargaris@sch.gr

Το πλάτος ταλάντωσης κατά την επιφανειακή συμβολή.



Στην παραπάνω εικόνα, βλέπουμε τη διάδοση ενός κύματος στην επιφάνεια ενός υγρού. Μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε ότι όταν απομακρυνόμαστε από την πηγή, το πλάτος ταλάντωσης μειώνεται. Αυτό δικαιολογείται, αφού καθώς το κύμα απλώνεται στην επιφάνεια, η ενέργεια ταλάντωσης διαμοιράζεται συνεχώς και σε περισσότερα υλικά σημεία.

Έστω τώρα ότι στην επιφάνεια ενός υγρού, έχουμε δύο σύγχρονες πηγές κύματος O_1 και O_2 οι οποίες αρχίζουν να ταλαντώνονται κατακόρυφα, τη στιγμή $t_0=0$, με εξισώσεις $y=0,05 \cdot \eta\mu 2\pi t$ (μονάδες στο S.I.) δημιουργώντας έτσι εγκάρσια κύματα, τα οποία διαδίδονται με ταχύτητα $0,4\text{m/s}$. Η απόσταση των δύο πηγών είναι $0,8\text{m}$. Παρατηρούμε ότι ένα σημείο M , στο μέσον της απόστασης των δύο πηγών ταλαντώνεται με πλάτος 8cm .

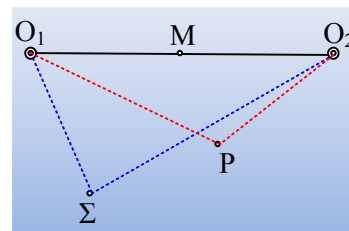
- i) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου M .
- ii) Το σημείο Σ , απέχει αποστάσεις $r_1=0,4\text{m}$ και $r_2=0,8\text{m}$ από τις δυο πηγές αντίστοιχα. Το πλάτος ταλάντωσης του σημείου Σ , μετά την συμβολή των δύο κυμάτων μπορεί να είναι:

α) $0,02\text{m}$ β) $0,04\text{m}$ γ) $0,06\text{m}$ δ) $0,08\text{m}$

- iii) Ένα άλλο σημείο P , απέχει από τις δύο πηγές αποστάσεις $r_1=0,6\text{m}$ και $r_2=0,4\text{m}$ αντίστοιχα. Το κύμα από την πρώτη πηγή, φτάνοντας στο σημείο P έχει πλάτος $0,03\text{m}$. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου P , μετά την συμβολή των δύο κυμάτων.

Απάντηση:

- i) Το σημείο M θα εκτελέσει σύνθετη ταλάντωση εξαιτίας των δύο κυμάτων που συμβάλουν. Εξαιτίας του ενός κύματος θα εκτελέσει αρμονική ταλάντωση σε κατακόρυφη διεύθυνση με εξίσωση $y_1=A_1 \cdot \eta\mu\omega(t-t_1)$, όπου t_1 το χρονικό διάστημα που θα χρειαστεί το πρώτο κύμα να διαδοθεί από το O_1 στο M , δηλαδή $t_1 = \frac{d}{v} = \frac{0,4\text{m}}{0,4\text{m/s}} = 1\text{s}$. Εξαιτίας τώρα



του δεύτερου κύματος θα εκτελέσει επίσης κατακόρυφη αρμονική ταλάντωση με εξίσωση $y_2=A_2 \cdot \eta\mu\omega(t-t_2)$, όπου $t_2=t_1=1\text{s}$, αφού ισαπέχει από τις δυο πηγές. Αλλά τότε οι δύο ταλαντώσεις έχουν την ίδια φάση και το αποτέλεσμα της σύνθεσής τους, με βάση την αρχή της επαλληλίας θα είναι:

$$y = y_1 + y_2 = A_1 \cdot \eta\mu\omega(t-t_1) + A_2 \cdot \eta\mu\omega(t-t_1) = (A_1 + A_2) \cdot \eta\mu 2\pi(t-t_1) \text{ ή}$$

$$y = 0,08 \cdot \eta\mu 2\pi(t-1) \text{ μονάδες στο S.I.) με } t \geq 1\text{s}$$

- ii) Το προηγούμενο σημείο M ισαπέχει από τις δυο πηγές και το πλάτος κάθε κύματος, θα έχει μειωθεί το ίδιο, συνεπώς το πλάτος ήταν 0,08m, οφειλόμενο σε δυο ίσα πλάτη $A_1=A_2=0,04m$. Αλλά τότε και το πλάτος του κύματος από την δεύτερη πηγή που φτάνει στο σημείο Σ θα έχει πλάτος 0,04m. Το σημείο Σ εκτελεί επίσης σύνθετη ταλάντωση, όπου οι δυο επιμέρους ταλαντώσεις που εκτελεί, έχουν φάσεις:

$$\varphi_1=2\pi(t-t_1)=2\pi\left(t-\frac{r_1}{v}\right)=2\pi-2\pi\frac{0,4}{0,4}=2\pi-2\pi \text{ (rad) για } t \geq \frac{r_1}{v} \text{ ή } t \geq 1s \text{ και}$$

$$\varphi_2=2\pi(t-t_2)=2\pi\left(t-\frac{r_2}{v}\right)=2\pi-2\pi\frac{0,8}{0,4}=2\pi-4\pi \text{ (rad) για } t \geq \frac{r_2}{v} \text{ ή } t \geq 2s$$

Συνεπώς οι δύο ταλαντώσεις που θα πραγματοποιήσει το σημείο Σ παρουσιάζουν διαφορά φάσης:

$$\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_2=2\pi-2\pi-2\pi+4\pi=2\pi \text{ (rad) για } t \geq \frac{r_2}{v} \text{ ή } t \geq 2s$$

Συνεπώς τα δύο κύματα συμβάλουν σε φάση και το πλάτος ταλάντωσης θα είναι $A=A_1+A_2$.

Αλλά το πλάτος A_1 είναι ίσο με το πλάτος του κύματος που έφτασε και στο M, αφού και το σημείο Σ απέχει κατά 0,4m από την πηγή O_1 , άρα $A_1=0,04m$, ενώ το πλάτος ταλάντωσης εξαιτίας της δεύτερης πηγής, θα είναι μικρότερο, εξαιτίας της μεγαλύτερης απόστασης από την πηγή. Οπότε σωστή απάντηση είναι η γ) $A=0,06m$

- iii) Με τον ίδιο όπως παραπάνω τρόπο, βρίσκουμε τη διαφορά φάσης μεταξύ των δύο ταλαντώσεων που θα εκτελέσει το σημείο P, μετά την συμβολή:

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=2\pi\left(t-\frac{r_2}{v}\right)-2\pi\left(t-\frac{r_1}{v}\right)=2\pi-2\pi\frac{0,4}{0,4}-2\pi+2\pi\frac{0,6}{0,4}=\pi \text{ για } t \geq \frac{r_1}{v} \text{ ή } t \geq 1,5s$$

Οπότε το πλάτος ταλάντωσης θα είναι ίσο με τη διαφορά των δύο πλατών, $A=|A_1-A_2|$, όπου το $A_2=0,04m$, συνεπώς $A=|0,03m-0,04m|=0,01m$, ενώ η φάση της συνισταμένης ταλάντωσης είναι ίση με τη φάση της ταλάντωσης με το μεγαλύτερο πλάτος, δηλαδή εδώ με τη φάση του κύματος από την πηγή O_2 , οπότε:

$$y_P = 0,01 \cdot \eta\mu(2\pi - 2\pi) \text{ με } t \geq \frac{r_1}{v} \text{ ή } t \geq 1,5s$$

Σχόλια:

- 1) Η αντιμετώπιση του προβλήματος στηρίχθηκε καθαρά στη σύνθεση ταλαντώσεων και όχι στη μελέτη της συμβολής των κυμάτων, αφού τα διαδιδόμενα κύματα δεν διατηρούν σταθερό πλάτος. Εξάλλου γενικότερα η συμβολή δεν είναι τίποτα περισσότερο από σύνθεση ταλαντώσεων!
- 2) Απαιτείται προσοχή στον υπολογισμό της διαφοράς φάσης μεταξύ των δύο ταλαντώσεων που εκτελεί κάθε σημείο. Όσο μικρότερη απόσταση του σημείου από μια πηγή, τόσο συντομότερα θα φτάσει το κύμα, οπότε η απομάκρυνση της ταλάντωσής του, θα έχει και μεγαλύτερη φάση.

- 3) Αν τα δύο κύματα διαδιδόταν χωρίς μείωση του πλάτους, το σημείο P, θα παρέμενε ακίνητο, αφού θα βρισκόταν πάνω σε υπερβολή απόσβεσης. Πράγματι $r_1 - r_2 = 0,6\text{m} - 0,4\text{m} = 0,2\text{m} = \frac{1}{2} \lambda$, από τη στιγμή όμως που τα πλάτη είναι διαφορετικά, βρήκαμε τελικά ότι το πλάτος είναι ίσο με την διαφορά των δύο πλάτων.

dmargaris@sch.gr

Στάσιμο κύμα. Δεσμοί και κοιλίες.

Ένα κύμα διαδίδεται κατά μήκος ενός ελαστικού μέσου, προς τα δεξιά (θετική φορά) με εξίσωση:

$$y=0,2 \eta\mu 2\pi(5t-10x) \text{ (S.I)}$$

- 1) Να γράψετε την εξίσωση ενός άλλου κύματος το οποίο διαδίδεται κατά μήκος του ελαστικού μέσου και συμβάλλοντας με το πρώτο δημιουργεί στάσιμο, με κοιλία στη θέση $x=0$. Ποια η εξίσωση του προκύπτοντος στάσιμου, θεωρώντας ως $t=0$ τη στιγμή που τα κύματα συμβάλλουν στο O ($x=0$).
- 2) Να εξετάσετε αν τα σημεία K , με $x_K=0,125\text{m}$ και H με $x_H=0,35\text{m}$ είναι δεσμοί ή κοιλίες του στάσιμου.
- 3) Να βρείτε πόσες κοιλίες και πόσοι δεσμοί του στάσιμου βρίσκονται μεταξύ των σημείων K , H .
- 4) Δύο σημεία Z , M του μέσου βρίσκονται στις θέσεις $x_Z=0,21\text{m}$ και $x_M=0,33\text{m}$. Να βρείτε πόσοι δεσμοί του στάσιμου βρίσκονται μεταξύ των σημείων Z , M και στη συνέχεια να υπολογίσετε την απομάκρυνση και την ταχύτητα του σημείου M , τη χρονική στιγμή που το Z διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- 5) Για να σχηματισθεί στάσιμο πρέπει να συμβάλλουν δύο κύματα, με ίδιο πλάτος, ίδια συχνότητα, τα οποία διαδίδονται στην ίδια διεύθυνση, κατά αντίθετη φορά. Η εξίσωση του κύματος που συμβάλλοντας με το πρώτο δημιουργεί στάσιμο είναι:

$$y_2 = 0,2 \eta\mu 2\pi(5t + 10x) \text{ (S.I) .}$$

Η εξίσωση του στάσιμου είναι:

$$y = 0,4 \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi\chi}{0,1} \eta\mu(10\pi t) = 0,4 \sigma\upsilon\nu(20\pi\chi) \eta\mu(10\pi t) \text{ (S.I)}$$

- 6) Το πλάτος ταλάντωσης των σημείων του μέσου μετά το σχηματισμό του στάσιμου δίνεται από τη σχέση:

$$A' = 0,4 |\sigma\upsilon\nu 20\pi\chi| \text{ (S.I)}$$

Για τα σημεία K , H έχουμε:

$$A'_K = 0,4 |\sigma\upsilon\nu 20\pi \cdot 0,125| = 0,4 |\sigma\upsilon\nu 2,5\pi| = 0,4 \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} = 0$$

$$A'_H = 0,4|\sigma\upsilon\nu 20\pi \cdot 0,35| = 0,4|\sigma\upsilon\nu 7\pi| = 0,4m$$

Συνεπώς το Κ είναι δεσμός και το Η κοιλία του στάσιμου.

7) Οι κοιλίες του στάσιμου βρίσκονται στις θέσεις: $x = \kappa \frac{\lambda}{2} = 0,05\kappa, \kappa \in \mathbb{Z}$

Άρα:

$$x_K < x < x_H \Rightarrow 0,125 < x < 0,35 \Rightarrow 0,125 < 0,05\kappa < 0,35 \Rightarrow 2,5 < \kappa < 7 \Rightarrow \kappa = 3, 4, 5, 6$$

Συνεπώς υπάρχουν 4 κοιλίες στις θέσεις: $0,15m, 0,2m, 0,25m, 0,3m$

Οι δεσμοί του στάσιμου βρίσκονται στις θέσεις:

$$x_\delta = (2\kappa + 1) \frac{\lambda}{4} = (2\kappa + 1) \cdot 0,025, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} x_K < x_\delta < x_H &\Rightarrow 0,125 < 0,05\kappa + 0,025 < 0,35 \Rightarrow \\ &\cdot 0,1 < 0,05\kappa < 0,325 \Rightarrow 2 < \kappa < 6,5 \Rightarrow \kappa = 3, 4, 5, 6 \end{aligned}$$

Συνεπώς υπάρχουν 4 δεσμοί στις θέσεις: $0,175m, 0,225m, 0,275m, 0,325m$

8) Όπως και πριν έχουμε:

$$\begin{aligned} x_Z < x_\delta < x_M &\Rightarrow 0,21 < 0,05\kappa + 0,025 < 0,33 \Rightarrow \\ 0,185 < 0,05\kappa < 0,305 &\Rightarrow 3,7 < \kappa < 6,1 \Rightarrow \kappa = 4, 5, 6 \end{aligned}$$

Επειδή υπάρχουν 3 δεσμοί μεταξύ των Ζ, Μ τα σημεία αυτά έχουν διαφορά φάσης $\Delta\varphi = \pi$, δηλαδή ταλαντώνονται σε αντίθεση φάσης. Όταν λοιπόν το Ζ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα, το Μ διέρχεται επίσης από τη δική του θέση ισορροπίας με αρνητική ταχύτητα:

$$v_{M_{\max}} = -\omega|A'_M| = -10\pi \cdot 0,4 \cdot |\sigma\upsilon\nu 20\pi \cdot 0,33| =$$

$$v_{M_{\max}} = -4\pi|\sigma\upsilon\nu 6,6\pi| = -4\pi\left|\sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{5}\right| = -1,24\pi \frac{m}{s}$$

Θοδωρής Παπασγουρίδης

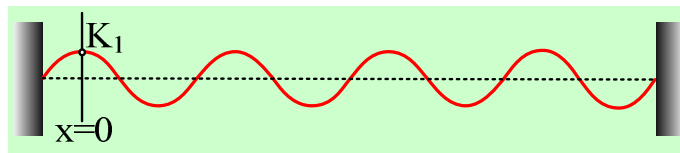
Άλλο ένα στάσιμο σε χορδή και η εξίσωσή του.

Μια χορδή με σταθερά άκρα διεγείρεται οπότε δημιουργείται πάνω της ένα στάσιμο κύμα με 7 δεσμούς (εκτός των δύο άκρων). Η πρώτη κοιλία K_1 απέχει 3cm από το αριστερό άκρο της χορδής και τη στιγμή που θεωρούμε $t=0$, έχει μέγιστη ταχύτητα με τιμή 40π cm/s, ενώ τη στιγμή $t_1=0,05$ s η ταχύτητά της είναι $v_1=-40\pi$ cm/s, για πρώτη φορά.

- i) Να βρεθεί το πλάτος ταλάντωσης της κοιλίας K_1 , καθώς και το μήκος L της χορδής.
- ii) Να βρεθεί η εξίσωση του στάσιμου κύματος, θεωρώντας ότι η πρώτη κοιλία βρίσκεται στη θέση $x=0$.
- iii) Να σχεδιάστε στιγμιότυπα της χορδής τις χρονικές στιγμές $t_2=1/40$ s και $t_3=1/16$ s, στο ίδιο σύστημα αξόνων.
- iv) Να βρεθεί η εξίσωση του ίδιου στάσιμου, θεωρώντας $x=0$ το αριστερό άκρο της χορδής.

Απάντηση:

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένα στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος κάποια στιγμή, που η πρώτη κοιλία K_1 βρίσκεται σε μέγιστη θετική απομάκρυνση.



- i) Τη χρονική στιγμή $t=0$ η κοιλία K_1 έχει μέγιστη θετική ταχύτητα, συνεπώς περνά από τη θέση ισορροπίας και η ταχύτητα αυτή είναι μέγιστη. Τη στιγμή $t_1=0,05$ s η κοιλία ξαναπερνά από τη θέση ισορροπίας, συνεπώς το χρονικό διάστημα που μεσολάβησε αντιστοιχεί σε μισή περίοδο, άρα $T=2t_1=0,1$ s. Αλλά $v_{\max}=\omega \cdot 2A \rightarrow 2A=\frac{v_{\max}}{\omega}=\frac{v_{\max}}{2\pi}T=\frac{40\pi}{2\pi}0,1\text{cm}=2\text{cm}$, όπου A το πλάτος των τρεχόντων κύματων, από την συμβολή των οποίων προέκυψε το στάσιμο.

Εξάλλου με βάση το σχήμα το μήκος της χορδής ισούται με $8 \cdot \lambda/2$, όπου $\lambda/2$ η απόσταση μεταξύ δύο δεσμών. Αλλά η κοιλία K_1 απέχει 3cm από το αριστερό άκρο, απόσταση που αντιστοιχεί σε $\lambda/4$. Έτσι $\lambda=12\text{cm}$ και $L=8 \cdot \frac{12}{2}\text{cm}=48\text{cm}$

- ii) Αφού στη θέση $x=0$ έχουμε κοιλία του στάσιμου κύματος, η οποία τη στιγμή $t=0$ περνά από τη θέση ισορροπίας κινούμενη προς τη θετική κατεύθυνση, θα ισχύει η εξίσωση του βιβλίου, όπου $2A=2\text{cm}$:

$$y=2A \cdot \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \eta\mu \frac{2\pi t}{T}=2 \cdot \sin \frac{2\pi x}{12} \cdot \eta\mu \frac{2\pi t}{0,1}=2 \sin \frac{\pi x}{6} \cdot \eta\mu 20\pi t \quad (x,y \rightarrow \text{cm}, t \rightarrow \text{s})$$

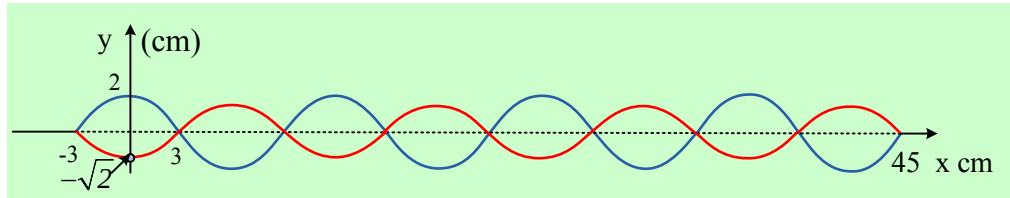
- iii) Για $t_2=1/40$ s παίρνουμε: $y=2 \sin \frac{\pi x}{6} \cdot \eta\mu 20\pi t=2 \sin \frac{\pi x}{6} \cdot \eta\mu 20\pi \frac{1}{40}=2 \sin \frac{\pi x}{6}$ και η γραφική

παράσταση είναι η καμπύλη με μπλε χρώμα, στο διάγραμμα.

