ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ Ο ΠΕΡΓΑΙΟΣ
Ο ΜΕΓΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΗΣ (265–170 π.Χ.)

Γεωργία Μπατσαρά
Μαθηματικός, Βέροια

Με αφορμή την επωνυμία «Απολλώνιος» του νέου περιοδικού που πρόκειται να κυκλοφορήσει από το παράρτημα της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας Ν. Ημαθίας, θεωρήσαμε χρήσιμο να εκπονήσουμε μια μικρή εργασία, με ιστορικές αναφορές στη ζωή και το έργο ενός από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς της ελληνικής αρχαιότητας, του Απολλώνιου του Περγαία, προς ενημέρωση των αναγνωστών, αλλά και ως ελάχιστη προσφορά σ' έναν απ' αυτούς που υπήρξαν οι θεμελιωτές της μαθηματικής επιστήμης.

Ο Απολλώνιος ο Περγεύς (265–170 π.Χ.) ο τρίτος μαθηματικός της ελληνιστικής περιόδου και στην πραγματικότητα ο τελευταίος γεωμέτρης του αρχαίου κόσμου, γεννήθηκε στην Πέργη της Παμφυλίας στα νότια της Μικράς Ασίας. Έζησε, κατά πάσα πιθανότητα, στο διάστημα 265–170 π.Χ. ή κατ' άλλους στο 262–180 π.Χ. Όσες πληροφορίες έχουμε για τη ζωή του τις αντλούμε από τους προλόγους που έχει προτάξει σε μερικά από τα βιβλία των «Κωνικών».

Εμπνευσμένος μελετητής της Γεωμετρίας και της Μαθηματικής Αστρονομίας, έζησε, σπούδασε και δίδαξε στην Αλεξάνδρεια και την Πέργαμο την εποχή που η πνευματική εστία του ελληνόφωνου κόσμου δεν είναι πια η Αθήνα, αλλά η Αλεξάνδρεια της σημερινής Αιγύπτου, η πιο σημαντική από τις δεκαέξι πόλεις με αυτό το όνομα που ίδρυσε ο Μέγας Αλέξανδρος. Η εποχή αυτή (3ος π.Χ. αιώνας) γνωστή ως ελληνιστική περίοδος, χαρακτηρίζεται από μία ιδιαίτερη καλλιέργεια των γραμμάτων και των επιστημών και μάλιστα με κρατική μέριμνα. Αντιπροσωπευτικά της νέας αυτής πνευματικής ατμόσφαιρας είναι δύο ιδρύματα που θεμελιώθηκαν στην Αλεξάνδρεια από τους Πτολεμαίους τον Α΄ και Β΄ το Μουσείο και η Βιβλιοθήκη. Η Βιβλιοθήκη ιδρύθηκε από τον Πτολεμαίο τον Α΄ και περιελάμβανε 400.000 παπύρους. Το Μουσείο (Ναός των Μουσών) ιδρύθηκε περί το 280 π.Χ. από τον Πτολεμαίο τον Β΄ στο πνεύμα του Λυκείου του Αριστοτέλη και αποτελεί το πρώτο παράδειγμα στην ιστορία ανώτατου εκπαιδευτικού και ερευνητικού ιδρύματος που λειτούργησε με δημόσια ή βασιλική δαπάνη ακατάπαυστα ως τον 5^{ο} μ.Χ. αιώνα.

Ο Απολλώνιος, αν και υπήρξε κορυφαίος μελετητής και δάσκαλος του Μουσείου (δίδαξε στο Μουσείο στην αίθουσα 5, γι' αυτό και τον αποκαλούσαν «Απολλώνιος ο 5^{ος}») και της Βιβλιοθήκης, την εποχή που τη διηύθυνε ο Ερατοσθένης, χαρακτηρίζεται ως υπερόπτης και ματαιόδοξος. Μαζί με τον Ευκλείδη και τον Αρχιμήδη λαμπρύνουν τον 3^{ο} π.Χ. αιώνα, ο οποίος μπορεί να χαρακτηρισθεί και ως ο «χρυσός αιώνας» των ελληνικών μαθηματικών. Έγραψε πολλά έργα, ελάχιστα από τα οποία σεβάστηκε ο χρόνος.

