ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

2012

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
# κατεύθυνσης
# Β ΛΥΚΕΙΟΥ

# ΤΕΛΕΥΤΑΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

- Συνοπτικη θεωρια με αποδειξεις
- Λυμενα θεματα για εξετάσεις
- Θέματα...από εξετάσεις

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ



- **Στην ενότητα 1 δίνεται η δυνατότητα για μια καλή επανάληψη θεωρίας :**
  - **Μελετώντας τις επισημάνσεις θεωρίας και τις αποδείξεις και ….**
  - **στη συνέχεια απαντώντας σε όλες τις ερωτήσεις**
- **Στην ενότητα 2 δίνονται λυμένες οι σημαντικότερες ασκήσεις**
- **Στην ενότητα 3 δίνονται θέματα από εξετάσεις**

# 1 ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ -ΕΠΙΣΥΜΑΝΣΕΙΣ

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ-1**

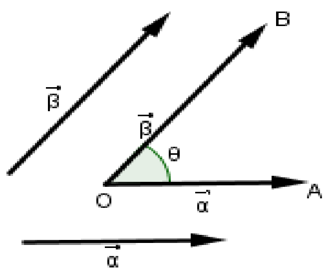
## ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ - ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

### 1. Ορισμοί :

- **Ομόρροπα :** έχουν ίδια διέυθυνση και ίδια φορά. (ίδια κατέυθυνση)
- **Αντίρροπα :** έχουν ίδια διέυθυνση και αντίθετη φορά. (αντίθετη κατεύθυνση)
- **Ίσα :**έχουν ίδια κατέυθυνση και ίσα μέτρα.
- **Αντίθετα :** έχουν αντίθετη κατεύθυνση και ίσα μέτρα.
- **Μηδενικό:** το διάνυσμα όπου η αρχή και το πέρας συμπίπτουν.(το μέτρο του είναι μηδέν.).

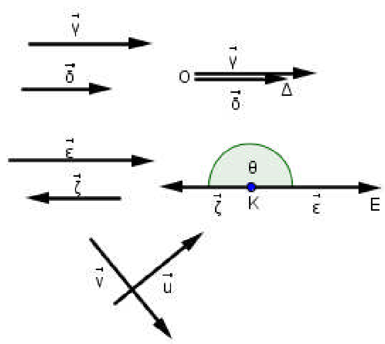
- **Γωνία δύο διανυσμάτων**

$\vec{\alpha}$ , $\vec{\beta}$ **:** λέγεται η θετική και κυρτή γωνία που σχηματίζουν όταν τα καταστήσουμε να έχουν κοινή αρχή
Συμβολίζουμε με $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$ ή $(\widehat{\vec{\beta},\vec{\alpha}})$ ή γενικά θ με $0^0 \le \theta \le 180^0$
π.χ. στο σχήμα με κοινή αρχή Ο παίρνουμε $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$




**Ειδικές περιπτώσεις:**

$\mapsto$ Τα ομόρροπα διανύσματα σχηματίζουν γωνία $0^0$
π.χ. Αν $\vec{\gamma} \uparrow\uparrow \vec{\delta}$ τότε $\theta=0^0$
$\mapsto$ Τα αντίροπα διανύσματα σχηματίζουν γωνία $180^0$
π.χ. Αν $\vec{\varepsilon} \uparrow\downarrow \vec{\zeta}$ τότε $\theta=180^0$
$\mapsto$ Αν $\theta=90^0$ τα διανύσματα λέγονται κάθετα ή ορθογώνια
π.χ. Αν $\theta=90^0$ τότε $\vec{u} \perp \vec{v}$
$\mapsto$ Θεωρούμε ότι το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$ σχηματίζει οποιαδήποτε γωνία θ ($0^0 \le \theta \le 180^0$) με κάθε άλλο διάνυσμα




### 2. Πράξεις διανυσμάτων :

- **πρόσθεση :** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$
  $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$
  $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$
  $\vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\alpha}$
  $\vec{\alpha} + (-\vec{\alpha}) = \vec{0}$
- **αφαίρεση:** $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{\Gamma B}$
  $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta})$

- **<u>πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα:</u>**

$\lambda(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=\lambda\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$ και $\lambda(\vec{\alpha}-\vec{\beta})=\lambda\vec{\alpha}-\lambda\vec{\beta}$

$(\lambda+\mu)\cdot\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\alpha}$ και $(\lambda-\mu)\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}-\mu\vec{\alpha}$

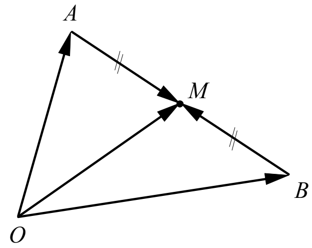
$\lambda\vec{\alpha}=\vec{0}\Leftrightarrow\lambda=0$ ή $\vec{\alpha}=\vec{0}$

$\lambda(\mu\vec{\alpha})=(\lambda\mu)\vec{\alpha}=\mu(\lambda\vec{\alpha})$ και $(-\lambda\vec{\alpha})=\lambda(-\vec{\alpha})=-(\lambda\vec{\alpha})$

Αν $\lambda\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$ και $\lambda\neq 0$ τότε $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$

Αν $\lambda\vec{\alpha}=\mu\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ τότε λ=μ

## 3. Διανυσματική ακτίνα μέσου τμήματος:




$$\boxed{\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OM}}$$

## 4. Συντεταγμένες διανύσματος:

| Ζητούμε τις συντεταγμένες (x,y) σημείου |
| --- |
| Εκφράζουμε τη σχέση που δίνεται, ή κάποια άλλη γνωστή με συντεταγμένες και με χρήση ιδιοτήτων και πράξεων (συνήθως από σύστημα) βρίσκουμε τα x, y |

- **<u>Πράξεις:</u>**

  $(x_1, y_1)+(x_2, y_2)=(x_1+x_2, y_1+y_2)$

  $\lambda (x, y)= (\lambda x , \lambda y)$

- **<u>Συντεταγμένες μέσου τμήματος:</u>**

  $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ και $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$

- **<u>Συντεταγμένες διανύσματος</u>** ( όταν τα άκρα είναι γνωστά)

  Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ τότε $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$

**Παρατηρήσεις:**

↦ Αν $\vec{\alpha}$ **// y΄y τότε** $\vec{\alpha}$ **= (0 , y)** ( το διάνυσμα έχει τετμημένη 0)

↦ Αν $\vec{\alpha}$ **// χ΄χ τότε** $\vec{\alpha}$ **= (x , 0)** ( το διάνυσμα έχει τεταγμένη 0)

- **<u>Μέτρο διανύσματος:</u>**

  $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$

  $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

  $|\vec{\alpha}|^2=\vec{\alpha}^2$

## 5. Συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος:

- $\lambda=\dfrac{y}{x}=\varepsilon\varphi\phi$
- Αν $\vec{\alpha}\,//\,x'x$ τότε λ=0
- Αν $\vec{\alpha}\,//\,y'y$ τότε ο λ δεν ορίζεται

| ΠΡΟΣΟΧΗ |
| --- |
| Αν οι συντελεστές διεύθυνσης είναι ίσοι τότε τα διανύσματα είναι παράλληλα |

## 6. Παράλληλα διανύσματα:

- $\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta}\Leftrightarrow \det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=0$

- $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$
- $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$
- $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \pm |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

## 7. Συνευθειακά σημεία:

- Α ,Β, Γ συνευθειακά αν $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{B\Gamma}$ ή $\overrightarrow{A\Gamma} // \overrightarrow{\Gamma B}$ ή $\overrightarrow{B\Gamma} // \overrightarrow{\Gamma A}$ με οποιονδήποτε από τους παραπάνω τρόπους.

## 8. Εσωτερικό γινόμενο:

- $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$
- $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{\alpha}$
- $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$
- $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ και $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$
- $\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2$ και $|\vec{\alpha} \pm \vec{\beta}|^2 = (\vec{\alpha} \pm \vec{\beta})^2$
- $(\vec{\alpha} \pm \vec{\beta}) = \vec{\alpha}^2 \pm 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2$ και $\vec{\alpha}^2 - \vec{\beta}^2 = (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$
- $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 \cdot x_2 + y_1 y_2$

## 9. Γωνία διανυσμάτων:

- $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|}$ ή $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$

## 10. Προβολή διανύσματος:

$\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = \vec{\alpha} \cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}} \vec{v}$

## 11. ΠΡΟΣΟΧΗ!!! <u>Δεν ισχύουν</u>

α) Η προσεταιριστική ιδιότητα: δηλαδή: $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) \neq (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$

β) Ο νόμος της διαγραφής: δηλαδή: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \not\Rightarrow \vec{\gamma} = \vec{\beta}$ (<u>δεν διαγράφεται το</u> $\vec{\alpha}$)

γ) Η ιδιότητα μέτρου γινομένου δηλαδή: $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| \neq |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$

δ) Η ιδιότητα δύναμης γινομένου: δηλαδή: $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 \neq \vec{\alpha}^2 \vec{\beta}^2$

ε) Οι ταυτότητες με περιττές δυνάμεις: δηλαδή: $(\vec{\alpha} + \vec{\beta})^3 \neq \vec{\alpha}^3 + 3\vec{\alpha}^2 \vec{\beta} + 3\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}^2 + \vec{\beta}^3$

# ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

**1**

**Δίνεται ένα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και Μ το μέσο του, να αποδείξετε ότι για ένα σημείο Ο αναφοράς ισχύει: $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$**

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

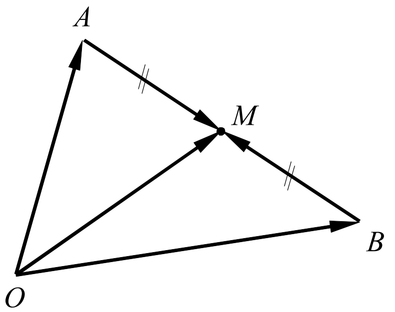
Έστω το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και ένα σημείο αναφοράς *Ο*.

Για τη διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM}$ του μέσου *Μ* του τμήματος *ΑΒ* έχουμε: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$ και

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}$.

Επομένως, $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} =$

$2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ Άρα $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$




**2** **Σε σύστημα αναφοράς xOy δίνεται τα σημεία $A(x_1,y_2)$ και $B(x_2,y_2)$ και M το μέσο του AB. Αν είναι $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ και $\vec{OB} = \vec{\beta}$, να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του μέσου M του διανύσματος $\vec{AB}$ είναι: $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ και $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$**

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Ας θεωρήσουμε δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου και $M(x, y)$ είναι οι συντεταγμένες του μέσου του *AB*.

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \Leftrightarrow$

Είναι $\overrightarrow{OM} = (x, y)$, $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$, $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$

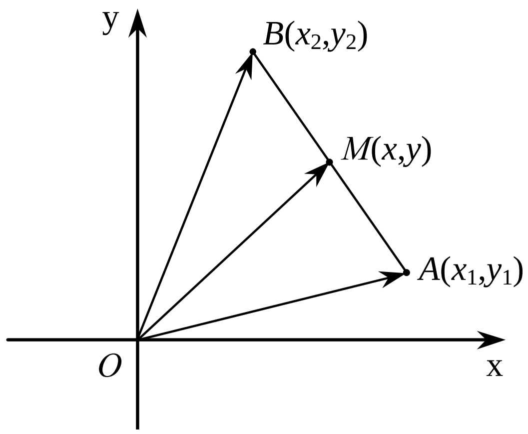
Τότε έχουμε ισοδύναμα

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \Leftrightarrow$

$(x, y) = \frac{1}{2}[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] \Leftrightarrow$

$(x, y) = [(\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2}y_1) + (\frac{1}{2}x_2, \frac{1}{2}y_2)]$

$(x, y) = = \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$




Επομένως ισχύει $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ και $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

**3** **Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες (x, y) ενός διανύσματος με άκρα τα σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ δίνονται από τις σχέσεις: $x = x_2 - x_1$ και $y = y_2 - y_1$.**

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Έστω δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου και ας υποθέσουμε ότι $(x, y)$ είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{AB}$.

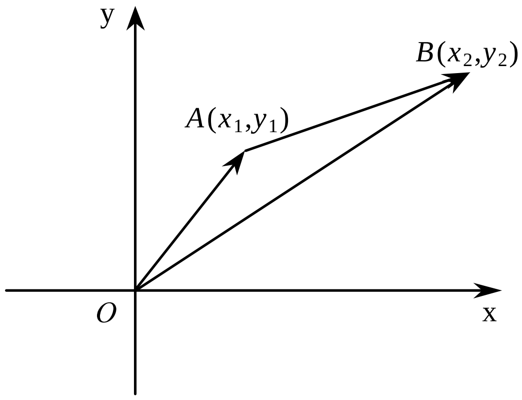
Είναι: $\overrightarrow{AB} = (x, y)$, $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$, και $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$,

Τότε έχουμε ισοδύναμα: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow$

$(x, y) = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) \Leftrightarrow$

$(x, y) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

Άρα $x = x_2 - x_1$ και $y = y_2 - y_1$.



**4** **Έστω ένα διάνυσμα $\vec{\alpha} = (x,y)$, να αποδείξετε ότι το μέτρο του είναι: $|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.**

### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

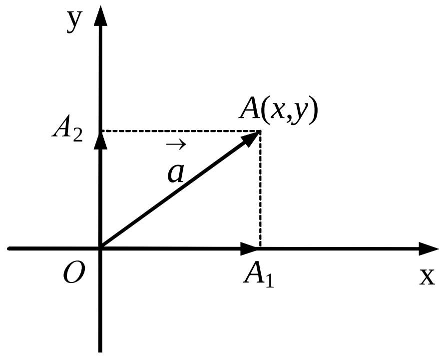
Έστω $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} = (x, y)$ ένα διάνυσμα του καρτεσιανού επιπέδου.
Το σημείο $A$ έχει τετμημένη $x$ και τεταγμένη $y$, και ισχύει $(OA_1) = |x|$ και $(OA_2) = |y|$.
Έτσι θα έχουμε:

$$|\vec{\alpha}|^2 = (OA_1)^2 + (A_1A)^2 =$$

$$= (OA_1)^2 + (OA_2)^2 = .$$

$$= |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2$$

Άρα $|\vec{\alpha}|^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow |\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

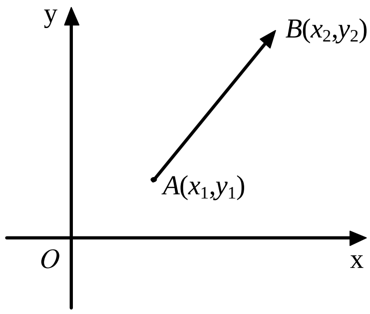



**5** **Να αποδείξετε ότι η απόσταση των σημείων $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ είναι**
$$\mathbf{(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου. Επειδή η απόσταση $(AB)$ των σημείων $A$ και $B$ είναι ίση με το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, έχουμε:

$$(AB) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$




**6** **Να αποδείξετε την ισοδυναμία $\vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ όπου $\lambda_1$, $\lambda_2$ είναι οι συντελεστές διεύθυνσης των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ αντίστοιχα..**

### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ με συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1$ και $\lambda_2$ αντιστοίχως. Τότε έχουμε τις ισοδυναμίες:

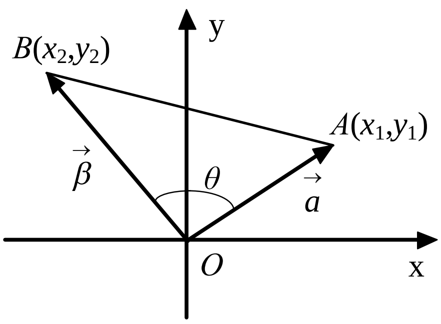
$$\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1y_2 = x_2y_1 \Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 .$$

**7** **Να αποδείξετε ότι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους. Δηλαδή $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1x_2 + y_1y_2$**

### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$
Με αρχή το O παίρνουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$.
Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο OAB έχουμε:

$$(AB)^2 = (OA)^2 + (OB)^2 - 2(OA)(OB)\text{συν}\hat{\theta} \ (1)$$



η οποία ισχύει και στην περίπτωση που τα σημεία *O*, *A*, *B* είναι συνευθειακά.
Όμως είναι $(AB)^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$,

$(OA)^2=x_1^2+y_1^2$ και $(OB)^2=x_2^2+y_2^2$

Επομένως, από την (1) σχέση έχουμε διαδοχικά:

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$$

$$x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+y_1^2+y_2^2-2y_1y_2=x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$$

$$-2x_1x_2-2y_1y_2=-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} \quad \text{άρα} \quad \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1x_2+y_1y_2$$

**8** **Να αποδείξετε ότι:**
**i)** $\lambda\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\beta})=\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$ **ii)** $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$ **iii)** $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_1\cdot\lambda_2=-1$

## ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$, $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ και $\vec{\gamma}=(x_3,y_3)$, τότε έχουμε:

i) $(\lambda\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}=(\lambda x_1,\lambda y_1)(x_2,y_2)=(\lambda x_1)x_2+(\lambda y_1)y_2=\lambda(x_1x_2+y_1y_2)=\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$ και

$$\vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\beta})=(x_1,y_1)(\lambda x_2,\lambda y_2)=x_1(\lambda x_2)+y_1(\lambda y_2)=\lambda(x_1x_2+y_1y_2)=\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}).$$

Άρα, $(\lambda\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\beta})=\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$

ii)
$$\begin{aligned}\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma})&=(x_1,y_1)(x_2+x_3,y_2+y_3)=x_1(x_2+x_3)+y_1(y_2+y_3)\\&=(x_1x_2+x_1x_3)+(y_1y_2+y_1y_3)=(x_1x_2+y_1y_2)+(x_1x_3+y_1y_3)\\&=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}.\end{aligned}$$

iii)
$$\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0\Leftrightarrow y_1y_2=-x_1x_2\Leftrightarrow\frac{y_1}{x_1}\frac{y_2}{x_2}=-1\Leftrightarrow\lambda_1\lambda_2=-1$$

**9** **Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα και θ η γωνία των δύο αυτών διανυσμάτων, τότε να αποδείξετε ότι συνθ=**$\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$

## ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου που σχηματίζουν γωνία *θ*, τότε

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\theta \;\Rightarrow\; \sigma\upsilon\nu\theta=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}.$$

Είναι όμως $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1x_2+y_1y_2$, $|\vec{\alpha}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$ και $|\vec{\beta}|=\sqrt{x_2^2+y_2^2}$

Επομένως η παραπάνω σχέση γίνεται: $\sigma\upsilon\nu\theta=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$

# ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

1. Τι γνωρίζετε για την γωνία δύο διανυσμάτων ;

2. Τι λέγεται **μέτρο** του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ ;Ποιο διάνυσμα λέγεται **μοναδιαίο**;

3. Τι λέγεται **φορέας** του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ ; Πότε δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται **παράλληλα ή συγγραμμικά** ; Πως τα συμβολίζουμε ;

4. Πότε δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται **ομόρροπα** και πότε **αντίρροπα ;** Πως τα συμβολίζουμε ;

5 Πότε δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται **ίσα** και πότε **αντίθετα ;** Πως τα συμβολίζουμε ;

6. Να αποδειχθεί ότι: $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \overrightarrow{\mathbf{OB}} - \overrightarrow{\mathbf{OA}}$

7. Συμπληρώστε τα κενά :

- $\overrightarrow{AB} = -\ \ldots$
- $\overrightarrow{AB} = \ldots.$ $\Leftrightarrow$ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{A\Gamma} = \ldots.$
- Μ μέσο ΑΒ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM} = \ldots$

8. Αν $\vec{\alpha}$ , $\vec{\beta}$ , $\vec{\gamma}$ τρια διανύσματα να δείξετε ότι :

- $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$ [Αντιμεταθετική]
- $\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)$ [Προσεταιριστική]
- $\vec{\alpha}+\vec{0}=\vec{\alpha}$ [Ουδέτερο στοιχείο]
- $\vec{\alpha}+\left(-\vec{\alpha}\right)=\vec{0}$ [Συμμετρικό Στοιχείο]

9. Να αποδείξετε ότι το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}=(\ x\ ,\ y\ )$ είναι ίσο με $\left|\vec{\alpha}\right| = \sqrt{x^2+y^2}$

10. Να αποδείξετε ότι η απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι
$(AB) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

11. Να αναφέρετε και να αποδείξετε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης $\left|\vec{\boldsymbol{\alpha}}+\vec{\boldsymbol{\beta}}\right|$

12. Συμπληρώστε τα κενά :

α) $(\lambda \pm \mu)\vec{\alpha}$ = …………….  ε) Αν $\lambda\vec{\alpha} = \mu\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ τότε ………………..
β) $\lambda(\vec{\alpha}\pm\vec{\beta})$ = ………………  στ) $\lambda\vec{\alpha} = \vec{0} \Leftrightarrow$ ……………………….
γ) $\lambda(\mu\vec{\alpha})$ = ………………  ζ) $(-\lambda\vec{\alpha}) = \lambda(-\vec{\alpha}) = -(\lambda\vec{\alpha})$
δ) Αν $\lambda\ \vec{\alpha} = \lambda\ \vec{\beta}$ και $\lambda\neq 0$ τότε …………….

13. Τι λέγεται γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{\boldsymbol{\alpha}},\vec{\boldsymbol{\beta}}$ .

14. Αν $\vec{\boldsymbol{\alpha}},\vec{\boldsymbol{\beta}}$ δύο διανύσματα με $\vec{\boldsymbol{\beta}}\neq\vec{\mathbf{0}}$ με $\vec{\boldsymbol{\alpha}}=\boldsymbol{\lambda}\cdot\vec{\boldsymbol{\beta}}$ ποια η σχέση μεταξύ τους $(\boldsymbol{\lambda}\in\mathbf{R})$;

15. Ορίστε και αποδείξτε την διανυσματική ακτίνα του μέσου ενός τμήματος.

16. Ποιες είναι οι συντεταγμένες του μέσου ενός τμήματος ;

17. Αν $\vec{\alpha}=(x,y)$ , αποδείξτε ότι : $|\vec{\alpha}|=\sqrt{x^2+y^2}$

18 . Έστω $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ , $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ . Συμπληρώστε τα κενά :

- $\vec{\alpha}=\vec{\beta} \Leftrightarrow$ …… και …….
- $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=($ ………… , ………… $)$
- $\overrightarrow{\lambda\alpha}=($ ………… , ………… $)$
- $\overrightarrow{\lambda\alpha}+\mu\vec{\beta}=($ ………… , ………… $)$

19. Αποδείξτε ότι ένα διάνυσμα γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{i},\vec{j}$ .

20. Ποιες είναι οι συντεταγμένες διανύσματος με γνωστά άκρα ; (απόδειξη)

21. Ποια η συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων αν είναι εκφρασμένα με συντεταγμένες

22. Πως ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος και τι ιδιότητες έχει;

23. Πως ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων;

24. Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$ τότε πάντα ισχύει $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ ;

25 . Συμπληρώστε τα κενά :

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=$ ....... Αντιμεταθετική Ιδιότητα

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}| \Leftrightarrow$ ..............

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-|\vec{\alpha}||\vec{\beta}| \Leftrightarrow$ .............

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0 \Leftrightarrow$ ..................

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}=$.....=......

26. Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}>0$ ή $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}<0$ ποιες οι σχετικές θέσεις των δύο διανυσμάτων;

27. Αποδείξτε την αναλυτική έκφραση του εσωτερικού γινομένου.

28 . Να αποδείξετε τις παρακάτω ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου :

$\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}\pm\vec{\gamma})=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\pm\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$ Επιμεριστική Ιδιότητα

$\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})=(\lambda\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\beta})$

$\vec{\alpha}\perp\vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\alpha}}\lambda_{\vec{\beta}}=-1$ ($\vec{\alpha},\vec{\beta}$ όχι παράλληλα με τον $y'y$)

29. Πως ορίζεται το συνημίτονο της γωνίας δύο διανυσμάτων;

30. Αποδείξτε ότι : $\boxed{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}}$ όπου $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$ η προβολή του $\vec{\beta}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$

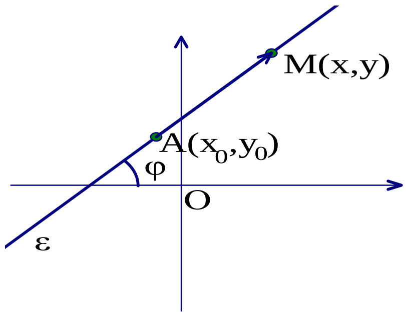
ΚΕΦΑΛΑΙΟ-2

# ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ - ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

## 1. Εξισώσεις ευθείας

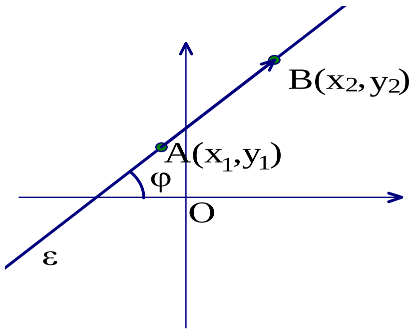
► **Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0,y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda$, έχει εξίσωση:**

$$\boxed{y-y_0 = \lambda(x-x_0)}$$




► **Η μη κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$, έχει εξίσωση:**

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$$




## 2. Ειδικές περιπτώσεις:

- Εξίσωση ευθείας που τέμνει τον y'y στο σημείο Α(0,β):

$$y=\lambda x+\beta$$

- Εξίσωση ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων:

$$y=\lambda x$$

- Εξίσωση κατακόρυφης ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_o,y_o)$ (//y'y)

$$x=x_o$$

- Εξίσωση παράλληλης προς τον x'x ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_o,y_o)$

$$y=y_o$$

**Παρατήρηση**:Οι διχοτόμοι του πρώτου και δεύτερου τεταρτημορίου έχουν εξισώσεις **y=x** και **y=-x** αντίστοιχα.

## 3. Προσδιορισμός Εξίσωσης ευθείας:

Για να βρούμε την εξίσωση μιας ευθείας αρκεί να γνωρίζουμε τον <u>συντελεστή διεύθυνσης ( λ )</u> και <u>ένα σημείο</u> από το οποίο διέρχεται ( $x_o$ , $y_o$) ……..οπότε $\mathbf{y-y_o= \lambda\,(x - x_o)}$

**Βρίσκουμε την εξίσωση ευθείας όταν….**

- **Γνωρίζουμε ένα <u>σημείο</u> της ευθείας και τον <u>συντελεστή διεύθυνσής της</u>**

**ή**

- **Γνωρίζουμε <u>δύο σημεία της</u>**

## 4. Προσδιορισμός συντελεστή διεύθυνσης ευθείας …..που:

- Είναι <u>παράλληλη</u> σε άλλη γνωστή ευθεία.

$$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

- Είναι <u>παράλληλη</u> σε γνωστό διάνυσμα $\vec{\alpha} = (x, y)$

$$\varepsilon // \vec{\alpha} \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_{\vec{\alpha}}$$

(Θυμάμαι: $\lambda_{\vec{\alpha}} = \frac{y}{x}$)

- Είναι <u>κάθετη</u> σε άλλη γνωστή ευθεία:

$$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$$

- Είναι κάθετη σε γνωστό διάνυσμα $\vec{\alpha} = (x, y)$

$$\varepsilon \perp \vec{\alpha} \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon} \cdot \lambda_{\vec{\alpha}} = -1$$

- Διέρχεται από 2 γνωστά σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- Σχηματίζει γωνία ω με τον x'x:

$$\lambda = \varepsilon\phi\omega$$

- Αν $\varepsilon // x'x$ τότε $\lambda_{\varepsilon} = 0$
- Αν $\varepsilon // y'y$ τότε δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης.