Αντίστοιχα για $t_3=1/16s$ έχουμε :

$$y=2\sigma\sigma\frac{\pi x}{6}\cdot\eta\mu 20\pi t=2\sigma\sigma\frac{\pi x}{6}\cdot\eta\mu 20\pi\frac{1}{16}=2\sigma\sigma\frac{\pi x}{6}\cdot\eta\mu\frac{5\pi}{4}=-\sqrt{2}\sigma\sigma\frac{\pi x}{6}$$

Το αντίστοιχο γράφημα με κόκκινο χρώμα στο σχήμα.



- iv) Αν θεωρήσουμε $x=0$ το αριστερό άκρο της χορδής, η εξίσωση θα έχει την ίδια μορφή, όσον αφορά, μέγιστο πλάτος και συχνότητα, αλλά με διαφορετική μορφή του πλάτους έτσι ώστε στη θέση αυτή να έχουμε δεσμό. Έτσι η εξίσωση του στάσιμου κύματος θα έχει τη μορφή:

$$y=2A\cdot\sigma\sigma\sigma\left(\frac{2\pi x}{\lambda}+\theta\right)\cdot\eta\mu\frac{2\pi t}{T}=2\sigma\sigma\sigma\left(\frac{2\pi x}{\lambda}+\theta\right)\cdot\eta\mu 20\pi t$$

$$\text{Για } x=0, \text{ τότε } A'=0 \text{ ή } \sigma\sigma\sigma\left(\frac{2\pi 0}{\lambda}+\theta\right)=0 \rightarrow \sigma\sigma\sigma\theta=0 \rightarrow \theta=\frac{\pi}{2} \text{ ή } \theta=\frac{3\pi}{2}$$

Εξάλλου για $t=T/4$ και $x=3\text{cm}$ πρέπει $y=+2\text{cm}$, αφού η πρώτη κοιλία βρίσκεται στη μέγιστη θετική απομάκρυνση, οπότε:

$$y=2\sigma\sigma\sigma\left(\frac{2\pi 3}{12}+\theta\right)\cdot\eta\mu\frac{2\pi T}{T}\frac{1}{4}=2\sigma\sigma\sigma\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=2 \rightarrow -\eta\mu\theta=1 \rightarrow \eta\mu\theta=-1 \rightarrow \theta=\frac{3\pi}{2}$$

Αλλά τότε $\sigma\sigma\sigma\left(\frac{2\pi x}{\lambda}+\frac{3\pi}{2}\right)=\eta\mu\frac{2\pi x}{\lambda}$ και η εξίσωση γίνεται:

$$y=2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{6}\right)\cdot\eta\mu 20\pi t \quad (x,y \rightarrow \text{cm}, t \rightarrow \text{s})$$

dmargaris@sch.gr

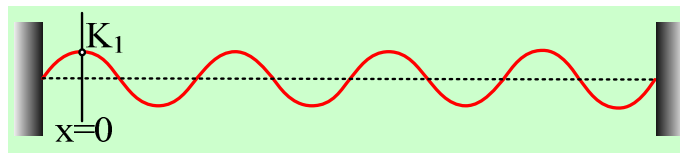
Άλλο ένα στάσιμο σε χορδή και η εξίσωσή του.

Μια χορδή με σταθερά άκρα διεγείρεται οπότε δημιουργείται πάνω της ένα στάσιμο κύμα με 7 δεσμούς (εκτός των δύο άκρων). Η πρώτη κοιλία K_1 απέχει 3cm από το αριστερό άκρο της χορδής και τη στιγμή που θεωρούμε $t=0$, έχει μέγιστη ταχύτητα με τιμή 40π cm/s, ενώ τη στιγμή $t_1=0,05$ s η ταχύτητά της είναι $v_1=-40\pi$ cm/s, για πρώτη φορά.

- Να βρεθεί το πλάτος ταλάντωσης της κοιλίας K_1 , καθώς και το μήκος L της χορδής.
- Να βρεθεί η εξίσωση του στάσιμου κύματος, θεωρώντας ότι η πρώτη κοιλία βρίσκεται στη θέση $x=0$.
- Να σχεδιάστε στιγμιότυπα της χορδής τις χρονικές στιγμές $t_2=1/40$ s και $t_3=1/16$ s, στο ίδιο σύστημα αξόνων.
- Να βρεθεί η εξίσωση του ίδιου στάσιμου, θεωρώντας $x=0$ το αριστερό άκρο της χορδής.

Απάντηση:

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένα στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος κάποια στιγμή, που η πρώτη κοιλία K_1 βρίσκεται σε μέγιστη θετική απομάκρυνση.



- Τη χρονική στιγμή $t=0$ η κοιλία K_1 έχει μέγιστη θετική ταχύτητα, συνεπώς περνά από τη θέση ισορροπίας και η ταχύτητα αυτή είναι μέγιστη. Τη στιγμή $t_1=0,05$ s η κοιλία ξαναπερνά από τη θέση ισορροπίας, συνεπώς το χρονικό διάστημα που μεσολάβησε αντιστοιχεί σε μισή περίοδο, άρα $T=2t_1=0,1$ s. Αλλά $v_{\max}=\omega \cdot 2A \rightarrow 2A=\frac{v_{\max}}{\omega}=\frac{v_{\max}}{2\pi}T=\frac{40\pi}{2\pi}0,1\text{cm}=2\text{cm}$, όπου A το πλάτος των τρεχόντων κύματων, από την συμβολή των οποίων προέκυψε το στάσιμο.

Εξάλλου με βάση το σχήμα το μήκος της χορδής ισούται με $8 \cdot \lambda/2$, όπου $\lambda/2$ η απόσταση μεταξύ δύο δεσμών. Αλλά η κοιλία K_1 απέχει 3cm από το αριστερό άκρο, απόσταση που αντιστοιχεί σε $\lambda/4$. Έτσι $\lambda=12\text{cm}$ και $L=8 \cdot \frac{12}{2}\text{cm}=48\text{cm}$

- Αφού στη θέση $x=0$ έχουμε κοιλία του στάσιμου κύματος, η οποία τη στιγμή $t=0$ περνά από τη θέση ισορροπίας κινούμενη προς τη θετική κατεύθυνση, θα ισχύει η εξίσωση του βιβλίου, όπου $2A=2\text{cm}$:

$$y=2A \cdot \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \eta\mu \frac{2\pi t}{T}=2 \cdot \sin \frac{2\pi x}{12} \cdot \eta\mu \frac{2\pi t}{0,1}=2 \sin \frac{\pi x}{6} \cdot \eta\mu 20\pi t \quad (x,y \rightarrow \text{cm}, t \rightarrow \text{s})$$

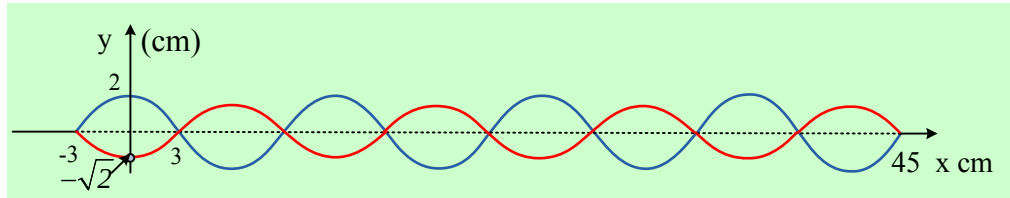
- Για $t_2=1/40$ s παίρνουμε: $y=2 \sin \frac{\pi x}{6} \cdot \eta\mu 20\pi t=2 \sin \frac{\pi x}{6} \cdot \eta\mu 20\pi \frac{1}{40}=2 \sin \frac{\pi x}{6}$ και η γραφική

παράσταση είναι η καμπύλη με μπλε χρώμα, στο διάγραμμα.

Αντίστοιχα για $t_3=1/16s$ έχουμε :

$$y=2\sigma\sigma\frac{\pi x}{6}\cdot\eta\mu 20\pi t=2\sigma\sigma\frac{\pi x}{6}\cdot\eta\mu 20\pi\frac{1}{16}=2\sigma\sigma\frac{\pi x}{6}\cdot\eta\mu\frac{5\pi}{4}=-\sqrt{2}\sigma\sigma\frac{\pi x}{6}$$

Το αντίστοιχο γράφημα με κόκκινο χρώμα στο σχήμα.



- iv) Αν θεωρήσουμε $x=0$ το αριστερό άκρο της χορδής, η εξίσωση θα έχει την ίδια μορφή, όσον αφορά, μέγιστο πλάτος και συχνότητα, αλλά με διαφορετική μορφή του πλάτους έτσι ώστε στη θέση αυτή να έχουμε δεσμό. Έτσι η εξίσωση του στάσιμου κύματος θα έχει τη μορφή:

$$y=2A\cdot\sigma\sigma\sigma\left(\frac{2\pi x}{\lambda}+\theta\right)\cdot\eta\mu\frac{2\pi t}{T}=2\sigma\sigma\sigma\left(\frac{2\pi x}{\lambda}+\theta\right)\cdot\eta\mu 20\pi t$$

$$\text{Για } x=0, \text{ τότε } A'=0 \text{ ή } \sigma\sigma\sigma\left(\frac{2\pi 0}{\lambda}+\theta\right)=0 \rightarrow \sigma\sigma\sigma\theta=0 \rightarrow \theta=\frac{\pi}{2} \text{ ή } \theta=\frac{3\pi}{2}$$

Εξάλλου για $t=T/4$ και $x=3\text{cm}$ πρέπει $y=+2\text{cm}$, αφού η πρώτη κοιλία βρίσκεται στη μέγιστη θετική απομάκρυνση, οπότε:

$$y=2\sigma\sigma\sigma\left(\frac{2\pi 3}{12}+\theta\right)\cdot\eta\mu\frac{2\pi T}{T}\frac{T}{4}=2\sigma\sigma\sigma\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=2 \rightarrow -\eta\mu\theta=1 \rightarrow \eta\mu\theta=-1 \rightarrow \theta=\frac{3\pi}{2}$$

Αλλά τότε $\sigma\sigma\sigma\left(\frac{2\pi x}{\lambda}+\frac{3\pi}{2}\right)=\eta\mu\frac{2\pi x}{\lambda}$ και η εξίσωση γίνεται:

$$y=2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{6}\right)\cdot\eta\mu 20\pi t \quad (x,y \rightarrow \text{cm}, t \rightarrow \text{s})$$

dmargaris@sch.gr

Στάσιμο κύμα. Δεσμοί και κοιλίες.

Ένα κύμα διαδίδεται κατά μήκος ενός ελαστικού μέσου, προς τα δεξιά (θετική φορά) με εξίσωση:

$$y=0,2 \eta\mu 2\pi(5t-10x) \text{ (S.I)}$$

- 1) Να γράψετε την εξίσωση ενός άλλου κύματος το οποίο διαδίδεται κατά μήκος του ελαστικού μέσου και συμβάλλοντας με το πρώτο δημιουργεί στάσιμο, με κοιλία στη θέση $x=0$. Ποια η εξίσωση του προκύπτοντος στάσιμου, θεωρώντας ως $t=0$ τη στιγμή που τα κύματα συμβάλλουν στο O ($x=0$).
- 2) Να εξετάσετε αν τα σημεία K , με $x_K=0,125\text{m}$ και H με $x_H=0,35\text{m}$ είναι δεσμοί ή κοιλίες του στάσιμου.
- 3) Να βρείτε πόσες κοιλίες και πόσοι δεσμοί του στάσιμου βρίσκονται μεταξύ των σημείων K , H .
- 4) Δύο σημεία Z , M του μέσου βρίσκονται στις θέσεις $x_Z=0,21\text{m}$ και $x_M=0,33\text{m}$. Να βρείτε πόσοι δεσμοί του στάσιμου βρίσκονται μεταξύ των σημείων Z , M και στη συνέχεια να υπολογίσετε την απομάκρυνση και την ταχύτητα του σημείου M , τη χρονική στιγμή που το Z διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- 5) Για να σχηματισθεί στάσιμο πρέπει να συμβάλλουν δύο κύματα, με ίδιο πλάτος, ίδια συχνότητα, τα οποία διαδίδονται στην ίδια διεύθυνση, κατά αντίθετη φορά. Η εξίσωση του κύματος που συμβάλλοντας με το πρώτο δημιουργεί στάσιμο είναι:

$$y_2 = 0,2 \eta\mu 2\pi(5t + 10x) \text{ (S.I)} .$$

Η εξίσωση του στάσιμου είναι:

$$y = 0,4 \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi\chi}{0,1} \eta\mu(10\pi t) = 0,4 \sigma\upsilon\nu(20\pi\chi) \eta\mu(10\pi t) \text{ (S.I)}$$

- 6) Το πλάτος ταλάντωσης των σημείων του μέσου μετά το σχηματισμό του στάσιμου δίνεται από τη σχέση:

$$A' = 0,4 |\sigma\upsilon\nu 20\pi\chi| \text{ (S.I)}$$

Για τα σημεία K , H έχουμε:

$$A'_K = 0,4 |\sigma\upsilon\nu 20\pi \cdot 0,125| = 0,4 |\sigma\upsilon\nu 2,5\pi| = 0,4 \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} = 0$$

$$A'_H = 0,4|\sigma\upsilon\nu 20\pi \cdot 0,35| = 0,4|\sigma\upsilon\nu 7\pi| = 0,4m$$

Συνεπώς το Κ είναι δεσμός και το Η κοιλία του στάσιμου.

7) Οι κοιλίες του στάσιμου βρίσκονται στις θέσεις: $x = \kappa \frac{\lambda}{2} = 0,05\kappa, \kappa \in \mathbb{Z}$

Άρα:

$$x_K < x < x_H \Rightarrow 0,125 < x < 0,35 \Rightarrow 0,125 < 0,05\kappa < 0,35 \Rightarrow 2,5 < \kappa < 7 \Rightarrow \kappa = 3, 4, 5, 6$$

Συνεπώς υπάρχουν 4 κοιλίες στις θέσεις: $0,15m, 0,2m, 0,25m, 0,3m$

Οι δεσμοί του στάσιμου βρίσκονται στις θέσεις:

$$x_\delta = (2\kappa + 1) \frac{\lambda}{4} = (2\kappa + 1) \cdot 0,025, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} x_K < x_\delta < x_H &\Rightarrow 0,125 < 0,05\kappa + 0,025 < 0,35 \Rightarrow \\ &\cdot 0,1 < 0,05\kappa < 0,325 \Rightarrow 2 < \kappa < 6,5 \Rightarrow \kappa = 3, 4, 5, 6 \end{aligned}$$

Συνεπώς υπάρχουν 4 δεσμοί στις θέσεις: $0,175m, 0,225m, 0,275m, 0,325m$

8) Όπως και πριν έχουμε:

$$\begin{aligned} x_Z < x_\delta < x_M &\Rightarrow 0,21 < 0,05\kappa + 0,025 < 0,33 \Rightarrow \\ 0,185 < 0,05\kappa < 0,305 &\Rightarrow 3,7 < \kappa < 6,1 \Rightarrow \kappa = 4, 5, 6 \end{aligned}$$

Επειδή υπάρχουν 3 δεσμοί μεταξύ των Ζ, Μ τα σημεία αυτά έχουν διαφορά φάσης $\Delta\varphi = \pi$, δηλαδή ταλαντώνονται σε αντίθεση φάσης. Όταν λοιπόν το Ζ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα, το Μ διέρχεται επίσης από τη δική του θέση ισορροπίας με αρνητική ταχύτητα:

$$v_{M_{\max}} = -\omega|A'_M| = -10\pi \cdot 0,4 \cdot |\sigma\upsilon\nu 20\pi \cdot 0,33| =$$

$$v_{M_{\max}} = -4\pi|\sigma\upsilon\nu 6,6\pi| = -4\pi\left|\sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{5}\right| = -1,24\pi \frac{m}{s}$$

Θοδωρής Παπασγουρίδης

Διαφορά φάσης σε ήχους με διαφορετικές συχνότητες.

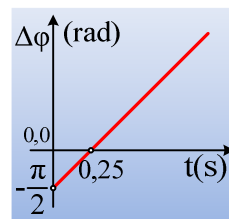
Διαθέτουμε δύο ηχητικές πηγές που παράγουν απλούς αρμονικούς ήχους με παραπλήσιες συχνότητες f_1 και f_2 . Έστω ότι η ταλάντωση του τυμπάνου εξαιτίας του πρώτου ήχου έχει απομάκρυνση:

$$x_1 = 0,003 \cdot \eta\mu(2\pi f_1 t + \varphi_0) \text{ (S.I.) με } \varphi_0 \geq 0.$$

ενώ εξαιτίας του δεύτερου ήχου:

$$x_2 = 0,003 \cdot \eta\mu(2\pi f_2 t) \text{ (S.I.)}.$$

Έστω ότι κάποια στιγμή ηχούν ταυτόχρονα και οι δύο ηχητικές πηγές, οπότε το τύμπανο εκτελεί σύνθετη ταλάντωση. Η διπλανή γραφική παράσταση εμφανίζει τη διαφορά φάσης μεταξύ των φάσεων της απομάκρυνσης των δύο ταλαντώσεων σε συνάρτηση με το χρόνο.



- i) Ποιος ήχος έχει μεγαλύτερη συχνότητα;
- ii) Να βρεθεί η συχνότητα του διακροτήματος.
- iii) Ποιο είναι το πλάτος της ταλάντωσης του τυμπάνου τη χρονική στιγμή $t_1=0,25\text{s}$;
- iv) Να υπολογιστεί επίσης το πλάτος της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t_2=3,75\text{s}$.
- v) Αν το τύμπανο του αυτιού μας εκτελέσει 410 ταλαντώσεις σε χρονικό διάστημα 4s, να βρεθεί η απομάκρυνση τη στιγμή t_1 .