Έργα που διασώθηκαν

Κωνικά (8 βιβλία)
Περί λόγου αποτομής (2 βιβλία)
Κατασκευή δύο μέσων αναλόγων
Σύγκριση 12έδρου και 20έδρου

Έργα που χάθηκαν

Περί χωρίου αποτομής	(2 βιβλία)
Περί επαφών	(2 βιβλία)
Περί νεύσεων	(2 βιβλία)
Επίπεδοι τόποι	(2 βιβλία)
Περί ατάκτων αλόγων	
Ωκυτόκιο	
Περί κοχλίου ή ελίκων	
Η καθόλου πραγματεία	
Περί του πυρίου	
Περί της κατασκευής υδραυλικού αρμονίου	
Αστρονομικό σύγγραμμα αγνώστου τίτλου	
Θεωρία αριθμών	
Περί λογιστικών	
Αναλυόμενος τόπος	
Κατασκευές ωρολογίων	
Οπτική	
Διωρισμένη τομή	

Κορυφαίο έργο του είναι τα κωνικά ή «Περί κώνου τομαί». Τα κωνικά ήταν χωρισμένα σε οχτώ βιβλία (κεφάλαια) από τα οποία σώζονται τα επτά, τέσσερα στο πρωτότυπο ελληνικό κείμενο και τρία σε αραβική μετάφραση. Στα επτά πρώτα βιβλία υπάρχουν 387 θεωρήματα, 21 ορισμοί και 10 πορίσματα, ενώ στο 8^{ο}, όπως συνάγεται από μαρτυρία του Πάππου, υπήρχαν άλλα 100. Ειδικά το 5^{ο} βιβλίο των «Κωνικών» μαζί με το 5^{ο} των «Στοιχείων» του Ευκλείδη και το «Περί Ελίκων» του Αρχιμήδη θεωρούνται ως τα κορυφαία αριστουργήματα της ελληνικής γεωμετρίας. Στο έργο του «Κωνικά» ο Απολλώνιος μετασχημάτισε ριζικά τη θεωρία των κωνικών τομών, οι απαρχές της μελέτης των οποίων ανάγονται στον Μέναιχμο, ενώ στην περαιτέρω επεξεργασία τους είχαν συμβάλει προς τα τέλη του 4^{ου} π.Χ. αιώνα οι Αρισταίος και Ευκλείδης (οι οποίοι έγραψαν και σχετικά συγγράμματα που δε διασώθηκαν), καθώς και ο Αρχιμήδης.

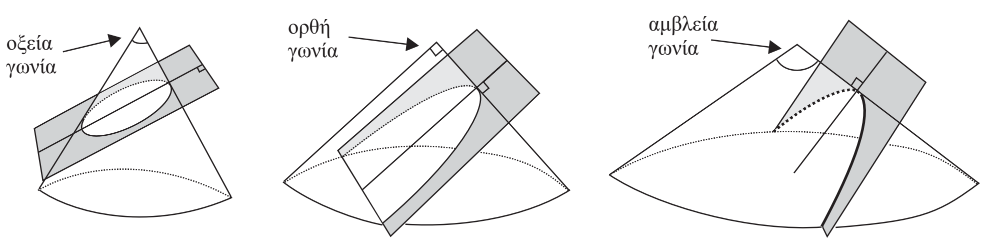
Ορισμός του Κώνου από τον Απολλώνιο

Εάν από ένα σημείο αχθεί ευθεία προς την περιφέρεια κύκλου, ο οποίος δεν βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με το σημείο και προεκταθεί αυτή [η ευθεία] και προς τα δύο μέρη, και ενώ το σημείο μένει σταθερό, η ευθεία αφού περιστραφεί περί την περιφέρεια του κύκλου αποκατασταθεί πάλι στην αρχική της θέση, την επιφάνεια που γράφεται από την ευθεία (η οποία αποτελείται από δύο επιφάνειες που συνδέονται μεταξύ τους κατά την κορυφή, η κάθε μια από τις οποίες αυξάνεται επ' άπειρον, όταν η γράφουσα ευθεία προεκτείνεται επ' άπειρον), την καλώ κωνική επιφάνεια, κορυφή δε [καλώ] το σταθερό σημείο, άξονα δε [καλώ] την ευθεία που διέρχεται από το σημείο και το κέντρο του κύκλου. Κώνο δε καλώ το σχήμα που περιέχεται από τον κύκλο και την κωνική επιφάνεια την μεταξύ της κορυφής και της περιφέρειας του κύκλου.