**ΧΡΗΣΙΜΑ**

- **Αν γνωρίζουμε την κλίση λ μπορούμε να βρούμε την γωνία από την σχέση εφω=λ.**
- **Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας ε μπορεί να βρεθεί έμμεσα: Από μια ευθεία παράλληλη στην ε ή από μια ευθεία κάθετη στην ε**
- **Θέτοντας στην εξίσωση της ευθείας:**
  **x=0, βρίσκουμε την τομή της με τον y΄y**
  **y=0, βρίσκουμε την τομή της με τον x΄x**
- **Τρία σημεία είναι συνευθειακά όταν το ένα ανήκει στην ευθεία που ορίζουν τα άλλα δύο**

## 5. Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας:

$Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$

με συντελεστή διεύθυνσης: $\lambda = -\frac{A}{B}$ $(B \neq 0)$

- Αν $B \neq 0$ τότε η ε τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο $\left(0, -\frac{\Gamma}{B}\right)$
- Αν B=0 τότε η εξίσωση γίνεται $x = -\frac{\Gamma}{A}$

Παρατηρήσεις:

- Η ευθεία με εξίσωση Αx+By+Γ=0 είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$.
- Η ευθεία με εξίσωση Αx+By+Γ=0 είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{n} = (A, B)$.

## 6. Απόσταση σημείου $M_o$ $(x_o, y_o)$ από ευθεία ε: Αx+By+Γ=0:

$$d(M_o, \varepsilon) = \frac{|Ax_o + By_o + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

## 7. Εμβαδόν τριγώνου:

Με κορυφές τα σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $\Gamma(x_3, y_3)$:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}\right|$$

ή

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{B\Gamma})\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 \end{vmatrix}\right|$$

ή

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{\Gamma A}, \overrightarrow{\Gamma B})\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}\right|$$

## 8. Απόσταση παράλληλων ευθειών:

Αν $\varepsilon_1: y = \lambda x + \beta_1$ και $\varepsilon_2: y = \lambda x + \beta_2$ τότε

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{\sqrt{1 + \lambda^2}}$$

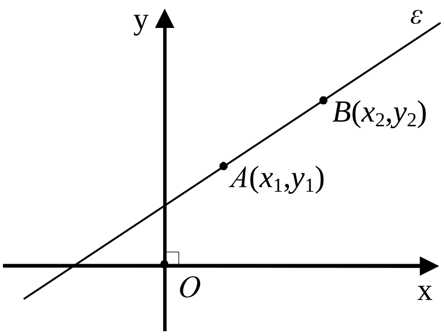
# ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

**1**

**Να αποδείξετε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, με $x_1 \neq x_2$ είναι $\lambda = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.**

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Έστω δύο τυχαία σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ μιας ευθείας (ε) που δεν είναι κάθετη στον άξονα xx΄.




τότε ο συντελεστής διεύθυνσης λ της ευθείας (ε)

είναι ίσος με το συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος

$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$,

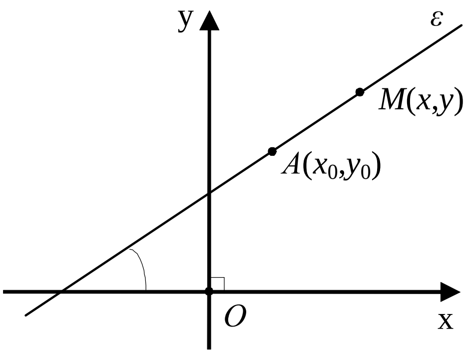
δηλαδή $\lambda = \lambda_{\overrightarrow{AB}} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Άρα $\lambda = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

**2**

**Σε σύστημα συντεταγμένων Oxy δίνεται ευθεία (ε) με συντελεστή διεύθυνσης λ και ένα σημείο της $A(x_o, y_o)$ . Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι $y - y_o = \lambda(x - x_o)$**

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Έστω *Oxy* ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $A(x_0, y_0)$ ένα σημείο του επιπέδου. Έστω ένα δεύτερο σημείο $M(x, y)$ διαφορετικό του $A(x_0, y_0)$ της ευθείας *ε*




Είναι $\overrightarrow{AM} = (x - x_0, y - y_0)$ και $\lambda_{\overrightarrow{AM}} = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$

Ισχύουν οι ισοδυναμίες: $\overrightarrow{AM} \parallel \varepsilon, \Leftrightarrow \lambda_{AM} = \lambda_\varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \lambda \Leftrightarrow y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.

Η τελευταία εξίσωση επαληθεύεται και από το σημείο $A(x_0, y_0)$. Άρα η εξίσωση της ευθείας *ε* είναι: $y - y_o = \lambda(x - x_o)$

**3**

**Να αποδείξετε ότι ε η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ έχει εξίσωση $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$**

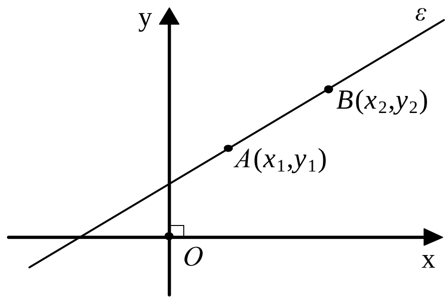
**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Έστω δύο τυχαία σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ της ευθείας (ε)

Αν $x_1 \neq x_2$, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας είναι $\lambda = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

και επομένως η εξίσωση $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$

γίνεται: $$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

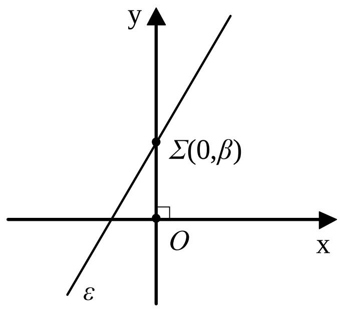



| 4 | **Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής Αx+Βy+Γ=0 με Α≠0 ή Β≠0 και αντιστρόφως, κάθε εξίσωση της μορφής Αx+Βy+Γ=0 με Α≠0 ή Β≠0 παριστάνει ευθεία γραμμή** |
|---|---|

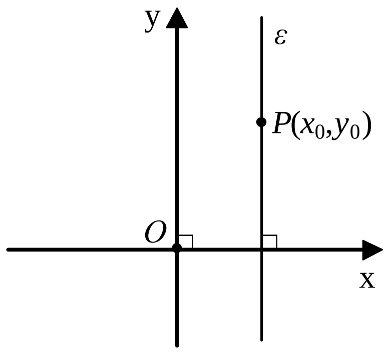
**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

►Έστω $\varepsilon$ μια ευθεία στο καρτεσιανό επίπεδο.

- Αν η ευθεία $\varepsilon$ τέμνει τον άξονα $yy'$ στο σημείο $\Sigma(0,\beta)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda$, τότε θα έχει εξίσωση $y = \lambda x + \beta$, η οποία γράφεται $\lambda x + (-1)y + \beta = 0$




- Αν η ευθεία $\varepsilon$ είναι κατακόρυφη και διέρχεται από το σημείο $P(x_0, y_0)$, τότε θα έχει εξίσωση $x = x_0$, η οποία γράφεται ισοδύναμα $x + 0 \cdot y + (-x_0) = 0$.




Επομένως και στις δύο περιπτώσεις η εξίσωση της ευθείας $\varepsilon$ παίρνει τη μορφή $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$.

► **Αντίστροφα,** έστω η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$.

— Αν $B \neq 0$, τότε η εξίσωση γράφεται $y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{\Gamma}{B}$, που είναι εξίσωση ευθείας με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\dfrac{A}{B}$ και η οποία τέμνει τον άξονα $yy'$ στο σημείο $\left(0, -\dfrac{\Gamma}{B}\right)$.

— Αν $B = 0$, τότε, λόγω της υπόθεσης, είναι $A \neq 0$ και η εξίσωση γράφεται $x = -\dfrac{\Gamma}{A}$, που είναι εξίσωση ευθείας κάθετης στον άξονα $x'x$ στο σημείο του $P\left(-\dfrac{\Gamma}{A}, 0\right)$.

Άρα σε κάθε περίπτωση η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ παριστάνει ευθεία.

**5** **Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}=(B,-A)$.**

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Έστω $\varepsilon$ μια ευθεία με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ και διάνυσμα $\vec{\delta}=(B,-A)$

- Αν $B\neq 0$, τότε η $\varepsilon$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-\frac{A}{B}$ και το διάνυσμα $\lambda_{\delta}=-\frac{A}{B}$. Επειδή οι συντελεστές τους είναι ίσοι τότε η ευθεία είναι παράλληλη με το διάνυσμα.

- Αν $B=0$, τότε η $\varepsilon$ και το διάνυσμα $\vec{\delta}$ είναι παράλληλα προς τον άξονα $yy'$ επομένως και μεταξύ τους παράλληλα.

**6** **Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση Ax + By + Γ = 0 είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{n}=(A,B)$**

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Είναι $\vec{\delta}\cdot\vec{n}=(B,-A)\cdot(A,B)=AB-AB=0$

Επομένως το διάνυσμα $\vec{\delta}=(B,-A)$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{n}=(A,B)$. Επειδή το διάνυσμα $\vec{\delta}$ είναι παράλληλο με την ευθεία $Ax+By+\Gamma=0$, η ευθεία αυτή θα είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{n}=(A,B)$

## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

1. Τι ονομάζουμε **γωνία ω της ευθείας (ε) με τον x΄x ;**
Ποιες τιμές παίρνει η γωνία ω ;

2 . Τι ονομάζουμε **συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας** (ε) ; Όλες οι ευθείες έχουν συντελεστή διεύθυνσης ;

3 . Να αποδείξετε ότι : (ε) // $\vec{\alpha}$=( x , y ) , (x≠0) $\Leftrightarrow$ $\lambda_\varepsilon=\lambda_{\vec{\alpha}}$

4 .Δείξτε ότι :

- $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1}=\lambda_{\varepsilon_2}$
- $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1}\cdot\lambda_{\varepsilon_2}=-1$

5. Υπάρχουν δύο ευθείες $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ με συντελεστές διεύθυν-σης $\lambda_1$, $\lambda_2$ αντίστοιχα για τις οποίες ισχύει συγχρόνως $\lambda_1=\lambda_2$ και $\lambda_1 . \lambda_2 = -1$. **Σ** **Λ**

6. Οι ευθείες με εξισώσεις $y=\frac{1}{|\lambda|}x$ και $y=-\lambda x$ είναι κάθετες για κάθε $\lambda\neq 0$. **Σ** **Λ**

7.Η ευθεία $\frac{x}{\beta}+\frac{y}{\alpha}=1$ με $\alpha, \beta\neq 0$ τέμνει τους άξονες στα σημεία Α (α, 0) και Β (0, β). **Σ** **Λ**

8.Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0 , y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda$ είναι : $y-y_0=\lambda(x-x_0)$

9. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1 , y_1 )$ και $B(x_2 , y_2 )$ με $x_1 \neq x_2$ έχει εξίσωση : $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

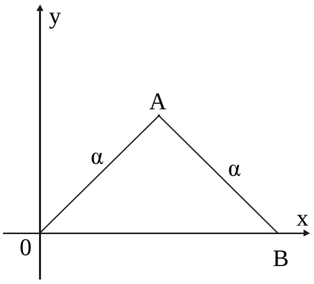
10. Να αποδείξετε ότι η ευθεία του επιπέδου που έχει συντελεστή διεύθυνσης λ και τέμνει τον y΄y στο Β(0 ,β )έχει εξίσωση $y = \lambda x + \beta$

11 .Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας σε κάθε περίπτωση :

- Όταν διέρχεται από την αρχή των αξόνων( και δεν είναι ο y΄y)
- Όταν είναι παράλληλη στον x΄x και διέρχεται από το $A(x_0 , y_0 )$
- Όταν είναι παράλληλη στον y΄y και διέρχεται από το $A(x_0 , y_0 )$
- Όταν είναι διχοτόμος της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων .
- Όταν είναι διχοτόμος της 2ης και 4ης γωνίας των αξόνων .

12.Στο διπλανό σχήμα η εξίσωση της ευθείας ΟΑ είναι $y = \sqrt{3}x$. Η γωνία ΟΑΒ ισούται με

**Α.** 30° **Β.** 60° **Γ.** 45°
**Δ.** 90° **Ε.** 135°

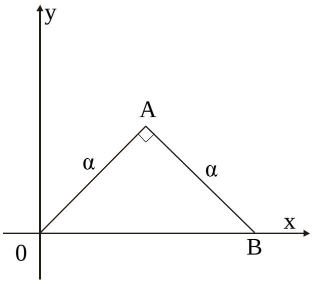



13. Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας (ε), που διέρχεται από τα σημεία Α $(x_1, y_1)$ και Β $(x_2, y_2)$ ορίζεται πάντα όταν

**Α.** $y_1 \neq y_2$ **Β.** $x_1 = x_2$ και $y_1 \neq y_2$
**Γ.** $x_1 \neq - x_2$ και $y_1 \neq y_2$ **Δ.** $y_1 = y_2$ και $x_1 = x_2$ **Ε.** $x_1 \neq x_2$

14. Στο διπλανό σχήμα η γωνία ΟΑΒ είναι ορθή. Η εξίσωση της ευθείας ΟΑ είναι

**Α.** $y = \dfrac{\alpha}{\beta}x$ **Β.** $y = \dfrac{\beta}{\alpha}x$ **Γ.** $y = \sqrt{\alpha}\,x$
**Δ.** $y = \alpha\beta x$ **Ε.** $y = x$




15.. Δείξτε ότι :
Κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής Αx+Βy+ Γ = 0 με Α≠0 ή Β ≠ 0 (1) και αντίστροφα κάθε εξίσωση της μορφής (1) παριστάνει ευθεία γραμμή .

16 . Δείξτε ότι η ευθεία με εξίσωση της μορφής Αx+Βy+ Γ = 0 είναι

- Παράλληλη στο $\vec{\delta}=(B\ ,\ -A)$
- Κάθετη στο $\vec{\eta}=(A\ ,\ B)$

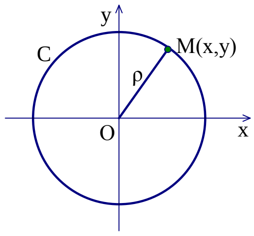
17 .Να γράψετε τους τύπους

- Της απόστασης του $M(x_0 , y_0 )$ από την ευθεία με εξίσωση Αx+Βy+ Γ = 0 .
- Του εμβαδού τριγώνου με κορυφές $A(x_1 , y_1 )$ , $B(x_2 , y_2 )$ , $\Gamma(x_3 , y_3 )$ .
- Της απόστασης των παραλλήλων $\varepsilon_1 : y = \lambda x + \beta_1$ και $\varepsilon_2 : y = \lambda x + \beta_2$

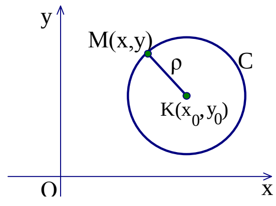
# ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ - ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

## A ΚΥΚΛΟΣ

### 1. Ορισμοί :



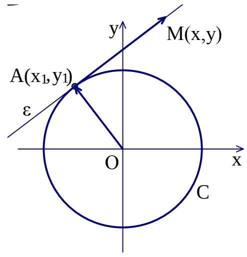

- **Ο κύκλος με κέντρο την αρχή Ο των αξόνων και ακτίνα ρ έχει εξίσωση:** $\boxed{x^2+y^2=\rho^2}$




- **Ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση:**

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2}$$

### 2. Εφαπτόμενη εξίσωσης κύκλου :




- **Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2+y^2=\rho^2$ στο σημείο του $A(x_1,y_1)$έχει εξίσωση:**

$$\boxed{xx_1+yy_1=\rho^2}$$

- **Για την εφαπτομένη του κύκλου $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$**

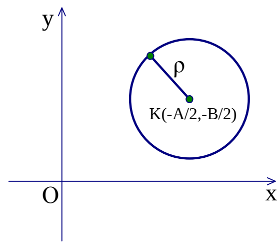
**Θεωρούμε την ευθεία (ε) ψ=αχ+β και ισχύουν :**
**Αν Κ(χ$_0$ , ψ$_0$) το κέντρο , Α(χ$_1$,ψ$_1$) το σημείο επαφής και**
**Μ(χ,ψ) τυχαίο σημείο της τότε**

► $\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{AM}=0$

► $d(K,\varepsilon)=\rho \Leftrightarrow \dfrac{|\alpha\chi_0-1\cdot\psi_0+\beta|}{\sqrt{\alpha^2+1^2}}=\rho$

| Εφαπτομένη κύκλου $x^2+y^2=\rho^2$ |
|---|
| Για να γράψουμε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C:<br>• Αν <u>γνωρίζουμε</u> το σημείο επαφής $A(x_1,y_1)$ , η εξίσωση προκύπτει άμεσα από τον τύπο $xx_1+yy_1=\rho^2$<br>• Αν <u>δεν γνωρίζουμε</u> το σημείο επαφής τότε το ονομάζουμε έστω $A(x_1,y_1)$ , γράφουμε την εφαπτομένη στο Α και έχουμε<br>i) Οι συντεταγμένες του Α επαληθεύουν την εξίσωση του κύκλου C<br>ii) Η εφαπτομένη ικανοποιεί την συνθήκη του ζητήματος |

### 3. Γενική εξίσωση κύκλου :




**i) Κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής**

$$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0\ , \quad \text{με } A^2+B^2-4\Gamma>0$$

**ii) Η εξίσωση $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ , με $A^2+B^2-4\Gamma>0$ παριστάνει κύκλο**

### 4. Θέσεις ευθείας και κύκλου :

► Για να είναι η <u>ευθεία ε εφαπτομένη του κύκλου</u> κέντρου $K(x_0,y_0)$ και ακτίνας ρ ,αρκεί να ισχύει d(K , ε)=ρ

►**Οι Σχετικές θέσεις ευθείας – κύκλου** προκύπτουν είτε από την λύση του συστήματος των εξισώσεών τους είτε από την σύγκριση d(K , ε) με το ρ

| Θέσεις ευθείας και κύκλου : |
|---|
| ► **d(K , ε)=ρ↔** Η ευθεία είναι εφαπτόμενη του κύκλου<br>► **d(K , ε)<ρ ↔**Η ευθεία είναι τέμνουσα και έχει 2 κοινά σημεία με τον κύκλο<br>► **d(K , ε)>ρ ↔**Η ευθεία δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο |

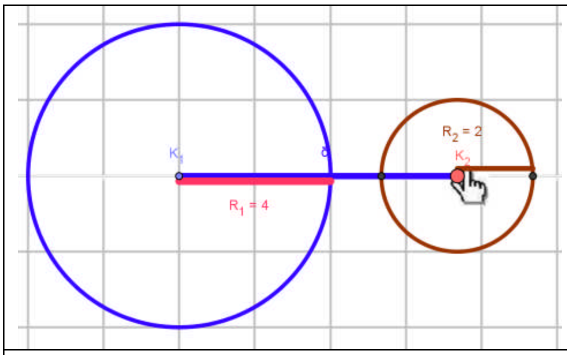
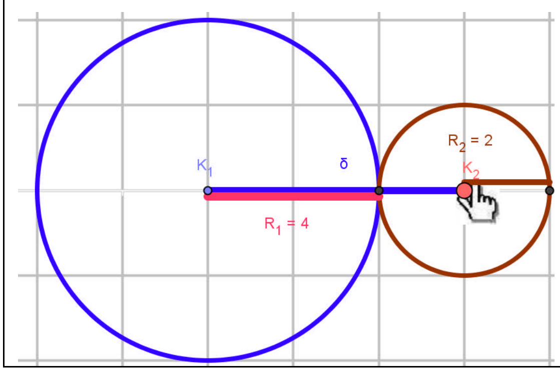
## 5. Θέσεις δύο κύκλων :

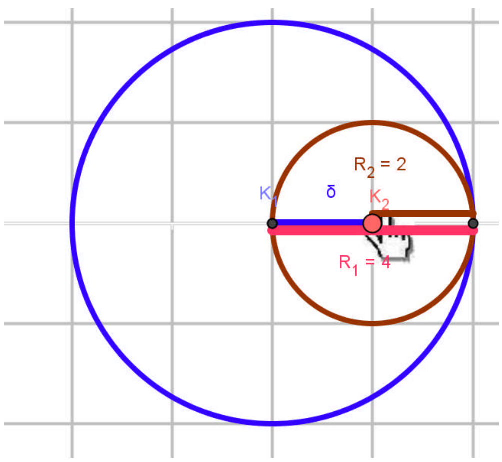
**Για να βρω την θέση 2 κύκλων λύνουμε το σύστημα:**

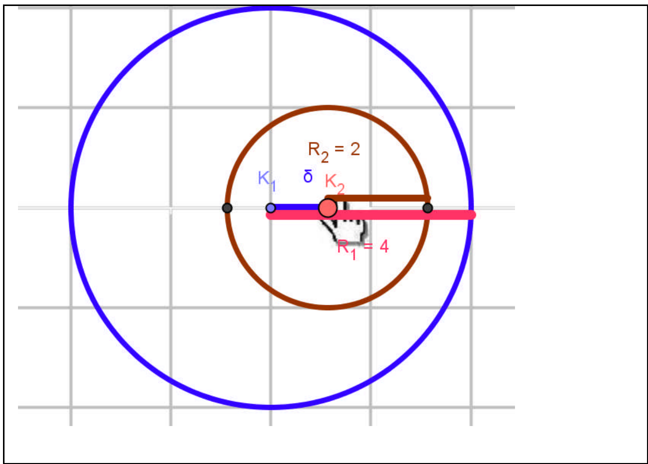
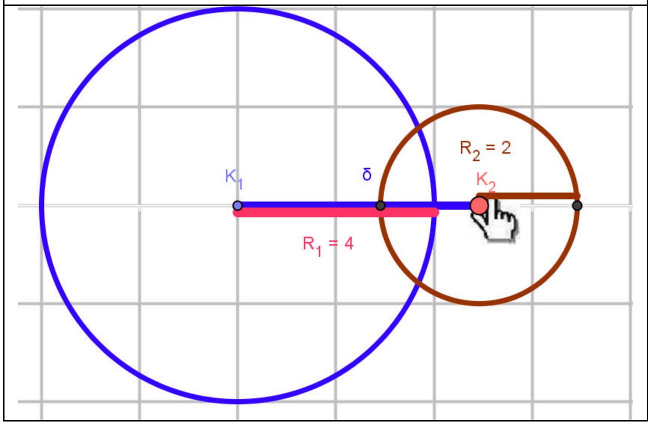
$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+\mathrm{A}_1x+\mathrm{B}_1y+\Gamma_1 \\ x^2+y^2+\mathrm{A}_2x+\mathrm{B}_2y+\Gamma_2 \end{array}\right\} (\textit{Σύστημα των εξισώσεων των 2 κύκλων})$$

**1)Αν το σύστημα έχει 2 λύσεις τότε οι δύο κύκλοι τέμνονται. Η λύση του συστήματος μας είναι τα 2 σημεία στα οποία τέμνονται οι 2 κύκλοι. Η κοινή χορδή είναι κάθετη στη διάκεντρο δ.**
**2) Αν το σύστημα έχει 1 λύση τότε οι δύο κύκλοι εφάπτονται . Η μοναδική λύση είναι το σημείο επαφής .**
**3) Αν το σύστημα έχει δεν έχει λύση στο R τότε οι δύο κύκλοι δεν έχουν κοινό σημείο .**

### Γεωμετρικά:

| | |
|---|---|
|  | Διάκεντρος = δ<br><br>**Οι κύκλοι δεν τέμνονται**<br><br>$R_1 + R_2 < \delta$ |
|  | **Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά**<br><br>$R_1 + R_2 = \delta$ |

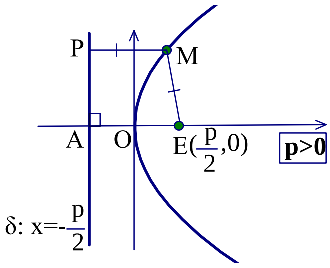
| | |
|---|---|
|  | **Οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά**<br><br>$\left\|R_1 - R_2\right\| = \delta$ |
| | |

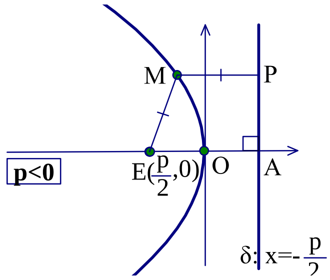
| | |
|---|---|
|  | **Οι κύκλοι δεν τέμνονται**<br><br>$\lvert R_1 - R_2 \rvert > \delta$ |
|  | **Οι κύκλοι τέμνονται**<br><br>$\lvert R_1 - R_2 \rvert < \delta < R_1 + R_2$ |