Απάντηση:

- i) Η διαφορά φάσης τη στιγμή $t=0$ είναι αρνητική και ίση με $-\frac{\pi}{2}$, συνεπώς $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ και η διαφορά φάσης, μεταξύ των φάσεων των δύο απομακρύνσεων, θα υπολογίζεται σαν η διαφορά:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi f_2 t - 2\pi f_1 t - \frac{\pi}{2} = 2\pi(f_2 - f_1)t - \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

Αλλά από την γραφική παράσταση που μας δίνεται, βλέπουμε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας είναι θετικός (θετική κλίση της ευθείας ή ισοδύναμα αύξουσα συνάρτηση), συνεπώς :

$$2\pi(f_2 - f_1) > 0 \rightarrow f_2 > f_1.$$

- ii) Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) $t=0,25\text{s}$ και $\Delta\varphi=0$, παίρνουμε:

$$2\pi(f_2 - f_1) \cdot 0,25 - \frac{\pi}{2} = 0 \rightarrow$$

$$f_2 - f_1 = 1\text{Hz} \rightarrow f_\delta = 1\text{Hz}$$

- iii) Τη στιγμή t_1 οι δύο ταλαντώσεις δεν παρουσιάζουν διαφορά φάσης συνεπώς το πλάτος ταλάντωσης είναι μέγιστο: $2A=0,006\text{m}$. Ας το δούμε και αναλυτικά:

Με βάση την αρχή της επαλληλίας έχουμε:

$$x = x_1 + x_2 = 2A\sigma\nu \frac{2\pi(f_2 - f_1)t - \frac{\pi}{2}}{2} \cdot \eta\mu \frac{2\pi(f_2 + f_1)t + \frac{\pi}{2}}{2} \rightarrow$$

$$x = 2A\sigma\nu \left(\pi(f_2 - f_1)t - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \eta\mu \left(\pi(f_2 + f_1)t + \frac{\pi}{4} \right) \quad (2)$$

Αλλά για το πλάτος έχουμε:

$$A' = \left| 2A\sigma\nu \left(\pi(f_2 - f_1)t - \frac{\pi}{4} \right) \right| = 2A \left| \sigma\nu \left(\pi \cdot 1 \cdot 0,25 - \frac{\pi}{4} \right) \right| = 2A \cdot \sigma\nu 0 = 2A$$

iv) Όμοια για την στιγμή t_2 παίρνουμε $\Delta\varphi = 2\pi(f_2 - f_1)t - \frac{\pi}{2} = 2\pi \cdot 1 \cdot 3,75 - \frac{\pi}{2} = 7\pi \text{ rad}$

Δηλαδή η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων, είναι περιττό πολλαπλάσιο του π , πράγμα που σημαίνει ότι αν η απομάκρυνση εξαιτίας της μιας ταλάντωσης είναι $+x$, εξαιτίας της άλλης θα είναι $-x$, συνεπώς η απομάκρυνση θα είναι μηδενική. Θα μπορούσαμε βέβαια να βρούμε το πλάτος και από την εξίσωση:

$$A'' = \left| 2A\sigma\nu \left(\pi(f_2 - f_1)t - \frac{\pi}{4} \right) \right| = 2A \left| \sigma\nu \left(\pi \cdot 1 \cdot 3,75 - \frac{\pi}{4} \right) \right| = 2A \cdot \sigma\nu 3,5\pi = 0$$

v) Με βάση και την εξίσωση (2) έχουμε ότι η συχνότητα της κίνησης είναι $\bar{f} = \frac{f_2 + f_1}{2}$ αλλά

$$N = \bar{f}t \rightarrow \bar{f} = \frac{N}{t} = \frac{410}{4} \text{ Hz} = 102,5 \text{ Hz} \rightarrow \frac{f_2 + f_1}{2} = 102,5 \text{ Hz} \rightarrow$$

$$f_2 + f_1 = 205 \text{ ενώ } f_2 - f_1 = 1, \text{ από όπου βρίσκουμε } f_2 = 103 \text{ Hz}, \quad f_1 = 102 \text{ Hz}$$

Οπότε τη στιγμή t_1 έχουμε:

$$x = 2A\sigma\nu \left(\pi(f_2 - f_1)t - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \eta\mu \left(\pi(f_2 + f_1)t + \frac{\pi}{4} \right) = 0,006 \cdot \eta\mu \left(205\pi \cdot \frac{1}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \rightarrow$$

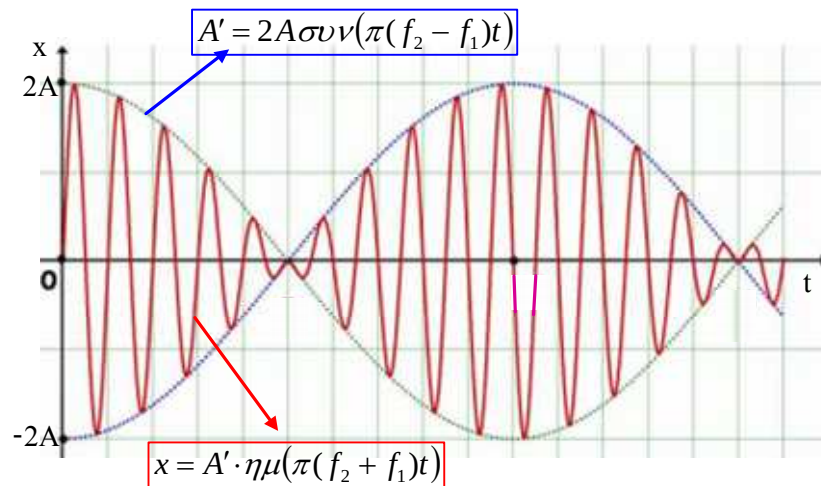
$$x = 0,006 \cdot \eta\mu \left(\frac{206\pi}{4} \right) = 0,006 \cdot \eta\mu \left(51\pi + \frac{\pi}{2} \right) = -0,006 \text{ m}$$

Σχόλιο.

Στα προηγούμενα ονομάζαμε πλάτος της ταλάντωσης (σύμφωνα και με το σχολικό μας βιβλίο) την τιμή της παράστασης:

$$A' = \left| 2A\sigma\nu \left(\pi(f_2 - f_1)t - \frac{\pi}{4} \right) \right|$$

Στην πραγματικότητα η συνάρτηση $A' = 2A\sigma\nu \left(\pi(f_2 - f_1)t - \frac{\pi}{4} \right)$ ορίζει την περιβάλλουσα της απομάκρυνσης, όπως μπορούμε να δούμε στο παρακάτω διάγραμμα.



Συνεπώς θα μπορούσε το μέγιστο «πλάτος» να υπολογίζεται στην τιμή $2A$, αλλά η μέγιστη τιμή της απομάκρυνσης x , να μην ήταν ποτέ $2A$, αλλά μικρότερη, όπως μπορεί να φανεί στο παραπάνω σχήμα.

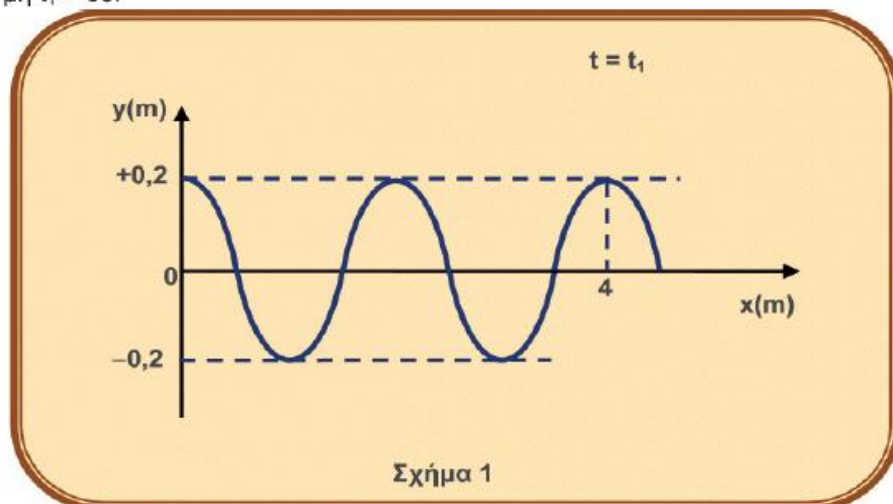
Κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει στην παραπάνω άσκηση, όπου όπως υπολογίστηκε τις στιγμές μεγιστοποίησης

του «πλάτους» $A' = \left| 2A \cos\left(\pi(f_2 - f_1)t - \frac{\pi}{4}\right) \right|$ η απομάκρυνση παίρνει τιμή $\pm 2A$.

dmargaris@sch.gr

ΕΓΚΑΡΣΙΟ ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΚΥΜΑ

Μια οριζόντια ελαστική χορδή ταυτίζεται με το θετικό ημιάξονα Ox . Μια πηγή παραγωγής αρμονικού κύματος βρίσκεται στην αρχή O της χορδής ($x = 0$) και τη χρονική στιγμή $t = 0$ αρχίζει από τη θέση ισορροπίας της να ταλαντώνεται κατακόρυφα χωρίς αρχική φάση. Στο παρακάτω διάγραμμα παριστάνεται το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 9s$.



Σχήμα 1

- α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης του αρμονικού κύματος.
 β) Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.
 γ) Να παραστήσετε γραφικά σε βαθμολογημένους άξονες
 i. τη φάση της ταλάντωσης ενός σημείου M ($x_M = +3m$) της χορδής σε συνάρτηση με το χρόνο t .
 ii. τη φάση της ταλάντωσης σε συνάρτηση με τη θέση x τη χρονική στιγμή t_2 κατά την οποία το σημείο M έχει ακινητοποιηθεί στιγμιαία για πρώτη φορά μετά την έναρξη της ταλάντωσης του.
 δ) Μετά την έναρξη της ταλάντωσης του σημείου M , κάθε χρονική στιγμή η φάση της ταλάντωσης ενός σημείου N της χορδής είναι μεγαλύτερη από τη φάση της ταλάντωσης του σημείου M κατά $\frac{3\pi}{2}$ rad. Να υπολογίσετε τον αριθμό των ταλαντώσεων που έχει εκτελέσει το σημείο N από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή
 i. $t_3 = 2s$
 ii. $t_4 = t_1 + \frac{T}{2}$, όπου T η περίοδος του κύματος.
 ε) Να παραστήσετε γραφικά την κινητική ενέργεια των σημείων της χορδής σε συνάρτηση με τη θέση τους x τη χρονική στιγμή t_3 .
 Θεωρήσετε πως το κάθε (στοιχειώδες) τμήμα της χορδής έχει μάζα $m = 10^{-3}Kg$.
 Δίνεται: $\pi^2 = 10$.

Λύση

- α) Από το διάγραμμα του σχήματος 1 φαίνεται πως: $2\lambda = 4m$ ή $\lambda = 2m$ και $A = 0,2m$.
 Μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 9s$ το κύμα έχει διαδοθεί μέχρι τη θέση $x_1 = 2\lambda + \frac{\lambda}{4}$ ή $x_1 = 4,5m$.
 Επομένως η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι: $u = \frac{x_1}{t_1}$ ή $u = 0,5m/s$.

- β) Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής προκύπτει:

$$u = \frac{\lambda}{T} \text{ ή } T = \frac{\lambda}{u} \text{ ή } T = 4s$$

Η εξίσωση του αρμονικού κύματος είναι:

$$y = A\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right] \text{ ή } y = 0,2\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{4} - \frac{x}{2}\right)\right] \text{ (S.I.)}$$

- γ) Η φάση του κύματος περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\phi = 2\pi\left(\frac{t}{4} - \frac{x}{2}\right) \text{ ή } \phi = \frac{\pi t}{2} - \pi x \text{ (S.I.) (1)}$$

- i. Για $x = x_M = +3m$ η σχέση (1) γίνεται:

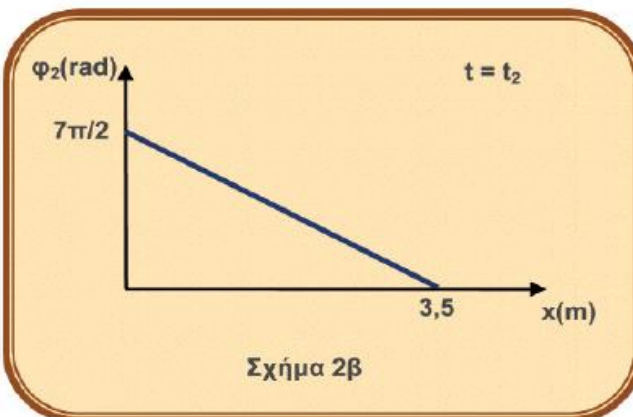
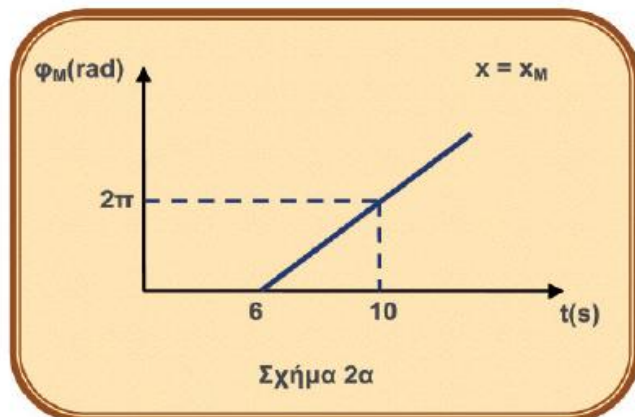
$$\phi_M = \frac{\pi}{2}t - \pi x_M \text{ ή } \phi_M = \frac{\pi}{2}t - 3\pi \text{ (S.I.) για } t \geq t_M = \frac{x_M}{u} = 6s$$

- ii. Το σημείο M ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή t_M . Θα ακινητοποιηθεί στιγμιαία για πρώτη φορά μετό από χρόνο $\Delta t = \frac{T}{4}$ ή $\Delta t = 1\text{s}$. Άρα είναι: $t_2 = t_M + \Delta t$ ή $t_2 = 7\text{s}$.

Για $t = t_2 = 7\text{s}$ η σχέση (1) γίνεται:

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} t_2 - \pi x \quad \text{ή} \quad \varphi_2 = \frac{7\pi}{2} - \pi x \quad (\text{S.I.}) \quad \text{για} \quad 0 \leq x \leq x_2 = ut_2 = 3,5\text{m}$$

Οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις φαίνονται στα ακόλουθα διαγράμματα.



- δ) Όταν τα σημεία M, N ταλαντώνονται ισχύει: $\varphi_N - \varphi_M = \frac{3\pi}{2}$ ή μέσω της σχέσης (1) $\left(\frac{\pi t}{2} - \pi x_N\right) - \left(\frac{\pi t}{2} - \pi x_M\right) =$

$$\frac{3\pi}{2} \quad \text{ή} \quad \pi(x_M - x_N) = \frac{3\pi}{2} \quad \text{ή} \quad x_N = x_M - \frac{3}{2} \quad \text{ή} \quad x_N = +1,5\text{m}.$$

Το σημείο N αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_N = \frac{x_N}{u} = 3\text{s}$.

- i. Τη χρονική στιγμή t_3 το σημείο N δεν έχει αρχίσει να ταλαντώνεται αφού $t_3 < t_N$. Συνεπώς μέχρι τότε το σημείο N δεν έχει εκτελέσει καμία ταλάντωση.

- ii. Είναι: $t_4 = t_1 + \frac{T}{2}$ ή $t_4 = 11\text{s}$.

Ο αριθμός των ταλαντώσεων N_T που έχει εκτελέσει το σημείο N από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_4 προκύπτει: $N_T = \frac{\Delta t}{T} = \frac{t_4 - t_N}{T}$ ή $N_T = 2$ ταλαντώσεις.

- ε) Για ένα τυχαίο σημείο Λ της χορδής που βρίσκεται στη θέση x του ημιάξονα Ox η κινητική ενέργεια K λόγω της ταλάντωσης του είναι:

$$K = \frac{1}{2} m u^2 \quad \text{ή} \quad K = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2[\varphi_\Lambda(t)] = \frac{1}{2} m \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A^2 \sin^2[\varphi_\Lambda(t)] \quad (2), \quad \text{όπου} \quad \varphi_\Lambda(t) \quad \text{η φάση του σημείου} \quad \Lambda \quad \text{σε}$$

συνάρτηση με το χρόνο t.

Η φάση του σημείου Λ περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\varphi_\Lambda(t) = 2\pi \left(\frac{t}{4} - \frac{x}{2}\right) \quad \text{ή} \quad \varphi_\Lambda(t) = \frac{\pi t}{2} - \pi x \quad (\text{S.I.})$$

Τη χρονική στιγμή $t = t_3 = 2\text{s}$ η εξίσωση της φάσης του τυχαίου σημείου Λ της χορδής προκύπτει:

$$\varphi_\Lambda = \pi - \pi x \quad (\text{S.I.})$$

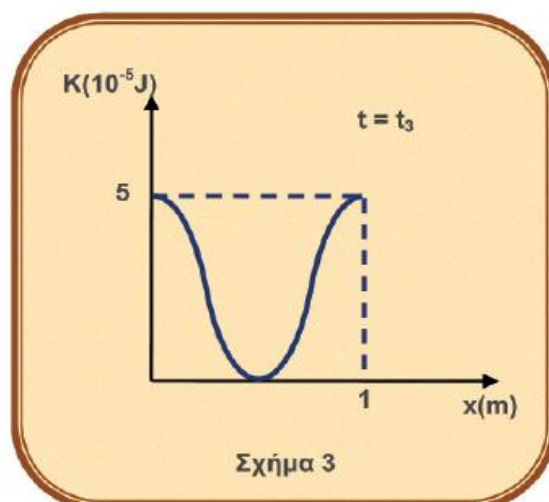
Επομένως η σχέση (2) γίνεται:

$$K_{t_3=2\text{s}} = \frac{1}{2} m \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A^2 \sin^2(\pi - \pi x) \quad \text{ή}$$

$$K_{t_3=2\text{s}} = 5 \cdot 10^{-5} \sin^2(\pi - \pi x)$$

Το κύμα έως τη χρονική στιγμή $t_3 = 2\text{s}$ έχει διαδοθεί στο θετικό ημιάξονα μέχρι τη θέση $x_3 = ut_3$ ή $x_3 = 1\text{m}$.

Η ζητούμενη γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.



ΚΥΜΑΤΑ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ ΜΕ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ

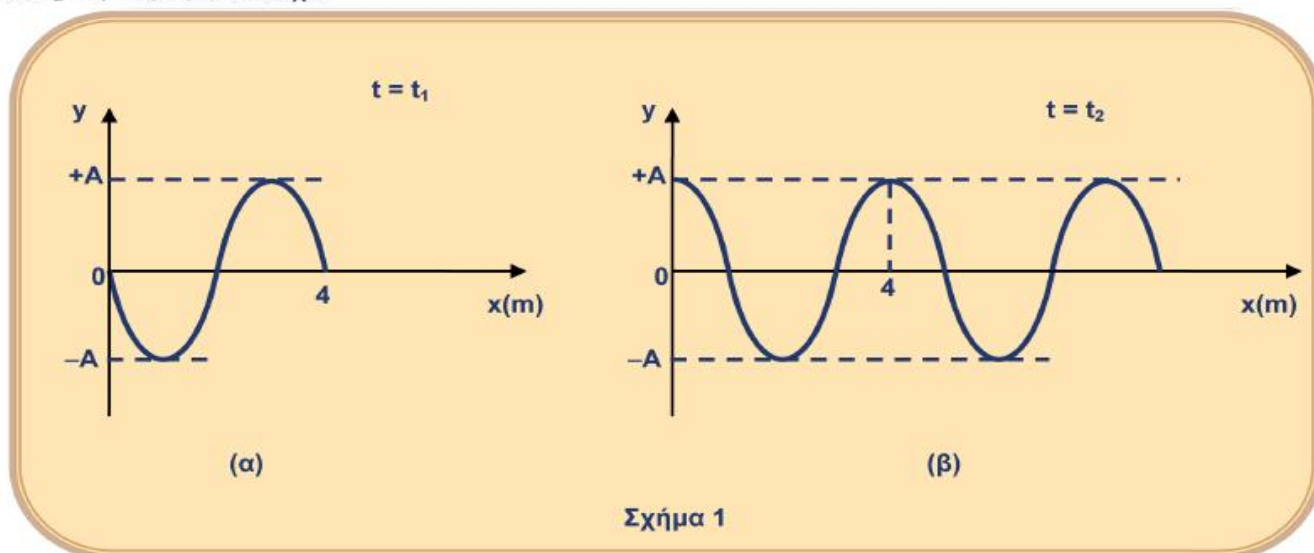
Στις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

ΕΡΩΤΗΣΗ 1^η

Ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα πλάτους A και περιόδου T διαδίδεται κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, το οποίο έχει τη διεύθυνση του άξονα $x'x$. Το κύμα διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα και η εξίσωση που περιγράφει την ταλάντωση του υλικού σημείου που βρίσκεται στην αρχή $O(x=0)$ του άξονα είναι:

$y = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$. Στα παρακάτω διαγράμματα (α) και (β) φαίνονται τα στιγμιότυπα του κύματος τις χρονικές στιγμές

t_1 και $t_2 = t_1 + 0,5s$, αντίστοιχα.



A. Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι:

- α) $u = 10m/s$
- β) $u = 8m/s$
- γ) $u = 5m/s$

B. Η φάση φ_M της ταλάντωσης ενός σημείου M το οποίο βρίσκεται στη θέση $x_M = +6m$ του άξονα $x'x$ τη χρονική στιγμή $t_3 = t_1 + \frac{3T}{4}$, όπου T η περίοδος του κύματος είναι:

- α) $\varphi_M = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$
- β) $\varphi_M = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$
- γ) $\varphi_M = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$

Λύση

A. Από το διάγραμμα (α) προκύπτει: $\lambda = 4m$. Από το ίδιο διάγραμμα φαίνεται πως το κύμα μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 έχει διαδοθεί έως τη θέση $x_1 = +\lambda = +4m$ του άξονα $x'x$.