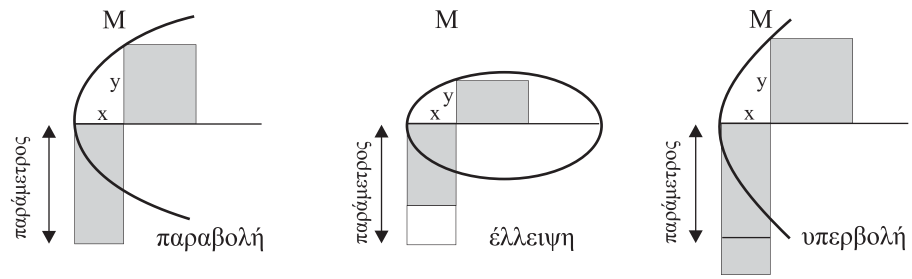
Οι κωνικές τομές (κύκλος, παραβολή, έλλειψη και υπερβολή) σχετίζονταν αρχικά με ορισμένα προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών, όπως για παράδειγμα το Πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου ή Δήλιο πρόβλημα. Δηλαδή: «*δοθέντος ενος κύβου, να κατασκευασθει ένας άλλος με διπλάσιο όγκο*».

Αλγεβρικά, αυτό σημαίνει ότι αν **α** είναι η πλευρά του αρχικού κύβου, να κατασκευασθεί ένα ευθύγραμμο τμήμα **x**, που θα είναι η πλευρά του κύβου με όγκο $\mathbf{2\alpha^3}$, δηλαδή $\mathbf{x^3 = 2\alpha^3}$ (με το πρόβλημα αυτό και με τα δύο άλλα αδύνατα προβλήματα των μαθηματικών θα ασχοληθούμε σε άλλο άρθρο μας). Το Δήλιο πρόβλημα απετέλεσε αντικείμενο μελέτης του Απολλώνιου ο οποίος μάλιστα το έλυσε με τη βοήθεια της τομής ενός κύκλου και μιας υπερβολής.

Γύρω στο 300 π.Χ. η υπερβολή, η παραβολή και η έλλειψη είχαν γίνει αντικείμενο συστηματικής μελέτης, ως οι τομές που δημιουργούνται στην επιφάνεια ενός κώνου από ένα επίπεδο κάθετο σε μία γενέτειρα του. Ανάλογα με τη θέση του κώνου και του τέμνοντος επιπέδου, η τομή ήταν ένας κύκλος, μία έλλειψη, μία παραβολή ή μία υπερβολή.



Η καινοτομία του Απολλώνιου υπήρξε ακριβώς αυτό, ο ορισμός δηλαδή των τριών καμπύλων διαμέσου τριών διαφορετικών τομών ενός κώνου, καθώς και η εισαγωγή των όρων «Παραβολή», «Έλλειψη» και «Υπερβολή». Τα ονόματα αυτά είχαν άμεση σχέση με το νέο τρόπο ορισμού των κωνικών τομών από τον Απολλώνιο, σύμφωνα με τον οποίο, σε κάθε τομή του κώνου από το επίπεδο αντιστοιχεί ένα σταθερό μήκος (παράμετρος), το οποίο εξαρτάται από το είδος του κώνου και από τη θέση του επιπέδου.



Ο Απολλώνιος έδειξε ότι για κάθε καμπύλη τα δύο γραμμοσκιασμένα εμβαδά σε καθένα από τα παραπάνω σχήματα είναι ίσα μεταξύ τους. Το ένα απ' αυτά είναι το τετράγωνο με πλευρά την κάθετη y, από σημείο της καμπύλης προς τον άξονα συμμετρίας της, το άλλο είναι ένα ορθογώνιο με μία πλευρά την απόσταση x του ίχνους αυτής της κάθετης από την κορυφή της καμπύλης. Η σχέση της άλλης πλευράς του ορθογωνίου προς τη σταθερή παράμετρο της τομής είναι αυτή που καθορίζει τη μορφή και το όνομα της καμπύλης. Αν η άλλη πλευρά ισούται (*παραβάλλεται*) προς την παράμετρο, τότε η καμπύλη είναι παραβολή. Αν η άλλη πλευρά είναι μικρότερη (*ελλείπει*) από την παράμετρο, η καμπύλη είναι έλλειψη, ενώ αν είναι μεγαλύτερη (*υπερβάλλει*), η καμπύλη είναι υπερβολή. Στον Απολλώνιο εξάλλου συναντάμε, για πρώτη φορά, ρητά διατυπωμένη την απαίτηση ότι οι γεωμετρικές κατασκευές πρέπει να εκτελούνται με μόνα όργανα τον κανόνα και τον διαβήτη.