## **Β ΠΑΡΑΒΟΛΗ**

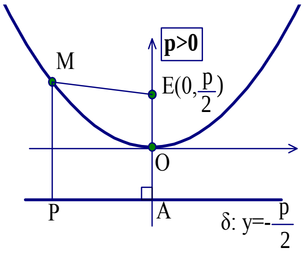
### 1. Ορισμοί :

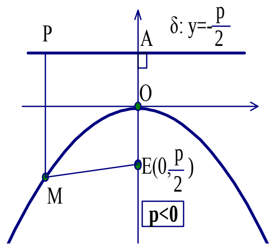
- **Η εξίσωση της παραβολής με εστία $E(\frac{p}{2},0)$ και διευθετούσα δ: $x=-\frac{p}{2}$** είναι $\boxed{y^2=2px}$




- **Η εξίσωση της παραβολής με εστία $E(0,\frac{p}{2})$ και διευθετούσα δ: $y=-\frac{p}{2}$** είναι $\boxed{x^2=2py}$

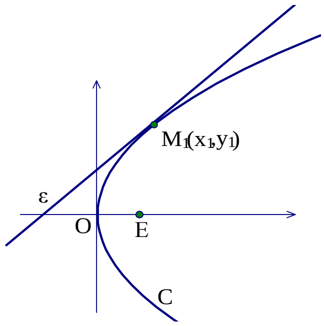



### 2. Εφαπτόμενη Παραβολής:

**Η εφαπτομένη ε στο σημείο $M_1(x_1,y_1)$ της παραβολής:**

- $y^2=2px$ έχει εξίσωση $\boxed{yy_1=p(x+x_1)}$
- $x^2=2py$ έχει εξίσωση $\boxed{xx_1=p(y+y_1)}$




| Εφαπτομένη παραβολής |
|---|
| **Για να γράψουμε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής C**<br>● **Αν <u>γνωρίζουμε</u> το σημείο επαφής $A(x_1,y_1)$ , η εξίσωση προκύπτει άμεσα από τους τύπους**<br>● **Αν <u>δεν γνωρίζουμε</u> το σημείο επαφής τότε το ονομάζουμε έστω $A(x_1,y_1)$ , γράφουμε την εφαπτομένη στο Α και έχουμε**<br>**i) Οι συντεταγμένες του Α επαληθεύουν την εξίσωση της παραβολής**<br>**ii) Η εφαπτομένη ικανοποιεί την συνθήκη του ζητήματος** |

### 3. Ιδιότητες Παραβολής:

- <u>Η παραβολή $y^2=2px$</u>

↦ έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον χ΄χ

↦ βρίσκεται: δεξιά του y΄y αν p>0 , αριστερά του y΄y αν p<0

- <u>Η παραβολή $x^2=2py$</u>

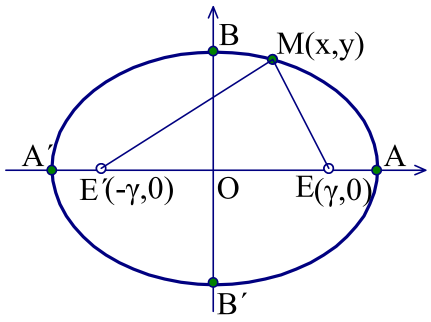
↦ έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον y΄y

↦ βρίσκεται: πάνω από τον χ΄χ αν p>0 , κάτω από τον χ΄χ αν p<0

- Το **p** λέγεται **παράμετρος** της παραβολής ( p>0 ή p<0)
- Η **απόσταση εστίας – διευθετούσας** ισούται με **|p|**

| ΕΠΙΣΥΜΑΝΣΕΙΣ |
|---|
| **►Για να γράψουμε την εξίσωση μιας παραβολής πρέπει να γνωρίζουμε τον άξονα συμμετρίας της και την παράμετρο p**<br>**Η παράμετρος p βρίσκεται:**<br>● **Αν είναι γνωστή η εστία**<br>● **Αν είναι γνωστή η διευθετούσα**<br>● **Από τις δοσμένες συνθήκες**<br>**►Ευθεία εφαπτομένη σε παραβολή**<br>**Για να εφάπτεται η ευθεία ε στην παραβολή C απαιτούμε η η εφαπτόμενη της παραβολής σε ένα τυχαίο σημείο της ,να ταυτίζεται με την δοσμένη ευθεία.** |

# Γ ΕΛΛΕΙΨΗ



Ε΄Ε=2γ , ΜΕ΄+ΜΕ=2α

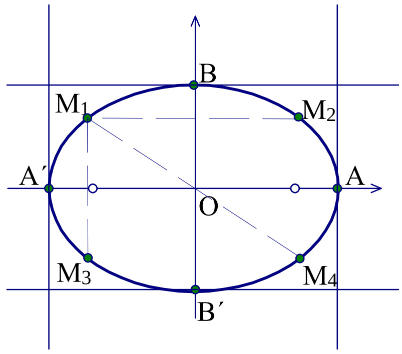
## 1Α. Ορισμοί :

- **Η εξίσωση της έλλειψης**
  **με εστίες Ε΄(-γ,0) και Ε(γ,0)**

**και σταθερό άθροισμα 2α είναι**

$\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ ή $\boxed{\beta^2x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2}$ $\boxed{\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}$

- **Ιδιότητες** της έλλειψης **C :** $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ , $0<\beta<\alpha$




↦ Τέμνει τον χ΄χ στα σημεία Α΄(-α,0) και Α(α,0)

↦ Το τμήμα **Α΄Α** λέγεται **μεγάλος άξονας** της C με μήκος **(Α΄Α)=2α**

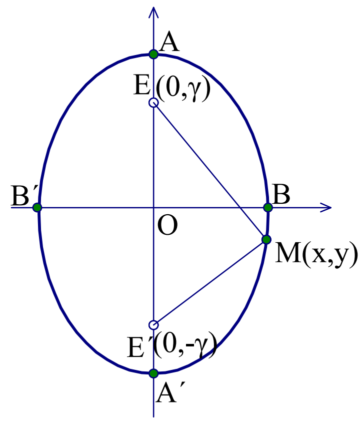
↦ Τέμνει τον y΄y στα σημεία Β΄(0,-β) και Β(0,β)

↦ Το τμήμα **Β΄Β** λέγεται **μικρός άξονας** της C με μήκος **(Β΄Β)=2β**

↦ Η έλλειψη περιέχεται στο ορθογώνιο που ορίζουν οι ευθείες

$x=-\alpha$ , $x=\alpha$ , $y=-\beta$ , $y=\beta$ **($-\alpha\le x\le\alpha$ και $-\beta\le y\le\beta$)**

## 1Β. Ορισμοί :



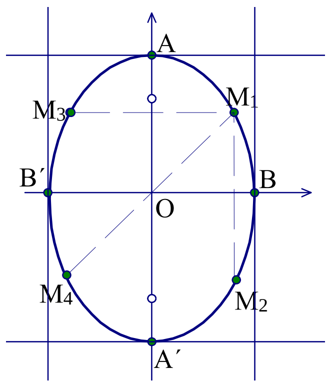
Ε΄Ε=2γ , ΜΕ΄+ΜΕ=2α

- **Η εξίσωση της έλλειψης**
  **με εστίες Ε΄(0,-γ) και Ε(0,γ)**

**και σταθερό άθροισμα 2α είναι**

$\dfrac{y^2}{\alpha^2}+\dfrac{x^2}{\beta^2}=1$ ή $\boxed{\alpha^2x^2+\beta^2y^2=\alpha^2\beta^2}$ $\boxed{\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}$

- **Ιδιότητες** της έλλειψης **C :** $\dfrac{y^2}{\alpha^2}+\dfrac{x^2}{\beta^2}=1$ , $0<\beta<\alpha$




↦ Τέμνει τον y΄y στα σημεία Α΄(0,-α) και Α(0,α)

↦ Το τμήμα **Α΄Α** λέγεται **μεγάλος άξονας** της C με μήκος **(Α΄Α)=2α**

↦ Τέμνει τον χ΄χ στα σημεία Β΄(-β,0) και Β(β,0)

↦ Το τμήμα **Β΄Β** λέγεται **μικρός άξονας** της C με μήκος **(Β΄Β)=2β**

↦ Η έλλειψη περιέχεται στο ορθογώνιο που ορίζουν οι ευθείες

$x=-\beta$ , $x=\beta$ , $y=-\alpha$ , $y=\alpha$ **($-\beta\le x\le\beta$ και $-\alpha\le y\le\alpha$)**

- **Κοινές ιδιότητες**

↦ Οι εστίες Ε΄ , Ε της έλλειψης είναι <u>πάντα</u> πάνω στον μεγάλο άξονα Α΄Α

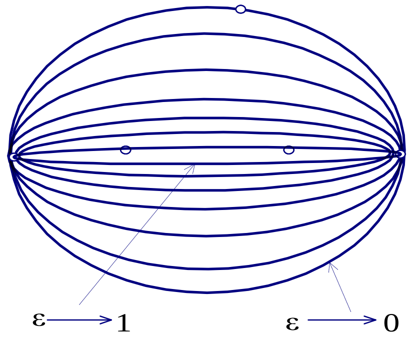
↦ Η έλλειψη έχει **άξονες συμμετρίας** τους **χ΄χ** και **y΄y** και **κέντρο συμμετρίας** την αρχή **Ο(0,0)** των αξόνων

↦ Το **Ο** λέγεται **κέντρο της έλλειψης** και τα **Α΄ , Α , Β΄ , Β** λέγονται **κορυφές της έλλειψης**

↦ **Διάμετρος** της έλλειψης λέγεται **οποιαδήποτε χορδή που διέρχεται από το κέντρο της**

Για κάθε διάμετρο $M_1M_4$ ισχύει: $2\beta\le (M_1M_4)\le 2\alpha$

## 2.Εκκεντρότητα έλλειψης




- **Εκκεντρότητα ε** της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$

( ή $\frac{y^2}{\alpha^2}+\frac{x^2}{\beta^2}=1$ ) λέγεται ο λόγος: $\boxed{\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}}$

- Είναι $\varepsilon<1$ ( αφού $\gamma<\alpha$ )

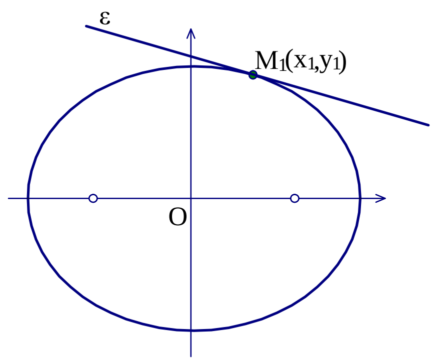
  είναι μικρότερη της μονάδος

- Είναι $\frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{1-\varepsilon^2}$ δηλαδή

ο λόγος των αξόνων της έλλειψης είναι συνάρτηση της εκκεντρότητας

## 3. Εφαπτόμενη Έλλειψης:

**Η εφαπτομένη ε στο σημείο $M_1(x_1,y_1)$ της έλλειψης:**




- $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ **έχει εξίσωση** $\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=1$

$\mapsto \beta^2x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$ ›› $\beta^2xx_1+\alpha^2yy_1=\alpha^2\beta^2$

- $\frac{y^2}{\alpha^2}+\frac{x^2}{\beta^2}=1$ **έχει εξίσωση** $\frac{yy_1}{\alpha^2}+\frac{xx_1}{\beta^2}=1$

$\mapsto \alpha^2x^2+\beta^2y^2=\alpha^2\beta^2$ ›› $\alpha^2xx_1+\beta^2yy_1=\alpha^2\beta^2$

### Εξίσωση - Εφαπτομένη Έλλειψης

**Α. Εξίσωση έλλειψης**

**Για να γράψουμε την εξίσωση μιας έλλειψης πρέπει να γνωρίζουμε ή να βρούμε:**

- **τις παραμέτρους α και β , (β=$\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$ )**
- **τον άξονα (χ΄χ ή y΄y) που βρίσκονται οι εστίες**

**Η θέση του $\alpha^2$ στην έλλειψη εξαρτάται από τον άξονα (χ΄χ ή y΄y) που βρίσκονται οι εστίες**

**Β. Για να γράψουμε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης C**

- **Αν <u>γνωρίζουμε</u> το σημείο επαφής Α($x_1$,$y_1$) , η εξίσωση προκύπτει άμεσα από τους τύπους**
- **Αν <u>δεν γνωρίζουμε</u> το σημείο επαφής τότε το ονομάζουμε έστω Α($x_1$,$y_1$) , γράφουμε την εφαπτομένη στο Α και έχουμε**

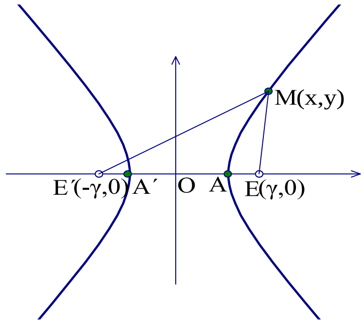
**i) Οι συντεταγμένες του Α επαληθεύουν την εξίσωση της έλλειψης**
**ii) Η εφαπτομένη ικανοποιεί την συνθήκη του ζητήματος**

**Γ. Ευθεία εφαπτομένη σε έλλειψη**

- **Για να εφάπτεται η ευθεία ε στην έλλειψη C απαιτούμε η η εφαπτόμενη της έλλειψης σε ένα τυχαίο σημείο της ,να ταυτίζεται με την δοσμένη ευθεία.**
- **Αλλιώς για να εφάπτεται η ευθεία ε στην έλλειψη C πρέπει το σύστημα των εξισώσεών τους να έχει μία λύση**
- **<u>Προσοχή όμως</u> !!! Ο τρόπος αυτός δεν ισχύει γενικά για όλες τις κονικές τομές ή για καμπύλες.**
  **Πχ η ευθεία ψ=2 και η παραβολή $\psi^2=4\chi$ έχουν ένα κοινό σημείο ,χωρίς όμως η ευθεία να είναι εφαπτόμενη !!**

## Δ ΥΠΕΡΒΟΛΗ

### 1Α. Ορισμοί :

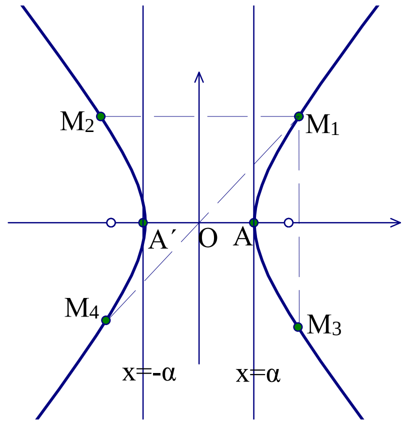



E΄E=2γ , |ME΄- ME|=2α

**Η εξίσωση της υπερβολής**
**με εστίες Ε΄(-γ,0) και Ε(γ,0)**
**και σταθερή διαφορά 2α είναι**

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1 \quad ή \quad \boxed{\beta^2x^2-\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2} \quad \boxed{\beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}}$$

**Ιδιότητες** της υπερβολής **C :** $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$




↦ Τέμνει τον χ΄χ στα σημεία **Α΄(-α,0)** και **Α(α,0)**. Είναι **(Α΄Α)=2α**

↦ **Δεν τέμνει τον y΄y**

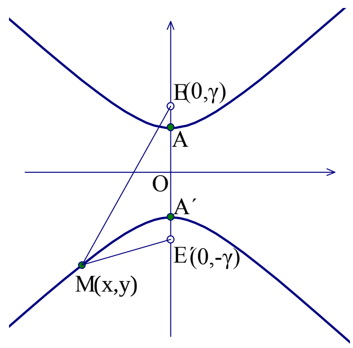
↦ Για κάθε σημείο Μ(x,y) της υπερβολής C ισχύει

$(x\leq -\alpha \ \ \text{και} \ \ y\in \mathbb{R})$ ή $(x\geq \alpha \ \ \text{και} \ \ y\in \mathbb{R})$

↦ Η υπερβολή βρίσκεται έξω από την «ταινία» που ορίζουν οι ευθείες **x=-α , x=α**

↦ Αν **α=β** η C γράφεται $x^2-y^2=\alpha^2$ **( Ισοσκελής υπερβολή)**

### 1Β. Ορισμοί :

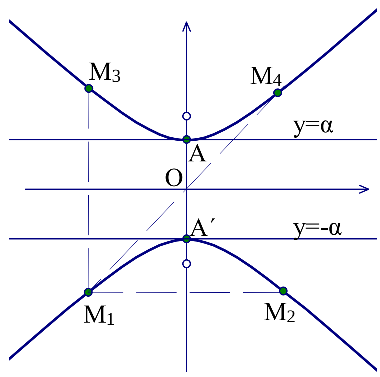



E΄E=2γ , |ME΄- ME|=2α

**Η εξίσωση της υπερβολής**
**με εστίες Ε΄(-γ,0) και Ε(γ,0)**
**και σταθερή διαφορά 2α είναι**

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1 \quad ή \quad \boxed{\beta^2x^2-\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2} \quad \boxed{\beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}}$$

**Ιδιότητες** της υπερβολής **C :** $\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$ **,**




↦ Τέμνει τον y΄y στα σημεία **Α΄(0,-α)** και **Α(0,α)**. Είναι **(Α΄Α)=2α**

↦ **Δεν τέμνει τον χ΄χ**

↦ Για κάθε σημείο Μ(x,y) της υπερβολής C ισχύει

$(y\leq -\alpha \ \ \text{και} \ \ x\in \mathbb{R})$ ή $(y\geq \alpha \ \ \text{και} \ \ x\in \mathbb{R})$

↦ Η υπερβολή βρίσκεται έξω από την «ταινία» που ορίζουν οι ευθείες **y=-α , y=α**

↦ Αν **α=β** η C γράφεται $y^2-x^2=\alpha^2$ **( Ισοσκελής υπερβολή**

**Κοινές ιδιότητες**

↦ Οι εστίες Ε΄, Ε της υπερβολής είναι <u>πάντα</u> στην ευθεία Α΄Α

↦ Η υπερβολή έχει **άξονες συμμετρίας** τους **χ΄χ** και **y΄y** και **κέντρο συμμετρίας** την αρχή **Ο(0,0)** των αξόνων

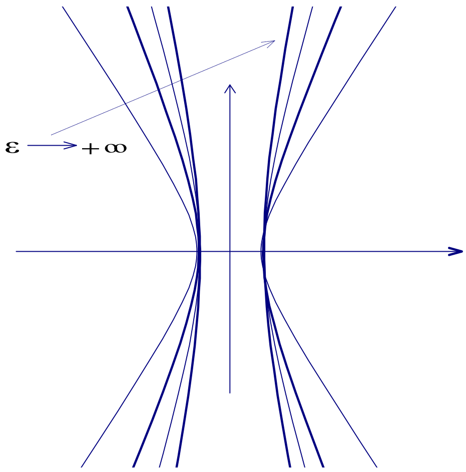
↦ Το **Ο** λέγεται **κέντρο της υπερβολής** και τα **Α΄ , Α** λέγονται **κορυφές της υπερβολής**

↦ Η υπερβολή αποτελείται από **δύο χωριστούς κλάδους**

## 2.Εκκεντρότητα υπερβολής

- **Εκκεντρότητα ε** της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$

λέγεται ο λόγος: $\boxed{\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}}$



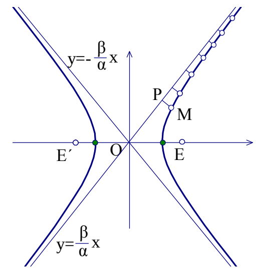

- Είναι **ε > 1** ( αφού **γ > α** )

  δηλαδή: η εκκεντρότητα της υπερβολής είναι μεγαλύτερη της μονάδος

- Είναι $\frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{\varepsilon^2-1}$ δηλαδή:

ο λόγος των διαστάσεων του ορθογωνίου βάσης της υπερβολής είναι συνάρτηση της εκκεντρότητας

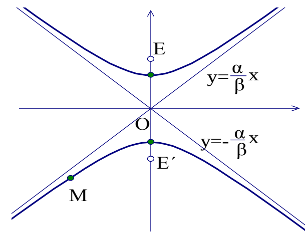
## 3. Ασύμπτωτες υπερβολής




- Η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$

έχει **ασύμπτωτες** τις ευθείες:

$$\boxed{y=\frac{\beta}{\alpha}x \quad \text{και} \quad y=-\frac{\beta}{\alpha}x}$$



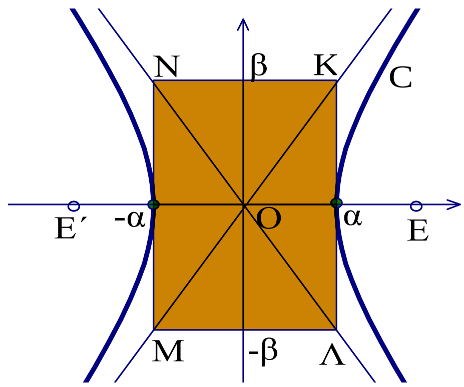

- Η υπερβολή $\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$

έχει **ασύμπτωτες** τις ευθείες:

$$\boxed{y=\frac{\alpha}{\beta}x \quad \text{και} \quad y=-\frac{\alpha}{\beta}x}$$

## 4. Το ορθογώνιο βάσης της υπερβολής

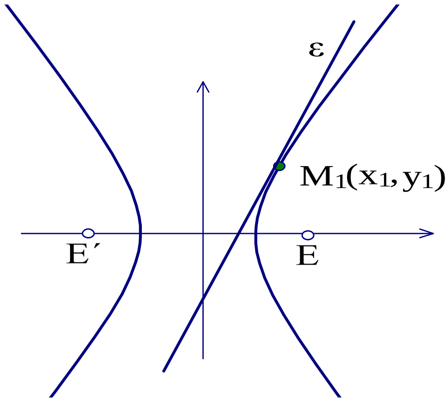
$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$$




Οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι διαγώνιοι του ορθογωνίου ΚΛΜΝ με κορυφές τα σημεία Κ(α,β) , Λ(α,-β) , Μ(-α,-β) , Ν(-α,β)

Το ορθογώνιο ΚΛΜΝ μπορεί να θεωρηθεί ως <u>βάση</u> για την σχεδίαση μιας υπερβολής

## 5. Εφαπτόμενη Υπερβολής:




**Η εφαπτομένη ε στο σημείο $M_1(x_1,y_1)$ της υπερβολής:**

- $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ **έχει εξίσωση** $\boxed{\frac{xx_1}{\alpha^2}-\frac{yy_1}{\beta^2}=1}$

$\mapsto$ $\beta^2x^2-\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$ ›› $\beta^2xx_1-\alpha^2yy_1=\alpha^2\beta^2$

- $\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$ **έχει εξίσωση** $\boxed{\frac{yy_1}{\alpha^2}-\frac{xx_1}{\beta^2}=1}$

$\mapsto$ $\beta^2y^2 - \alpha^2x^2=\alpha^2\beta^2$ ›› $\beta^2yy_1 - \alpha^2xx_1 =\alpha^2\beta^2$

### Εξίσωση - Εφαπτομένη Υπερβολής

**Α. Εξίσωση Υπερβολής**

**Για να γράψουμε την εξίσωση μιας υπερβολής πρέπει να γνωρίζουμε ή να βρούμε:**

- **τις παραμέτρους α και β , ($\beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}$ )**
- **τον άξονα (χ΄χ ή y΄y) που βρίσκονται οι εστίες**

**Η θέση του $\alpha^2$ στην υπερβολή εξαρτάται από τον άξονα (χ΄χ ή y΄y) που βρίσκονται οι εστίες (ή οι κορυφές της)**

**Β. Για να γράψουμε την εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής C**

**Για να γράψουμε την εξίσωση της εφαπτομένης της C:**

- **Αν γνωρίζουμε το σημείο επαφής $A(x_1,y_1)$ , η εξίσωση προκύπτει άμεσα από τους τύπους**
- **Αν δεν γνωρίζουμε το σημείο επαφής τότε το ονομάζου- με έστω $A(x_1,y_1)$, γράφουμε την εφαπτομένη στο Α οπότε:**

**i) Οι συντεταγμένες του Α επαληθεύουν την εξίσωση της υπερβολής**

**ii) Η εφαπτομένη ικανοποιεί την συνθήκη του ζητήματος**

**Γ. Ευθεία εφαπτομένη σε υπερβολής**

- **Για να εφάπτεται η ευθεία ε στην υπερβολή C απαιτούμε η η εφαπτόμενη της υπερβολής σε ένα τυχαίο σημείο της ,να ταυτίζεται με την δοσμένη ευθεία.**
- **Αλλιώς για να εφάπτεται η ευθεία ε στην υπερβολή C πρέπει το σύστημα των εξισώσεών τους να έχει μία διπλή λύση**
  **Προσοχή όμως !!!**
  **Στη δεύτερη πρέπει να επαληθεύσουμε το αποτέλεσμα ,δηλαδή :**
  - **Βρίσκουμε τα σημεία ,από τη διπλή λύση του συστήματος**
  - **Βρίσκουμε τις εφαπτόμενες στα σημεία αυτά…**
  - **Επαληθεύουμε ότι μια από αυτές είναι η δοσμένη ευθεία…..**

# ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

**1** **Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $x^2+y^2=\rho^2$. Ποιος κύκλος ονομάζεται μοναδιαίος;**

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

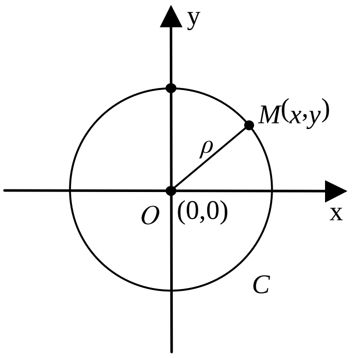
Έστω $Oxy$ ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $C$ ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho$. Το σημείο $M(x,y)$ ανήκει στον κύκλο $C$, αν και μόνο αν απέχει από το κέντρο του $O$ απόσταση ίση με $\rho$, δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει:

$$(OM)=\rho \qquad (1)$$

Όμως, $(OM)=\sqrt{x^2+y^2}$. Επομένως, η (1) γράφεται

$$\sqrt{x^2+y^2}=\rho \iff x^2+y^2=\rho^2. \qquad (2)$$

Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι οι συντεταγμένες των σημείων του κύκλου και μόνο αυτές επαληθεύουν την εξίσωση (2). Άρα, ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho$ έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = \rho^2$.