Ομοίως μέχρι τη χρονική στιγμή t_2 το κύμα έχει διαδοθεί έως τη θέση $x_2 = +2\lambda + \frac{\lambda}{4} = +\frac{9\lambda}{4}$ ή $x_2 = +9m$ όπως φαίνεται στο διάγραμμα (β).

Επομένως η ταχύτητα διάδοσης του κύματος προκύπτει: $u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$ ή $u = 10m/s$.

Σωστή απάντηση: α

B. Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής η περίοδος T του κύματος προκύπτει: $T = \frac{\lambda}{u}$ ή $T = 0,4s$.

Επομένως προκύπτει: $t_3 = t_1 + \frac{3T}{4}$ ή $t_3 = \frac{x_1}{u} + \frac{3T}{4}$ ή $t_3 = 0,7s$

Η χρονική εξίσωση της φάσης φ_M είναι: $\varphi_M = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda}\right)$ ή $\varphi_M = 2\pi\left(\frac{t}{0,4} - \frac{6}{4}\right)$ ή $\varphi_M = 2\pi(2,5t - 1,5)$ (S.I.)

Για $t = t_3$ προκύπτει: $\varphi_M = 2\pi(2,5t_3 - 1,5)$ ή $\varphi_M = \frac{\pi}{2}$ rad.

Σωστή απάντηση: γ

ΕΡΩΤΗΣΗ 2^η

Στην επιφάνεια ενός υγρού διαδίδονται δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα τα οποία έχουν το ίδιο πλάτος A , την ίδια συχνότητα f και το ίδιο μήκος κύματος λ . Τα κύματα παράγονται από δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων Π_1 , Π_2 οι οποίες τη χρονική στιγμή $t = 0$ αρχίζουν να εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση χωρίς αρχική φάση. Ένα σημείο Σ

της επιφάνειας του υγρού απέχει από την πηγή Π_1 απόσταση $r_1 = \frac{7\lambda}{2}$ και από την πηγή Π_2 απόσταση $r_2 = \frac{\lambda}{2}$.

A. Η εξίσωση της ταλάντωσης του σημείου Σ , κάθε χρονική στιγμή t μετά την έναρξη της συμβολής των δύο κυμάτων στο σημείο αυτό, είναι της μορφής:

α) $y = 2A\eta\mu[2\pi(ft - 2)]$

β) $y = -2A\eta\mu[2\pi(ft - 2)]$

γ) $y = -2A\eta\mu\left[2\pi\left(ft - \frac{3}{2}\right)\right]$

B. Η ταχύτητα του σημείου Σ τη χρονική στιγμή $t = \frac{1}{f}$ είναι:

α) $u_\Sigma = -\pi f A$

β) $u_\Sigma = 4\pi f A$

γ) $u_\Sigma = -2\pi f A$

Λύση

A. Μετά την έναρξη της συμβολής στο σημείο Σ η εξίσωση της ταλάντωσης τους είναι της μορφής:

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu\left[2\pi\left(\frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\right)\right]\eta\mu\left[2\pi\left(ft - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right)\right]$$

Με αντικατάσταση των τιμών στην παραπάνω εξίσωση προκύπτει:

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu\left[2\pi\left(\frac{\frac{7\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2}}{2\lambda}\right)\right]\eta\mu\left[2\pi\left(ft - \frac{\frac{7\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2}}{2\lambda}\right)\right] \text{ ή } y = 2A\sigma\upsilon\nu(3\pi)\eta\mu[2\pi(ft - 2)] \text{ ή }$$

$$y = -2A\eta\mu[2\pi(ft - 2)].$$

Σωστή απάντηση: β

B. Το σημείο Σ αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t' = \frac{r_2}{u} = \frac{r_2}{\lambda f} = \frac{\frac{\lambda}{2}}{\lambda f}$ ή $t' = \frac{0,5}{f}$.

Η συμβολή στο σημείο Σ αρχίζει τη χρονική στιγμή $t'' = \frac{r_1}{u} = \frac{r_1}{\lambda f} = \frac{\frac{7\lambda}{2}}{\lambda f}$ ή $t'' = \frac{3,5}{f}$.

Επομένως τη χρονική στιγμή $t = \frac{1}{f}$ με $t' < t < t''$ το σημείο ταλαντώνεται μόνο λόγω του κύματος που παράγεται από την πηγή Π_2 . Η εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου Σ στο χρονικό διάστημα $t' \leq t < t''$ είναι:

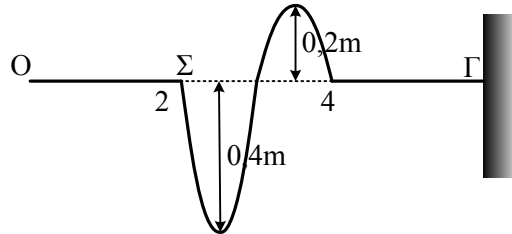
$$u_\Sigma = 2\pi f A \sigma\upsilon\nu\left[2\pi\left(ft - \frac{r_2}{\lambda}\right)\right].$$

$$\text{Για } t = \frac{1}{f} \text{ προκύπτει: } u_\Sigma = 2\pi f A \sigma\upsilon\nu\left[2\pi\left(f\frac{1}{f} - \frac{\frac{\lambda}{2}}{\lambda}\right)\right] \text{ ή } u_\Sigma = 2\pi f A \sigma\upsilon\nu(\pi) \text{ ή } u_\Sigma = -2\pi f A.$$

Σωστή απάντηση: γ

Κυματοπαλμός και ταλάντωση ενός σημείου

Το άκρο Ο ενός νήματος, το άλλο άκρο Γ του οποίου είναι δεμένο σε κατακόρυφο τοίχο, για $t=0$ τίθεται σε ταλάντωση οπότε κατά μήκος του νήματος διαδίδεται ένας παλμός. Η μορφή του νήματος τη χρονική στιγμή $t_1=2s$ φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



- Να βρεθεί η περίοδος ταλάντωσης του άκρου Ο.
- Να κάνετε το διάγραμμα της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο ενός σημείου Σ που βρίσκεται στη θέση $x=2m$, μέχρι τη στιγμή $t_2=3s$.
- Να σχεδιάσετε τη μορφή του νήματος τη χρονική στιγμή $t_3=4,5s$.

Απάντηση:

- Παρατηρούμε ότι σε χρόνο t_1 ο κυματοπαλμός έχει διαδοθεί κατά $x_1=4m$, οπότε η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι:

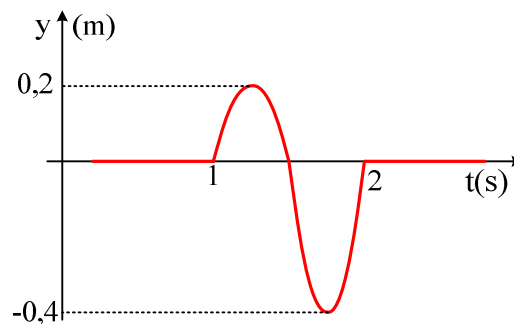
$$v = \frac{x}{t} = \frac{4m}{2s} = 2m/s$$

Για την περίοδο εξάλλου έχουμε:

$$v = \frac{\lambda}{T} \rightarrow T = \frac{\lambda}{v} = \frac{2m}{2m/s} = 1s$$

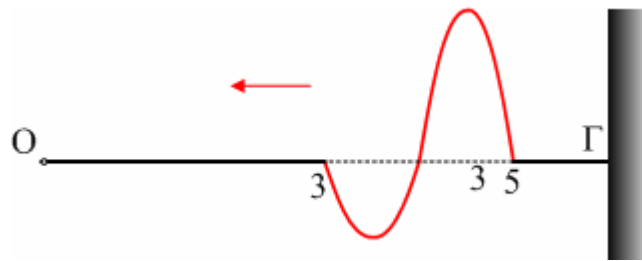
- Ο κυματοπαλμός φτάνει στο σημείο Σ τη χρονική στιγμή $t = \frac{x}{v} = \frac{2m}{2m/s} = 1s$ οπότε

το Σ αρχίζει να ταλαντώνεται, προς την θετική κατεύθυνση, με πλάτος $0,2m$ επί χρονικό διάστημα $0,5s$, όπου το πλάτος γίνεται $0,3m$. Έτσι η ταλάντωση του σημείου Σ είναι της μορφής του παρακάτω διαγράμματος.



- Το κύμα φτάνει στον τοίχο τη στιγμή $t=x/v=3s$ και ανακλάται, οπότε κινούμενο προς τα

αριστερά διανύει απόσταση $d=v\Delta t=2\cdot 1,5\text{m}=3\text{m}$, έχει δηλαδή φτάσει στο μέσον του νήματος, ενώ λόγω ανάκλασης έχουμε αλλαγή φάσης κατά π . Το στιγμιότυπο δηλαδή είναι:



dmargaris@sch.gr

KYMATΑ. Η πηγή είναι αλλοό....

Στη θέση $x_1=6\text{m}$ ενός ομογενούς γραμμικού ελαστικού μέσου υπάρχει πηγή κύματος, το οποίο διαδίδεται και προς τις δύο κατευθύνσεις. Θεωρούμε $t=0$ τη στιγμή που το κύμα φτάνει στο σημείο Ο στη θέση $x=0$, οπότε το σημείο Ο αρχίζει να ταλαντώνεται με εξίσωση $y=0,1\mu\text{m}10\pi t$ (μονάδες στο S.I.) με μήκος κύματος $\lambda=2\text{m}$.

- i) Ποια η εξίσωση του κύματος που διαδίδεται προς τα αριστερά;
- ii) Ποια η εξίσωση ταλάντωσης $y=f(t)$ της πηγής;
- iii) Ποια η εξίσωση του κύματος που διαδίδεται προς τα δεξιά;

Απάντηση:

- i) Σύμφωνα με την θεωρία του σχολικού βιβλίου, για το κύμα προς τ' αριστερά η εξίσωση του κύματος είναι:

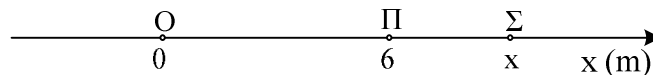
$$y_1 = 0,1\cdot\mu\text{m}2\pi(5t + \frac{x}{2}) \quad (\text{μονάδες στο S.I.})$$

- ii) Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση $x=6\text{m}$ βρίσκουμε την εξίσωση ταλάντωσης της πηγής:

$$y_\pi = 0,1\cdot\mu\text{m}2\pi(5t+3) \quad \text{ή}$$

$$y_\pi = 0,1\cdot\mu\text{m}(10\pi t + 6\pi) \quad (\text{S.I.})$$

- iii) Έστω το τυχαίο σημείο Σ, δεξιά της πηγής στη θέση x .



Το κύμα για να φτάσει από την πηγή Π στο σημείο Σ, θα χρειαστεί χρονικό διάστημα $t_1 = \frac{\Delta x}{v}$ όπου v η ταχύτητα διάδοσης του κύματος, $v = \lambda f = 2 \cdot 5 = 10\text{m/s}$.

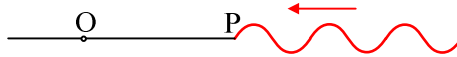
Άρα η ταλάντωση του τυχαίου σημείου Σ θα είναι:

$$y_2 = 0,1\cdot\mu\text{m}[10\pi(t-t_1) + 6\pi] \quad \text{ή}$$

$$y_2 = 0,1\cdot\mu\text{m}[10\pi(t - \frac{\Delta x}{v}) + 6\pi] = 0,1\cdot\mu\text{m}[10\pi(t - \frac{x-6}{10}) + 6\pi] \quad \text{ή}$$

$$y_2 = 0,1\cdot\mu\text{m}2\pi(5t - \frac{x}{2} + 6) \quad (\text{S.I.})$$

Κύμα προς τ' αριστερά.



Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και από δεξιά προς τα αριστερά διαδίδεται ένα κύμα με ταχύτητα $v=2\text{m/s}$. Το κύμα για $t=0$ φτάνει στο σημείο P, στη θέση $x_P=2\text{m}$, το οποίο ξεκινά την ταλάντωσή του κινούμενο προς την θετική κατεύθυνση (προς τα πάνω). Τη στιγμή $t'=0,375\text{s}$ το σημείο P έχει μηδενική ταχύτητα, για δεύτερη φορά, ενώ έχει διανύσει απόσταση $d=0,3\text{m}$.

- Ποια η εξίσωση του κύματος;
- Να σχεδιάσετε την μορφή του ελαστικού μέσου (στιγμιότυπο του κύματος), μέχρι τη θέση $x_2=4\text{m}$ τη χρονική στιγμή $t_2=1,5\text{s}$.

Απάντηση:

- Τη χρονική στιγμή t' το σημείο P βρίσκεται στην μέγιστη αρνητική απομάκρυνσή του, έχει δηλαδή ταλαντωθεί κατά $3T/4$, άρα $T=4/3 \cdot t'=0,5\text{s}$, ενώ έχει διατρέξει απόσταση $d=3A \rightarrow A=0,1\text{m}$.

$$\text{Έχουμε ακόμη ότι } v = \frac{\lambda}{T} \rightarrow \lambda = vT = 1\text{m}$$

Με βάση τα παραπάνω η εξίσωση ταλάντωσης του P είναι:

$$y = A \sin \omega t \text{ ή}$$

$$y = 0,1 \sin 4\pi t \text{ (S.I.)}$$

Έστω ένα τυχαίο σημείο Σ στη θέση x , όπως στο σχήμα.

Για να φτάσει το κύμα στο σημείο Σ θα απαιτηθεί χρόνος $t_1 = \frac{\Delta x}{v} = \frac{2-x}{2} \text{ s}$, οπότε η εξίσωση ταλάντωσης του Σ είναι:

$$y = 0,1 \sin 4\pi(t - t_1) \text{ ή}$$

$$y = 0,1 \sin 4\pi\left(t - \frac{2-x}{2}\right)$$

Άρα η εξίσωση του κύματος είναι:

$$y = 0,1 \sin 2\pi(2t + x - 2) \text{ (S.I.) (1)}$$

- Θέτοντας στην εξίσωση (1) $t_2 = 1,5\text{s}$ παίρνουμε:

$$y = 0,1 \sin 2\pi(3 + x - 2) = 0,1 \sin(2\pi + 2\pi x) = 0,1 \sin 2\pi x.$$

Μέχρι πού έχει φτάσει το κύμα;

Παίρνουμε την φάση, για την οποία $\phi \geq 0 \rightarrow$

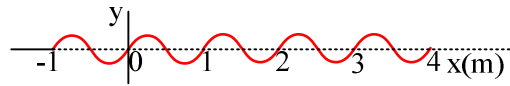
$$2\pi(2t+x-2) \geq 0 \rightarrow$$

$$1+x \geq 0 \rightarrow$$

$$x \geq -1$$

Το κύμα έχει δηλαδή διαδοθεί μέχρι τη θέση $x=-1\text{m}$.

Έτσι το ζητούμενο στιγμιότυπο είναι:



dmargaris@sch.gr

ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΟΛΙΚΗ ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ ΑΝΑΚΛΑΣΗ

Ένα κυλινδρικό δοχείο έχει διάμετρο d , ύψος $h = 10\text{cm}$ και περιέχει υγρό. Κατά μήκος μιας διαμέτρου AN του πυθμένα του δοχείου μια σημειακή φωτεινή πηγή μονοχρωματικού φωτός, μάζας $m = 20\text{g}$, εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, όπως φαίνεται στο σχήμα 1. Η ταλάντωση εκτελείται γύρω από το κέντρο O του πυθμένα του δοχείου και η εξίσωση της απομάκρυνσης της πηγής από το O σε συνάρτηση με το χρόνο είναι:

$$x = A \cdot \eta\mu \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{40}\text{s}$ κατά την οποία η πηγή

βρίσκεται σε απόσταση $d_1 = 10\sqrt{2}\text{cm}$ από το κέντρο O , η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι ίση με την κινητική για 1^η φορά από την έναρξη της ταλάντωσης ($t = 0\text{s}$). Το φως που εκπέμπει η πηγή κατευθύνεται συνεχώς προς το σημείο K της επιφάνειας του υγρού που

βρίσκεται στην ίδια κατακόρυφο με το κέντρο O του πυθμένα. Το υγρό παρουσιάζει δείκτη διάθλασης $n = \sqrt{2}$ για τη μονοχρωματική ακτινοβολία.

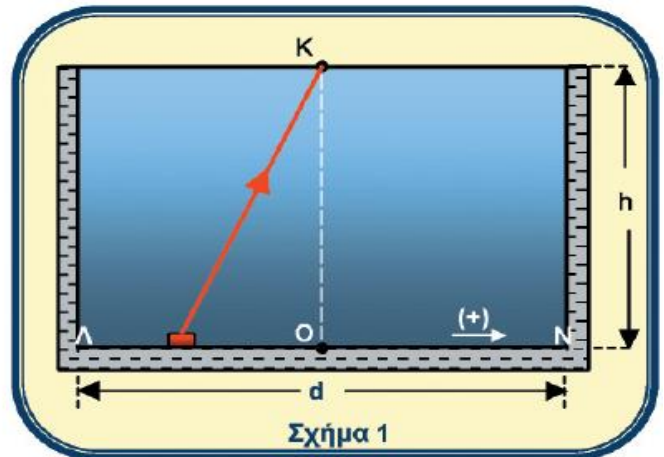
α) Να υπολογίσετε την περίοδο της απλής αρμονικής ταλάντωσης της πηγής και το μήκος d της διαμέτρου του δοχείου.

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της μέγιστης δύναμης επαναφοράς που ασκείται στην πηγή και να απεικονίσετε γραφικά τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας της πηγής σε συνάρτηση με το χρόνο για την πρώτη περίοδο της ταλάντωσης της.

γ) Κατά τη διάρκεια της πρώτης περιόδου της ταλάντωσης της πηγής να υπολογίσετε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο η μονοχρωματική ακτινοβολία εξέρχεται από το υγρό.

δ) Να υπολογίσετε το εύρος τιμών της ενέργειας ταλάντωσης ώστε η μονοχρωματική ακτινοβολία να εξέρχεται στον αέρα σε όλη τη διάρκεια της ταλάντωσης της πηγής.

Θεωρήστε θετική τη φορά που φαίνεται στο σχήμα 1 και πώς το δοχείο περιβάλλεται από αέρα.



Σχήμα 1

Λύση

α) Η φωτεινή πηγή ξεκινά την ταλάντωση της από το σημείο N της διαμέτρου AN αφού τη χρονική στιγμή $t = 0\text{s}$ η απομάκρυνση της από το κέντρο O είναι: $x = A \cdot \eta\mu \left(\frac{\pi}{2} \right)$ ή $x = +A = x_N$.

Όταν η κινητική ενέργεια ισούται με τη δυναμική της ταλάντωσης εφαρμόζοντας την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας της, οι απομακρύνσεις της πηγής από το O προκύπτουν:

$$K + U = E \text{ ή } 2U = E \text{ ή } 2 \cdot \frac{1}{2} D x^2 = \frac{1}{2} D A^2 \text{ ή } x^2 = \frac{A^2}{2} \text{ ή } x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} A.$$

Η 1^η φορά που ισχύει $K = U$ συμβαίνει όταν $x = +\frac{\sqrt{2}}{2} A$. Όμως τότε η πηγή βρίσκεται σε απόσταση

$$d_1 = 10\sqrt{2}\text{cm} \text{ από το κέντρο } O. \text{ Συνεπώς } x = d_1 \text{ ή } \frac{\sqrt{2}}{2} A = d_1 \text{ ή } A = d_1 \sqrt{2} \text{ ή } A = 20\text{cm}.$$

Αρα η διάμετρος του δοχείου έχει μήκος: $d = 2A$ ή $d = 40\text{cm}$.