Στα καθαρά μαθηματικά όλες αυτές οι ιδιοφυείς σκέψεις δεν έχουν ανάγκη πρακτικών επαληθεύσεων. Ο ίδιος ο Απολλώνιος στους προλόγους του 4^{ου} και 5^{ου} βιβλίου επισημαίνει ότι η αξία του έργου του βρίσκεται στα θεωρήματα αυτά καθαυτά και τα κίνητρα που δίνουν για νέες έρευνες.

Σήμερα, μετά από έρευνες αιώνων, είναι γνωστές οι πολλές και ποικίλες εφαρμογές των κωνικών τομών σε διάφορους κλάδους της επιστήμης, της τέχνης και της τεχνολογίας.

Στην αστρονομία ο πρώτος νόμος του Κέπλερ (1609), αναφέρει ότι «οι τροχιές των πλανητών είναι ελλείψεις, στη μία εστία των οποίων βρίσκεται ο ήλιος». Στη ζωγραφική η έλλειψη χρησιμοποιήθηκε από ζωγράφους της Αναγέννησης για την προοπτική αναπαράσταση του κύκλου. Στην Αρχιτεκτονική σημαντικότατες υπήρξαν οι εφαρμογές των κωνικών τομών στον αρχιτεκτονικό σχεδιασμό μεγάλων έργων, όπως γέφυρες, θόλοι εκκλησιών κλπ.

Ένας άλλος τομέας στον οποίο χρησιμοποιήθηκε η Θεωρία των Κωνικών Τομών είναι η Βαλλιστική και συγκεκριμένα το πρόβλημα του καθορισμού της τροχιάς των βλημάτων. Ο Γαλιλαίος χρησιμοποιώντας ιδιότητες που είχαν αποδειχθεί από τον Απολλώνιο στα «Κωνικά», απέδειξε θεωρητικά το 1937, ότι η τροχιά ενός βλήματος είναι παραβολή.

Η ανακλαστική ιδιότητα των κωνικών τομών, γνωστή επίσης από την αρχαιότητα, έχει σήμερα ευρύτατη εφαρμογή στην κατασκευή ειδικών παραβολικών και υπερβολικών κατόπτρων και ανακλαστικών τηλεσκοπίων, στην ιατρική (στοές με ειδική ακουστική, λιθοθρυψία κ.λπ.), καθώς και στη ναυσιπλοΐα.

Ένα άλλο γεωμετρικό πρόβλημα το οποίο εξετάζεται σ' ένα από τα έργα του Απολλώνιου, «Επαφές» και στο οποίο θεωρούμε ότι αξίζει να αναφερθούμε είναι το γνωστό ως *Απολλώνιο πρόβλημα*: «Δοθέντων τριών σημείων ή τριών ευθειών ή τριών κύκλων, να κατασκευασθεί ένας κύκλος που να εφάπτεται και στα τρία».

Η πρώτη περίπτωση είναι εύκολη. Ο κύκλος που περνάει από τρία σημεία έχει το κέντρο του στο σημείο που συντρέχουν οι μεσοκάθετοι του τριγώνου που έχει κορυφές τα σημεία αυτά. Αν τα τρία σημεία είναι συνευθειακά προφανώς δεν υπάρχει λύση.

Στη δεύτερη περίπτωση που και αυτή είναι εύκολη διερευνούμε τα εξής:

1. Αν οι ευθείες τέμνονται ανά δύο (χωρίς να συντρέχουν) σχηματίζουν τρίγωνο, οπότε ο ζητούμενος κύκλος είναι ο εγγεγραμμένος στο τρίγωνο αυτό.
2. Αν οι δύο ευθείες είναι παράλληλες και η τρίτη τις τέμνει, ο ζητούμενος κύκλος έχει το κέντρο του μέσα στην ταινία των παραλλήλων και είναι το σημείο τομής των διχοτόμων των σχηματιζόμενων γωνιών (δύο λύσεις).
3. Αν οι τρεις ευθείες συντρέχουν ή αν είναι παράλληλες, τότε το πρόβλημα δεν έχει λύση.