**2** **Έστω ε η εφαπτομένη του κύκλου $x^2+y^2=\rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1,y_1)$, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου σε αυτό το σημείο έχει εξίσωση $xx_1+yy_1=\rho^2$.**

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Έστω $\varepsilon$ η εφαπτομένη του κύκλου $C: x^2+y^2=\rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1,y_1)$. Έστω ένα δεύτερο σημείο $M(x,y)$

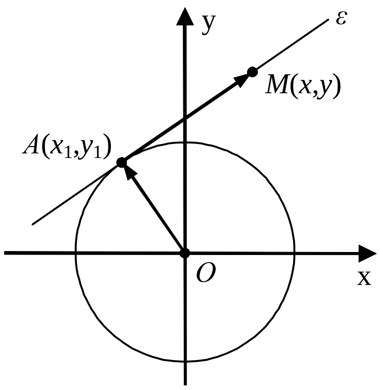
Είναι $\vec{OA}=(x_1,y_1)$ και $\vec{AM}=(x-x_1,y-y_1)$

Ισχύουν οι ισοδυναμίες

$M(x,y)\in\varepsilon \iff OA\perp AM \iff \vec{OA}\cdot\vec{AM}=0 \iff$

$\iff x_1(x-x_1)+y_1(y-y_1)=0 \iff$

$\iff xx_1+yy_1=\rho^2$, αφού $x_1^2+y_1^2=\rho^2$.




Επομένως, η εφαπτομένη του κύκλου $x^2+y^2=\rho^2$ στο σημείο του $A(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1+yy_1=\rho^2$

**3** **1. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο $K(x_o, y_o)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση: $(x-x_o)^2+(y-y_o)^2=\rho^2$**

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

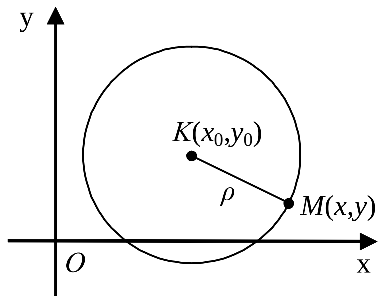
Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $C$ ο κύκλος με κέντρο $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα $\rho$. Ένα σημείο $M(x,y)$ ανήκει στον κύκλο $C$, αν και μόνο αν ισχύει :

$$(KM)=\rho \qquad (1)$$

Όμως, $(KM)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ .

Επομένως, η σχέση (1) γράφεται:

$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\rho \Leftrightarrow \quad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$




| 4 | **Να αποδείξετε ότι κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$** |
|---|---|

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Θεωρούμε τον κύκλο με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ, ο κύκλος αυτός έχει εξίσωση

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$$

Κάνοντας πράξη στην παραπάνω εξίσωση του κύκλου έχουμε :

$x^2-2xx_o+x_o^2+y^2-2yy_o+y_o^2=\rho^2 \Leftrightarrow$

$x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+(x_0^2+y_0^2-\rho^2)=0$

δηλαδή παίρνει τη μορφή $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$

όπου $A=-2x_0$, $B=-2y_0$ και $\Gamma=x_0^2+y_0^2-\rho^2$.

| 5 | **Να αποδείξετε ότι κάθε εξίσωση της μορφής: $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ με $A^2+B^2-4\Gamma>0$ παριστάνει κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα του.** |
|---|---|

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Κάθε εξίσωση της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ **(1)** γράφεται διαδοχικά:

$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0 \Leftrightarrow$

$(x^2+Ax)+(y^2+By)=-\Gamma \Leftrightarrow$

$$\left(x^2+2\frac{A}{2}x+\frac{A^2}{4}\right)+\left(y^2+2\frac{B}{2}y+\frac{B^2}{4}\right)=-\Gamma+\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}\Leftrightarrow$$

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4\Gamma}{4}.$$

Επομένως:

- Αν $A^2+B^2-4\Gamma>0$, η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$.
- Αν $A^2+B^2-4\Gamma=0$, η εξίσωση (1) παριστάνει ένα μόνο σημείο, το $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$.
- Αν $A^2+B^2-4\Gamma<0$, η εξίσωση (1) είναι αδύνατη, δηλαδή δεν υπάρχουν σημεία $M(x,y)$ των οποίων οι συντεταγμένες να την επαληθεύουν.

| 6 | **Τι ονομάζεται εκκεντρότητα της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$. Να αποδείξετε ότι για την εκκεντρότητα ε της έλλειψης ισχύει η σχέση: $\frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{1-\varepsilon^2}$** |
|---|---|

## ΑΠΟΔΕΙΞΗ

**Εκκεντρότητα ε** της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ ονομάζουμε, το λόγο $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}<1$

Επειδή $\gamma=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$ έχουμε:

$\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\alpha}\Leftrightarrow\varepsilon^2=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2}=1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \Leftrightarrow \varepsilon^2=1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$ και άρα $\frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{1-\varepsilon^2}$ .

| 7 | **Τι ονομάζεται εκκεντρότητα υπερβολής;. Να αποδείξετε ότι για την εκκεντρότητα ε μιας υπερβολής ισχύει η σχέση $\frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{\varepsilon^2-1}$** |
|---|---|

## ΑΠΟΔΕΙΞΗ

**Εκκεντρότητα** *ε* της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, ονομάζεται ο λόγος $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}>1$.

Επειδή $\gamma=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ , για την εκκεντρότητα ε έχουμε:

$\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha}\Rightarrow\varepsilon^2=1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$ άρα $\frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{\varepsilon^2-1}$ .

| 8 | **Πότε μια υπερβολή ονομάζεται ισοσκελής; Να αποδείξετε ότι στην ισοσκελή υπερβολή η εκκεντρότητά της είναι ε = $\sqrt{2}$** |
|---|---|

## ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω η υπερβολή *C* με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$,

Ισοσκελής ονομάζεται η υπερβολή για την οποία ισχύει α = β και αυτή έχει εξίσωση

$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1\Rightarrow\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\alpha^2}=1\Rightarrow x^2-y^2=a^2$

Στην ισοσκελή υπερβολή η εκκεντρότητα είναι ίση με

$\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\sqrt{\alpha^2+\alpha^2}}{\alpha}=\frac{\sqrt{2\alpha^2}}{\alpha}=\frac{\alpha\sqrt{2}}{\alpha}=\sqrt{2}$

# ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

## Κύκλος

1. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho$ έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = \rho^2$
2. Να αποδείξετε ότι η εφαπτόμενη του κύκλου $C$ : $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση : $xx_1+yy_1=\rho^2$
3. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα $\rho$ έχει εξίσωση
$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \rho^2$$
4. Να αποδείξετε ότι κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής
$$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0 \text{ με } A^2+B^2-4\Gamma>0 \text{ (Ι)}$$
και αντιστρόφως κάθε εξίσωση της μορφής (Ι) παριστάνει κύκλο κέντρου
$K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ και ακτινας $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$.

## Παραβολή

5. Τι ονομάζεται παραβολή με εστία το σημείο Ε και διευθετούσα την ευθεία δ που δεν διέρχεται από το Ε ;
6. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της παραβολής με εστια $E(\frac{p}{2},0)$ και διευθετούσα $(\delta)$ : $x=-\frac{p}{2}$ έχει εξίσωση $y^2=2px$
7. Να αποδείξετε ότι ο άξονας $x'x$ είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής $y^2=2px$
8. Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2=2px$ στο σημείο της $A(x_1,y_1)$ .
9. Ποια ιδιότητα της παραβολής ονομάζεται ανακλαστική ιδιότητα ;

## Έλλειψη

10. Τι ονομάζεται έλλειψη με εστίες τα σημεία $E'$ και $E$ ;
11 . Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της έλλειψης με εστίες Ε(γ,0) και Ε΄(-γ,0) και μήκος μεγάλου άξονα 2α είναι : $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ , $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$
12 . Να αποδείξετε ότι οι άξονες xx΄ , yy΄ είναι άξονες συμμετρίας και η αρχή Ο των αξόνων κέντρο συμμετρίας της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ , $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$
13 .Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ , $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$ στο σημείο της $M(x_1,y_1)$ .
14 .Τι ονομάζουμε εκκεντρότητα (ε) έλλειψης ;Δείξτε ότι
   - $0<\varepsilon<1$
   - $\frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{1-\varepsilon^2}$
15. Πότε δύο ελλείψεις λέμε ότι είναι όμοιες ;
16 . Ποια ιδιότητα της έλλειψης ονομάζεται ανακλαστική ιδιότητα ;

17. Τι ονομάζουμε διάμετρο έλλειψης και ποια η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της ;
18. Θεωρούμε την έλλειψη : $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ , $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$ .Δείξτε ότι $-\alpha\le x\le\alpha$ , $-\beta\le y\le\beta$

## Υπερβολή

19 . Τι ονομάζεται υπερβολή με εστίες τα σημεία $E'$ και $E$ ;

20 . Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της υπερβολής με εστίες Ε(γ,0) και Ε΄(-γ,0) και απόλυτη διαφορά 2α είναι $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ , $\beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}$

21 . Να αποδείξετε ότι οι άξονες xx΄ , yy΄ είναι άξονες συμμετρίας και η αρχή Ο των αξόνων κέντρο συμμετρίας της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ , $\beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}$

22. Θεωρούμε την υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ , $\beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}$ . Δείξτε ότι $|x|\geq\alpha$

23 .Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ , $\beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}$ στο σημείο της $M(x_1,y_1)$ .

24. Τι λέγεται ορθογώνιο βάσης υπερβολής;

25. Τι ονομάζουμε εκκεντρότητα (ε) υπερβολής ; Δείξτε ότι :

$1<\varepsilon$ και $\frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{\varepsilon^2-1}$

26 . Να γράψετε τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ , $\beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}$ .

27.Ποια υπερβολή ονομάζεται ισοσκελής ;
Τι γνωρίζετε για την εκκεντρότητα μιας ισοσκελούς υπερβολής ;

28. Ποια ιδιότητα της υπερβολής ονομάζεται ανακλαστική ιδιότητα ;

## Ερωτήσεις αξιολόγησης

29. Οι κύκλοι $x^2 + y^2 + 2x + 3y - 1 = 0$ και $x^2 + y^2 + 2x + 3y + \sqrt{2} = 0$ είναι ομόκεντροι. **Σ** **Λ**

30.Τα σημεία (- 2, 2) και (4, 2) του κύκλου $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$ είναι αντιδιαμετρικά. **Σ** **Λ**

31. Ένας κύκλος έχει το κέντρο του στην ευθεία y = x. Έχει πάντα εξίσωση $(x - \alpha)^2 + (y - \alpha)^2 = \alpha^2$. **Σ** **Λ**

32.Ένα σημείο $(x_1, y_1)$ είναι εσωτερικό ενός κύκλου με κέντρο Κ $(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ. Ισχύει: $(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 < \rho^2$. **Σ** **Λ**

33. Ο κύκλος $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ και η παραβολή $y^2 = - 2x$ εφάπτονται. **Σ** **Λ**

34. Η εξίσωση $\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{5}y^2 = \frac{3}{2}$ παριστάνει έλλειψη. **Σ** **Λ**

35. Η εξίσωση μιας υπερβολής είναι $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Ισχύει πάντα α > β. **Σ** **Λ**

36. Η υπερβολή C: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ τέμνει τον άξονα y΄y σε δύο σημεία. **Σ** **Λ**

# 2 ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ……… ΓΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ 1^ο Β

**Αν** $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=3$, $|\vec{\gamma}|=1$ **και**
$2\vec{\alpha}-\vec{\beta}+3\vec{\gamma}=\vec{0}$ **(1), να υπολογίσετε το** $A=2\vec{\alpha}\vec{\beta}+4\vec{\beta}\vec{\gamma}-\vec{\alpha}\vec{\gamma}$.

**ΛΥΣΗ**

(1) $\Leftrightarrow \vec{\alpha}=\frac{1}{2}\vec{\beta}-\frac{3}{2}\vec{\gamma}$ οπότε: $\vec{\alpha}^2=\frac{1}{4}\vec{\beta}^2+\frac{9}{4}\vec{\gamma}^2-\frac{3}{2}\vec{\beta}\vec{\gamma}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4\vec{\alpha}^2=\vec{\beta}^2+9\vec{\gamma}^2-6\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}\Rightarrow \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=\frac{1}{6}\vec{\beta}^2+\frac{9}{6}\vec{\gamma}^2-\frac{4}{6}\vec{\alpha}^2\Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{\beta}\vec{\gamma}=\frac{1}{6}\cdot 9+\frac{9}{6}\cdot 1-\frac{4}{6}\cdot 4=\frac{9}{6}+\frac{9}{6}-\frac{16}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \qquad (2)$$

(1) $\Leftrightarrow \vec{\beta}=2\vec{\alpha}+3\vec{\gamma}$ οπότε: $\vec{\beta}^2=4\vec{\alpha}^2+9\vec{\gamma}^2+12\vec{\alpha}\vec{\gamma}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{\gamma}=\frac{1}{12}\vec{\beta}^2-\frac{4}{12}\vec{\alpha}^2-\frac{9}{12}\vec{\gamma}^2=\frac{1}{12}\cdot 9-\frac{4}{12}\cdot 4-\frac{9}{12}\cdot 1=-\frac{16}{12}=-\frac{4}{3} \qquad (3)$$

(1) $\Leftrightarrow \vec{\gamma}=\frac{1}{3}\vec{\beta}-\frac{2}{3}\vec{\alpha}$ οπότε: $\vec{\gamma}^2=\frac{1}{9}\vec{\beta}^2+\frac{4}{9}\vec{\alpha}^2-\frac{4}{9}\vec{\alpha}\vec{\beta}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta}=\frac{1}{4}\vec{\beta}^2+\vec{\alpha}^2-\frac{9}{4}\vec{\gamma}^2=\frac{1}{4}\cdot 9+4-\frac{9}{4}=4 \qquad (4)$$

Και από τις (2), (3), (4) έχουμε:

$$A=2\cdot 4+4\cdot\frac{1}{3}+\frac{4}{3}=8+\frac{8}{3}=\frac{32}{3}$$

## ΘΕΜΑ 2^ο Γ

**Αν** $\vec{\alpha}\neq\vec{0}=\vec{\beta}$ **και** $\vec{\alpha}\neq\vec{\beta}$**, να δείξετε ότι για κάθε** $\lambda,\mu\in\Re$ **ισχύει**

$$\lambda^2\vec{\alpha}^2+2\lambda\mu\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)+\mu^2\vec{\beta}^2\geq 0$$

**Πότε η σχέση ισχύει ως ισότητα;**

**ΛΥΣΗ**

Αν το πρώτο μέλος της σχέσης θεωρηθεί ως τριώνυμο με μεταβλητή λ ή μ (δεν διαφέρει η σκέψη), τότε

$$\vec{\alpha}^2\lambda^2+2\mu\left(\vec{\alpha}\vec{\beta}\right)\lambda+\mu^2\vec{\beta}^2\geq 0$$

.

Είναι: $$\Delta=\left(2\mu\left(\vec{\alpha}\vec{\beta}\right)\right)^2-4\cdot\vec{\alpha}^2\mu^2\vec{\beta}^2=4\mu^2\left(\left(\vec{\alpha}\vec{\beta}\right)^2-\vec{\alpha}^2\vec{\beta}^2\right)=$$

$$= 4\mu^2\left[\left(\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|\cdot \sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)\right)^2 - \left|\vec{\alpha}\right|^2\cdot\left|\vec{\beta}\right|^2\right] = 4\mu^2\cdot\left|\vec{\alpha}\right|^2\cdot\left|\vec{\beta}\right|^2\cdot\left[\sigma\upsilon\nu^2\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right) - 1\right] < 0$$

διότι $\vec{\alpha} \neq \vec{\beta}$, οπότε $\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right) \neq \pm 1$.

Τότε το τριώνυμο έχει για κάθε $\lambda \in \Re$ το πρόσημο του $\lambda^2$, είναι επομένως θετικό. Η σχέση ισχύει ως ισότητα μόνο για $\lambda = \mu = 0$.

## ΘΕΜΑ $3^{0}$ Β

**Για τυχαία διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ να δείξετε ότι:**

**i)** $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2 + \left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2 = 2\left|\vec{\alpha}\right|^2 + 2\left|\vec{\beta}\right|^2$,

**ii)** $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2 - \left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2 = 4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

## ΛΥΣΗ

i)

$$\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2 + \left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2 = \left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2 + \left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)^2 = \vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2-2\vec{\alpha}\vec{\beta} =$$

$$= 2\vec{\alpha}^2 + 2\vec{\beta}^2 = 2\left|\vec{\alpha}\right|^2 + 2\left|\vec{\beta}\right|^2$$

ii) $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2 - \left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2 = \left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2 - \left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)^2 = \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} - \vec{\alpha}^2 - \vec{\beta}^2 = 2\vec{\alpha}\vec{\beta} = 4\vec{\alpha}\vec{\beta}$

## ΘΕΜΑ $4^{0}$ Β

**Δίνονται τα σημεία Α(1, –3), Β(4, 0). Να καθορισθούν συντεταγμένες σημείου Γ ώστε αυτό να ανήκει στην ευθεία ΑΒ.**

## ΛΥΣΗ

Έστω Γ(x, y) το ζητούμενο σημείο.

Γ ανήκει στην ευθεία ΑΒ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{A\Gamma} \,//\, \overrightarrow{AB}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix} x_{\overrightarrow{A\Gamma}} & y_{\overrightarrow{A\Gamma}} \\ x_{\overrightarrow{AB}} & y_{\overrightarrow{AB}} \end{vmatrix} = 0$ **(1)**

Αλλά $x_{\overrightarrow{A\Gamma}} = x_\Gamma - x_A = x - 1$, $\quad y_{\overrightarrow{A\Gamma}} = y_\Gamma - y_A = y - (-3) = y + 3$

$x_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A = 4 - 1 = 3$, $\quad y_{\overrightarrow{AB}} = y_B - y_A = 0 - (-3) = 3$

Η (1) $\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix} x-1 & y+3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$ $\Leftrightarrow$ $3(x-1) - 3(y+3) = 0$

$(x-1) - (y+3) = 0 \Leftrightarrow x - 1 - y - 3 = 0 \Leftrightarrow x = y + 4$ **(2)**

Για να έχουμε ένα συγκεκριμένο σημείο Γ, στη (2) θέτουμε μια τιμή στο y, ας είναι y = 1, οπότε x = 5.
Άρα το σημείο Γ(5, 1) είναι ζητούμενο.

## ΘΕΜΑ $5^0$ Α-Β

**Σημειώστε Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) σε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις.**

**i.** **Τα διανύσματα (3, –1), (–3, 1) είναι αντίθετα**

**ii** **Ισχύει** $\det(\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) = 0$

**iii** **Ισχύει** $\det(\vec{i}, \vec{j}) = 1$

**iv** **Αν η τεταγμένη του μη μηδενικού διανύσματος** $\vec{\alpha}$ **είναι ίση με το μισό του μέτρου του, τότε η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα** $x'x$ **είναι** $\frac{\pi}{6}$

**v** **Αν ο συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος** $\vec{\alpha}$ **είναι** $\frac{3}{4}$ **τότε** $\vec{\alpha} = (4, 3)$

## ΛΥΣΗ

i → Σ $\quad (3, -1) = -(-3, 1)$

ii → Σ $\quad \vec{\alpha} \parallel \vec{\alpha}$

iii → Σ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$

iv → Λ $\quad$ Έστω $\vec{\alpha} = (x, y)$

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow |\vec{\alpha}|^2 = x^2 + y^2$$

$$|\vec{\alpha}|^2 = x^2 + \left(\frac{|\vec{\alpha}|}{2}\right)^2$$

$$|\vec{\alpha}|^2 = x^2 + \frac{|\vec{\alpha}|^2}{4}$$

$$x^2 = \frac{3}{4}|\vec{\alpha}|^2$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{\alpha}| \quad \text{ή} \quad x = -\frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{\alpha}|$$

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{y}{x} = \ldots\ldots = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{δύο τιμές}$$

v → Λ $\quad$ Μπορεί να είναι $\vec{\alpha} = (4\kappa, 3\kappa)$ με $\kappa \in \mathbb{R}$

## ΘΕΜΑ $6^0$ Δ

**Αν** $\vec{\alpha} = (-1, 3)$, $\vec{\beta} = (0, 4)$ **και** $\vec{\gamma} = (3, 1)$, **να εκφράσετε το** $\vec{\alpha}$ **σαν γραμμικό συνδυασμό των** $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$.

## ΛΥΣΗ

Έστω $\vec{\alpha} = \kappa\vec{\beta} + \lambda\vec{\gamma}$ **(1)**

$\vec{\alpha} = \kappa\vec{\beta} + \lambda\vec{\gamma} \Leftrightarrow (-1, 3) = \kappa(0, 4) + \lambda(3, 1) \Leftrightarrow (-1, 3) = (0, 4\kappa) + (3\lambda, \lambda)$

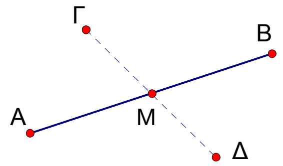
$(-1, 3) = (0 + 3\lambda, 4\kappa + \lambda) \Leftrightarrow -1 = 3\lambda$ και $3 = 4\kappa + \lambda \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{3}$ και $3 = 4\kappa - \frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$\lambda = -\frac{1}{3}$ και $\frac{5}{6} = \kappa$ οπότε η (1) γίνεται $\vec{\alpha} = \frac{5}{6}\vec{\beta} - \frac{1}{3}\vec{\gamma}$

## ΘΕΜΑ $7^0$ **B**

**Δίνονται τα σημεία Α(1, 4), Β(-1, 6), Γ(7, 0). Να βρείτε τις συντεταγμένες του συμμετρικού του σημείου Γ, ως προς κέντρο συμμετρίας το μέσο του τμήματος ΑΒ.**

### ΛΥΣΗ




Έστω Μ το μέσο του τμήματος ΑΒ.

Τότε $x_M = \frac{1-1}{2} = 0$ και $y_M = \frac{4+6}{2} = 5$.

Έστω Δ το συμμετρικό του Γ ως προς κέντρο συμμετρίας το Μ.

Το Μ θα είναι μέσο του τμήματος ΓΔ, οπότε

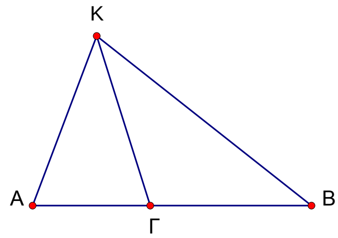
$$x_M = \frac{x_\Gamma + x_\Delta}{2} \quad \text{και} \quad y_M = \frac{y_\Gamma + y_\Delta}{2} = 5 \Rightarrow$$

$$0 = \frac{7 + x_\Delta}{2} \quad \text{και} \quad 5 = \frac{0 + y_\Delta}{2} \Rightarrow \quad x_\Delta = -7 \quad \text{και} \quad y_\Delta = 10$$

## ΘΕΜΑ $8^0$ **B**

**Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{KA} = (2, 5)$, $\overrightarrow{KB} = (-1, 3)$ και για το σημείο Γ δίνεται ότι $\overrightarrow{A\Gamma} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\Gamma B}$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{K\Gamma}$.**

### ΛΥΣΗ




$\overrightarrow{A\Gamma} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\Gamma B} \Rightarrow \overrightarrow{A\Gamma} // \overrightarrow{\Gamma B}$

$\Rightarrow$ τα Α, Γ, Β είναι συνευθειακά

και $\overrightarrow{A\Gamma} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{A\Gamma} = \frac{2}{5}(\overrightarrow{KB} - \overrightarrow{KA}) = \frac{2}{5}[(-1, 3) - (2, 5)]$$

$$= \frac{2}{5}(-1-2,\ 3-5) = \frac{2}{5}(-3,\ -2) = \left(-\frac{6}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$$

$$\overrightarrow{K\Gamma} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{A\Gamma} = (2, 5) + \left(-\frac{6}{5},\ -\frac{4}{5}\right) = \left(2-\frac{6}{5},\ 5-\frac{4}{5}\right) = \left(\frac{4}{5},\ \frac{21}{5}\right)$$

## ΘΕΜΑ $9^0$ **Γ**

**Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,\ 2)$, $\vec{\beta} = (0,\ -1)$ και $\vec{\gamma} = (-2,\ 0)$.**
**Να υπολογίσετε τα**

**i)** $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}$, $(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})\,\vec{\alpha}$, $(3\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})2\vec{\alpha}$

**ii)** $|\vec{\alpha}||\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}|$, $|(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})\vec{\beta}|$, $|\vec{\gamma}|\cdot(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$, $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|\cdot\vec{\gamma}$

### ΛΥΣΗ

i)

- $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = (1,\ 2)\cdot(0,\ -1) = 1\cdot 0 + 2\cdot(-1) = -2$

  **Οπότε** $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\vec{\gamma} = -2(-2,\ 0) = (4,\ 0)$

- $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} = (0,\ -1)\cdot(-2,\ 0) = 0\cdot(-2) + (-1)\cdot 0 = 0$

  **Οπότε** $(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})\,\vec{\alpha} = 0.(1,\ 2) = (0,\ 0) = \vec{0}$

- $(3\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})2\vec{\alpha} = 3.2\,[\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})] = 6\cdot\vec{0} = \vec{0}$

ii)

- $|\vec{\alpha}| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$ **και** $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} = 0 \Rightarrow |\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}| = 0$

  **Άρα** $|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}| = \sqrt{5}\cdot 0 = 0$

- $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma} = \mathbf{(1,2)\cdot(-2,0) = 1.(-2) + 2.0 = -2}$

  $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})\vec{\beta} = \mathbf{-2}\vec{\beta} = \mathbf{-2(0,\ -1) = (0,\ 2)}$

  **Άρα** $|(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})\vec{\beta}| = \sqrt{0^2+2^2} = 2$

- $|\vec{\gamma}| = \sqrt{(-2)^2+0^2} = 2$ **και αφού** $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -2$**, θα έχουμε**

  $|\vec{\gamma}|\cdot(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) = \mathbf{2.(-2) = -4}$

- $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|\cdot\vec{\gamma} = |-2|\cdot\mathbf{(-2,\ 0) = 2\,(-2,\ 0) = (-4,\ 0)}$

## ΘΕΜΑ $10^0$ Γ

**Αν** $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$ **και** $\vec{\kappa} = 2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$, $\vec{\nu} = \vec{\alpha}-2\vec{\beta}$