Επομένως η χρονική εξίσωση απομάκρυνσης της πηγής από το O γίνεται: $x = 20\eta\mu \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$ ($t \rightarrow \text{s}, x \rightarrow \text{cm}$)

Ακόμα θα πρέπει: $t_1 < \frac{T}{4}$ ή $\frac{\pi}{40}\text{s} < \frac{T}{4}$ ή $T > \frac{\pi}{10}\text{s}$ ή $\frac{2\pi}{\omega} > \frac{\pi}{10}\text{s}$ ή $\omega < 20\text{ rad/s}$ (1).

Για την στιγμή $t = t_1 = \frac{\pi}{40}\text{s}$ ισχύει: $x = d_1 = 10\sqrt{2}\text{cm}$ με $v < 0$. Έτσι προκύπτει: $d_1 = 20 \cdot \eta\mu \left(\omega t_1 + \frac{\pi}{2} \right)$ ή

$$10\sqrt{2} = 20\eta\mu \left(\omega \frac{\pi}{40} + \frac{\pi}{2} \right) \text{ ή } \eta\mu \left(\omega \frac{\pi}{40} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ή } \eta\mu \left(\omega \frac{\pi}{40} + \frac{\pi}{2} \right) = \eta\mu \frac{\pi}{4} \text{ ή } \begin{cases} \frac{\pi}{40} \omega + \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{40} \omega + \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

- Για $k = 0$ προκύπτουν: $\omega = -10\text{ rad/s}$ και $\omega = 10\text{ rad/s}$
- Για $k = 1$ προκύπτουν: $\omega = 70\text{ rad/s}$ και $\omega = 90\text{ rad/s}$ κ.τ.λ.

Άρα η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης από τον περιορισμό (1) είναι: $\omega = 10 \text{ rad/s}$ και η περίοδος: $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ή

$$T = 0,2\pi \text{ s}$$

β) Το μέτρο της δύναμης επαναφοράς που ασκείται στην πηγή προκύπτει:

$$F_{\text{επ}} = -D \cdot x \text{ ή } F_{\text{επ}} = -m \cdot \omega^2 \cdot x \text{ ή } |F_{\text{επ}}| = m \cdot \omega^2 \cdot |x|$$

Συνεπώς το μέτρο της μέγιστης δύναμης επαναφοράς είναι: $|F_{\text{επ}}|_{\text{max}} = m \cdot \omega^2 \cdot A$ ή $|F_{\text{επ}}|_{\text{max}} = 0,4 \text{ N}$

Η χρονική εξίσωση της κινητικής ενέργειας της πηγής είναι η:

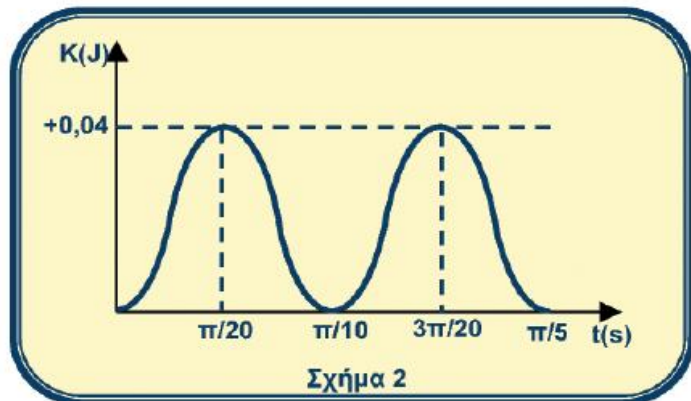
$$K = E \cdot \sin^2(\omega t + \phi_0) \text{ ή } K = \frac{1}{2} D A^2 \sin^2(\omega t + \phi_0)$$

$$\text{ή } K = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi_0)$$

$$\text{ή } K = 0,04 \cdot \sin^2\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{ή } K = 0,04 \cdot \eta\mu^2(10t) \text{ (S.I.)}$$

Η ζητούμενη γραφική παράσταση για την πρώτη περίοδο της ταλάντωσης της πηγής φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



γ) Η ακτινοβολία εξέρχεται από το σημείο K της επιφάνειας του υγρού όταν η γωνία πρόσπτωσης είναι μικρότερη ή ίση με την οριακή γωνία θ_{crit} για την οποία ισχύει: $\eta\mu\theta_{\text{crit}} = \frac{1}{n}$. Δηλαδή, για τη γωνία πρόσπτωσης θ (βλ. σχήμα

3) πρέπει να ισχύει: $\theta \leq \theta_{\text{crit}}$ ή $\eta\mu\theta \leq \eta\mu\theta_{\text{crit}}$ ή

$$\frac{|x|}{\sqrt{x^2 + h^2}} \leq \frac{1}{n} \text{ ή } x^2 n^2 \leq x^2 + h^2 \text{ ή } x^2(n^2 - 1) \leq h^2$$

$$\text{ή } x^2 \leq \frac{h^2}{n^2 - 1} \text{ ή } -\frac{h}{\sqrt{n^2 - 1}} \leq x \leq \frac{h}{\sqrt{n^2 - 1}} \text{ ή}$$

$$-10 \text{ cm} \leq x \leq 10 \text{ cm} \text{ ή } -10 \leq 20 \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \leq 10$$

$$\text{ή } -\frac{1}{2} \leq \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \leq \frac{1}{2}$$

Άρα για την πρώτη περίοδο της ταλάντωσης της πηγής ισχύει:

$$\bullet \quad \eta\mu\left(\frac{7\pi}{6}\right) \leq \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \leq \eta\mu\left(\frac{5\pi}{6}\right) \text{ ή}$$

$$\frac{7\pi}{6} \geq 10t + \frac{\pi}{2} \geq \frac{5\pi}{6} \text{ ή } \frac{2\pi}{30} \text{ s} \geq t \geq \frac{\pi}{30} \text{ s}$$

Άρα όσο η πηγή κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση εξέρχεται μονοχρωματική ακτινοβολία για χρονικό διάστημα $\Delta t_1 = \frac{2\pi}{30} \text{ s} - \frac{\pi}{30} \text{ s} = \frac{\pi}{30} \text{ s}$

$$\bullet \quad \eta\mu\left(\frac{11\pi}{6}\right) \leq \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \leq \eta\mu\left(\frac{13\pi}{6}\right) \text{ ή } \frac{11\pi}{6} \leq 10t + \frac{\pi}{2} \leq \frac{13\pi}{6} \text{ ή } \frac{4\pi}{30} \text{ s} \leq t \leq \frac{5\pi}{30} \text{ s}$$

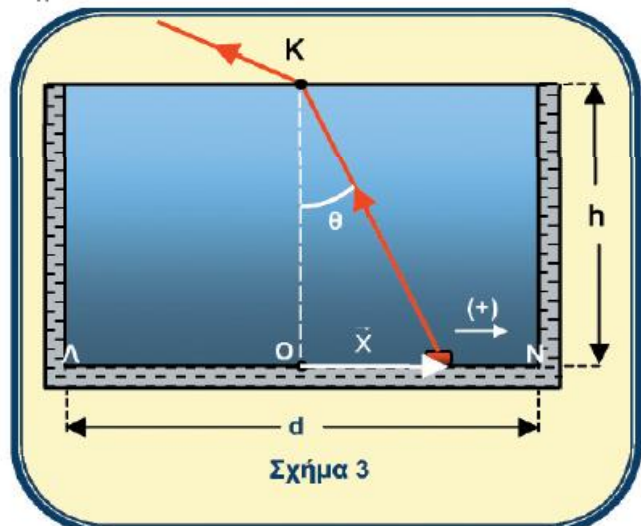
Ομοίως όσο η πηγή κινείται προς την θετική κατεύθυνση εξέρχεται μονοχρωματική ακτινοβολία για χρονικό διάστημα $\Delta t_2 = \frac{5\pi}{30} \text{ s} - \frac{4\pi}{30} \text{ s} = \frac{\pi}{30} \text{ s}$

Το συνολικό χρονικό διάστημα κατά τη διάρκεια της πρώτης περιόδου της ταλάντωσης της πηγής που η μονοχρωματική ακτινοβολία εξέρχεται από το υγρό είναι: $\Delta t_{\text{ολ}} = \Delta t_1 + \Delta t_2$ ή $\Delta t_{\text{ολ}} = \frac{2\pi}{30} \text{ s} = \frac{\pi}{15} \text{ s}$.

δ) Για να εξέρχεται συνεχώς η ακτινοβολία στον αέρα πρέπει: $|x| \leq \frac{h}{\sqrt{n^2 - 1}} = 10 \text{ cm} = \frac{d}{4}$. Τότε η μέγιστη ενέργεια

της ταλάντωσης είναι: $E_{\text{max}} = \frac{1}{2} D \left(\frac{d}{4}\right)^2 = 10^{-2} \text{ J}$. Άρα για την ενέργεια της ταλάντωσης πρέπει να ισχύει:

$$0 < E \leq E_{\text{max}} \text{ ή } 0 < E \leq 10^{-2} \text{ J}$$



Κύμα προς τ' αριστερά, φάση και στιγμιότυπα.

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και από δεξιά προς τ' αριστερά διαδίδεται ένα κύμα πλάτους $A=0,1\text{m}$ και μήκους κύματος $\lambda=1\text{m}$. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ το κύμα φτάνει στο σημείο Ο, στη θέση $x=0$, οπότε το σημείο αυτό αρχίζει την ταλάντωσή του, κινούμενο προς την θετική κατεύθυνση και φτάνει στην ακραία θέση της ταλάντωσης τη στιγμή $t_1=0,5\text{s}$. Θεωρούμε την προς τα δεξιά κατεύθυνση θετική.

- i) Να βρεθεί η εξίσωση του κύματος.
- ii) Να σχεδιάσετε στιγμιότυπα του κύματος για μια περιοχή μεταξύ των σημείων Β και Γ του μέσου στις θέσεις $x_B=2,5\text{m}$ και $x_\Gamma=-2\text{m}$, τις χρονικές στιγμές $t_1=2\text{s}$ και $t_2=5,5\text{s}$.
- iii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της φάσης του σημείου Β σε συνάρτηση με το χρόνο.

Απάντηση:

- i) Το σημείο Ο για να πάει από την θέση ισορροπίας του στη μέγιστη απομάκρυνση χρειάζεται χρόνο $T/4$ άρα $T=4t_1=2\text{s}$. Κατά συνέπεια η εξίσωση του κύματος είναι:

$$y=0,1\mu 2\pi\left(\frac{t}{2}+x\right) \quad (\text{μονάδες στο S.I}) \quad (1)$$

- ii) Με αντικατάσταση στην εξίσωση του κύματος της τιμής $t_1=2\text{s}$ παίρνουμε:

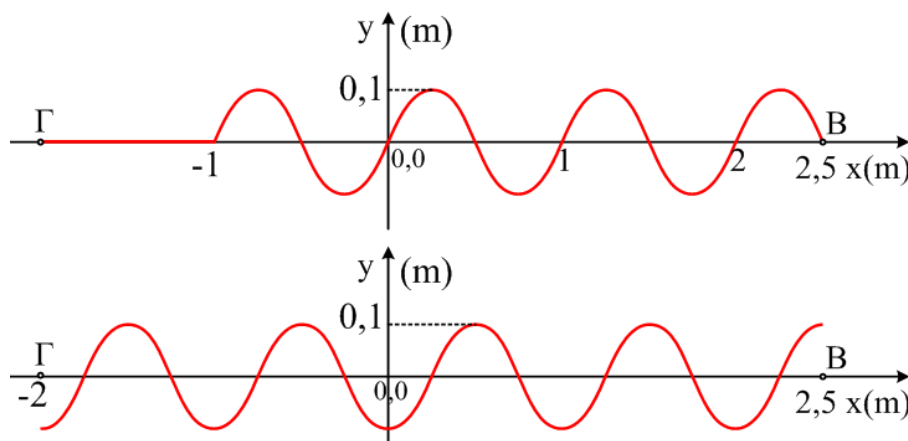
$$y=0,1\mu 2\pi\left(\frac{t}{2}+x\right)=0,1\mu(2\pi+2\pi x)=0,1\mu 2\pi x$$

Το κύμα στο μεταξύ έχει διαδοθεί πέρα από το σημείο Ο σε απόσταση $d=vt=\frac{\lambda}{T}\cdot t=1\text{m}$, έχοντας φτάσει μέχρι τη θέση $x=-1\text{m}$.

Ενώ για $t_2=5,5\text{s}$ έχουμε:

$$y=0,1\mu 2\pi\left(\frac{t}{2}+x\right)=0,1\mu(5,5\pi+2\pi x)=0,1\mu(4\pi+1,5\pi+2\pi x)=-0,1\sigma\mu 2\pi x$$

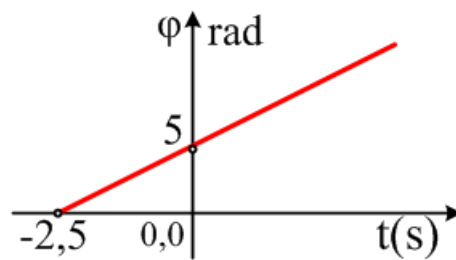
ενώ έχει διαδοθεί πέρα από το σημείο Γ, στο οποίο φτάνει τη στιγμή $t'=4\text{s}$ και τα ζητούμενα στιγμιότυπα είναι αυτά του παρακάτω σχήματος.



iii) Η φάση του σημείου Β είναι:

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t}{2} + x \right) = 2\pi t + 2\pi x = 2\pi t + 5\pi$$

Θέτοντας $\varphi = 0$ βρίσκουμε $t = -2,5\text{s}$, πράγμα που σημαίνει ότι το κύμα έφτασε στο σημείο Β $2,5\text{s}$ πριν τη στιγμή μηδέν και η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι η παρακάτω.



dmargaris@sch.gr

Κύμα προς τ' αριστερά, φάση και στιγμιότυπα.

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και από δεξιά προς τ' αριστερά διαδίδεται ένα κύμα πλάτους $A=0,1\text{m}$ και μήκους κύματος $\lambda=1\text{m}$. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ το κύμα φτάνει στο σημείο Ο, στη θέση $x=0$, οπότε το σημείο αυτό αρχίζει την ταλάντωσή του, κινούμενο προς την θετική κατεύθυνση και φτάνει στην ακραία θέση της ταλάντωσης τη στιγμή $t_1=0,5\text{s}$. Θεωρούμε την προς τα δεξιά κατεύθυνση θετική.

- i) Να βρεθεί η εξίσωση του κύματος.
- ii) Να σχεδιάσετε στιγμιότυπα του κύματος για μια περιοχή μεταξύ των σημείων Β και Γ του μέσου στις θέσεις $x_B=2,5\text{m}$ και $x_I=-2\text{m}$, τις χρονικές στιγμές $t_1=2\text{s}$ και $t_2=5,5\text{s}$.
- iii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της φάσης του σημείου Β σε συνάρτηση με το χρόνο.

Απάντηση:

- i) Το σημείο Ο για να πάει από την θέση ισορροπίας του στη μέγιστη απομάκρυνση χρειάζεται χρόνο $T/4$ άρα $T=4t_1=2\text{s}$. Κατά συνέπεια η εξίσωση του κύματος είναι:

$$y=0,1\mu 2\pi\left(\frac{t}{2}+x\right) \quad (\text{μονάδες στο S.I}) \quad (1)$$

- ii) Με αντικατάσταση στην εξίσωση του κύματος της τιμής $t_1=2\text{s}$ παίρνουμε:

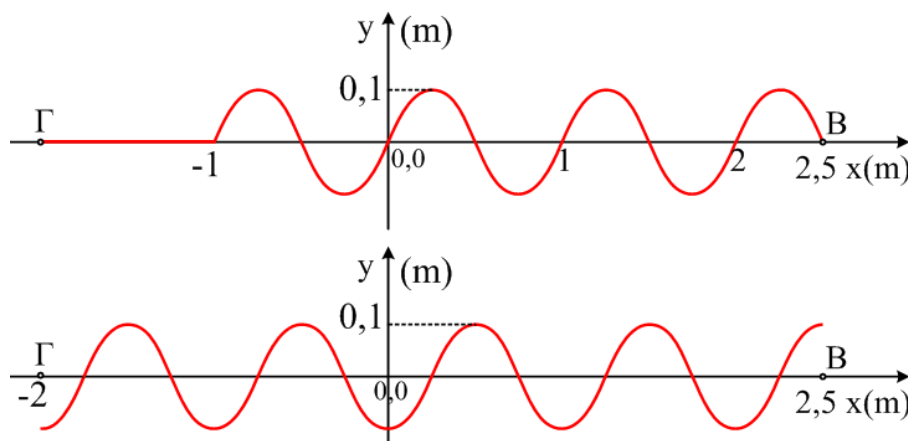
$$y=0,1\mu 2\pi\left(\frac{t}{2}+x\right)=0,1\mu(2\pi+2\pi x)=0,1\mu 2\pi x$$

Το κύμα στο μεταξύ έχει διαδοθεί πέρα από το σημείο Ο σε απόσταση $d=vt=\frac{\lambda}{T}\cdot t=1\text{m}$, έχοντας φτάσει μέχρι τη θέση $x=-1\text{m}$.

Ενώ για $t_2=5,5\text{s}$ έχουμε:

$$y=0,1\mu 2\pi\left(\frac{t}{2}+x\right)=0,1\mu(5,5\pi+2\pi x)=0,1\mu(4\pi+1,5\pi+2\pi x)=-0,1\sigma\upsilon\upsilon 2\pi x$$

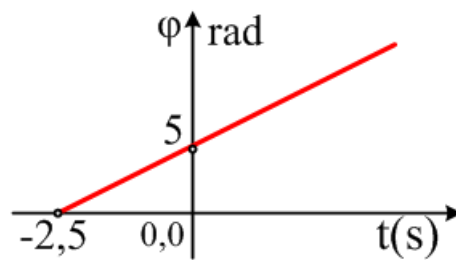
ενώ έχει διαδοθεί πέρα από το σημείο Γ, στο οποίο φτάνει τη στιγμή $t'=4\text{s}$ και τα ζητούμενα στιγμιότυπα είναι αυτά του παρακάτω σχήματος.



iii) Η φάση του σημείου Β είναι:

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t}{2} + x \right) = 2\pi t + 2\pi x = 2\pi t + 5\pi$$

Θέτοντας $\varphi=0$ βρίσκουμε $t=-2,5s$, πράγμα που σημαίνει ότι το κύμα έφτασε στο σημείο Β 2,5s πριν τη στιγμή μηδέν και η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι η παρακάτω.



dmargaris@sch.gr

Κύματα και προς τις δύο κατευθύνσεις.

Στη θέση $x_1=8\text{m}$ ενός οριζόντιου γραμμικού ελαστικού μέσου υπάρχει πηγή κύματος η οποία αρχίζει να ταλαντώνεται σε κατακόρυφη διεύθυνση με εξίσωση:

$$y=0,1 \cdot \eta\mu 2\pi t \text{ (μονάδες στο S.I.)}$$

Στο ελαστικό μέσο παράγονται δύο κύματα, ένα προς τα δεξιά και ένα προς τα αριστερά, τα οποία διαδίδονται με ταχύτητα $v=2\text{m/s}$.

- i) Να βρεθούν οι εξισώσεις των δύο κυμάτων.
- ii) Να σχεδιάστε τη μορφή του ελαστικού μέσου τη χρονική στιγμή $t_1=1,5\text{s}$.
- iii) Να βρείτε την παραπάνω χρονική στιγμή οι φάσεις δύο σημείων του μέσου Β και Γ που βρίσκονται στις θέσεις $x_2=6\text{m}$ και $x_3=10\text{m}$.