Η πλέον δύσκολη περίπτωση που είναι η τρίτη, μπορεί να αντιμετωπιστεί με αναλυτική γεωμετρία. Αν είναι (x_1, y_1), (x_2, y_2) και (x_3, y_3) τα κέντρα των τριών κύκλων και R_1, R_2, R_3 οι ακτίνες τους και (x, y), R το κέντρο και η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου, η συνθήκη η οποία προϋποθέτει ότι ο ζητούμενος κύκλος εφάπτεται στους δοθέντες κύκλους, βρίσκεται παρατηρώντας ότι, η απόσταση ανάμεσα στα κέντρα των δύο εφαπτόμενων κύκλων είναι ίση με το άθροισμα ή την διαφορά των ακτίνων τους, ανάλογα αν εφάπτονται εξωτερικά ή εσωτερικά.

Άρα έχουμε τις εξισώσεις:

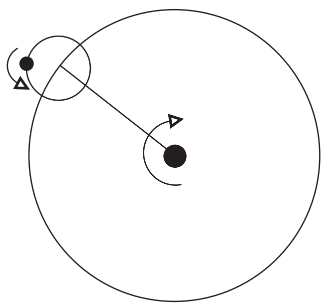
$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (R \pm R_1)^2$$
$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = (R \pm R_2)^2$$
$$(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 = (R \pm R_3)^2$$

Οπότε προκύπτουν οκτώ συστήματα, όσοι δηλαδή είναι και οι συνδυασμοί των (+) και (–) στις παραπάνω εξισώσεις και κατά συνέπεια είναι δυνατό να έχουμε το πολύ μέχρι οκτώ λύσεις, ανάλογα με τη διερεύνηση των συστημάτων και το κατά πόσον οι προκύπτουσες λύσεις έχουν φυσική υπόσταση. Αν π.χ. οι κύκλοι είναι ομόκεντροι το πρόβλημα δεν έχει λύση. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση κάποια ή κάποιες από τις ακτίνες

R_1, R_2, R_3 να είναι μηδέν. Πάντως το πρόβλημα επιδέχεται και γεωμετρική λύση με κανόνα και διαβήτη.(*)

Απολλώνιος και Αστρονομία

Στο σημείο αυτό θα θέλαμε να επισημάνουμε τη συμβολή του Απολλώνιου στη μαθηματική Αστρονομία: αυτός είναι που εισήγαγε το πλανητικό μοντέλο του **Επικύκλου – Φέροντος Κύκλου**, για τη μαθηματική περιγραφή της φαινόμενης κίνησης των πλανητών, που αντικατέστησε το Ευδόξειο μοντέλο των Ομόκεντρων Σφαιρών, (μελετήθηκε από τον Ίππαρχο τον επόμενο αιώνα), και κυριάρχησε στην ιστορία της αστρονομίας ως την Επιστημονική Επανάσταση (μέσα 16^{ου} ως το τέλος του 17^{ου} αιώνα). Το μοντέλο επίσης του **Έκκεντρου κύκλου**, εισήχθη και αυτό από τον Απολλώνιο ο οποίος μάλιστα απέδειξε την ισοδυναμία του με το μοντέλο Επικύκλου – Φέροντος Κύκλου. Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό ο πλανήτης κινείται ομαλά στην περιφέρεια ενός κύκλου, το κέντρο του οποίου, όμως, δε συμπίπτει με τη γη.



Το νέο μοντέλο του Επικύκλου – Φέροντος Κύκλου σεβόταν τις βασικές υποθέσεις της ελληνικής αστρονομίας, δηλαδή τη γεωκεντρική υπόθεση και την υπόθεση της ομαλής κυκλικής κίνησης και είχε το σημαντικό πλεονέκτημα ότι μπορούσε να περιγράψει γεωμετρικά με πολύ μεγάλη οικονομία ένα μεγάλο αριθμό φαινομένων που σχετίζονται με την κίνηση των πλανητών κατά μήκος του ζωδιακού κύκλου.

Στην απλούστερη μορφή του, ο γεωμετρικός μηχανισμός στον οποίο βασίζεται η νέα πλανητική θεωρία περιλαμβάνει ένα μικρό κύκλο (*επίκυκλο*), ο οποίος περιστρέφεται ομαλά γύρω από ένα σημείο που βρίσκεται επάνω στην περιφέρεια ενός δεύτερου περιστρεφόμενου κύκλου (*φέροντα κύκλου*). Ο πλανήτης Π είναι τοποθετημένος επάνω στον επίκυκλο ενώ το κέντρο του φέροντος κύκλου συμπίπτει με το κέντρο της γης. Το μοντέλο του Επικύκλου – Φέροντος Κύκλου μπορεί να περιγράψει ικανοποιητικά τη φαινόμενη κίνηση κάθε πλανήτη κατά μήκος του ζωδιακού κύκλου. Επιπλέον είναι πολύ πιο οικονομικό από το Ευδόξειο μοντέλο και έχει το πλεονέκτημα ότι εξηγεί τη μεταβολή της φαινόμενης λαμπρότητας των πλανητών με τη μεταβολή της απόστασής τους από τη γη.