**i) Να βρείτε τα** $|\vec{\kappa}|$ και $|\vec{\nu}|$

**ii) Να βρείτε το** $\vec{\kappa}\cdot\vec{\nu}$

**iii) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων** $\vec{\kappa}$ και $\vec{\nu}$

## ΛΥΣΗ

i) $|\vec{\kappa}|^2 = |2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}|^2 = (2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})^2$

$$= 4\vec{\alpha}^2 + 12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 9\vec{\beta}^2$$

$$= 4|\vec{\alpha}|^2 + 12|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} + 9|\vec{\beta}|^2$$

$$= 4 + 12\cdot 1\cdot 2\cdot\frac{1}{2} + 9\cdot 4 = \mathbf{52}$$

**Οπότε :** $|\vec{\kappa}| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

**Ομοίως βρίσκουμε** $|\vec{\nu}| = \sqrt{13}$

ii) $\vec{\kappa}\cdot\vec{\nu} = (2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})(\vec{\alpha}-2\vec{\beta}) = 2\vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} - 6\vec{\beta}^2 = \textbf{πράξεις} = \mathbf{-21}$

iii) $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\kappa},\vec{\nu}}) = \dfrac{\vec{\kappa}\cdot\vec{\nu}}{|\vec{\kappa}|\cdot|\vec{\nu}|} = \dfrac{-21}{2\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}} = -\dfrac{21}{26}$

## ΘΕΜΑ $11^0$ Γ

**Αν** $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = 60^0$, **να βρείτε το** $x \in \mathbb{R}$ **στις παρακάτω περιπτώσεις**

**i)** $(2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha} - x\vec{\beta}) = -2$

**ii)** $((2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - x\vec{\beta})$

## ΛΥΣΗ

i) $(2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha} - x\vec{\beta}) = -2 \quad \Leftrightarrow \quad 2\vec{\alpha}^2 + (3-2x)(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) - 3x\vec{\beta}^2 = -2$

$$2|\vec{\alpha}|^2 + (3-2x)|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) - 3x|\vec{\beta}|^2 = -2$$

$$2.2^2 + (3-2x)2.\,3\sigma\upsilon\nu 60^0 - 3x3^2 = -2$$

$$8 + (3-2x).3 - 27x = -2$$

$$\mathbf{8 + 9 - 6x - 27x = -2}$$

$$\mathbf{33x = 19} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \frac{19}{33}$$

ii) $(2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - x\vec{\beta}) \quad \Leftrightarrow \quad (2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha} - x\vec{\beta}) = \mathbf{0}$

$$2\vec{\alpha}^2 - 2x(\overline{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}) + 3(\overline{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}) - 3x\vec{\beta}^2 = 0$$

$$2.\,2^2 - 2x(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) + 3(\overline{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}) - 3x.\,3^2 = 0$$

$$8 - 2x.3 + 3.3 - 3x.\,9 = 0$$

$$\mathbf{-33x = -17} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \frac{17}{33}$$

## ΘΕΜΑ $12^0$ Γ-Δ

**Αν** $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\gamma}| = \frac{1}{2}$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = (\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}) = \frac{\pi}{4}$ **με** $\vec{\alpha}$, $\vec{\gamma}$ **μη συγγραμμικά , να βρείτε το μέτρο του διανύσματος** $\vec{v} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} + \vec{\gamma}$

## ΛΥΣΗ

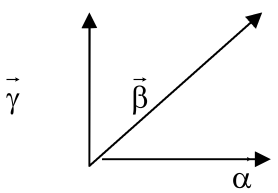
$$|\vec{v}|^2 = |2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} + \vec{\gamma}|^2 = (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} + \vec{\gamma})^2$$

$$= 4\vec{\alpha}^2 + 9\vec{\beta}^2 + \vec{\gamma}^2 - 12(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) + 4(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}) - 6(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}) \quad (1)$$

**Αλλά** $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \mathbf{2.}\ \sqrt{2}\ \mathbf{.}\ \frac{\sqrt{2}}{2} = \mathbf{2}$

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma} = \mathbf{2\ .}\ \frac{1}{2}\ \mathbf{\sigma\upsilon\nu 90^o = 0}$

$\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} = \sqrt{2}\ .\ \frac{1}{2}\ .\ \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$




**(1)** $\Rightarrow \quad |\vec{v}|^2 = 4.\ 2^2 + 9.\ \sqrt{2}^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 12.\ 2 + 4.\ 0 - 6.\ \frac{1}{2}$

$$= \mathbf{16 + 18 +} \frac{1}{4} \mathbf{- 24 - 3} = \frac{29}{4} \quad \Rightarrow \quad |\vec{v}| = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

## ΘΕΜΑ 13$^0$ **Γ-Δ**

**Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \ \vec{\beta}$ έχουν μέτρο ίσο με 1 και τα διανύσματα $\vec{\kappa} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}, \ \ \vec{\nu} = 5\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$ είναι κάθετα, να βρείτε την γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \ \vec{\beta}$**

### ΛΥΣΗ

$$\vec{\kappa} \perp \vec{\nu} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\kappa} \cdot \vec{\nu} = 0$$

$$(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})(5\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}) = 0$$

$$5\vec{\alpha}^2 + 6(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) - 8\vec{\beta}^2 = 0$$

$$5|\vec{\alpha}|^2 + 6|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) - 8|\vec{\beta}|^2 = 0$$

$$5.1 + 6\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) - 8.1 = 0$$

$$6\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 3$$

$$\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 60^o$$

## ΘΕΜΑ 14$^0$ **Δ**

**Δίνονται τα κάθετα και μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, έτσι ώστε $|\vec{\alpha}| = 2|\vec{\beta}|$**

**Να βρείτε, ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}, \ \vec{\beta}$, τα διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{\psi}$ έτσι, ώστε να είναι $\vec{x} \parallel (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$ και $\vec{\psi} \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ και $\vec{x} - \vec{\psi} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$**

### ΛΥΣΗ

$\vec{x} \parallel (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = \lambda(\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\vec{x} = \lambda\vec{\alpha} - 3\lambda\vec{\beta} \ \vec{x} \quad \textbf{(1)}$$

$$\vec{x} - \vec{\psi} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda\vec{\alpha} - 3\lambda\vec{\beta} - \vec{\psi} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$$

$$\vec{\psi} = \lambda\vec{\alpha} - 3\lambda\vec{\beta} - \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}. \quad \textbf{(2)}$$

$$\vec{\psi} \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} (\lambda\vec{\alpha} - 3\lambda\vec{\beta} - \vec{\alpha} + 2\vec{\beta})(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = 0$$

$$\lambda\vec{\alpha}^2 - \lambda(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) - 3\lambda(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) + 3\lambda\vec{\beta}^2 - \vec{\alpha}^2 + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 2(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) - 2\vec{\beta}^2 = 0 \quad \textbf{(3)}$$

Από υπόθεση έχουμε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ και $|\vec{\alpha}| = 2|\vec{\beta}| \Rightarrow \vec{\alpha}^2 = 4\vec{\beta}^2$.

Επομένως η (3) $\Leftrightarrow 4\lambda\vec{\beta}^2 + 3\lambda\vec{\beta}^2 - 4\vec{\beta}^2 - 2\vec{\beta}^2 = 0 \Leftrightarrow 7\lambda\vec{\beta}^2 - 6\vec{\beta}^2 = 0 \Leftrightarrow (7\lambda - 6)\vec{\beta}^2 = 0$ και αφού $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, θα είναι $7\lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{6}{7}$

Οπότε η υπόθεση $\vec{x} = \lambda(\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) \Leftrightarrow \vec{x} = \frac{6}{7}(\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$

και η (2) $\Leftrightarrow \vec{\psi} = \frac{6}{7}\vec{\alpha} - \frac{18}{7}\vec{\beta} - \vec{\alpha} + 2\vec{\beta} = -\frac{1}{7}\vec{\alpha} - \frac{4}{7}\vec{\beta}$

## ΘΕΜΑ $15^0$ Δ

**Αν είναι** $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = \mathbf{1}$ **,** $(\vec{\alpha}\hat{,}\vec{\beta}) = 60^o$ **,** $|\vec{\nu}| = 3$ και $(\vec{\nu}\hat{,}\vec{\alpha}) = 60^0$

**να αναλύσετε το** $\vec{\nu}$ **σε δύο συνιστώσες παράλληλες προς τα** $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

## ΛΥΣΗ

Έστω $\vec{\nu} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$ **(1)** $\Rightarrow$ $\vec{\alpha}.\vec{\nu} = \vec{\alpha}(\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta})$

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\nu} = \lambda\vec{\alpha}^2 + \mu(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$$

$$|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\nu}|\cdot\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha}\hat{,}\vec{\nu}) = \lambda|\vec{\alpha}|^2 + \mu|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha}\hat{,}\vec{\beta})$$

$$1.3.\sigma\upsilon\nu 60^0 = \lambda.1 + \mu.1.1\cdot\sigma\upsilon\nu 60^0$$

$$3.\ \frac{1}{2} = \lambda + \mu.\ \frac{1}{2}$$

$$3 = 2\lambda + \mu \qquad \textbf{(2)}$$

$\vec{\nu} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$ $\Rightarrow$ $\vec{\beta}.\vec{\nu} = \vec{\beta}(\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta})$

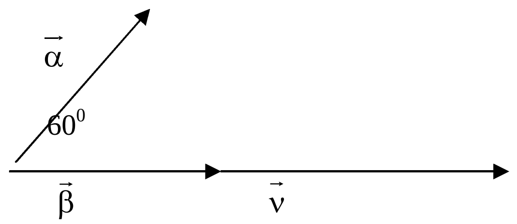
$$\vec{\beta}\cdot\vec{\nu} = \lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) + \mu\vec{\beta}^2$$

$$|\vec{\beta}|\cdot|\vec{\nu}|\cdot\sigma\upsilon\nu(\vec{\beta}\hat{,}\vec{\nu}) = \lambda|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha}\hat{,}\vec{\beta}) + \mu|\vec{\beta}|^2$$

$$1.3.\sigma\upsilon\nu(\vec{\beta}\hat{,}\vec{\nu}) = \lambda.1.\sigma\upsilon\nu 60^0 + \mu.1$$

$$3\sigma\upsilon\nu(\vec{\beta}\hat{,}\vec{\nu}) = \lambda\cdot\frac{1}{2} + \mu \qquad \textbf{(3)}$$

- Όταν η γωνία των $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ είναι $0^0$

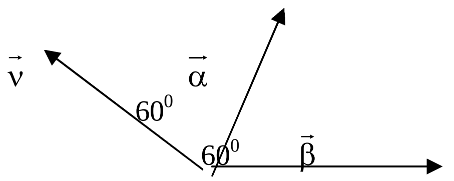



Η (3) γίνεται $3\ \sigma\upsilon\nu 0^0 = \frac{\lambda}{2} + \mu$ $\Rightarrow$ $3 = \frac{\lambda}{2} + \mu$ **(4)** .

Λύνοντας το σύστημα των (2), (4) βρίσκουμε $\lambda = 0$ και $\mu = 3$.

(1) $\Rightarrow$ $\vec{\nu} = 0\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$

- Όταν η γωνία των $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ είναι $120^0$




Η (3) γίνεται $3\ \sigma\upsilon\nu 120^0 = \frac{\lambda}{2} + \mu$ $\Rightarrow$ $3(-\frac{1}{2}) = \frac{\lambda}{2} + \mu$ **(5)**

Λύνοντας το σύστημα των (2), (5) βρίσκουμε $\mu = -3$ και $\lambda = 3$

(1) $\Rightarrow$ $\vec{\nu} = 3\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$

## ΘΕΜΑ 16$^0$ **Δ**

**Έστω** $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{x}$ **μη μηδενικά διανύσματα έτσι ώστε να ισχύουν**

$\vec{\beta}\perp\vec{x}$, $\quad\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=2$, $\quad\vec{\alpha}\cdot\vec{x}+1=0$, $\quad|\vec{\alpha}|=1$, $\quad|\vec{x}|=2$

**i) Να εξετάσετε αν τα** $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ **είναι συγγραμμικά**

**ii) Να βρείτε το** $\vec{x}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

## ΛΥΣΗ

**i)** Αν τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ήταν συγγραμμικά, επειδή $\vec{\beta}\perp\vec{x}$ θα ήταν και $\vec{\alpha}\perp\vec{x}$,
οπότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{x}=0$, άρα η υπόθεση $\vec{\alpha}\cdot\vec{x}+1=0$ θα έδινε $1=0$, που είναι άτοπο.

Επομένως τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά

**ii)** Έστω $\vec{x}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}\ \Rightarrow\ \vec{\alpha}\cdot\vec{x}=\vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta})$

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{x}=\lambda\vec{\alpha}^2+\mu(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$$

$$-1=\lambda+2\mu \qquad \textbf{(1)}$$

$\vec{x}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}\ \Rightarrow\ \vec{x}\cdot\vec{x}=\vec{x}\cdot(\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta})$

$$\vec{x}^2=\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{x})+\mu(\vec{\beta}\cdot\vec{x})$$

$$4=\lambda(-1)+\mu.\,0 \ \Rightarrow\ \lambda=-4 \qquad \textbf{(2)}$$

Η $(1)\ \Rightarrow\ -1=-4+2\mu\ \Rightarrow\ \mu=\dfrac{3}{2}$

Άρα $\vec{x}=-4\vec{\alpha}+\dfrac{3}{2}\vec{\beta}$

## ΘΕΜΑ 17$^0$ **Δ**

**Α. Έστω δύο μη συγγραμμικά διανύσματα** $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ **και λ πραγματικός αριθμός έτσι ώστε να ισχύει** $\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}=\vec{\gamma}$ **και** $|\vec{\gamma}|=1$. **Δείξτε ότι** $|\vec{\alpha}|\,\eta\mu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})\leq 1$.

**Β. Αν** $|\vec{\alpha}|=2$ **και** $|\vec{\beta}|=\sqrt{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-1}$, **δείξτε ότι** $\vec{\alpha}=2\vec{\beta}$.

## ΛΥΣΗ

Α. $\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}=\vec{\gamma}\ \Rightarrow\ (\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta})^2=\vec{\gamma}^2$

$$\vec{\alpha}^2+\lambda^2\vec{\beta}^2+2\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})=\vec{\gamma}^2$$

$$|\vec{\beta}|^2\lambda^2+2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}).\lambda+|\vec{\alpha}|^2-|\vec{\gamma}|^2=0$$

$$|\vec{\beta}|^2\lambda^2+2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}).\lambda+|\vec{\alpha}|^2-1=0 \qquad \textbf{(1)}$$

Η (1) είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς λ, η οποία γνωρίζουμε από την υπόθεση πως έχει λύση, άρα

$\Delta\geq 0\ \Rightarrow\ 4(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2-4|\vec{\beta}|^2\left(|\vec{\alpha}|^2-1\right)\geq 0\ \Rightarrow 4|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2\sigma\upsilon\nu^2(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})-4|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2+4|\vec{\beta}|^2\geq 0\ \Rightarrow$

$|\vec{\alpha}|^2\sigma\upsilon\nu^2(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})-|\vec{\alpha}|^2+1\geq 0\ \Rightarrow$

$1-|\vec{\alpha}|^2\left(1-\sigma\upsilon\nu^2(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})\right)\geq 0\ \Rightarrow 1-|\vec{\alpha}|^2\eta\mu^2(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})\geq 0\ \Rightarrow |\vec{\alpha}|^2\eta\mu^2(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})\leq 1\ \Rightarrow\ |\vec{\alpha}|\,\eta\mu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})\leq 1$

Β. $|\vec{\beta}|=\sqrt{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-1}\ \Rightarrow |\vec{\beta}|^2=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-1\Leftrightarrow |\vec{\beta}|^2=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha}\,\vec{\beta}})-1\Rightarrow |\vec{\beta}|^2-2\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha}\,\vec{\beta}})|\vec{\beta}|+1=0 \quad \textbf{(1)}$

Η εξίσωση (1) είναι δευτέρου βαθμού ως προς $|\vec{\beta}|$, η οποία έχει λύση αφού $|\vec{\beta}| \in \mathbb{R}$ , άρα $\Delta \geq 0 \Rightarrow$

$$4\sigma\upsilon\nu^2(\vec{\alpha}\,\hat{}\,\vec{\beta}) - 4 \geq 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2(\vec{\alpha}\,\hat{}\,\vec{\beta}) - 1 \geq 0 \Rightarrow -\eta\mu^2(\vec{\alpha}\,\hat{}\,\vec{\beta}) \geq 0 \Rightarrow \eta\mu^2(\vec{\alpha}\,\hat{}\,\vec{\beta}) = 0$$

$$\eta\mu(\vec{\alpha}\,\hat{}\,\vec{\beta}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha}\,\hat{}\,\vec{\beta}) = \pm 1$$

- Για $\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha}\,\hat{}\,\vec{\beta}) = 1$, δηλαδή $(\vec{\alpha}\,\hat{}\,\vec{\beta}) = 0^o$ επομένως $\vec{\alpha} \upuparrows \vec{\beta}$

  η (1) γίνεται $|\vec{\beta}|^2 - 2\cdot|\vec{\beta}| + 1 = 0$

  $\left(|\vec{\beta}| - 1\right)^2 = 0$

  $|\vec{\beta}| - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |\vec{\beta}| = 1$

  Αφού $\vec{\alpha} \upuparrows \vec{\beta}$, θα υπάρχει $\lambda > 0$ ώστε $\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta} \quad \Rightarrow$

  $|\vec{\alpha}| = |\lambda|\,|\vec{\beta}|$

  $2 = |\lambda|.\,1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda=2$

  οπότε $\vec{\alpha} = 2\vec{\beta}$

- Για $\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha}\,\hat{}\,\vec{\beta}) = 1$, δηλαδή $(\vec{\alpha}\,\hat{}\,\vec{\beta}) = 180^o$ επομένως $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$,

  Ομοίως συμπεραίνουμε $\vec{\alpha} = 2\vec{\beta}$

## ΘΕΜΑ $18^0$ Γ

**Αν** $\vec{\alpha} = (4,\ 3)$ και $\vec{\beta} = (-1,\ 2)$ **, να βρεθεί η** $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$

### ΛΥΣΗ

Έστω $\vec{x} = \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$

$\vec{x}$, $\vec{\alpha}$ συγγραμμικά $\Rightarrow$ $\vec{x} = \lambda\vec{\alpha}$ **(1)** όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

Αλλά $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{\alpha}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{\alpha}\cdot\vec{x} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{\alpha}(\lambda\vec{\alpha}) \Leftrightarrow 4(-1) + 3.\,2 = \lambda\vec{\alpha}^2$

$$-4 + 6 = \lambda|\vec{\alpha}|^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 25\lambda \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{2}{25}$$

Οπότε, η (1) $\Leftrightarrow$ $\vec{x} = \dfrac{2}{25}(4,\ 3) = \left(\dfrac{8}{25},\ \dfrac{6}{25}\right)$

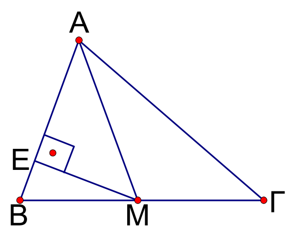
## ΘΕΜΑ $19^0$ Δ

**Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ = 2, ΑΓ = 6,** $B\hat{A}\Gamma = 60^o$ **και ΑΜ διάμεσός του.**
**Να βρείτε**

**i) το** $|\overrightarrow{AM}|$

**ii) το** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}$

**iii) την** $\pi\rho o\beta_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AM}$ **συναρτήσει του** $\overrightarrow{AB}$




### ΛΥΣΗ

Έστω $\overrightarrow{AE} = \pi\rho o\beta_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AM}$

**i)** $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}) \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{AM}| = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}|$

$$|\overrightarrow{AM}|^2 = \frac{1}{4}|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}|^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma})^2 = = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{A\Gamma}^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2 + 2\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right| \sigma\upsilon\nu(\overrightarrow{AB} \widehat{\ } \overrightarrow{A\Gamma})\right) = \frac{1}{4}(4+36+2\cdot2\cdot6\cdot\frac{1}{2}) = 13 \quad \Rightarrow \quad \left|\overrightarrow{AM}\right| = \sqrt{13}$$

**ii)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma})$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma})$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right| \sigma\upsilon\nu(\overrightarrow{AB} \widehat{\ } \overrightarrow{A\Gamma})\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ (4+2\cdot6\cdot\frac{1}{2}) \ = \ 5$$

**iii** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}\cdot \pi\rho o\beta_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AM} \quad \overset{(ii)}{\Rightarrow} \quad 5 = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$ **(1)**

Αλλά $\overrightarrow{AE}$ συγγραμμικό του $\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AB}$ **(2)**

(1) $\Rightarrow \ 5 = \overrightarrow{AB}\cdot(\lambda\overrightarrow{AB}) \ \Rightarrow \ 5 = \lambda\ \overrightarrow{AB}^2 \ \Rightarrow 5 = \lambda\,.\,2^2 \ \Rightarrow \ \lambda = \frac{5}{4}$

(2) $\Rightarrow \ \overrightarrow{AE} = \frac{5}{4}\ \overrightarrow{AB}$

## ΘΕΜΑ 20$^0$ Γ

**Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,\ 2)$ και $\vec{\beta} = (-1,\ 4)$. Να βρείτε τα διανύσματα**

**i)** $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}(\vec{\alpha}-\vec{\beta})$ **ii)** $\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})$

## ΛΥΣΗ

**i)** Έστω $\vec{x} = \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}(\vec{\alpha}-\vec{\beta})$

$\vec{\alpha},\ \vec{x}$ συγγραμμικά $\Rightarrow \ \vec{x} = \lambda\vec{\alpha}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ **(1)**

$\vec{\alpha}(\vec{\alpha}-\vec{\beta}) = \vec{\alpha}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}(\vec{\alpha}-\vec{\beta}) \ \Rightarrow \ \vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha}\,\vec{\beta} = \vec{\alpha}\,\vec{x}$

$$\vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha}\,\vec{\beta} = \vec{\alpha}\ \lambda\vec{\alpha}$$

$$\vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \lambda\vec{\alpha}^2$$

$$1^2+2^2-[1(-1)+2.\ 4] = \lambda(1^2+2^2)$$

$$5-7 = 5\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{2}{5}$$

Η (1) $\Rightarrow \ \vec{x} = -\frac{2}{5}\ \vec{\alpha} = -\frac{2}{5}(1,\ 2) = \left(-\frac{2}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$

**ii)** Έστω $\vec{\psi} = \pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})$

$\vec{\beta},\ \vec{\psi}$ συγγραμμικά $\Rightarrow \ \vec{\psi} = \mu\vec{\beta}$, όπου $\mu \in \mathbb{R}$ **(2)**

$\vec{\beta}\cdot(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}) = \vec{\beta}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}) \ \Rightarrow \ \vec{\beta}\cdot(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}) = \vec{\beta}\ \vec{\psi}$

$$2\vec{\alpha}\ \vec{\beta}+3\vec{\beta}^2 = \vec{\beta}(\mu\vec{\beta})$$

$$2\vec{\alpha}\ \vec{\beta}+3\vec{\beta}^2 = \mu\vec{\beta}^2$$

$$2[1(-1)+2.\ 4]+3(1^2+4^2) = \mu(1^2+4^2)$$

$$14+51 = 17\mu \quad \Leftrightarrow \quad \mu = \frac{65}{17}$$

Η (2) $\Rightarrow \ \vec{\psi} = \frac{65}{17}\ (-1,\ 4) = \left(-\frac{65}{17},\ \frac{260}{17}\right)$

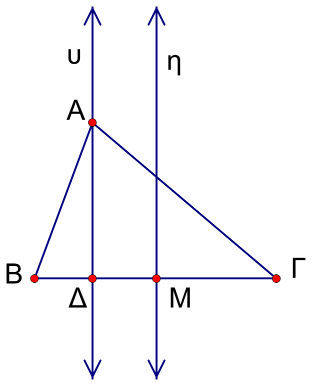
## ΘΕΜΑ $21^{o}$ B

**Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(-1, 0), Β(3, 2) και Γ(-3, 4). Να βρείτε :**

**i) Τις εξισώσεις των υψών του**

**ii) Τις εξισώσεις των μεσοκαθέτων των πλευρών του.**

### ΛΥΣΗ




**i)** $\lambda_{B\Gamma} = \dfrac{y_\Gamma - y_B}{x_\Gamma - x_B} = \dfrac{4-2}{-3-3} = \dfrac{2}{-6} = -\dfrac{1}{3}$

$A\Delta \perp B\Gamma \iff \lambda_{A\Delta} . \lambda_{B\Gamma} = -1 \iff \lambda_{A\Delta} = 3$

$A\Delta : \quad y - y_A = 3\,(x - x_A) \iff$

$y - 0 = 3\,(x + 1) \iff$

$y = 3x + 3$

Ομοίως βρίσκουμε τις εξισώσεις των άλλων δύο υψών.

**ii)**Μ μέσο του ΒΓ $\quad x_M = \dfrac{1}{2}(x_\Gamma + x_B)$ και $y_M = \dfrac{1}{2}(y_\Gamma + y_B) \iff$

$x_M = \dfrac{1}{2}(-3+3)$ και $y_M = \dfrac{1}{2}(4+2) \iff$

$x_M = 0$ και $y_M = 3$

μεσοκάθετος $\eta \parallel A\Delta \iff \lambda_\eta = 3$

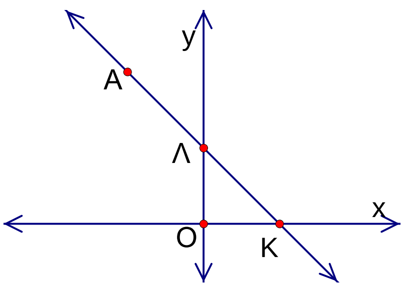
$\eta : \quad y - y_M = 3(x - x_M) \iff y - 3 = 3(x - 0) \iff y = 3x + 3$

Ομοίως βρίσκουμε τις εξισώσεις των άλλων δύο μεσοκαθέτων.

## ΘΕΜΑ $22^{o}$ B

**Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών, που διέρχονται από το σημείο Α(-1, 2) και σχηματίζουν με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.**

### ΛΥΣΗ




Έστω ΑΛΚ ζητούμενη ευθεία.