Απάντηση:

- i) Για την πηγή $\omega=2\pi \rightarrow T=1\text{s}$ και το μήκος των παραγομένων κυμάτων είναι $\lambda=vT=2\text{m}$.

Για το κύμα προς τα δεξιά, η εξίσωση ταλάντωσης του τυχαίου σημείου Σ_1 θα είναι:

$$y_1 = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi(t-t_1) = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi\left(t - \frac{x-8}{v}\right) \rightarrow$$

$$y_1 = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi\left(t - \frac{x}{2} + 4\right) \text{ (μονάδες στο S.I.)}. \quad (1)$$

Για το κύμα προς τ' αριστερά, η εξίσωση ταλάντωσης του τυχαίου σημείου Σ_2 θα είναι:

$$y_2 = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi(t-t_1) = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi\left(t - \frac{8-x}{v}\right) \rightarrow$$

$$y_2 = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi\left(t + \frac{x}{2} - 4\right) \text{ (μονάδες στο S.I.)}. \quad (2)$$

- ii) Σε χρονικό διάστημα $\Delta t=1,5\text{s}$ το κύμα διαδίδεται κατά $\Delta x=v\Delta t=3\text{m}$, οπότε το κύμα προς τα δεξιά θα έχει φτάσει μέχρι το σημείο με $x_4=11\text{m}$ και το κύμα προς τ' αριστερά στη θέση $x_5=5\text{m}$.

Θέτοντας στην (1) $t=1,5\text{s}$ παίρνουμε:

$$y_1 = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{x}{2} + 4 \right) = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi \left(1,5 - \frac{x}{2} + 4 \right) = 0,1 \cdot \eta\mu (3\pi - \pi x + 8\pi) \rightarrow$$

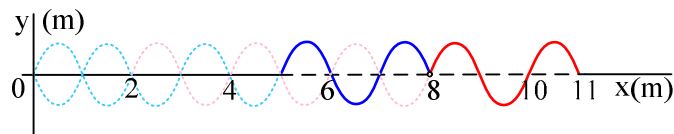
$$y_1 = 0,1 \cdot \eta\mu (\pi - \pi x) = 0,1 \cdot \eta\mu \pi x \quad (3) \quad \mu\epsilon \quad 8 \leq x \leq 11$$

Θέτοντας στην (2) $t=1,5s$ παίρνουμε:

$$y_2 = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t + \frac{x}{2} - 4 \right) = 0,1 \cdot \eta\mu (3\pi + \pi x - 8\pi) = 0,1 \cdot \eta\mu (-\pi + \pi x) \rightarrow$$

$$y_2 = -0,1 \cdot \eta\mu \pi x \quad (4) \quad \mu\epsilon \quad 5 \leq x \leq 8$$

Η γραφική παράσταση των σχέσεων (3) και (4) είναι η παρακάτω:



iii) Για το σημείο Β: $\varphi = (3\pi + \pi x - 8\pi) = 6\pi - 5\pi = \pi$ (rad)

Ενώ για το σημείο Γ: $\varphi = (3\pi - \pi x + 8\pi) = 11\pi - 10\pi = \pi$ (rad)

Προσέξτε ότι τα δύο σημεία είναι συμμετρικά της πηγής και τη στιγμή αυτή έχουν εκτελέσει μισή ταλάντωση το καθένα.

dmargaris@sch.gr

ΚΥΜΑΤΑ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ ΜΕ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ

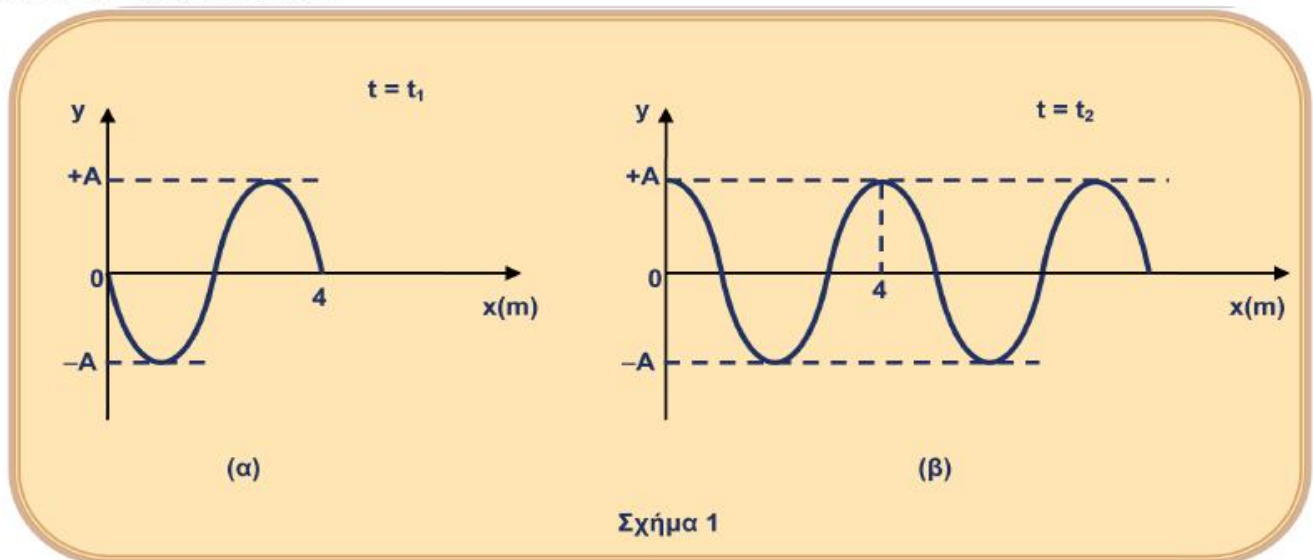
Στις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

ΕΡΩΤΗΣΗ 1^η

Ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα πλάτους A και περιόδου T διαδίδεται κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, το οποίο έχει τη διεύθυνση του άξονα $x'x$. Το κύμα διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα και η εξίσωση που περιγράφει την ταλάντωση του υλικού σημείου που βρίσκεται στην αρχή $O(x=0)$ του άξονα είναι:

$$y = A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t\right).$$

t_1 και $t_2 = t_1 + 0,5s$, αντίστοιχα.



A. Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι:

- α) $u = 10m/s$
- β) $u = 8m/s$
- γ) $u = 5m/s$

B. Η φάση φ_M της ταλάντωσης ενός σημείου M το οποίο βρίσκεται στη θέση $x_M = +6m$ του άξονα $x'x$ τη χρονική στιγμή $t_3 = t_1 + \frac{3T}{4}$, όπου T η περίοδος του κύματος είναι:

- α) $\varphi_M = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$
- β) $\varphi_M = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$
- γ) $\varphi_M = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$

Λύση

A. Από το διάγραμμα (α) προκύπτει: $\lambda = 4m$. Από το ίδιο διάγραμμα φαίνεται πως το κύμα μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 έχει διαδοθεί έως τη θέση $x_1 = +\lambda = +4m$ του άξονα $x'x$.

Ομοίως μέχρι τη χρονική στιγμή t_2 το κύμα έχει διαδοθεί έως τη θέση $x_2 = +2\lambda + \frac{\lambda}{4} = +\frac{9\lambda}{4}$ ή $x_2 = +9m$ όπως φαίνεται στο διάγραμμα (β).

$$\text{Επομένως η ταχύτητα διάδοσης του κύματος προκύπτει: } u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \text{ ή } u = 10m/s.$$

Σωστή απάντηση: α

B. Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής η περίοδος T του κύματος προκύπτει: $T = \frac{\lambda}{u}$ ή $T = 0,4s$.

$$\text{Επομένως προκύπτει: } t_3 = t_1 + \frac{3T}{4} \text{ ή } t_3 = \frac{x_1}{u} + \frac{3T}{4} \text{ ή } t_3 = 0,7s$$

$$\text{Η χρονική εξίσωση της φάσης } \varphi_M \text{ είναι: } \varphi_M = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda}\right) \text{ ή } \varphi_M = 2\pi\left(\frac{t}{0,4} - \frac{6}{4}\right) \text{ ή } \varphi_M = 2\pi(2,5t - 1,5) \text{ (S.I.)}$$

Για $t = t_3$ προκύπτει: $\varphi_M = 2\pi(2,5t_3 - 1,5)$ ή $\varphi_M = \frac{\pi}{2}$ rad.

Σωστή απάντηση: γ

ΕΡΩΤΗΣΗ 2^η

Στην επιφάνεια ενός υγρού διαδίδονται δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα τα οποία έχουν το ίδιο πλάτος A , την ίδια συχνότητα f και το ίδιο μήκος κύματος λ . Τα κύματα παράγονται από δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων Π_1, Π_2 οι οποίες τη χρονική στιγμή $t = 0$ αρχίζουν να εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση χωρίς αρχική φάση. Ένα σημείο Σ

της επιφάνειας του υγρού απέχει από την πηγή Π_1 απόσταση $r_1 = \frac{7\lambda}{2}$ και από την πηγή Π_2 απόσταση $r_2 = \frac{\lambda}{2}$.

A. Η εξίσωση της ταλάντωσης του σημείου Σ , κάθε χρονική στιγμή t μετά την έναρξη της συμβολής των δύο κυμάτων στο σημείο αυτό, είναι της μορφής:

α) $y = 2A\eta\mu[2\pi(ft - 2)]$

β) $y = -2A\eta\mu[2\pi(ft - 2)]$

γ) $y = -2A\eta\mu\left[2\pi\left(ft - \frac{3}{2}\right)\right]$

B. Η ταχύτητα του σημείου Σ τη χρονική στιγμή $t = \frac{1}{f}$ είναι:

α) $u_\Sigma = -\pi fA$

β) $u_\Sigma = 4\pi fA$

γ) $u_\Sigma = -2\pi fA$

Λύση

A. Μετά την έναρξη της συμβολής στο σημείο Σ η εξίσωση της ταλάντωσης τους είναι της μορφής:

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu\left[2\pi\left(\frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\right)\right]\eta\mu\left[2\pi\left(ft - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right)\right]$$

Με αντικατάσταση των τιμών στην παραπάνω εξίσωση προκύπτει:

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu\left[2\pi\left(\frac{\frac{7\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2}}{2\lambda}\right)\right]\eta\mu\left[2\pi\left(ft - \frac{\frac{7\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2}}{2\lambda}\right)\right] \text{ ή } y = 2A\sigma\upsilon\nu(3\pi)\eta\mu[2\pi(ft - 2)] \text{ ή }$$

$$y = -2A\eta\mu[2\pi(ft - 2)].$$

Σωστή απάντηση: β

B. Το σημείο Σ αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t' = \frac{r_2}{u} = \frac{r_2}{\lambda f} = \frac{\frac{\lambda}{2}}{\lambda f}$ ή $t' = \frac{0,5}{f}$.

Η συμβολή στο σημείο Σ αρχίζει τη χρονική στιγμή $t'' = \frac{r_1}{u} = \frac{r_1}{\lambda f} = \frac{\frac{7\lambda}{2}}{\lambda f}$ ή $t'' = \frac{3,5}{f}$.

Επομένως τη χρονική στιγμή $t = \frac{1}{f}$ με $t' < t < t''$ το σημείο ταλαντώνεται μόνο λόγω του κύματος που παράγεται από την πηγή Π_2 . Η εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου Σ στο χρονικό διάστημα $t' \leq t < t''$ είναι:

$$u_\Sigma = 2\pi fA\sigma\upsilon\nu\left[2\pi\left(ft - \frac{r_2}{\lambda}\right)\right].$$

$$\text{Για } t = \frac{1}{f} \text{ προκύπτει: } u_\Sigma = 2\pi fA\sigma\upsilon\nu\left[2\pi\left(f\frac{1}{f} - \frac{\frac{\lambda}{2}}{\lambda}\right)\right] \text{ ή } u_\Sigma = 2\pi fA\sigma\upsilon\nu(\pi) \text{ ή } u_\Sigma = -2\pi fA.$$

Σωστή απάντηση: γ

Κύματα σε γραμμικό ελαστικό μέσο.

Δύο σύγχρονες πηγές O_1 και O_2 παράγουν αρμονικά κύματα που διαδίδονται με ταχύτητα $v=2\text{m/s}$ κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου με άκρα τα σημεία O_1 και O_2 όπου $(O_1O_2)=4\text{m}$.



Η εξίσωση ταλάντωσης των πηγών είναι:

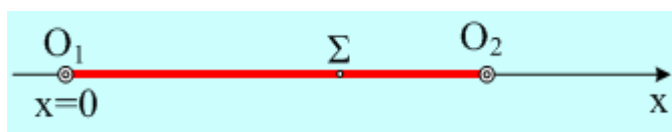
$$y = 5 \eta\mu 2\pi t \quad (y \rightarrow \text{cm}, t \rightarrow \text{s})$$

- Να βρεθούν οι εξισώσεις των δύο κυμάτων που παράγονται θεωρώντας $x=0$ τη θέση της πηγής O_1 .
- Να σχεδιάστε στιγμιότυπα που να δείχνει την απομάκρυνση των διαφόρων σημείων του μέσου, σε συνάρτηση με την θέση τους x , τις χρονικές στιγμές:

$$\alpha) t_1 = 0,75\text{s} \quad \beta) t_2 = 1,25\text{s} \text{ και}$$

Απάντηση:

- Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής έχουμε $v=\lambda \cdot f$ και αφού $f=1\text{Hz}$, βρίσκουμε ότι $\lambda=2\text{m}$.



Έτσι για το κύμα που ξεκινά από τη πηγή O_1 έχουμε:

$$y_1 = 5 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{x}{v}\right) \quad (\text{το } y \text{ σε cm, } x \text{ σε m, } t \text{ σε s}) \quad (1)$$

Για το κύμα από τη πηγή O_2 έχουμε ότι για να φτάσει σε ένα τυχαίο σημείο Σ , στη θέση

x , απαιτείται χρονικό διάστημα $t_1 = \frac{d}{v} = \frac{4-x}{2} \text{s}$, οπότε η εξίσωση ταλάντωσης του τυ-

χαίου σημείου θα είναι:

$$y_2 = 5 \cdot \eta\mu 2\pi (t - t_1) = 5 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{4-x}{2}\right) \quad \text{ή}$$

$$y_2 = 5 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t + \frac{x}{2} - 2\right) \quad (\text{το } y \text{ σε cm, } x \text{ σε m, } t \text{ σε s}) \quad (2)$$

- α) Μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 τα δύο κύματα έχουν διαδοθεί κατά $d=v t_1=1,5\text{m}$, συνεπώς το πρώτο κύμα έχει φτάσει μέχρι τη θέση $x=1,5\text{m}$, ενώ το δεύτερο μέχρι τη θέση $x=4\text{m}-1,5\text{m}=2,5\text{m}$.

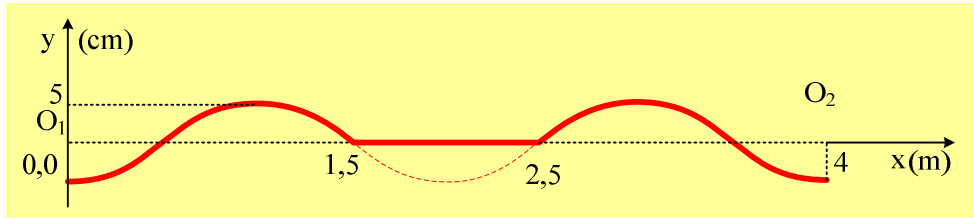
Θέτοντας στην (1) $t_1=0,75\text{s}$ παίρνουμε:

$$y_1 = 5 \cdot \eta\mu 2\pi(t - \frac{x}{2}) = 5 \cdot \eta\mu(1,5\pi - \pi x) = -5 \cdot \sigma\upsilon\nu\pi x \quad \text{για } x \leq 1,5\text{m}$$

Ενώ με αντικατάσταση στην (2) έχουμε:

$$y_2 = 5 \cdot \eta\mu 2\pi(t + \frac{x}{2} - 2) = 5 \cdot \eta\mu(1,5\pi - \pi x - 4\pi) = -5 \cdot \sigma\upsilon\nu\pi x \quad \text{για } 2,5 \leq x \leq 4\text{m}$$

Έτσι η εικόνα του μέσου είναι αυτή του σχήματος.



β) Μέχρι τη χρονική στιγμή t_2 τα δύο κύματα έχουν διαδοθεί κατά $d = v t_2 = 2,5\text{m}$, συνεπώς το πρώτο κύμα έχει φτάσει μέχρι τη θέση $x = 2,5\text{m}$, ενώ το δεύτερο μέχρι τη θέση $x = 4\text{m} - 2,5\text{m} = 1,5\text{m}$.

Συνεπώς στην περιοχή $1,5\text{m} \leq x \leq 2,5\text{m}$ τα δύο κύματα συμβάλουν και από την αρχή της επαλληλίας παίρνουμε:

$$y = y_1 + y_2 = 10 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{t - \frac{x}{2} - t - \frac{x}{2} + 2}{2} \eta\mu 2\pi \frac{t - \frac{x}{2} + t + \frac{x}{2} - 2}{2} \quad \text{ή}$$

$$y = 10 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi(1 - x/2) \cdot \eta\mu 2\pi(t - 1) \quad \text{ή}$$

$$y = 10 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi(1 - x/2) \cdot \eta\mu 2\pi(t - 1)$$

και για $t_2 = 1,25\text{s}$ παίρνουμε:

$$y = 10 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi(1 - x/2) \cdot \eta\mu 2\pi(1,25 - 1) \quad \text{ή}$$

$$y = 10 \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi - \pi x) \cdot \eta\mu\pi/2 = 10 \cdot \sigma\upsilon\nu\pi x \quad 1,5 \leq x \leq 2,5\text{m}$$

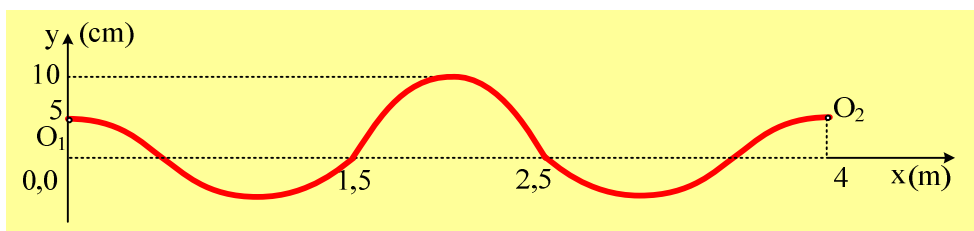
Εξάλλου για την περιοχή $0 \leq x \leq 1,5\text{m}$ υπάρχει μόνο το πρώτο κύμα και από την εξίσωση (1) παίρνουμε:

$$y_1 = 5 \cdot \eta\mu 2\pi(t - \frac{x}{2}) = 5 \cdot \eta\mu(2,5\pi - \pi x) = 5 \cdot \sigma\upsilon\nu\pi x \quad 0 \leq x \leq 1,5\text{m}$$

Ενώ στη περιοχή $2,5\text{m} \leq x \leq 4\text{m}$ έχει διαδοθεί το δεύτερο κύμα, οπότε:

$$y_2 = 5 \cdot \eta\mu 2\pi(t + \frac{x}{2} - 2) = 5 \cdot \eta\mu(2,5\pi - \pi x - 4\pi) = 5 \cdot \sigma\upsilon\nu\pi x \quad 2,5\text{m} \leq x \leq 4\text{m}$$

Με βάση τα παραπάνω η μορφή του μέσου η παρακάτω:

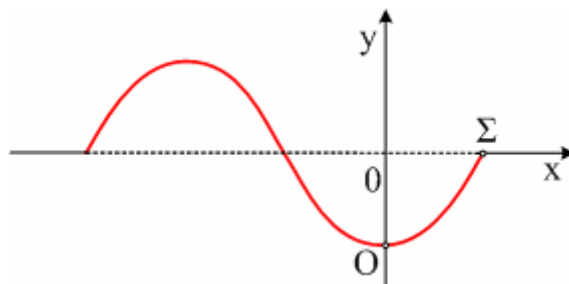


Εξίσωση κύματος και φάσεις

Δίνεται ένα στιγμιότυπο ενός κύματος που διαδίδεται προς τα δεξιά και η εξίσωση του οποίου είναι:

$$y=0,2\eta\mu 2\pi(t-x+3/4) \text{ (S.I.)}$$

Τη στιγμή που ελήφθη το στιγμιότυπο η ταχύτητα του σημείου Ο στη θέση $x=0$ είναι μηδενική.