Έκπληξη βεβαίως προκαλεί το γεγονός ότι ενώ ο Απολλώνιος υπήρξε ο άνθρωπος των κωνικών και δικαίως του απενεμήθη ο αξιοζήλευτος τίτλος του Μέγα Γεωμέτρη, εν τούτοις απέφυγε να χρησιμοποιήσει τις κωνικές το-

(*) Σημ. Σ.Ε: Για τη γεωμετρική λύση του παραπάνω προβλήματος καθώς και άλλων σχετικών μπορείτε να δείτε στο βιβλίο του Αριστ. Πάλλα ΜΕΓΑΛΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ, τόμος Α΄, τεύχος Β΄, σελ. 77 (Έκδοση 1963).

μές για την περιγραφή των πλανητικών κινήσεων, επιμένοντας στη χρήση των κύκλων και των ομαλών κυκλικών κινήσεων.

Αυτό βέβαια δε μειώνει καθόλου τις εργασίες και μελέτες του στη μαθηματική περιγραφή της φαινόμενης κίνησης των πλανητών, αφού μεταγενέστεροι μελετητές αστρονόμοι στηρίχτηκαν στο δικό του έργο. Αξίζει να αναφέρουμε τον Κλαύδιο Πτολεμαίο, ο οποίος στη συγγραφή του έργου του «*Μαθηματική Σύνταξις*», στα μέσα του 2ου π.Χ. αιώνα, του αριστουργήματος αυτού της αρχαίας αστρονομίας, στηρίχθηκε στις μελέτες του Απολλώνιου και του Ίππαρχου. Η Μαθηματική Σύνταξις έπαιξε στην ιστορία της μαθηματικής αστρονομίας τον ίδιο ρόλο που έπαιξαν τα στοιχεία του Ευκλείδη στην ιστορία της γεωμετρίας.

Απολλώνιος και μέτρηση του χρόνου

Είναι γνωστό ότι ένα μεγάλο πρόβλημα των αρχαίων Ελλήνων ήταν η ορθή μέτρηση του χρόνου. Για την επίλυση του προβλήματος αυτού αναπτύχθηκαν και εξελίχθηκαν δύο κατηγορίες οργάνων – μηχανισμών: τα Υδραυλικά Ρολόγια που είχαν κοινό πρόγονό τους την κλεψύδρα, καθώς και τα Ηλιακά, που πρόγονό τους είχαν τον γνώμονα και τα σκιοθηρικά όργανα. Τον γνώμονα πρωτοκατασκεύασε ο Αναξίμανδρος, ενώ του πρώτου ηλιακού ρολογιού εφευρέτης και κατασκευαστής ήταν ο Απολλώνιος.

Στην εκπόνηση του ταπεινού αυτού σημειώματος χρησιμοποιήσαμε τις κατά καιρούς αποκτηθείσες γνώσεις μας από επιστημονικά συγγράμματα και περιοδικά, από τα ιστορικά σημειώματα των μαθηματικών του Λυκείου, από σύγχρονα μαθηματικά λογοτεχνήματα καθώς και από αναζήτηση σε εγκυκλοπαίδειες και στο διαδύκτιο. Άλλωστε σύμφωνα με τον σύγχρονο Ιταλό φιλόσοφο Uberto Eco τα βιβλία γράφονται πάνω σε άλλα βιβλία, χωρίς βέβαια να φιλοδοξούμε τα γραφόμενά μας να συγκριθούν στο ελάχιστο με τα γραφόμενα των συγγραφέων που μας προσέφεραν πολύτιμη βοήθεια και τους ευχαριστούμε.

Ενδεικτικά αναφέρουμε:

- Μαθηματικά Επιστημονικής Βιβλιοθήκης LIFE
- Εγκυκλοπαίδεια Πάπυρος Λαρούς
- Ιστορία των επιστημών και της Τεχνολογίας Γ΄ Λυκείου
- Μαθηματικά Θετικής Κατεύθυνσης Β΄ Λυκείου
- Denis Guedj, *Το θεώρημα του Παπαγάλου*
- Διευθύνσεις στο Διαδίκτυο: *www.samos.aegean.gr, www.telemath.gr, www.danaos.cslab.ntua.gr*