Αφού διέρχεται από το Α, θα έχει εξίσωση

$y - 2 = \lambda(x + 1) \iff$

$y = \lambda x + \lambda + 2 \qquad$ **(1)**

Περιορισμός :

Για να ορίζεται τρίγωνο ΟΚΛ, θα πρέπει η ευθεία να τέμνει τους άξονες και μάλιστα σε διαφορετικά σημεία Κ, Λ, άρα θα πρέπει $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq -2$

Συντεταγμένες του Κ :

Για $y_K = 0$, η (1) $\Rightarrow 0 - 2 = \lambda\, x_K + \lambda \Rightarrow \lambda x_K = -\lambda - 2 \Rightarrow x_K = -\dfrac{\lambda + 2}{\lambda}$.

Συντεταγμένες του Λ **:**

Για $x_\Lambda = 0$, η (1) $\Rightarrow y_\Lambda - 2 = \lambda(0 + 1) \Rightarrow y_\Lambda = \lambda + 2$

Τρίγωνο ΟΚΛ ισοσκελές $\Leftrightarrow$ $(\text{ΟΚ}) = (\text{ΟΛ})$

$$|x_K| = |y_\Lambda|$$

$$\left|-\frac{\lambda+2}{\lambda}\right| = |\lambda+2|$$

$$\frac{|\lambda+2|}{|\lambda|} = |\lambda+2|$$

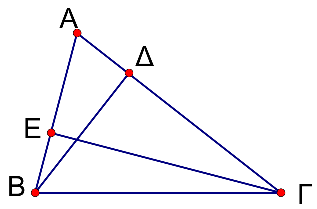
$$\frac{1}{|\lambda|} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |\lambda| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1$$

Άρα ζητούμενη ευθεία (1) είναι $y = 1x + 1 + 2$ ή $y = -1x - 1 + 2$ $\Leftrightarrow$
$y = x + 3$ ή $y = -x + 1$

## ΘΕΜΑ $23^0$ Γ

**Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών και τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ, του οποίου τα δύο ύψη έχουν εξισώσεις $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ και $y = -x + 2$ αντιστοίχως και η κορυφή Α έχει συντεταγμένες (1, 4)**

## ΛΥΣΗ




Διαπιστώνουμε ότι η κορυφή Α δεν επαληθεύει καμία από τις εξισώσεις των υψών.

Έστω, λοιπόν ΒΔ : $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ και

ΓΕ : $y = -x + 2$

$\text{ΑΓ} \perp \text{ΒΔ} \Leftrightarrow \lambda_{\text{ΑΓ}} \cdot \lambda_{\text{ΒΔ}} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\text{ΑΓ}} = -2$

ΑΓ : $y - 4 = -2(x - 1) \Leftrightarrow y = -2x + 2 + 4 \Leftrightarrow y = -2x + 6$

$\text{ΑΒ} \perp \text{ΓΕ} \Leftrightarrow \lambda_{\text{ΑΒ}} \cdot \lambda_{\text{ΓΕ}} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\text{ΑΒ}} = 1$

ΑΒ : $y - 4 = 1(x - 1) \Leftrightarrow y = x - 1 + 4 \Leftrightarrow y = x + 3$

Για τις συντεταγμένες του Β, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των ΑΒ, ΒΔ

$$\begin{cases} y=x+3 \\ y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} y=x+3 \\ x+3=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} y=x+3 \\ 2x+6=x+3 \end{cases} \quad \begin{cases} y=x+3 \\ x=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ x=-3 \end{cases}$$

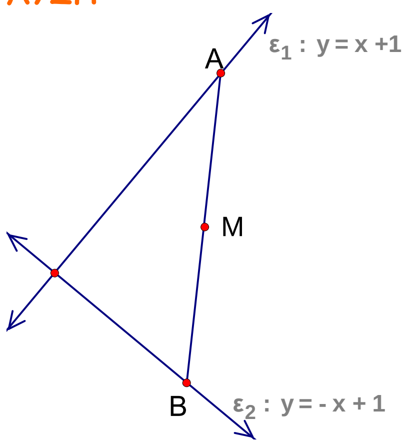
Για τις συντεταγμένες του Γ, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των ΑΓ, ΓΕ

$$\begin{cases} y=-2x+6 \\ y=-x+2 \end{cases} \quad \begin{cases} -x+2=-2x+6 \\ y=-x+2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$$

## ΘΕΜΑ $24^0$ Γ

**Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Μ(2, 1) και τέμνει τις ευθείες $y = x + 1$ και $y = -x + 1$ στα σημεία Α και Β αντιστοίχως, έτσι ώστε το Μ να είναι μέσο του ΑΒ.**

## ΛΥΣΗ




Έστω $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$

$A \in \varepsilon_1 \Rightarrow y_1 = x_1 + 1$ **(1)**

$B \in \varepsilon_2 \Rightarrow y_2 = -x_2 + 1$ **(2)**

M μέσο του AB $\Rightarrow$

$2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ και $1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \Rightarrow$

$x_1 + x_2 = 4$ **(3)** και $y_1 + y_2 = 2$ **(4)**

Η (4), λόγω των (1), (2) γίνεται $x_1 + 1 - x_2 + 1 = 2 \Rightarrow x_1 = x_2$

Η (3) γίνεται $2x_1 = 4 \Rightarrow x_1 = 2 = x_2$

Άρα η ζητούμενη ευθεία έχει εξίσωση $x = 2$

## ΘΕΜΑ 25$^0$ Δ

**Δίνεται η εξίσωση (2x -3y +4) + λ(x +3y +2)=0 (1).**

**α) Να δείξετε ότι για κάθε λ ∈ R η (1) παριστάνει ευθεία.**

**β) Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (1) (οικογένεια ευθειών) διέρχονται από το ίδιο σημείο.**

**γ) Ποια από τις ευθείες που παριστάνει η (1)διέρχεται από το σημείο(2,-1);**

**δ) Από όλες τις ευθείες της (1) να βρείτε εκείνη που είναι παράλληλη**

**i) στον άξονα x’x ii) στον άξονα y’y ;**

**ε) Από όλες τις ευθείες της (1) να βρείτε εκείνη που είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon_1$: 2x +y -5=0 ;**

## ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1) γράφεται : (2+λ)x +(3λ -3)y +2λ +4 =0.

Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής του x μηδενίζεται για λ = - 2 ενώ ο συντελεστής του y για λ=1. Συνεπώς δεν υπάρχει τιμή του λ για την οποία να μηδενίζονται ταυτόχρονα και ο συντελεστής του x και του y, οπότε η (1) παριστάνει για κάθε τιμή του λ ∈ R ευθεία.

β) Θεωρούμε δυο ευθείες της (1) ,

για λ = - 2 έχουμε ε’: -9y =0⇔y=0 και

για λ= 1 έχουμε ε’’:3x +6 =0. Το σημείο τομής των ευθειών αυτών είναι το ( - 2, 0) το οποίο είναι το σταθερό σημείο απ’ όπου διέρχονται οι ευθείες που παριστάνει η (1) αφού επαληθεύει την εξίσωση τους.

γ) Για x=2 και y=-1 η (1) γράφεται (2+λ).2+(3λ-3).(-1)+2λ+4=0⇔λ=-11.

Άρα η ζητούμενη ευθεία είναι η -9x-36y-18=0⇔x+4y+2=0.

δ) Για να είναι μια ευθεία της (1) παράλληλη στον

i) άξονα x’x θα πρέπει 2+λ=0⇔λ=-2.οποτε η ζητούμενη ευθεία είναι y=0

ii) άξονα y’y θα πρέπει 3λ-3 =0⇔λ=1.Οποτε η ζητούμενη ευθεία είναι η 3x+6=0 δηλ. η x= -2

ε) Η $\varepsilon_1$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}$ =(1,-2).Επίσης για κάθε λ ∈ Rοι ευθείες ε της (1) είναι παράλληλες στο διάνυσμα $\vec{\delta}'$=(3λ-3, -2-λ).

Έτσι ε ⊥ $\varepsilon_1$ ⇔ $\vec{\delta} \perp \vec{\delta}'$ ⇔ $\vec{\delta}' \vec{\delta}$ =0⇔(3λ-3).1+(-2-λ).(-2)=0⇔3λ-3+4+2λ=0⇔5λ=-1⇔λ= -1/5. Άρα η ζητούμενη ευθεία είναι η 11x-12y+22=0.

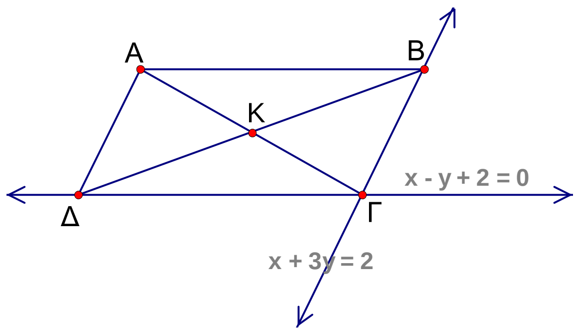
## ΘΕΜΑ 26$^0$ Γ

**Τα σημεία Α(-4, 6) και Γ(-1, 1) είναι οι απέναντι κορυφές ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Οι πλευρές ΒΓ και ΓΔ του παραλληλογράμμου ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις $x + 3y = 2$ και $x - y + 2 = 0$ αντιστοίχως. Να υπολογίσετε :**

**(i) Τις συντεταγμένες της κορυφής Δ.**

**(ii) Το συνημίτονο της οξείας γωνίας των διαγωνίων του παραλληλογράμμου.**

## ΛΥΣΗ




(i) $ΑΔ \parallel ΒΓ \Rightarrow \lambda_{ΑΔ} = \lambda_{ΒΓ} = -\frac{1}{3}$

$ΑΔ: \quad y - 6 = -\frac{1}{3}(x+4) \Leftrightarrow$

$3y - 18 = -x - 4 \Leftrightarrow$

$\mathbf{x + 3y = 14}$

Οι συντεταγμένες του Δ θα είναι η λύση του συστήματος

$\begin{cases} x+3y=14 \\ x-y=-2 \end{cases}$ των εξισώσεων των ευθειών ΑΔ και ΔΓ

$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 3 = -4,$

$D_x = \begin{vmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -14 + 6 = -8, \qquad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 14 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 14 = -16$

$x = \frac{D_x}{D} = 2, \qquad y = \frac{D_y}{D} = 4$ Άρα **Δ(2, 4)**

(ii) $\lambda_{\overline{ΑΓ}} = \frac{1-6}{-1+4} = -\frac{5}{3} \Rightarrow \overrightarrow{ΑΓ} \parallel \vec{\delta}_1 = (3, -5)$

Το σημείο τομής Κ των διαγωνίων είναι μέσο της ΑΓ.

Άρα $Κ\left(\frac{-4-1}{2}, \frac{1+6}{2}\right), \qquad Κ\left(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$

$\lambda_{\overline{ΔΒ}} = \lambda_{\overline{ΔΚ}} = \dfrac{\frac{7}{2} - 4}{-\frac{5}{2} - 2} = \frac{7-8}{-5-4} = \frac{1}{9} \Rightarrow \overrightarrow{ΔΒ} \parallel \vec{\delta}_2 = (9, 1)$

$συν(\widehat{\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2}) = \dfrac{\vec{\delta}_1 . \vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1|\,|\vec{\delta}_2|} = \dfrac{3\,.\,9 - 5\,.\,1}{\sqrt{3^2+5^2}\sqrt{9^2+1^2}} = \dfrac{22}{\sqrt{9+25}\sqrt{81+1}} = \dfrac{22}{\sqrt{24}\sqrt{82}}$

## ΘΕΜΑ 27$^0$ Γ

**Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων Ο και απέχουν από το σημείο Α(–1, 3) απόσταση ίση με 1.**

## ΛΥΣΗ

Η ζητούμενη ευθεία ε, αφού διέρχεται από την αρχή των αξόνων, θα έχει εξίσωση

$x = 0 \quad ή \quad y = \lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ . **(1)**

- Όταν $ε: x = 0$

$$d(A, \varepsilon) = \frac{|1.(-1)+0+0|}{\sqrt{1^2+0^2}} = 1,$$ άρα η ευθεία $x = 0$ είναι λύση του προβλήματος.

- Όταν $\varepsilon : \; y = \lambda x \;\Leftrightarrow\; \lambda x - y = 0$

$$d(A, \varepsilon) = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{|\lambda.(-1)-1.3+0|}{\sqrt{\lambda^2+1^2}} = 1 \;\Leftrightarrow\; |\lambda+3| = \sqrt{\lambda^2+1} \;\Leftrightarrow\; \lambda^2+6\lambda+9 = \lambda^2+1$$

$$\Leftrightarrow\; 6\lambda = -8 \;\Leftrightarrow\; \lambda = -\frac{4}{3}$$ Άρα $\varepsilon : \; y = -\frac{4}{3}x$

## ΘΕΜΑ 28$^0$ Γ

**Δίνονται τα σημεία $A(-1, -2)$ και $B(3, 1)$. Να βρείτε το σύνολο των σημείων $M$, για τα οποία ισχύει $(MAB) = 8$**

### ΛΥΣΗ

Έστω $M(x, y)$ τυχαίο σημείο για το οποίο ισχύει $(MAB) = 8$

$\overrightarrow{AM} = (x + 1, y + 2)$, $\overrightarrow{AB} = (3 + 1, 1 + 2) = (4, 3)$

$$(MAB) = 8 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right)\right| = 8 \;\Leftrightarrow\; \left|\begin{vmatrix} x+1 & y+2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}\right| = 16 \;\Leftrightarrow$$

$$|3x+3-4y-8| = 16 \;\Leftrightarrow\; |3x-4y-5| = 16 \;\Leftrightarrow$$

$$3x - 4y - 5 = 16 \;\text{ ή }\; 3x - 4y - 5 = -16 \;\Leftrightarrow$$

$$3x - 4y - 21 = 0 \;\text{ ή }\; 3x - 4y + 11 = 0$$

## ΘΕΜΑ 29$^0$ Γ

**Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\lambda x + (\lambda - 1)y = 2\lambda$ και $(\lambda + 1)x + \lambda y = 2\lambda + 1$ τέμνονται για όλες τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$. Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων τομής τους;**

### ΛΥΣΗ

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda-1 \\ \lambda+1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (\lambda^2 - 1) = \lambda^2 - \lambda^2 + 1 = 1 \neq 0.$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, άρα οι ευθείες τέμνονται.

$$D_x = \begin{vmatrix} 2\lambda & \lambda-1 \\ 2\lambda+1 & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda^2 - 2\lambda^2 + 2\lambda - \lambda + 1 = \lambda + 1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda & 2\lambda \\ \lambda+1 & 2\lambda+1 \end{vmatrix} = 2\lambda^2 + \lambda - 2\lambda^2 - 2\lambda = -\lambda$$

Έστω $M(x, y)$ τυχαίο σημείο τομής τους. Τότε

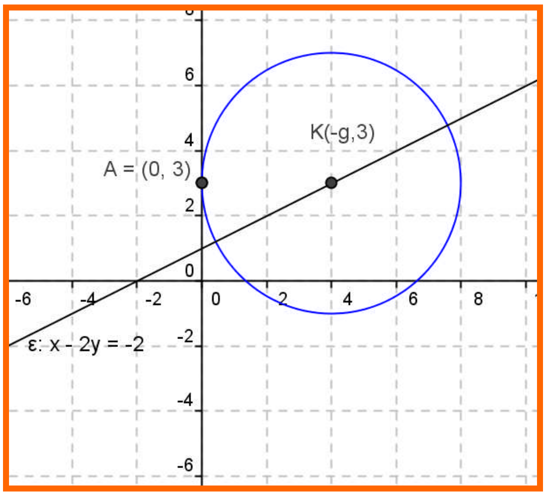
$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} \\ y = \dfrac{D_y}{D} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\lambda+1}{1} \\ y = \dfrac{-\lambda}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda+1 \\ y = -\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda+1 \\ \lambda = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y+1 \\ \lambda = -y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x = -y + 1 \;\Leftrightarrow\; x + y - 1 = 0$$

## ΘΕΜΑ 30$^0$ Γ

**Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου του οποίου το κέντρο βρίσκεται στην ευθεία $x-2\psi+2=0$ και ο οποίος εφάπτεται του άξονα των ψ στο σημείο Α(0,3)**

### ΛΥΣΗ




Έστω η εξίσωση του κύκλου είναι

$$(\chi-\chi_0)^2+(\psi-\psi_0)^2=\rho^2 \qquad (1)$$

- Αφού ο κύκλος έχει το κέντρο του πάνω στην ευθεία $x-2\psi+2=0$ .θα ισχύει ότι $x_0-2\psi_0+2=0$
- Αφού ο κύκλος εφάπτεται του άξονα των ψ στο σημείο Α(0,3) ,έχουμε $\psi_0=3$
- Κατά συνέπεια το κέντρο προσδιορίζεται από τη λύση του συστήματος

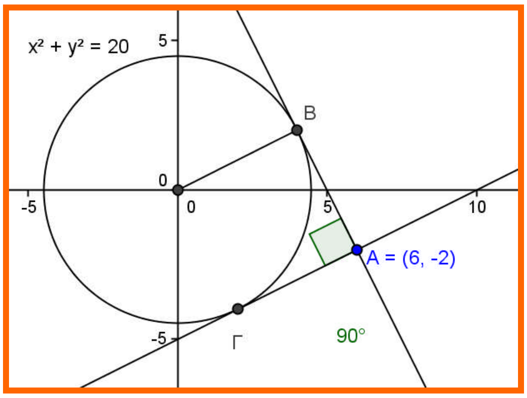
$$\begin{cases} \mathbf{x_0-2\psi_0+2=0} \\ \mathbf{\psi_0=3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi_0=4 \\ \psi_0=3 \end{cases} \quad \text{Άρα } \mathbf{K(4,3)}$$

Είναι ακόμη $\rho=\mathbf{d(K,A)=4}$ οπότε από τη σχέση $(1)$ έχουμε $(\chi-4)^2+(\psi-3)^2=16$

## ΘΕΜΑ 31$^0$ Γ

**Δίδεται κύκλος με εξίσωση $\chi^2+y^2=20$ και το σημείο Α(6,-2) .Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων που άγονται από το σημείο Α στον κύκλο και τα σημεία επαφής .**

### ΛΥΣΗ




Να θυμηθούμε ότι από σημείο εκτός κύκλου άγονται 2 εφαπτόμενες και ότι η εφαπτόμενη και ακτίνα σχηματίζουν ορθή γωνία

Η εξίσωση εφαπτομένης έχει μορφή : (ε) y= λχ + β ή λχ -y +β =0

(Σκοπός μας είναι να βρούμε το λ και β.)Α ν βρούμε μια τιμή για το λ η άλλη εφαπτομένη είναι η χ=κ όπου κ η τεταγμένη το σημείου Α)

Ο κύκλος με εξ. $\chi^2+y^2=20$ έχει κέντρο Κ(0,0) και $R=\sqrt{20}$ Η απόσταση του κέντρου του κύκλου από την εφαπτομένη ισούται με R .

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}} \Rightarrow R=\frac{|0\lambda_1-0_1+\beta|}{\sqrt{\lambda^2+1^2}} \Rightarrow \sqrt{20}=\frac{|\beta|}{\sqrt{\lambda^2+1}} \Rightarrow \sqrt{20}\sqrt{\lambda^2+1}=|\beta| \quad (1)$$

Η εφαπτομένη περνά από το σημείο Α(6,-2):

$$\left.\begin{matrix} y=\lambda\chi+\beta \\ \mathrm{A}(6,-2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow -2=6\lambda+\beta \Rightarrow \beta=-(6\lambda+2) \qquad (2)$$

$$\mathrm{A}\pi o\ (1),(2) \Rightarrow 20(\lambda^2+1)=(-(6\lambda+2)^2) \Rightarrow 20\lambda^2+20=36\lambda^2+24\lambda+4$$

$$\Rightarrow 16\lambda^2+24\lambda-16=0 \Rightarrow 2\lambda^2+3\lambda-2=0 \Rightarrow (2\lambda-1)(\lambda+2)=0 \Rightarrow \lambda_1=\tfrac{1}{2} \quad \lambda_2=-2$$

$\bullet\, \mathrm{A}\nu\ \lambda_1=\frac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{A}\pi o\ (2)\ \beta=-(6\lambda+2) \Rightarrow \beta=-5$

$\mathrm{E}\xi\ \varepsilon\phi: y=\frac{1}{2}x-5 \Rightarrow x-2y-10=0 \qquad (3)$

$\bullet\, \mathrm{A}\nu\ \lambda_2=-2 \Rightarrow \mathrm{A}\pi o\ (2)\ \beta=-(6\lambda+2) \Rightarrow \beta=10$

$\mathrm{E}\xi\ \varepsilon\phi: y=-2x+10 \ (4)$

$\Sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ \varepsilon\pi\alpha\varphi\acute{\eta}\varsigma:$ Απο (3) $x = 2y + 10 \qquad (5)$

$M\varepsilon\ \alpha\nu\tau\iota\kappa\alpha\tau\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\ \sigma\tau\eta\ \varepsilon\xi.\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda\text{ου}\ \acute{\varepsilon}\chi\omega$

$(2y+10)^2 + y^2 = 20 \Rightarrow 4y^2 + 40y + 100 + y^2 - 20 = 0 \Rightarrow 5y^2 + 40y + 80 = 0 \Rightarrow$

$y^2 + 8y + 16 = 0 \Rightarrow (y+4)^2 = 0 \Rightarrow y = -4$

Για να βρω το $x$ η σχέση (5) $x = 2(-4) + 10 = 2 \Rightarrow \Gamma(-4,2)$

Για να βρούμε το σημείο επαφής της $y = -2x + 10$ με τον κύκλο με τον ίδιο τρόπο

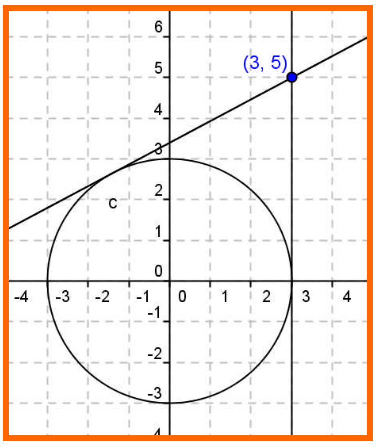
με αντικατάσταση στην εξίσωση του κύκλου βρίσκω το σημείο $B(4,2)$

Η γωνία ΒΑΓ είναι ορθή γιατί $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

## ΘΕΜΑ 32$^0$ Γ

**Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου $\chi^2+y^2=9$ που άγεται από το σημείο (3,5)**

### ΛΥΣΗ




**ΣΧΟΛΙΟ**

**<u>Αν βρούμε μόνο μια τιμή για την κλίση λ</u> της εφαπτομένης η άλλη εφαπτομένη είναι κάθετη στον οριζόντιο άξονα και η κλίση δεν ορίζεται . Η εξίσωση της είναι η x = κ όπου κ η τετμημένη του σημείου από το οποιο άγεται η εφαπτομένη .**

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + \Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}} \Rightarrow R = \frac{|0\lambda_1 - 0_1 + \beta|}{\sqrt{\lambda^2+1^2}} \Rightarrow 3 = \frac{|\beta|}{\sqrt{\lambda^2+1}} \Rightarrow 3\sqrt{\lambda^2+1} = |\beta| \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \lambda\chi + \beta \\ A(3,5) \end{array}\right\} \Rightarrow 5 = 3\lambda + \beta \Rightarrow \beta = (5 - 3\lambda) \qquad (2)$$

$$\text{Απο } (1),(2) \Rightarrow 9(\lambda^2+1) = (5-3\lambda)^2) \Rightarrow 9\lambda^2 + 9 = 9\lambda^2 - 30\lambda + 25$$

$$\Rightarrow 30\lambda = 16 \Rightarrow \lambda = \frac{8}{15}$$

$$\bullet \text{Αν } \lambda = \frac{8}{15} \Rightarrow \text{Απο } (2)\ \beta = \frac{51}{15}$$

$$\text{Εξ εφ}: y = \tfrac{8}{15}x + \tfrac{51}{15} \Rightarrow 15y - 8x - 51 = 0$$

Η αλλη εξ.της εφ.είναι η $: x = 3$

## ΘΕΜΑ 33$^0$ Γ

**Δίνονται οι κύκλοι $C_1 : (x-2)^2 + (y-3)^2 = 5^2$ και $C_2 : x^2 + (y+1)^2 = 3^2$.**

**(i) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης $\varepsilon$ του κύκλου $C_1$ στο σημείο $A(5,-1)$.**

**(ii) Να αποδειχτεί ότι η $\varepsilon$ εφάπτεται και του κύκλου $C_2$.**

### ΛΥΣΗ

Ο κύκλος $C_1$ έχει κέντρο $K(2,3)$ και ακτίνα 5, ενώ ο κύκλος $C_2$ έχει κέντρο $\Lambda(0,-1)$ και ακτίνα 3.

(i) Γνωρίζουμε από τη Γεωμετρία ότι ένα σημείο $M(x,y)$ ανήκει στην $\varepsilon$, αν και μόνο αν $AM \perp KA$, δηλαδή, αν και μόνο αν

$$\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{AM}=0\,. \qquad (1)$$

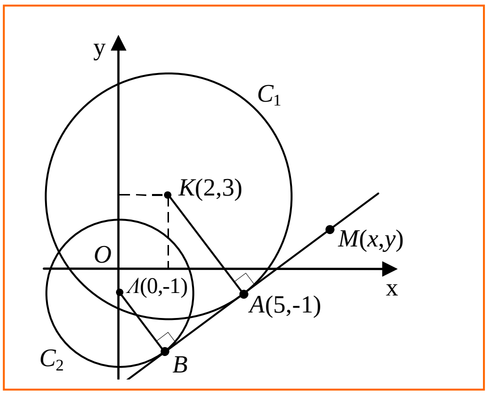
Όμως, $\overrightarrow{KA}=(3,-4)$ και $\overrightarrow{AM}=(x-5,y+1)$.

Έτσι, η (1) γράφεται διαδοχικά

$3(x-5)-4(y+1)=0$

$3x-4y-19=0$.