- α) Να βρεθούν η περίοδος και το μήκος του κύματος.
- β) Ποια η φάση του σημείου Ο την στιγμή αυτή;
- γ) Σε ποια χρονική στιγμή αντιστοιχεί το παραπάνω στιγμιότυπο;

Απάντηση:

α) Η εξίσωση του κύματος γράφεται:

$$y=0,2\eta\mu 2\pi(t-x+3/4)=0,2\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{1}-\frac{x}{1}+\frac{3}{4}\right)$$

Από όπου παίρνουμε $T=1s$ και $\lambda=1m$

β) Το σημείο Σ έχει φάση π και το σημείο Ο έχει μεγαλύτερη φάση κατά $\pi/2$, συνεπώς έχει φάση $3\pi/2$ rad

β) Το σημείο Σ που βρίσκεται στη θέση $x=\lambda/4=0,25m$ έχει την στιγμή αυτή φάση $\varphi=\pi$.

Οπότε:

$$2\pi(t-0,25+0,75)=\pi \rightarrow$$

$$2(t+0,5)=1 \rightarrow$$

$$2t+1=1 \rightarrow$$

$$t=0.$$

dmargaris@sch.gr

Ποια η εξίσωση του στάσιμου κύματος;

Η ταχύτητα διάδοσης ενός κύματος πάνω σε μια χορδή με σταθερά άκρα μήκους $L=3\text{m}$, είναι $v=2\text{m/s}$. Η χορδή διεγείρεται και πάνω της δημιουργείται ένα στάσιμο κύμα με πλάτος $0,2\text{m}$. Τη χρονική στιγμή $t=0$ και αφού έχει δημιουργηθεί το στάσιμο κύμα, ένα σημείο M στη θέση $x_1=0,5\text{m}$, βρίσκεται στη μέγιστη θετική απομάκρυνσή του, ενώ τη στιγμή $t_1=1,5\text{s}$ βρίσκεται στη μέγιστη αρνητική απομάκρυνσή του για δεύτερη φορά. Θεωρούμε $x=0$ το αριστερό άκρο της χορδής.

- Να βρεθεί η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου M
- Ποια είναι η εξίσωση του στάσιμου κύματος.
- Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος τη χρονική στιγμή $t_1=1,5\text{s}$.
- Να βρεθεί το πλάτος ταλάντωσης και η απομάκρυνση ενός σημείου N που βρίσκεται στη θέση $x_1=1,75\text{m}$ τη στιγμή t_1 .

Απάντηση:

- Το χρονικό διάστημα t_1 που το σώμα βρίσκεται στην μέγιστη αρνητική απομάκρυνσή του, αντιστοιχεί σε χρόνο $t_1=T + T/2$. Συνεπώς $t_1=\frac{3}{2}T \rightarrow T=2t_1/3=1\text{s}$.

Η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου M θα είναι:

$$y=A'\eta\mu(\omega t+\varphi_0) \text{ και για } t=0 \rightarrow$$

$$y=A'\eta\mu(0+\varphi_0) \rightarrow A'=A'\eta\mu\varphi_0 \rightarrow \eta\mu\varphi_0=1 \rightarrow \varphi_0=\pi/2.$$

$$\text{Άρα } y=0,2\cdot\eta\mu\left(2\pi t+\frac{\pi}{2}\right) \text{ (μονάδες στο S.I.)}$$

- Η εξίσωση του στάσιμου κύματος που δίνει το σχολικό βιβλίο είναι:

$$y=2A\cdot\sigma\upsilon\nu(2\pi x/\lambda)\cdot\eta\mu(2\pi t/T)$$

Η παραπάνω εξίσωση δίνει στη θέση $x=0$ κοιλία, ενώ στην περίπτωσή μας δημιουργείται δεσμός, αφού η χορδή έχει σταθερά άκρα.

Αφού $v=\lambda f \rightarrow \lambda=v\cdot T=2\text{m}$ και στη θέση $x_1=0,5\text{m}$ υπάρχει η πρώτη κοιλία, αφού $x_1=0,5\text{m}=\lambda/4$.

Έτσι η εξίσωση για το στάσιμο κύμα είναι:

$$y=2A\cdot\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{x}{\lambda}+\theta\right)\cdot\eta\mu\left(2\pi\frac{t}{T}+\frac{\pi}{2}\right) \text{ ή}$$

$$y=0,2\cdot\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{x}{2}+\theta\right)\cdot\eta\mu\left(2\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$$

και για $x=0$ παίρνουμε:

$$0 = 0,2 \cdot \sin(0+\theta) \cdot \eta\mu(2\pi t + \frac{\pi}{2}) \rightarrow$$

$$\sin\theta=0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta = \frac{\pi}{2} \\ \theta = \frac{3\pi}{2} \end{array} \right.$$

Αναφερόμενοι τώρα στο σημείο M για $t=0$ πρέπει $y>0 \rightarrow$

$$y = 0,2 \cdot \sin(2\pi \frac{0,5}{2} + \theta) \cdot \eta\mu(\frac{\pi}{2}) > 0$$

$$\sin(\frac{\pi}{4} + \theta) > 0$$

Αλλά $\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) < 0$, ενώ $\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}) > 0$, οπότε $\theta = 3\pi/2$ και η εξίσωση του στάσιμου κύματος γίνεται:

$$y = 0,2 \cdot \sin(2\pi \frac{x}{2} + \frac{3\pi}{2}) \cdot \eta\mu(2\pi t + \frac{\pi}{2}) \quad \text{ή}$$

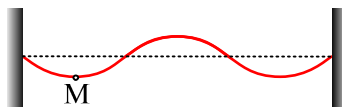
$$y = 0,2 \cdot (\eta\mu(2\pi \frac{x}{2}) \cdot \sin 2\pi t \quad \text{ή}$$

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu(\pi x) \cdot \sin(2\pi t) \quad (1)$$

iii) Με αντικατάσταση στην (1) $t_1 = 1,5s$ έχουμε:

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu(\pi x) \cdot \sin 2\pi 1,5 = -0,2 \cdot \eta\mu \pi x$$

και το ζητούμενο στιγμιότυπο είναι αυτό του παρακάτω σχήματος.



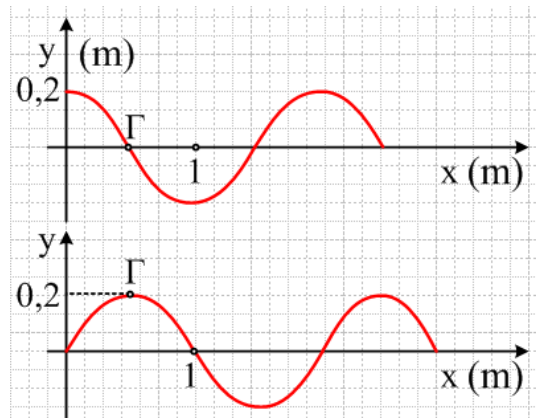
iv) Το πλάτος ταλάντωσης του σημείου N στη θέση $x=1,75m$ είναι:

$$A = |0,2\eta\mu\pi x| = |0,2 \eta\mu 1,75\pi| = |0,2 \cdot \eta\mu \frac{3\pi}{4}| = 0,2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,1\sqrt{3} \text{ m}$$

Ενώ η απομάκρυνσή του για $t_1=1,5s$ είναι:

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu(\pi x) \cdot \sin 2\pi t = 0,2 \cdot \eta\mu(1,75\pi) \cdot \sin 3\pi = -0,2 \cdot \eta\mu \frac{3\pi}{4} \cdot (-1) = 0,1 \cdot \sqrt{3} \text{ m.}$$

Από το στιγμιότυπο κύματος σε ταλάντωση σημείου.



Στο παρακάτω σχήμα δίνονται δύο στιγμιότυπα ενός αρμονικού κύματος, τα οποία διαφέρουν χρονικά κατά $\Delta t = 0,25\text{s}$ και για τα σημεία δεξιά της θέσης $x=0$.

Αν το σημείο Γ του σχήματος ξεκίνησε την ταλάντωσή του τη χρονική στιγμή $t_0=0$, να βρεθούν:

- Το μήκος και η περίοδος του κύματος.
- Η εξίσωση του κύματος.
- Η εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο, ενός σημείου Β, η φάση του οποίου υπολείπεται κατά $7\pi/6$ της φάσης του σημείου Γ.
- Να γίνει η γραφική παράσταση της επιτάχυνσης του σημείου Β σε συνάρτηση με το χρόνο.

Απάντηση:

- Με βάση το δεύτερο διάγραμμα βλέπουμε ότι $\lambda/2=1\text{m}$ ή $\lambda=2\text{m}$. Εξάλλου σε χρονικό διάστημα $0,25\text{s}$ το σημείο Γ μετακινήθηκε από τη θέση ισορροπίας του στη μέγιστη απομάκρυνσή του, συνεπώς $T/4=0,25\text{s}$ ή $T=1\text{s}$.
- Με βάση τα στιγμιότυπα βλέπουμε ότι το σημείο στο οποίο φτάνει το κύμα, ξεκινά την ταλάντωσή του από τη θέση ισορροπίας κινούμενο προς τη θετική κατεύθυνση, συνεπώς δεν έχει αρχική φάση. Έτσι η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Γ θα είναι:

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu\omega t = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi t \text{ μονάδες στο S.I.}$$

Η αντίστοιχη εξίσωση για ένα τυχαίο σημείο, δεξιά του Γ, το οποίο βρίσκεται στη θέση x θα είναι:

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi(t - t_1) \quad (1)$$

όπου $t_1 = \frac{t - 0,5}{v}$, το χρονικό διάστημα που χρειάζεται το κύμα για να φτάσει από το Γ στο τυχαίο σημείο Σ και η ταχύτητα διάδοσης, $v = \lambda f = 2\text{m}$. Συνεπώς η εξίσωση (1) γίνεται:

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{x - 0,5}{v} \right) = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right)$$

- Για τη διαφορά φάσης μεταξύ των σημείων Γ και Β όπου $x_B = x$ έχουμε:

$$\Delta\phi = \phi_\Gamma - \phi_B = 2\pi \left(t - \frac{0,5}{2} + \frac{1}{4} \right) - 2\pi \left(t - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) = -\frac{\pi}{2} + \pi x$$

Αλλά $\Delta\phi = 7\pi/6$, οπότε:

$$-\frac{\pi}{2} + \pi x = \frac{7\pi}{6} \quad \text{ή} \quad x = \frac{5}{3}m$$

Άρα η απομάκρυνση του σημείου Β είναι:

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{5}{6} + \frac{1}{4} \right) = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{7}{12} \right) \text{ μονάδες στο S.I. και } t \geq \frac{7}{12} s.$$

iv) Η εξίσωση της επιτάχυνσης του σημείου Β είναι:

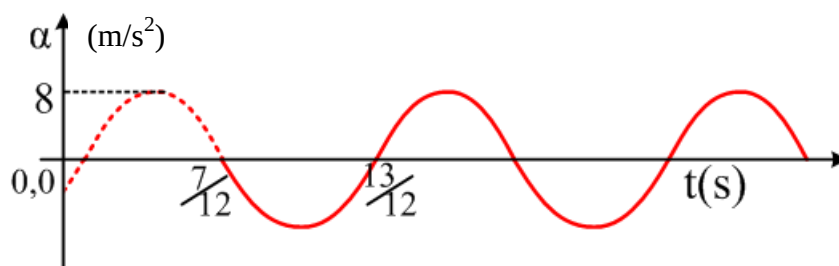
$$\alpha = -\omega^2 y = -4\pi^2 \cdot 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{7}{12} \right) \quad \text{ή}$$

$$\alpha = -8 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{7}{12} \right) \text{ μονάδες στο S.I.}$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί:

$$\alpha = -8 \cdot \eta\mu(2\pi t - 7\pi/6) = -8 \cdot \eta\mu(2\pi t + 2\pi - 7\pi/6) = -8 \cdot \eta\mu(2\pi t + 5\pi/6)$$

και η αντίστοιχη γραφική παράσταση είναι αυτή του παρακάτω σχήματος.



Σχόλιο:

Προηγουμένως χρησιμοποιήσαμε την εξίσωση του κύματος για να βρούμε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Β.

Υπάρχει βέβαια και πιο εύκολος τρόπος να το κάνουμε αυτό.

Αφού γνωρίζουμε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Γ $y = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi t$ και γνωρίζουμε τη διαφορά φάσης μεταξύ των σημείων Γ και Β, η εξίσωση της απομάκρυνσης του Β είναι:

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu \left(2\pi t - \frac{7\pi}{6} \right) = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{7}{12} \right) \text{ μονάδες στο S.I.}$$

dmargaris@sch.gr

Δυο πηγές που δεν συγχρονίστηκαν.

Στην επιφάνεια ενός υγρού ηρεμούν δυο πηγές κυμάτων O_1 και O_2 , που μπορούν να εκτελέσουν κατακόρυφες αρμονικές ταλαντώσεις πλάτους $A=0,2\text{m}$ με συχνότητα $f=1\text{Hz}$, οι οποίες απέχουν μεταξύ τους απόσταση $(O_1O_2)=4\text{m}$. Κάποια στιγμή, έστω $t=0$, η πηγή O_1 ξεκινά την ταλάντωσή της κινούμενη προς τα πάνω. Η πηγή O_2 όμως καθυστερεί να ξεκινήσει την ταλάντωσή της κατά $0,5\text{s}$, κινούμενη με τον ίδιο τρόπο. Στην επιφάνεια του υγρού διαδίδονται έτσι δύο κύματα, τα οποία δεχόμαστε ότι διατηρούν σταθερό πλάτος, με ταχύτητα $v=2\text{m/s}$.

- i) Από ποιες εξισώσεις περιγράφονται τα κύματα που δημιουργούνται;
- ii) Να βρεθεί το πλάτος ταλάντωσης ενός σημείου M , το οποίο βρίσκεται στο μέσον του τμήματος O_1O_2 .
- iii) Ένα άλλο σημείο Σ ταλαντώνεται με πλάτος $0,4\text{m}$, μετά την συμβολή των δύο κυμάτων. Να βρεθεί μια σχέση που συνδέει τις αποστάσεις r_1 και r_2 του σημείου Σ από τις δύο πηγές.
- iv) Πόσες υπερβολές ενισχυτικής συμβολής σχηματίζονται στην επιφάνεια του υγρού;

Απάντηση:

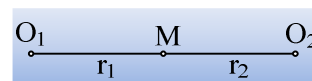
- i) Η εξίσωση της απομάκρυνσης της πηγής O_1 είναι της μορφής $y=A\cdot\eta\mu\omega t$, ενώ το κύμα που δημιουργεί έχει μήκος κύματος $\lambda = \frac{v}{f} = 2\text{m}$. Έτσι η εξίσωση του διαδιδόμενου κύματος είναι:

$$y_1 = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{r_1}{2} \right) = 0,2 \cdot \eta\mu (2\pi t - \pi r_1) \text{ μονάδες στο S.I.}$$

Εξάλλου η αντίστοιχη εξίσωση της απομάκρυνσης της δεύτερης πηγής, θα είναι της μορφής $y=A\cdot\eta\mu\omega(t-t_1)$, όπου $t_1=0,5\text{s}$ η χρονική στιγμή που ξεκινά την ταλάντωσή της. Συνεπώς το κύμα που θα δημιουργήσει θα έχει εξίσωση:

$$y_2 = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{r_2}{2} - \frac{1}{2} \right) = 0,2 \cdot \eta\mu (2\pi t - \pi r_2 - \pi) \text{ μονάδες στο S.I.}$$

- ii) Με βάση την αρχή της επαλληλίας, η απομάκρυνση ενός σημείου εξαιτίας και των δύο κυμάτων θα είναι:



$$y = y_1 + y_2 = 0,2 \cdot \eta\mu (2\pi t - \pi r_1) + 0,2 \cdot \eta\mu (2\pi t - \pi r_2 - \pi) \rightarrow$$

$$y = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu \left(\frac{2\pi t - \pi r_1 - 2\pi t + \pi r_2 + \pi}{2} \right) \cdot \eta\mu \left(\frac{2\pi t - \pi r_1 + 2\pi t - \pi r_2 - \pi}{2} \right) \rightarrow$$

$$y = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \left(\frac{r_2 - r_1 + 1}{4} \right) \cdot \eta\mu \left(2\pi t - 2\pi \frac{r_1 + r_2 + 1}{4} \right)$$

Συνεπώς το πλάτος της ταλάντωσης μετά την συμβολή θα είναι:

$$A = \left| 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \left(\frac{r_2 - r_1 + 1}{4} \right) \right|$$

Οπότε το σημείο M, όπου $r_1=r_2=2m$ θα ταλαντώνεται με πλάτος:

$$A_M = \left| 0,4 \cdot \sigma \nu 2\pi \left(\frac{r_2 - r_1 + 1}{4} \right) \right| = \left| 0,4 \cdot \sigma \nu \left(\frac{\pi}{2} \right) \right| = 0$$

Δηλαδή μετά την συμβολή των δύο κυμάτων, το μέσον M του ευθύγραμμου τμήματος O_1O_2 θα παραμένει ακίνητο.

iii) Για τα σημεία που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος $A'=0,4m$ θα ισχύει:

$$\left| 0,4 \cdot \sigma \nu 2\pi \left(\frac{r_2 - r_1 + 1}{4} \right) \right| = 0,4 \rightarrow \sigma \nu 2\pi \left(\frac{r_2 - r_1 + 1}{4} \right) = \pm 1 \rightarrow$$

$$2\pi \left(\frac{r_2 - r_1 + 1}{4} \right) = k\pi \rightarrow r_2 - r_1 + 1 = 2k \rightarrow$$

$$r_2 - r_1 = 2k - 1 \text{ με } k \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

iv) Οι υπερβολές ενισχυτικής συμβολής, που θα δημιουργηθούν στην επιφάνεια του υγρού, θα περνούν και από το ευθύγραμμο τμήμα O_1O_2 , συνεπώς αρκεί να βρούμε πόσα σημεία του ευθυγράμμου τμήματος θα ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος. Έστω ένα τέτοιο σημείο το οποίο απέχει κατά r_1 από την πηγή O_1 και r_2 από την O_2 . Για να ταλαντώνεται με μέγιστο πλάτος, θα πρέπει να ικανοποιείται η σχέση (1), οπότε:

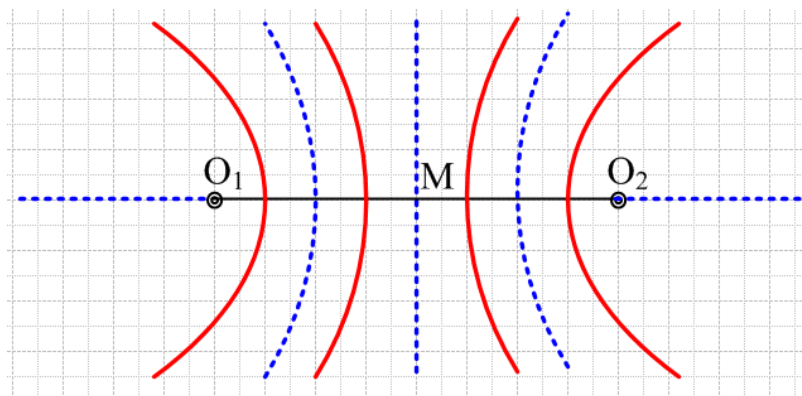
$$r_2 - r_1 = 2k - 1 \text{ ενώ } r_2 + r_1 = 4m \rightarrow$$

$$2r_2 = 2k - 1 + 4 \rightarrow r_2 = k + 1,5$$

$$\text{Αλλά } 0 \leq r_2 \leq 4 \rightarrow 0 \leq k + 1,5 \leq 4 \rightarrow -1,5 \leq k \leq 2,5$$

Άρα $k = -1, 0, 1, 2$ και αντίστοιχα $r_2 = 0,5m, 1,5m, 2,5m, 3,5m$

Στην επιφάνεια του υγρού, θα δημιουργηθούν δηλαδή τέσσερις υπερβολές ενισχυτικής συμβολής, όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα, με κόκκινο χρώμα, ενώ αντίθετα οι διακεκομμένες μπλε γραμμές δείχνουν τα σημεία απόσβεσης.