Άρα, η εξίσωση της $\varepsilon$ είναι: $3x-4y-19=0$. (2)




(ii) Για να δείξουμε ότι η $\varepsilon$ εφάπτεται του κύκλου $C_2$, αρκεί να δείξουμε ότι η απόσταση του κέντρου $\Lambda(0,-1)$ του $C_2$ από την $\varepsilon$ είναι ίση με την ακτίνα του $C_2$, δηλαδή ίση με 3.

Έχουμε λοιπόν: $d(\Lambda,\varepsilon)=\dfrac{|3\cdot 0-4(-1)-19|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{15}{5}=3$.

## ΘΕΜΑ $34^0$ Γ

**Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου $x^2+y^2-2x+4y+4=0$ στο σημείο του $A(1,-1)$**

### ΛΥΣΗ

$x_0=-\dfrac{A}{2}=1,\qquad y_0=-\dfrac{B}{2}=-2.\qquad$ Κέντρο το $K(1,-2)$

Έστω $M(x, y)$ το τυχαίο σημείο της εφαπτομένης στο A $\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{AK} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AK}=0 \Leftrightarrow$

$(x-1)(1-1)+(y+1)(-2+1)=0 \Leftrightarrow$

$(y+1)(-1)=0 \Leftrightarrow$

$-y-1=0 \Leftrightarrow y=-1$

## ΘΕΜΑ $35^0$ Β

**Να βρείτε τη σχετική θέση των κύκλων**

$C_1$**:** $x^2+y^2=1$ **και** $C_2$**:** $(x-1)^2+y^2=4$

### ΛΥΣΗ

$K_1(0,0),\qquad \rho_1=1$

$K_2(1,0),\qquad \rho_2=2$

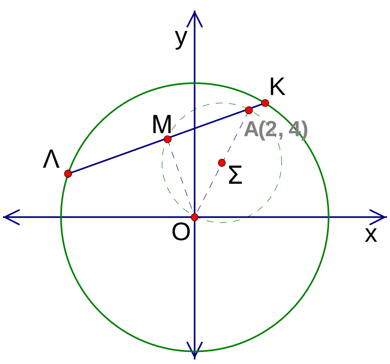
Είναι $(K_1K_2)=1$ και $\rho_2-\rho_1=2-1=1 \Rightarrow (K_1K_2)=\rho_2-\rho_1$

Άρα οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.

## ΘΕΜΑ $36^0$ Γ

**Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μέσων των χορδών του κύκλου $x^2+y^2=25$, που διέρχονται από το σημείο $A(2, 4)$.**

### ΛΥΣΗ




Έστω $M(x, y)$ τυχαίο σημείο του γεωμετρικού τόπου $\Leftrightarrow$

το M είναι μέσο της τυχαίας χορδής ΚΛ, που διέρχεται από το A $\Leftrightarrow$

$OM\perp MA \Leftrightarrow$

το M βλέπει το τμήμα ΟΑ με ορθή γωνία $\Leftrightarrow$

το Μ διαγράφει κύκλο διαμέτρου ΟΑ

Το κέντρο του είναι $\Sigma(\frac{2+0}{2}, \frac{4+0}{2}) = \Sigma(1, 2)$ και η ακτίνα του $\rho = (\Sigma O) = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$.

Άρα η εξίσωσή του είναι $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$

## ΘΕΜΑ 37$^0$ Δ

**Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda x - 1 = 0$ (1), όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.**

**(i) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $\lambda$, η (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου ζητείται να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα.**

**(ii) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι $C_\lambda$, που ορίζονται από την (1) για τις διάφορες τιμές του $\lambda$, διέρχονται από δύο σταθερά σημεία. Ποια είναι η εξίσωση της κοινής χορδής όλων αυτών των κύκλων;**

### ΛΥΣΗ

**(i)**Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$.

$A^2 + B^2 - 4\Gamma = (-2\lambda)^2 + 0 + 4 = 4\lambda^2 + 4 > 0$

Άρα παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(\lambda, 0)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{4\lambda^2+4}}{2} = \sqrt{\lambda^2+1}$

**(ii)**Για $\lambda = 0$, η (1) γίνεται $x^2 + y^2 = 1$ κύκλος $C_0$

Για $\lambda = 1$, η (1) γίνεται $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ κύκλος $C_1$

Σύστημα, για να βρούμε τα σημεία τομής των $C_0$, $C_1$

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2-2x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 1-2x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 0^2+y^2=1 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \text{ ή } y=-1 \\ x=0 \end{cases}$$

Τα σημεία τομής είναι $K(0, 1)$ και $\Lambda(0, -1)$

$K \in C_\lambda \Leftrightarrow 0^2 + 1^2 - 2\lambda.0 - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ που ισχύει, άρα οι κύκλοι $C_\lambda$ διέρχονται από το K.

$\Lambda \in C_\lambda \Leftrightarrow 0^2 + (-1)^2 - 2\lambda.0 - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ που ισχύει, άρα οι κύκλοι $C_\lambda$ διέρχονται από το Λ

Η εξίσωση της κοινής χορδής ΚΛ είναι $x = 0$.

## ΘΕΜΑ 38$^0$ Γ

**Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από το σημείο (1, 0) και εφάπτεται στις ευθείες $3x + y + 6 = 0$ και $3x + y - 12 = 0$.**

### ΛΥΣΗ

- Η ζητούμενη εξίσωση θα είναι της μορφής $(\chi-\chi_0)^2 + (\psi-\psi_0)^2 = \rho^2$ (1)

  Οι δοσμένες ευθείες είναι παράλληλες, οπότε το κέντρο $K(\chi_0, \psi_0)$ του ζητούμενου κύκλου θα ανήκει στη μεσοπαράλληλη τους που είναι η (ε) $\psi = -3\chi + 3$.

  Κατά συνέπεια θα έχουμε $\psi_0 = -3\chi_0 + 3$ (2)

- Η διάμετρος του ζητούμενου κύκλου είναι η απόσταση των ευθειών $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$.

  Κατά συνέπεια $\rho = \frac{1}{2}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{1}{2}(A, \varepsilon_2) = \frac{1}{2}\frac{|3(-1)+1(-3)-12|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{9}{\sqrt{10}}$

❖ Αφού ο κύκλος διέρχεται από το σημείο (1,0) θα είναι $\left(1-\chi_0\right)^2+\left(0-\psi_0\right)^2=\left(\dfrac{9}{\sqrt{10}}\right)^2 \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$

## ΘΕΜΑ $39^0$ Γ

**Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ που είναι παράλληλες στηνευθεία $x + y = 0$.**

### ΛΥΣΗ

Η ζητούμενη εφαπτόμενη έχει εξίσωση ε→ $\chi\chi_1+\psi\psi_1=4$ όπου $\left(\chi_1,\psi_1\right)$ το σημείο επαφής

Όμως είναι $\varepsilon // \delta \to \psi+\chi=0$ οπότε $\alpha_1=\alpha_2 \Leftrightarrow -\dfrac{\chi_1}{\psi_1}=-1 \Leftrightarrow \psi_1=\chi_1$ (1)

Όμως το σημείο $\left(\chi_1,\psi_1\right)$ ανήκει στον κύκλο , κατά συνέπεια $\chi_1^2+\psi_1^2=4$ (2)

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) έχουμε $\left(\chi_1,\psi_1\right)=\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ ή $\left(\chi_1,\psi_1\right)=\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$

Κατά συνέπεια έχουμε δύο εφαπτόμενες

$\sqrt{2}\chi_1+\sqrt{2}\psi=4$ και $-\sqrt{2}\chi_1-\sqrt{2}\psi=4$

## ΘΕΜΑ $40^0$ Γ

**Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y=\dfrac{1}{4}x^2$ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις :**

**(i) Όταν είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x + 1$**

**(ii) Όταν είναι κάθετη στην ευθεία $y = -2x$**

**(iii) Όταν διέρχεται από το σημείο $A(0, -1)$**

### ΛΥΣΗ

Η παραβολή γράφεται $x^2 = 4y \Leftrightarrow x^2 = 2.\,2y \Rightarrow \rho = 2$

Η εφαπτομένη της στο σημείο της $\Lambda(x_1,\ y_1)$ είναι

$\varepsilon:\ x x_1 = 2(y + y_1) \Leftrightarrow x x_1 = 2y + 2y_1 \Leftrightarrow 2y = x_1 x - 2y_1 \Leftrightarrow y = \dfrac{x_1}{2}x - y_1$ **(1)**

**(i)** $\varepsilon \parallel y = x + 1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{2} = 1 \Leftrightarrow x_1 = 2$

$\Lambda(x_1,\ y_1) \in$ στην παραβολή $\Leftrightarrow y_1 = \dfrac{1}{4}x_1^2 \Leftrightarrow y_1 = \dfrac{1}{4}2^2 = 1$

(1) $\Leftrightarrow$ $\varepsilon:\ y = x - 1$

**(ii)** $\varepsilon \perp y = -2x \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{2} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x_1 = 1$

$\Lambda(x_1,\ y_1) \in$ στην παραβολή $\Leftrightarrow y_1 = \dfrac{1}{4}x_1^2 \Leftrightarrow y_1 = \dfrac{1}{4}1^2 = \dfrac{1}{4}$

(1) $\Leftrightarrow$ $\varepsilon:\ y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$

**(iii)** $A(0, -1) \in \varepsilon \Leftrightarrow -1 = \dfrac{x_1}{2}.0 - y_1 \Leftrightarrow y_1 = 1$

$\Lambda(x_1,\ y_1) \in$ στην παραβολή $\Leftrightarrow y_1 = \dfrac{1}{4}x_1^2 \Leftrightarrow 1 = \dfrac{1}{4}x_1^2 \Leftrightarrow x_1^2 = 4 \Leftrightarrow x_1 = 2$ ή $x_1 = -2$

$(1) \Leftrightarrow \quad y = \frac{2}{2}x - 1 \quad ή \quad y = \frac{-2}{2}x - 1 \quad \Leftrightarrow$

$y = x - 1 \quad ή \quad y = -x - 1$

## ΘΕΜΑ $41^0$ Γ

**Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης $3x^2 + y^2 = 4$, οι οποίες :**
**(i) είναι παράλληλες προς την ευθεία $y = -3x + 1$**
**(ii) είναι κάθετες στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x$**
**(iii) διέρχονται από το σημείο M(o, 4)**

### ΛΥΣΗ

**(i)**Έστω $\varepsilon: 3x_1x + y_1y = 4$ ζητούμενη εφαπτομένη, όπου $\Lambda(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής.

ε παράλληλη στην ευθεία $y = -3x + 1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -3 \Leftrightarrow -\frac{3x_1}{y_1} = -3 \Leftrightarrow x_1 = y_1$

$\Lambda(x_1, y_1) \in$ στην έλλειψη $\Leftrightarrow 3x_1^2 + y_1^2 = 4 \Leftrightarrow 3x_1^2 + x_1^2 + = 4 \Leftrightarrow 4x_1^2 = 4 \Leftrightarrow$

$x_1^2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = 1 \quad ή \quad x_1 = -1$

Για $x_1 = 1$ θα είναι $y_1 = 1$, οπότε $\varepsilon: 3.\,1x + 1y = 4 \Leftrightarrow 3x + y = 4$

Για $x_1 = -1$ θα είναι $y_1 = -1$, οπότε $\varepsilon: 3.\,(-1)\,x + (-1)y = 4 \Leftrightarrow -3x - y = 4$

**(ii)**Έστω $\varepsilon: 3x_1x + y_1y = 4$ ζητούμενη εφαπτομένη, όπου $\Lambda(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής.

ε κάθετη στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow -\frac{3x_1}{y_1} \cdot \frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow$

$2y_1 = 3x_1 \Leftrightarrow y_1 = \frac{3}{2}x_1$

$\Lambda(x_1, y_1) \in$ στην έλλειψη $\Leftrightarrow 3x_1^2 + y_1^2 = 4 \Leftrightarrow 3x_1^2 + \frac{9}{4}x_1^2 = 4 \Leftrightarrow 12x_1^2 + 9x_1^2 \; 16 \Leftrightarrow$

$21x_1^2 = 16 \Leftrightarrow x_1 = \frac{4}{\sqrt{21}} \quad ή \quad x_1 = -\frac{4}{\sqrt{21}}$

- Για $x_1 = \frac{4}{\sqrt{21}}$ θα είναι $y_1 = \frac{3}{2}\,\frac{4}{\sqrt{21}} = \frac{6}{\sqrt{21}}$ Τότε

  $\varepsilon: 3\frac{4}{\sqrt{21}}x + \frac{6}{\sqrt{21}}y = 4 \Leftrightarrow 12x + 6y = 4\sqrt{21} \Leftrightarrow 6x + 3y - 2\sqrt{21} = 0$
- Για $x_1 = -\frac{4}{\sqrt{21}}$ θα είναι $y_1 = \frac{3}{2}\,(-\frac{4}{\sqrt{21}}) = -\frac{6}{\sqrt{21}}$ Τότε

  $\varepsilon: 3(-\frac{4}{\sqrt{21}})x - \frac{6}{\sqrt{21}}y = 4 \Leftrightarrow -12x - 6y = 4\sqrt{21} \Leftrightarrow 6x + 3y + 2\sqrt{21} = 0$

**(iii)**Έστω $\varepsilon: 3x_1x + y_1y = 4$ ζητούμενη εφαπτομένη, όπου $\Lambda(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής.

$M(0, 4) \in \varepsilon \Leftrightarrow 3x_1.0 + y_1.4 = 4 \Leftrightarrow y_1 = 1$

$\Lambda(x_1, y_1) \in$ στην έλλειψη $\Leftrightarrow 3x_1^2 + y_1^2 = 4 \Leftrightarrow$

$3x_1^2 + 1^2 = 4 \Leftrightarrow$

$3x_1^2 = 3 \Leftrightarrow$

$x_1^2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = 1 \quad ή \quad x_1 = -1$

Για $x_1 = 1$, $y_1 = 1$, είναι $\varepsilon: 3.\,1x + 1y = 4 \Leftrightarrow 3x + y = 4$

Για $x_1 = -1$, $y_1 = 1$, είναι $\varepsilon: 3.\,(-1)x + 1y = 4 \Leftrightarrow -3x + y = 4$

## ΘΕΜΑ 42⁰ Γ-Δ

**Δίνεται η παραβολή $y^2=4x$. Να βρείτε:**

**Α. Την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής.**

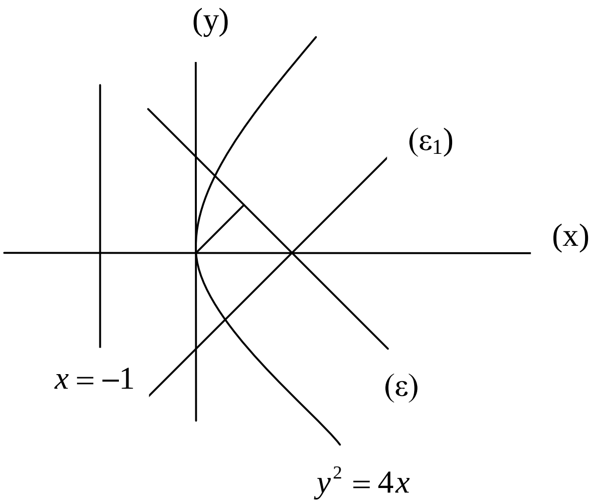
**Β. Τις ευθείες που διέρχονται από την εστία της παραβολής και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με $\frac{\sqrt{2}}{2}$.**

**Γ. Την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x-1$.**

## ΛΥΣΗ

**Α.** Κατά τη θεωρία μας η παραβολή με εξίσωση $y^2=2\text{P}x$ έχει εστία $E\left(\frac{\text{P}}{2},0\right)$ και διευθετούσα $x=-\frac{\text{P}}{2}$. Συνεπώς για την παραβολή $y^2=4x$ θα είναι $2\text{P}=4$ ή $\text{P}=2$. Άρα εστία $\text{E}(1,0)$ και η διευθετούσα $x=-1$.

**Β**. Κάθε ευθεία που διέρχεται από την εστία $\text{E}(1,0)$ έχει εξίσωση $y=\lambda(x-1)$




ή $x=1$. Για να είναι η ευθεία $y=\lambda(x-1)$ λύση του προβλήματος πρέπει η απόσταση h του σημείου $0(0,0)$ από αυτήν να είναι ίση προς $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Η ευθεία μας γράφεται $\lambda x-y-\lambda=0$.

Θυμόμαστε ότι η απόσταση σημείου $\text{M}(x_0,y_0)$ από την ευθεία $\text{A}x+\text{B}y+\Gamma=0$ είναι $h=\frac{|\text{A}x_0+\text{B}y_0+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Εφαρμόζοντας τον τύπο αυτό για τα δεδομένα της άσκησής μας έχουμε

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|\lambda\cdot 0-0-\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}}\Rightarrow\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2+1}=2|\lambda|\Rightarrow$$

$$2(\lambda^2+1)=4\lambda^2\Rightarrow 2\lambda^2+2=4\lambda^2\Rightarrow 2\lambda^2=2\Rightarrow\lambda^2=1\Rightarrow\lambda=\pm 1.$$

Συνεπώς οι εξισώσεις των ευθειών αυτών είναι $y=x-1$ και $y=-x+1$.

Γ. Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2=2\text{P}x$ στο σημείο $(x_1,y_1)$ είναι κατά τη θεωρία $yy_1=\text{P}(x+x_1)$. Συνεπώς για την παραβολή $y^2=4x$ η εφαπτομένη στο $(x_1,y_1)$ είναι $yy_1=2(x+x_1)$. Πρέπει τώρα να υπολογίσουμε τα $x_1,y_1$. Το σημείο ( $x_1,y_1$.) ανήκει στην παραβολή και άρα $y_1^2=4x_1$. Επιπλέον η εφαπτομένη $yy_1=2(x+x_1)$. είναι παράλληλη προς την $y=x-1$. Για να συμβαίνει αυτό πρέπει οι συντελεστές διεύθυνσης των δύο ευθειών να είναι ίσοι δηλαδή $\frac{2}{y_1}=1$ και άρα $y_1=2$. Αντικαθιστώντας τώρα στην $yy_1=2(x+x_1)$ τα $x_1$ και $y_1$ έχουμε. $y\cdot 2=2(x+1)$ ή $y=x+1$ που είναι η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης που είναι παράλληλη στην $y=x-1$.

Γ. Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2=2\text{P}x$ στο σημείο $(x_1,y_1)$ είναι κατά τη θεωρία $yy_1=\text{P}(x+x_1)$. Συνεπώς για την παραβολή $y^2=4x$ η εφαπτομένη στο $(x_1,y_1)$ είναι $yy_1=2(x+x_1)$. Πρέπει τώρα να υπολογίσουμε τα $x_1,y_1$. Το σημείο ( $x_1,y_1$.) ανήκει στην παραβολή και άρα $y_1^2=4x_1$.

Επιπλέον η εφαπτομένη $yy_1 = 2(x+x_1)$. είναι παράλληλη προς την $y = x-1$. Για να συμβαίνει αυτό πρέπει οι συντελεστές διεύθυνσης των δύο ευθειών να είναι ίσοι δηλαδή $\frac{2}{y_1} = 1$ και άρα $y_1 = 2$. Αντικαθιστώντας τώρα στην $yy_1 = 2(x+x_1)$ τα $x_1$ και $y_1$ έχουμε. $y \cdot 2 = 2(x+1)$ ή $y = x+1$ που είναι η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης που είναι παράλληλη στην $y = x-1$.

## ΘΕΜΑ 43$^0$ Δ

**Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2x\sigma\upsilon\nu\vartheta-2y\eta\mu\vartheta-1=0 \qquad 0\le\vartheta<2\pi$.**

**Α. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\vartheta$ η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.**

**Β. Αν $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο $M(1,2)$.**

**Γ. Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του $\vartheta$ τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο το (0,0) και ακτίνα $\rho=1$.**

### ΛΥΣΗ

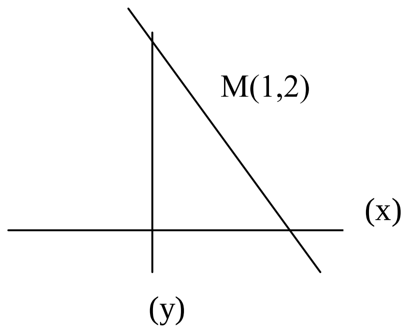
Κατά τη θεωρία κάθε εξίσωση της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ για να παριστάνει κύκλο πρέπει να ισχύει η συνθήκη $A^2+B^2-4\Gamma>0$. Επειδή η εξίσωση $x^2+y^2-2x\sigma\upsilon\nu\vartheta-2y\eta\mu\vartheta-1=0$ έχει την παραπάνω μορφή και επειδή το $\Gamma=-1$ είναι αρνητικός αριθμός, η συνθήκη $A^2+B^2-4\Gamma>0$ ισχύει.. Το κέντρο του κύκλου κατά τη θεωρία είναι $\mathrm{K}\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ και συνεπώς για την άσκησή μας είναι $\mathrm{K}\left(\frac{2\sigma\upsilon\nu\vartheta}{2},\frac{2\eta\mu\vartheta}{2}\right)$ ή $\mathrm{K}(\sigma\upsilon\nu\vartheta,\eta\mu\vartheta)$. Η ακτίνα του κύκλου κατά τη θεωρία είναι $R=\frac{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma}}{2}$ και συνεπώς για την άσκησή μας είναι $R=\frac{\sqrt{(-2\sigma\upsilon\nu x)^2+(-2\eta\mu x)^2-4(-1)}}{2}$ ή $R=\frac{\sqrt{4\sigma\upsilon\nu^2x+4\eta\mu^2x+4}}{2}$ ή $R=\frac{\sqrt{4(\sigma\upsilon\nu^2x+\eta\mu^2x)+4}}{2}$ ή $R=\frac{\sqrt{4+4}}{2}=\frac{\sqrt{8}}{2}=\sqrt{2}$.

Β. Αν $\vartheta=\frac{\pi}{2}$ τότε είναι $\mathrm{K}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2},\eta\mu\frac{\pi}{2}\right)$ ή $\mathrm{K}(0,1)$. Η εφαπτομένη του κύκλου είναι η κάθετος επί της ΚΜ στο Μ.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ΚΜ είναι $\lambda=\frac{2-1}{1-0}=1$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε) που είναι κάθετος στην ΚΜ είναι $\lambda'=-1$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης που είναι ευθεία που διέρχεται από το $M(1,2)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda'=-1$ είναι $y-2=-1(x-1)$ ή $y=-x+1$.




Γ. Ο κύκλος με κέντρο (0,0) και ακτίνα $\rho=1$ έχει εξίσωση $x^2+y^2=1$ (1)

Το κέντρο του κύκλου της άσκησης μας για τυχαίο $\vartheta$ είναι $\mathrm{K}(\sigma\upsilon\nu\vartheta,\eta\mu\vartheta)$. Αν λοιπόν θέσουμε στην (1) όπου $x$ το $\sigma\upsilon\nu\vartheta$ και όπου y το $\eta\mu\vartheta$ έχουμε : $\sigma\upsilon\nu^2\vartheta+\eta\mu^2\vartheta=1$ που είναι αληθής. Συνεπώς το Κ ανήκει στον κύκλο με κέντρο το (0,0) και ακτίνα $\rho=1$.

# 3 ΘΕΜΑΤΑ ΑΠΟ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΓΙΑ $1^0$ ΘΕΜΑ……… ΑΠΟ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ $1^0$

**Α.** Να χαρακτηρίσετε ως σωστή ή λάθος κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις:

**α.** Ισχύει: $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ αν και μόνο αν $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

**β.** Η έλλειψη $2x^2 + 3y^2 = 6$ έχει τις εστίες της πάνω στον άξονα $y'y$.

**γ.** Στην ισοσκελή υπερβολή η εκκεντρότητα ισούται με $\sqrt{2}$.

**δ.** Η εξίσωση $x^2 + 2y^2 = 3$ παριστάνει έλλειψη.

**ε.** Αν η εφαπτομένη μιας υπερβολής στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $\frac{xx_1}{4} - yy_1 = 1$

τότε οι εστίες της είναι οι $E'\left(-\sqrt{5},0\right)$ και $E\left(\sqrt{5},0\right)$ Μονάδες 10

**Β.** Να δώσετε τον ορισμό της παραβολής. Μονάδες 5

**Γ.** Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = p^2$, στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = p^2$ Μονάδες 10

### ΘΕΜΑ $2^0$

**Α.** Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq yy'$ να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$.

Μονάδες 15

**Β.** Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ)

**α.** Για τρία μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύει πάντα:

$\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$

**β.** Η ευθεία που ορίζουν τα σημεία $A(1,3)$ και $B(1,5)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$y = \alpha x + \beta$ για κατάλληλους συντελεστές $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

**γ.** ο κύκλος c: $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ εφάπτεται και στους δύο άξονες.

**δ.** Η εφαπτομένη οποιουδήποτε κύκλου με ακτίνα $\rho > 0$ στο σημείο του κύκλου $M(\alpha, \beta)$

θα έχει εξίσωση $\alpha x + \beta y = \rho^2$

**ε.** Υπάρχουν τιμές του πραγματικού αριθμού κ για τις οποίες η εξίσωση:

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{\kappa} = 1$ παριστάνει έλλειψη. Μονάδες 10

## ΘΕΜΑ $3^0$

**Α.** Έστω δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου.
Αν $(x, y)$ είναι οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ, να αποδείξετε ότι :

$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ και $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ Μονάδες 10

**Β.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

**α.** Αν $\vec{\alpha} = (x, y)$, τότε $|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 - y^2}$

**β.** Οι ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ είναι οι ευθείες:

$y = \frac{\beta}{\alpha}x$, $y = -\frac{\beta}{\alpha}x$

**γ.** Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (B, A)$.

**δ.** Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο αν $A^2 + B^2 + 4\Gamma > 0$

**ε.** Η εφαπτομένη της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση:

$\beta^2 x_1 x + \alpha^2 y_1 y = \alpha^2\beta^2$ Μονάδες 15

## ΘΕΜΑ $4^0$

**Α.** Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου που σχηματίζουν γωνία θ, να αποδείξετε ότι:

$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$ Μονάδες 8

**Β.** Δίνεται ο κύκλος C: $x^2 + y^2 = \rho^2$ και ένα σημείο του $A(x_1, y_1)$. Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση της εφαπτομένης του Α είναι:
$x x_1 + y y_1 = \rho^2$ Μονάδες 9

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε ως Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

**α.** Αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

**β.** Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -1$

**γ.** Αν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ τότε $\lambda_1 = -\lambda_2$

**δ.** Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$.
Μονάδες 8

## ΘΕΜΑ $5^0$

**Α.** Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων O(0, 0) και ακτίνα ρ έχει εξίσωση: $x^2 + y^2 = \rho^2$ Μονάδες 10

**Β.** Να γράψετε (χωρίς απόδειξη), την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$. Μονάδες 5

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστό (Σ)_ή Λάθος (Λ)

**α.** Αν $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ είναι η ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta})=1$.