Σχόλιο:

1) Όταν μιλάμε για σύγχρονες πηγές, τα σημεία της μεσοκαθέτου, ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος 2 A.

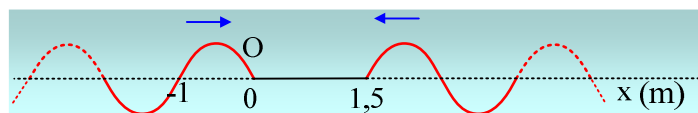
Στο παραπάνω παράδειγμα, μια μικρή καθυστέρηση στην έναρξη ταλάντωσης της μιας πηγής είχε σαν αποτέλεσμα να μεταβληθούν τα πράγματα και εκεί που θα περιμέναμε να έχουμε ενίσχυση να έχουμε απόσβεση και αντίστροφα.

- 2) Αν προσέξουμε στο παραπάνω σχήμα, το ευθύγραμμο τμήμα O_1O_2 , τέμνεται από 4 υπερβολές ενισχυτικής συμβολής, σε τμήματα απέχοντα 1m το ένα από το άλλο. Στο ενδιάμεσο, σε απόσταση 0,5m από την υπερβολή ενίσχυσης περνά και κάποια υπερβολή απόσβεσης. Αλλά τότε θα περίμενε κάποιος να περνούν και δύο υπερβολές από τις θέσεις των πηγών. Στην πραγματικότητα οι υπερβολές αυτές έχουν εκφυλιστεί στις δύο ημιευθείες που έχουν σχεδιαστεί δεξιά και αριστερά των πηγών.

dmargaris@sch.gr

Δύο τρέχοντα και ένα στάσιμο κύμα.

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου που θεωρούμε ότι ταυτίζεται με τον άξονα x , διαδίδονται δύο όμοια κύματα πλάτους $A=0,1\text{m}$, τα οποία διαδίδονται αντίθετα. Τη στιγμή $t=0$ το πρώτο κύμα φτάνει στο σημείο O , στη θέση $x=0$, ενώ το δεύτερο απέχει κατά $1,5\text{m}$ από το O , όπως στο σχήμα.



Αν το O θα φτάσει σε μέγιστη απομάκρυνση για πρώτη φορά τη στιγμή $t'=0,25\text{s}$, ζητούνται:

- i) Να γράψετε τις εξισώσεις των δύο τρεχόντων κυμάτων.
- ii) Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος που θα προκύψει μετά την συμβολή των δύο παραπάνω κυμάτων.
- iii) Να βρείτε τη χρονική στιγμή $t_1=2\text{s}$, πόσοι δεσμοί και σε ποιες θέσεις έχουν σχηματισθεί.
- iv) Να κάνετε το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος και για την περιοχή που έχει σχηματισθεί, τη στιγμή t_1 .

Απάντηση:

- i) Το σημείο O θα φτάσει σε μέγιστη απομάκρυνση τη στιγμή $t'=T/4=0,25\text{s}$, συνεπώς $T=1\text{s}$, ενώ με βάση

το σχήμα $\lambda=2\text{m}$, οπότε $v=\frac{\lambda}{T}=2\text{m/s}$. Έτσι το κύμα προς τα δεξιά θα έχει εξίσωση:

$$y_1 = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{1} - \frac{x}{2} \right) = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{x}{2} \right) \text{ (S.I.) με } x \leq 2t \text{ (m)}$$

Εξάλλου το σημείο στο οποίο φτάνει το κύμα προς τα αριστερά, αρχίζει την ταλάντωσή του ξεκινώντας από την θέση ισορροπίας και κινείται προς τα πάνω (όπου θεωρούμε θετικές τιμές της απομάκρυνσης), οπότε θα έχει εξίσωση απομάκρυνσης $y = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi t$ (μονάδες στο S.I.). Όμως το κύμα

αυτό, θα φτάσει σε ένα τυχαίο σημείο, στη θέση x τη στιγμή $t'' = \frac{1,5-x}{v} = \frac{1,5-x}{2}$, συνεπώς η εξί-

σωση της απομάκρυνσης του τυχαίου αυτού σημείου (και κατά συνέπεια η εξίσωση του κύματος προς τα αριστερά) θα είναι:

$$y_2 = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi (t - t'') = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{1,5-x}{2} \right) \rightarrow$$

$$y_2 = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t + \frac{x}{2} - \frac{3}{4} \right) \text{ (S.I.) με } x \geq 1,5 - 2t \text{ (m)}$$

- ii) Με βάση την αρχή της επαλληλίας παίρνουμε:

$$y = y_1 + y_2 = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{x}{2} \right) + 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t + \frac{x}{2} - \frac{3}{4} \right) \rightarrow$$

$$y = 0,2 \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t + \frac{x}{2} - \frac{3}{4} - t + \frac{x}{2}}{2} \right) \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t + \frac{x}{2} - \frac{3}{4} + t - \frac{x}{2}}{2} \right) \rightarrow$$

$$y = 0,2 \cdot \sin 2\pi \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{8} \right) \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{3}{8} \right) \text{ (μονάδες στο S.I.)}$$

$$\text{Με πεδίο ορισμού } t \geq \frac{d}{v} \text{ όπου } d = \frac{1,5m}{2} \rightarrow t \geq 0,375s \text{ και } 1,5-2t \leq x \leq 2t$$

iii) Τη στιγμή $t_1=2s$ έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα στην περιοχή:

$$1,5-2t \leq x \leq 2t \rightarrow -2,5m \leq x \leq 4m \quad (1)$$

$$\text{Δεσμοί όμως είναι τα σημεία για τα οποία } \left| 0,2 \cdot \sin 2\pi \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{8} \right) \right| = 0 \rightarrow$$

$$2\pi \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{8} \right) = (2k+1)\frac{\pi}{2} \rightarrow x = (2k+1)\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \rightarrow x = k + \frac{5}{4}$$

$$\text{Και με βάση την (1)} \quad -2,5 \leq k + \frac{5}{4} \leq 4 \rightarrow -3,75 \leq k \leq 2,75 \text{ ή } k = -3, -2, -1, 0, 1, 2$$

Έχουν σχηματιστεί δηλαδή 6 δεσμοί, στις θέσεις:

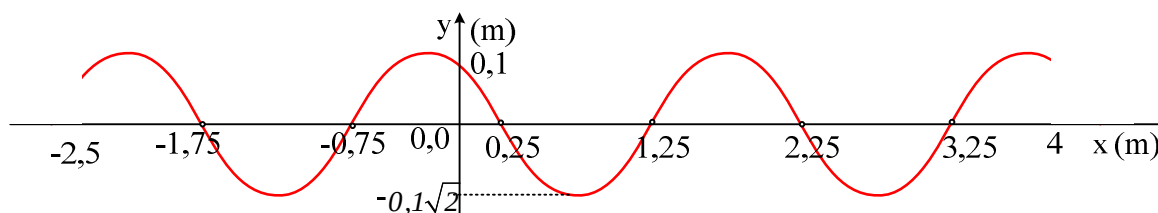
$$x = k + \frac{5}{4} \rightarrow x = -1,75m, -0,75m, 0,25m, 1,25m, 2,25m, \text{ και } 3,25m$$

iv) Θέτοντας $t=2s$ στην εξίσωση του στάσιμου $y = 0,2 \cdot \sin 2\pi \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{8} \right) \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{3}{8} \right)$ παίρνουμε:

$$y = 0,2 \cdot \sin 2\pi \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{8} \right) \cdot \eta\mu 2\pi \left(2 - \frac{3}{8} \right) = 0,2 \cdot \sin \left(\pi x - \frac{3\pi}{4} \right) \cdot \eta\mu \left(4\pi - \frac{3\pi}{4} \right) \rightarrow$$

$$y = -0,1\sqrt{2} \cdot \sin \left(\pi x - \frac{3\pi}{4} \right) \text{ με } -1,5m \leq x \leq 4m$$

Και το ζητούμενο στιγμιότυπο είναι το παρακάτω.



Σχόλιο:

Αξίζει να προσεχθεί ότι την στιγμή t_1 , οι κοιλίες δεν βρίσκονται σε μέγιστη απομάκρυνση, όσο είναι, το πλάτος του στάσιμου, (0,2m).

Εξάλλου η κατάσταση είναι απολύτως συμμετρική ως προς τη θέση $x_1=0,75\text{m}=1,5/2\text{ m}$ και όχι προφανώς ως προς την αρχή O του άξονα. Θα μπορούσε κανείς να σκεφτεί, ότι τα δύο κύματα πρωτοσυναντώνται στο σημείο με $x_1=0,75\text{m}$, το οποίο υποχρεώνουν να κινηθεί προς τα πάνω. Με άλλα λόγια στο σημείο αυτό τα κύματα συμβάλλουν σε φάση, οπότε δημιουργείται κοιλία και από εκεί και πέρα η κατάσταση είναι απολύτως συμμετρική, ως προς το σημείο αυτό.

Πρακτικά βέβαια κάποιος, θα μπορούσε και να βρει τις θέσεις των δεσμών, μόνο με αυτήν την παρατήρηση, αφού οι δυο πρώτοι θα απείχαν από την παραπάνω θέση κατά $\lambda/4=0,5\text{m}$, οπότε θα έβρισκε τους δεσμούς στις θέσεις $0,25\text{m}$ και $1,25\text{m}$.

Στη συνέχεια προσθέτοντας $\lambda/2$ (η απόσταση δύο διαδοχικών δεσμών) να προσδιόριζε και τις θέσεις των υπολοίπων, στην περιοχή βέβαια που θα έχει υπάρξει συμβολή ($-2,5\text{m} \leq x \leq 4\text{m}$)

dmargaris@sch.gr

Δύο τρέχοντα κύματα και η συμβολή τους.

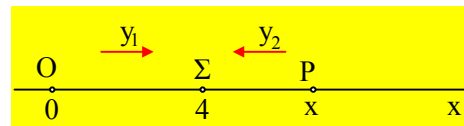
Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, διαδίδονται δύο εγκάρσια κύματα με αντίθετες κατευθύνσεις. Τα κύματα φτάνουν τη στιγμή $t=0$, σε ένα σημείο του μέσου Σ , στη θέση $x_Σ=4\text{m}$. Το σημείο αυτό εξαιτίας κάθε κύματος ξεκινά να ταλαντώνεται με εξίσωση $y=0,2\cdot\eta\mu\pi$ (S.I.). Αν η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων είναι $v=2\text{m/s}$, ζητούνται:

- i) Η περίοδος και το μήκος κύματος κάθε κύματος.
- ii) Να βρεθούν οι εξισώσεις των δύο κυμάτων.
- iii) Να βρεθεί η εξίσωση του στάσιμου που προκύπτει από την συμβολή των δύο παραπάνω κυμάτων.
- iv) Πόσοι δεσμοί έχουν σχηματιστεί πάνω στο μέσο τη χρονική στιγμή $t_1=1,5\text{s}$;
- v) Να σχεδιάσετε τη μορφή του μέσου την στιγμή t_1 .
- vi) Δύο υλικά σημεία M και N βρίσκονται δεξιά και αριστερά της θέσης $x=7\text{m}$ και έχουν ίσες απομακρύνσεις, από τη θέση ισορροπίας τους. Το σημείο M είναι το πλησιέστερο στη θέση $x=7\text{m}$ σημείο με την παραπάνω ιδιότητα. Ποιο υλικό σημείο τη στιγμή t_1 έχει:
 - a) Μεγαλύτερη ταχύτητα ταλάντωσης.
 - β) Μεγαλύτερη ενέργεια ταλάντωσης.

Απάντηση:

- i) Από την εξίσωση $y=0,2\cdot\eta\mu\pi$ προκύπτει ότι $\omega=\pi$ ή $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\text{s}$, αλλά τότε $\lambda=vT=4\text{m}$.

- ii) Έστω ένα τυχαίο σημείο P στη θέση x, όπως στο σχήμα. Η εξίσωση απομάκρυνσης της ταλάντωσης του P εξαιτίας του κύματος που διαδίδεται προς τα δεξιά, θα έχει τη ίδια μορφή με την αντίστοιχη εξίσωση του Σ, με μόνη διαφορά ότι θα καθυστερήσει να ταλαντώνεται κατά



$t_1 = \frac{d}{v} = \frac{x-4}{2}$. Έτσι η εξίσωση του κύματος που διαδίδεται προς τα δεξιά θα είναι:

$$y_1 = 0,2 \cdot \eta\mu\pi(t - t_1) = 0,2 \cdot \eta\mu\pi\left(t - \frac{x-4}{2}\right) = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{4} + 1\right) \quad (\text{S.I.}) \quad (1)$$

Η μόνη διαφορά για το κύμα που διαδίδεται προς τ' αριστερά, όσον αφορά την ταλάντωση του σημείου P, είναι ότι έχει αρχίσει να ταλαντώνεται πριν το Σ, κατά $t_1 = \frac{d}{v} = \frac{x-4}{2}$, οπότε η εξίσωση για το κύμα προς τ' αριστερά θα είναι:

$$y_2 = 0,2 \cdot \eta\mu\pi(t + t_1) = 0,2 \cdot \eta\mu\pi\left(t + \frac{x-4}{2}\right) = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} + \frac{x}{4} - 1\right) \quad (\text{S.I.}) \quad (2)$$

- iii) Εφαρμόζοντας την αρχή της επαλληλίας για την συμβολή των δυο κυμάτων βρίσκουμε:

$$y = y_1 + y_2 = 0,2 \left[\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{4} + 1\right) + \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} + \frac{x}{4} - 1\right) \right] \rightarrow$$

$$y = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \left(1 - \frac{x}{4}\right) \cdot \eta\mu 2\pi \frac{t}{2} \rightarrow y = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu \pi \frac{x}{2} \cdot \eta\mu \pi \quad (\text{S.I.}) \quad (3)$$

- iv) Μέχρι τη στιγμή t_1 κάθε κύμα έχει διατρέξει απόσταση $s = v \cdot t_1 = 3\text{m}$, συνεπώς έχει σχηματισθεί στάσιμο στην περιοχή $x_S - s \leq x \leq x_S + s$ ή $1\text{m} \leq x \leq 7\text{m}$.

$$\text{Δεσμοί υπάρχουν στις θέσεις όπου } \left| 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\pi x}{2} \right| = 0 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu \frac{\pi x}{2} = 0 \rightarrow \frac{\pi x}{2} = (2k+1) \frac{\pi}{2} \text{ ή } x = 2k+1$$

Αλλά τότε: $1 \leq 2k+1 \leq 7 \rightarrow 0 \leq k \leq 3$. Άρα $k = 0, 1, 2, 3$, συνεπώς έχουν σχηματισθεί 4 δεσμοί.

- v) Πάνω στο ελαστικό μέσον έχουν οριστεί, με βάση τα παραπάνω τρεις περιοχές:

A) $x < 1\text{m}$. Στην περιοχή αυτή διαδίδεται μόνο το κύμα προς τα δεξιά, συνεπώς από την (1) για $t = 1,5\text{s}$ έχουμε:

$$y_1 = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{2} - \frac{x}{4} + 1 \right) = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{1,5}{2} - \frac{x}{4} + 1 \right) = 0,2 \cdot \eta\mu (3,5\pi - \pi x) = -0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu \pi x$$

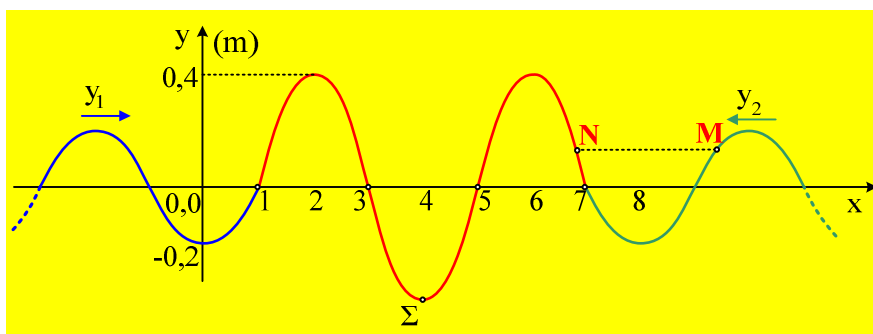
B) Για την περιοχή $1\text{m} \leq x \leq 7\text{m}$ έχουμε με αντικατάσταση στην (3) παίρνουμε:

$$y = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu \pi \frac{x}{2} \cdot \eta\mu \pi = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\pi x}{2} \eta\mu \frac{3\pi}{2} = -0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\pi x}{2}$$

Γ) Για $x > 7\text{m}$, αντικαθιστώντας $t = 1,5\text{s}$ στην εξίσωση (2) θα έχουμε:

$$y_2 = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{2} + \frac{x}{4} - 1 \right) = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{1,5}{2} + \frac{x}{4} - 1 \right) = 0,2 \cdot \eta\mu \left(-\frac{\pi}{2} + \pi x \right) = -0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu \pi x$$

Με βάση τα παραπάνω ευρήματα η μορφή του μέσου, είναι αυτή του παρακάτω σχήματος.



- vi) Στο παραπάνω στιγμιότυπο έχουν σημειωθεί δύο τέτοια σημεία M και N.

α) Η ταχύτητα του υλικού σημείου N είναι μηδενική. Όλα τα σημεία μεταξύ 1m και 7m, τη στιγμή $t = 1,5\text{s}$ βρίσκονται στην ακραία θέση της ταλάντωσής τους. Αντίθετα το σημείο M έχει κατακόρυφη ταχύτητα με φορά προς τα πάνω.

β) Αν y_1 η απομάκρυνση των δύο υλικών σημείων τη στιγμή αυτή, τότε:

$$E_N = \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 \cdot y_1^2 \text{ ενώ}$$

$$E_M = \frac{1}{2} D y_1^2 + \frac{1}{2} m v_M^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 \cdot y_1^2 + \frac{1}{2} m v_M^2 = E_N + \frac{1}{2} m v_M^2$$

Συνεπώς το M έχει μεγαλύτερη ενέργεια ταλάντωσης.

Σχόλιο:

Αν το υλικό σημείο M βρίσκεται σε θέση πλάτους, τότε προφανώς θα είχε μηδενική ταχύτητα και ενέργεια ταλάντωσης:

$$E_M = \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 \cdot A^2$$

Θα είχε δηλαδή τότε και την ίδια ενέργεια με το σημείο N.

dmargaris@sch.gr