**β.** Ισχύει ο τύπος: $\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = \vec{\alpha} \cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}} \vec{v}$ .

**γ.** Η απόσταση του σημείου $M_0(x_0, y_0)$ από την ευθεία ε: $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι:

$d(M_0, \varepsilon) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

**δ.** Η εφαπτομένη της έλλειψης με εστίες στον άξονα x΄x, στο σημείο της $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση: $\dfrac{xx_1}{\alpha^2} - \dfrac{yy_1}{\beta^2} = 1$.

**ε.** Η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει ευθεία, αν και μόνο αν: $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$.

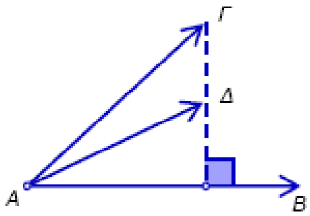
## ΘΕΜΑ $6^0$

**Α.** Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{v}$ δύο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$. Να αποδειχτεί ότι:

$\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = \vec{\alpha} \cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}} \vec{v}$ Μονάδες 10

**Β.** Για τα διανύσματα του παρακάτω σχήματος να αποδειχτεί ότι :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$




Μονάδες 5

**Γ.** Δώστε τον ορισμό και τον τύπο της έλλειψης με εστίες Ε΄, Ε που βρίσκονται στον άξονα x΄x. Μονάδες 10

## ΘΕΜΑ $7^0$

**Α.** Αν Ε και Ε΄ δύο σημεία του επιπέδου, τι ονομάζουμε έλλειψη με εστίες τα σημεία αυτά; Μονάδες 5

**Β.** Αν $\varepsilon$ η εκκεντρότητα της έλλειψης $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$, να αποδείξετε ότι $\dfrac{\beta}{\alpha} = \sqrt{1-\varepsilon^2}$

Μονάδες 10

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ***"Σωστό"***, αν η πρόταση είναι σωστή ή ***"Λάθος"***, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

**α.** Αν το Μ είναι μέσο του τμήματος ΑΒ και το Ο σημείο αναφοράς, $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}}{2}$

**β.** Αν $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 0^\circ$ τότε $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$

**γ.** Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$

**δ.** Η παραβολή $x^2 = 2py$ έχει εστία $E\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$

**ε.** Όταν η εκκεντρότητα μιας έλλειψης τείνει στο μηδέν τότε η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος. Μονάδες 10

## ΘΕΜΑ $2^0$ ………………… ΑΠΟ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ $1^0$

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$.

**Α.** Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ Μονάδες 7

**Β.** Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό λ, έτσι ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}-\lambda\cdot\vec{\beta}$ να είναι κάθετα μεταξύ τους. Μονάδες 9

**Γ.** Να υπολογίσετε το μέτρο του $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ Μονάδες 9

### ΘΕΜΑ $2^0$

Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα. Δίνονται επίσης τα διανύσματα $\vec{v}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και $\vec{u}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$. Αν είναι $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ και $\vec{u}\perp\vec{v}$, τότε:

**Α.** Να αποδείξετε ότι: $(\vec{v}+\vec{u})\uparrow\uparrow\vec{\alpha}$ και $(\vec{v}-\vec{u})\uparrow\downarrow\vec{\beta}$. Μονάδες 4

**Β.** Να αποδείξετε ότι: $|\vec{\alpha}|=\frac{1}{2}|\vec{\beta}|$ Μονάδες 6

**Γ.** Να αποδείξετε ότι: $|\vec{v}|=|\vec{u}|=\sqrt{2}|\vec{\beta}|$ Μονάδες 8

**Δ.** Να υπολογίσετε τη γωνία φ των διανυσμάτων $\vec{\beta}$ και $\vec{v}$. Μονάδες 7

### ΘΕΜΑ $3^0$

Δίνονται τα σημεία Α(5,1) Β(−1,−2) Γ(−3,2). Να βρεθούν:

**Α.** το $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}$

**Β.** οι συντεταγμένες του σημείου Δ αν το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο

**Γ.** το $|\overrightarrow{A\Gamma}|$

**Δ.** το εμβαδόν του ΑΒΓΔ Μονάδες 7 + 7 + 4 + 7

### ΘΕΜΑ $4^0$

Δίνονται τα σημεία Α(2,1), Β(−3,2) και Γ(1,−3). Να βρεθούν:

**Α.** Η απόσταση του Γ από την ΑΒ. Μονάδες 8

**Β.** Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. Μονάδες 9

**Γ.** Την εξίσωση της διαμέσου από την κορυφή Α. Μονάδες 8

### ΘΕΜΑ $5^0$

Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ του επιπέδου ισχύουν: $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=2|\vec{\alpha}|$ και η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}$ είναι $60^\circ$ να δειχθεί ότι:

**Α.** $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ Μονάδες 12

**Β.** $|\vec{\beta}|=\sqrt{3}|\vec{\alpha}|$ Μονάδες 13

## ΘΕΜΑ $6^0$

Δίνονται τα σημεία $A(0,6)$, $B(-4, 9)$ και $\Gamma(1,-1)$.

**Α.** Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα σημεία Α και Β. Μονάδες 5

**Β.** Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) που περνά από τα σημεία Α και Β έχει εξίσωση την ε: $3x + 4y - 24 = 0$ Μονάδες 8

**Γ.** Να βρείτε την απόσταση του σημείου Γ από την ευθεία (ε). Μονάδες 6

**Δ.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. Μονάδες 6

## ΘΕΜΑ $7^0$

Δίνεται ο κύκλος $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 5$ και το σημείο του $A(2,-1)$.

**Α.** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο Α. Μονάδες 12

**Β.** Να βρεθεί ευθεία παράλληλη στην προηγούμενη εφαπτομένη που περνάει από το κέντρο του κύκλου Μονάδες 13

## ΘΕΜΑ $8^0$

Δίνονται τα σημεία $A(3,1)$, $B(-1,-1)$ και οι ευθείες:

$\varepsilon_1$: $x - 3y + \lambda + 4 = 0$

$\varepsilon_2$: $2x + y - 5\lambda + 1 = 0$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

**Α.** Να δειχθεί ότι οι ευθείες $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ τέμνονται σε σημείο Μ το οποίο και να βρεθεί. Μονάδες 7

**Β.** Να βρεθεί η εξίσωση της γραμμής που κινείται το Μ για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$. Μονάδες 8

**Γ.** Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΜ είναι σταθερό (ανεξάρτητο του λ) Μονάδες 10

## ΘΕΜΑ $9^0$

Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{3}$, να υπολογίσετε:

**Α.** το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

**Β.** το $\kappa \in \Re$, ώστε τα διανύσματα $\vec{u} = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{v} = \kappa\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ να είναι παράλληλα.

**Γ.** το μέτρο: $|3\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$

## ΘΕΜΑ $10^0$

Δίνονται τα σημεία $A_1(-1, 2)$ και $A_2(2, -1)$ ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων

**Α.** Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας $\varepsilon_1$ που διέρχεται από τα σημεία αυτά.

**Β.** Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει η παραπάνω ευθεία με τον άξονα $x'x$

**Γ.** Δίνεται επί πλέον η ευθεία $\varepsilon_2$: $(2-\kappa)x + \kappa y + 1 = 0$

**i.** Να βρεθεί η τιμή του **κ** ώστε $\varepsilon_2 // \varepsilon_1$

**ii.** Για την τιμή του **κ** που βρήκατε να βρεθεί η απόσταση των παραλλήλων $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$

# ΘΕΜΑ $3^0$………………… ΑΠΟ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ $1^0$

Δίνονται τα σημεία $A(2\lambda-1,\ 3\lambda+2)$, $B(1,2)$ και $\Gamma(2,3)$ όπου $\lambda\in\Re$ και $\lambda\neq0$

**A.** Να αποδείξετε ότι το A κινείται σε ευθεία καθώς το λ μεταβάλλεται στο $\Re$, της οποίας να βρείτε την εξίσωση. Μονάδες 10

**B₁.** Να δείξετε ότι το σημείο A που απέχει από την ευθεία ΒΓ απόσταση ίση με 2 είναι το $A(-9,\ -10)$ Μονάδες 5

**B₂.** Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ Μονάδες 5

**B₃.** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το $A(-9,\ -10)$ και εφάπτεται στην ευθεία ΒΓ Μονάδες 5

## ΘΕΜΑ $2^0$

Δίνεται η εξίσωση: $\kappa^2(x-y+1)+\kappa(2x+y+5)+x+2y+8=0$

**A.** Να εξεταστεί αν παριστάνει ευθεία για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$. Μονάδες 10

**B.** Να βρεθεί αν για τις τιμές του $\kappa\in\mathbb{R}$ που παριστάνει ευθεία, οι ευθείες περνούν από το ίδιο σημείο. Μονάδες 7

**Γ.** Να βρεθεί ποια από τις παραπάνω γραμμές σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο Μονάδες 8

## ΘΕΜΑ $3^0$

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με $A(1,\ 3)$, $B(-2,\ -7)$ και $\Gamma(4,\ -1)$.

**A.** Να βρείτε την εξίσωση του ύψους ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ. Μονάδες 6

**B.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. Μονάδες 6

**Γ.** Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ. Μονάδες 6

**Δ.** Να υπολογίσετε την οξεία γωνία των ευθειών ΑΜ και ΑΔ. Μονάδες 7

## ΘΕΜΑ $4^0$

Δίνεται η εξίσωση $x-y+1+\lambda(x+2y-1)$ (1) με $\lambda\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

**A.** Η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ Μονάδες 10

**B.** Όλες οι ευθείες της εξίσωσης (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο να προσδιορίσετε. Μονάδες 8

**Γ.** Να δείξετε ότι για $\lambda=0$ η ευθεία που προκύπτει από την (1) εφάπτεται του κύκλου: $x^2+(y+1)^2=2$ Μονάδες 7

## ΘΕΜΑ $5^0$

Έστω η εξίσωση $x^2-y^2+6\lambda x+2\lambda y+8\lambda^2=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

**α.** Δείξτε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ που είναι κάθετες μεταξύ τους. Μονάδες 10

**β.** Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Μ των $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ σαν συνάρτηση του λ Μονάδες 8

**γ.** Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία κινείται το σημείο Μ Μονάδες 7

## ΘΕΜΑ $6^0$

Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{\alpha}=(1,1)$, $\vec{\beta}=(0,2)$ και $\vec{\gamma}=(-1,1)$

**Α.** Να δείξετε ότι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι $45°$ Μονάδες 8

**Β.** Να βρείτε την προβολή του διανύσματος $\vec{\beta}$ πάνω στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$ Μονάδες 9

**Γ.** Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ Μονάδες 8

## ΘΕΜΑ $7^0$

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ που σχηματίζουν γωνία $\widehat{(\vec{\alpha},\vec{\beta})}=\frac{\pi}{3}$

και η εξίσωση $x^2+y^2-2|\vec{\alpha}|\cdot x-|\vec{\beta}|\cdot y+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$

**Α.** Να αποδειχτεί ότι:

**α.** $\vec{\beta}\neq 2\vec{\alpha}$ Μονάδες 5

**β.** η εξίσωση παριστάνει κύκλο του οποίου να βρεθεί το κέντρο Κ και η ακτίνα ρ Μονάδες 5

**Β.** Αν $K(1,1)$ το κέντρο του κύκλου να αποδειχτεί ότι:

**α.** $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$, $\rho=1$ Μονάδες 5

**β.** ο κύκλος εφάπτεται στην ευθεία ε: $3x+4y-12=0$ Μονάδες 5

**γ.** η προβολή του $\vec{\beta}$ στο $\vec{\alpha}$ είναι το $\vec{\alpha}$ Μονάδες 5

## ΘΕΜΑ $8^0$

Δίνεται η εξίσωση: $x^2+y^2-4x+4y+3=0$ (1)

**α.** Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του Μονάδες 12

**β.** Να δείξετε ότι το σημείο $M(1,-3)$ είναι εσωτερικό του κύκλου και να βρεθεί η εξίσωση της χορδής του η οποία να έχει μέσο το σημείο $M(1,-3)$ Μονάδες 13

## ΘΕΜΑ $9^0$

Δίνεται η παραβολή $y^2=4x$. Να βρείτε:

**α.** Την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής. Μονάδες 5

**β.** Τις ευθείες που διέρχονται από την εστία της παραβολής και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Μονάδες 10

**γ.** Την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι κάθετη στην ευθεία $y=x-1$. Μονάδες 10

## ΘΕΜΑ $10^0$

**α.** Δείξτε ότι η εξίσωση $x^2-4x+y^2-2y+1=0$ παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. Μονάδες 10

**β.** Η ευθεία $y=\frac{1}{2}x$ πόσα κοινά σημεία έχει, αν έχει, με τον παραπάνω κύκλο.

**γ.** Τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που είναι παράλληλες στην ευθεία $y=\frac{1}{2}x$.

Μονάδες 5 +10

## ΘΕΜΑ $11^0$

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (y-1,\ 1)$ και $\vec{\beta} = (y+1,\ 1-4x)$.

**Α.** Αν τα διανύσματα είναι κάθετα , να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x,\ y)$ είναι η παραβολή $C_1 : y^2 = 4x$ , της οποίας να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα . Μονάδες 6

**Β.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της παραβολής στο σημείο της $A(1\ ,\ 2)$. Μονάδες 4

**Γ.** Αν $\left|5\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right| = 3\sqrt{2}$ , δείξτε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $N(x\ ,\ y)$ είναι ο κύκλος

$C_2 :\ (x+1)^2 + \left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{8}$, του οποίου να βρείτε το κέντρο , την ακτίνα και την εφαπτομένη ευθεία που άγεται από το σημείο $A(-1{,}0)$ Μονάδες 10

**Δ.** Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) είναι κοινή εφαπτομένη των $C_1$ και $C_2$. Μονάδες 5

## ΘΕΜΑ $12^0$

Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση: $x - 2y = 4$

**Α.** Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας (ε) και τα σημεία Α, Β στα οποία τέμνει τους άξονες $x'x$ και $yy'$ αντιστοίχως. Μονάδες 6

**Β.** Να βρείτε το μέσο Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Μονάδες 4

**Γ.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) που είναι μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ και την απόσταση του σημείου $O(0{,}0)$ από αυτήν. Μονάδες 15

## ΘΕΜΑ $13^0$

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$ και $|\vec{\beta}| = 3$.

Δίνεται επίσης: $|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 7$. Να δείξετε ότι:

**Α.** $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -6$ Μονάδες 5

**Β.** $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = -1$ Μονάδες 4

**Γ.** $\vec{\alpha} = -\dfrac{2}{3}\vec{\beta}$ Μονάδες 8

**Δ.** $\left|\dfrac{1}{2}\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right| = 4$ Μονάδες 8

## ΘΕΜΑ $14^0$

Αν $\vec{\alpha} = (-4x+1,\ y+1)$ και $\vec{\beta} = (1,\ y-1)$ κάθετα διανύσματα.

**Α.** Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(x,\ y)$ ανήκει σε παραβολή της οποίας να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα. Μονάδες 8

**Β.** Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από την εστία Ε της παραβολής και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με $\dfrac{1}{2}$. Μονάδες 9

**Γ.** Να υπολογίσετε την οξεία γωνία των παραπάνω ευθειών. Μονάδες 8

## ΘΕΜΑ 1$^0$

Δίνεται το σημείο $A(-2,0)$ και ο κύκλος $x^2+y^2=1$.

**Α.** Να αποδειχτεί ότι οι εφαπτόμενες του κύκλου που διέρχονται από το $A(-2,0)$ είναι:

$(\varepsilon_1)$: $\sqrt{3}x-3y+2\sqrt{3}=0$ και

$(\varepsilon_2)$: $\sqrt{3}x+3y+2\sqrt{3}=0$. Μονάδες 6

**Β.** Να βρεθεί η γωνία των εφαπτομένων αυτών. Μονάδες 7

**Γ.** Να αποδείξετε ότι οι ευθείες αυτές είναι κοινές εφαπτόμενες του εν λόγω κύκλου και του κύκλου: $(x-3)^2+y^2=\dfrac{25}{4}$ Μονάδες 6

**Δ.** Να εξεταστεί αν υπάρχει και άλλη κοινή εφαπτόμενη. Μονάδες 6

## ΘΕΜΑ 2$^0$

Σε ένα σύστημα συντεταγμένων Oxy στο επίπεδο, δίνονται το σημείο Ε(α, 0), το διάνυσμα $\overrightarrow{EA}=\left(\dfrac{\beta^2-4\alpha^2}{4\alpha},\beta\right)$ και η καμπύλη με εξίσωση $x^2+y^2-12\alpha x+16\alpha^2=0$ (1), όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$. Να αποδείξετε ότι:

**Α.** Το πέρας Α του διανύσματος $\overrightarrow{EA}$ ανήκει σε παραβολή με εστία το σημείο Ε. Μονάδες 9

**Β.** Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\alpha \neq 0$, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. Μονάδες 8

**Γ.** Τα κοινά σημεία της παραβολής του (Α) ερωτήματος και του κύκλου του (Β) ερωτήματος ανήκουν σε δύο ευθείες εξαιρουμένου του κοινού τους σημείου. Μονάδες 8

## ΘΕΜΑ 3$^0$

Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση: $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$, $\alpha>\beta$ και το σημείο $M(\alpha\cdot ημθ, \beta\cdot συνθ)$, $\theta\in(0,2\pi)$ με $\theta\neq\dfrac{\pi}{2}$, $\theta\neq\dfrac{3\pi}{2}$.

**Α.** Να εξετάσετε αν το σημείο ανήκει στην έλλειψη Μονάδες 4

**Β.** Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της έλλειψης που διέρχεται από το σημείο Μ. Μονάδες 4

**Γ.** Να δείξετε ότι η κάθετη στην εφαπτομένη στο σημείο Μ έχει εξίσωση
$(\varepsilon)$: $(\alpha\cdot συνθ)x-(\beta\cdot ημθ)y=(\alpha^2-\beta^2)\cdot ημθ\cdot συνθ$ Μονάδες 9

**Δ.** Αν η $(\varepsilon)$ διέρχεται από το σημείο $(\beta, 0)$ να δείξετε ότι ισχύει η σχέση:
$ημθ=\dfrac{\beta}{\alpha\cdot\varepsilon^2}$, όπου ε η εκκεντρότητα της έλλειψης. Μονάδες 8

## ΘΕΜΑ $4^0$

Έστω ο κύκλος $C_1$: $x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$ και η παραβολή $C_2$: $y^2 = 2px$

**Α.** Αν το κέντρο του κύκλου $C_1$ είναι εστία της παραβολής $C_2$ να βρεθεί το p.

Μονάδες 5

**Β.** Για την τιμή του p που βρήκατε στο ερώτημα 1 να βρεθούν οι εφαπτόμενες της παραβολής $C_2$ που διέρχονται από το σημείο A(0,2) Μονάδες 12

**Γ.** Ποια από τις εφαπτόμενες της $C_2$ του ερωτήματος 2 εφάπτεται και στον κύκλο $C_1$

Μονάδες 8

## ΘΕΜΑ $5^0$

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 - 6x + 4y + \kappa = 0$ με $\kappa \in \mathbb{R}$. (1)

**Α.** Να βρεθούν οι τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε η παραπάνω εξίσωση να παριστάνει κύκλο C.

Μονάδες 6

**Β.** Να δειχθεί ότι αν η ακτίνα του κύκλου C είναι $\rho = 1$, τότε $\kappa = 12$. Μονάδες 7

**Γ.** Να δειχθεί ότι το σημείο M(4,2) είναι εξωτερικό του κύκλου C που προκύπτει από (1) για $\kappa = 12$. Στη συνέχεια να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων στον κύκλο αυτόν, που διέρχονται από το M. Μονάδες 12

## ΘΕΜΑ $6^0$

Δίνονται τα ομόρροπα διανύσματα $\vec{v}$, $\vec{u}$ και το διάνυσμα $\vec{w} = 2\vec{v} - \vec{u}$ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις: $|\vec{u}| = 5 + |\vec{v}|$ και $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$

**Α.** Να δείξετε ότι: $|\vec{v}| = 1$, $|\vec{u}| = 6$ και $|\vec{w}| = 4$. Μονάδες 12

**Β.** Θεωρούμε το καρτεσιανό επίπεδο συντεταγμένων ΧΟΨ.

**α.** Να βρεθούν οι εστίες Ε, Ε΄ και η εκκεντρότητα της έλλειψης c:

$$\frac{x^2}{\vec{w}^2} + \frac{y^2}{\vec{v}^2} = 1$$

Μονάδες 6

**β.** Θεωρούμε την ευθεία ε: $x = |\vec{v}|$ και το σημείο $K\left(\frac{|\vec{w}| - |\vec{u}|}{2}, 0\right)$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει:
$d(M, \varepsilon) = (MK)$ Μονάδες 7

## ΘΕΜΑ $7^0$

Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$ και η εξίσωση
$(C_1): x^2 + y^2 - 6\kappa x + 2(\kappa - 1)y + 2\kappa - 1 = 0$, $\kappa \in \Re$

**Α.** Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής. Μονάδες 4

**Β.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $(C_1)$ παριστάνει κύκλο για κάθε $\kappa \in \Re$, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του. Μονάδες 6

**Γ.** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των παραπάνω κύκλων. Μονάδες 5

**Δ.** Να αποδείξετε ότι ο κύκλος που προκύπτει από την εξίσωση $(C_1)$ για $\kappa = 1$ και η παραβολή εφάπτονται. Μονάδες 10

## ΘΕΜΑ $8^0$

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - y^2 + 8x + 16 = 0$

**Α.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει δύο ευθείες, οι οποίες είναι κάθετες μεταξύ τους. Μονάδες 6

**Β.** Δίνονται οι ευθείες (η): $x - y + 4 = 0$ και (θ): $x + y + 4 = 0$. Να βρείτε σημείο Α(α, β), $\alpha > 0$ και $\beta > 0$ τέτοιο ώστε το διάνυσμα $\overrightarrow{\delta_1} = (4, \alpha)$ να είναι παράλληλο στην ευθεία (η) και το διάνυσμα $\overrightarrow{\delta_2} = (-8, 2\beta)$ να είναι παράλληλο στην ευθεία (θ). Μονάδες 5

**Γ.** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από το σημείο Α και έχει κέντρο το σημείο Κ(1, 0). Μονάδες 5

**Δ.** Αν $B(x_1, 0)$ με $x_1 > 0$ και $\Gamma(0, y_1)$ με $y_1 > 0$ σημεία του παραπάνω κύκλου να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία Β και Γ. Μονάδες 9

## ΘΕΜΑ $9^0$

Δίνονται τα σημεία Α(1, y) και Β(2x, y) του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.

**Α.** Αν ισχύει $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$, τότε να δείξετε ότι τα σημεία Μ(x, y) ανήκουν στην παραβολή $c_1$: $y^2 = -2x$, της οποίας να βρείτε την εστία Ε και τη διευθετούσα δ.

**Β.** Αν ισχύει $3|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 = 15$, τότε να δείξετε ότι τα σημεία Μ(x, y) ανήκουν στον κύκλο $c_2$: $x^2 + y^2 = 3$, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

**Γ.** Να δείξετε ότι τα κοινά σημεία της παραβολής $c_1$ και του κύκλου $c_2$ είναι τα $\Gamma\left(-1, \sqrt{2}\right)$ και $\Delta\left(-1, -\sqrt{2}\right)$.

**Δ.** Να δείξετε ότι η εφαπτομένη $\varepsilon_1$ της παραβολής $c_1$ στο σημείο Γ είναι παράλληλη στην εφαπτομένη $\varepsilon_2$ του κύκλου $c_2$ στο σημείο Δ.

**Ε.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $c_2$ που είναι παράλληλη στην $\varepsilon_2$.

## ΘΕΜΑ $10^0$

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (-6, 8)$ και $\vec{v} = (9, -12)$

**Α.** Να δείξετε ότι είναι αντίρροπα. Μονάδες 5

**Β.** Να δείξετε ότι η εξίσωση της έλλειψης που έχει άξονες τα διπλάσια των μέτρων των διανυσμάτων $\vec{u}$, $\vec{v}$ και μεγάλο άξονα στον y΄y είναι:

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{225} = 1.$$

Μονάδες 7

**Γ.** Να δείξετε ότι η εφαπτομένη (δ) της έλλειψης στο σημείο $A\left(5, \frac{15\sqrt{3}}{2}\right)$ είναι η ευθεία:

$$3x + 2\sqrt{3}y - 60 = 0.$$

Μονάδες 7

**Δ.** Να δείξετε ότι η (δ) σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον x΄x. Μονάδες 6

## ΘΕΜΑ $11^0$

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1$: $\lambda x + y = \lambda$ και $\varepsilon_2$: $x - \lambda y = 3$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

**Α.** Δείξτε ότι η κάθε ευθεία διέρχεται από ένα σταθερό σημείο τα οποία να βρείτε.

Μονάδες 8

**Β.** Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων τομής $M(x, y)$ είναι κύκλος.

Μονάδες 8

**Γ.** Δίνεται το σημείο $\Delta(3, 5)$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που διέρχονται από το Δ, καθώς και το μήκος των εφαπτομένων τμημάτων.

Μονάδες 9

## ΘΕΜΑ $12^0$

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 - 2\lambda^2 x + 2\lambda y + \lambda^3 = 0$ $(C_1)$.

**Α.** Βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \Re$ για τις οποίες η εξίσωση $(C_1)$ παριστάνει κύκλο.

**Β.** Να δείξετε ότι τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται στην παραβολή $(C_2)$ : $y^2 = x$.

**Γ.** Αν η ευθεία $x - 2y + 1 = 0$ εφάπτεται της παραβολής $(C_2)$ στο σημείο $K(x_0, y_0)$, να βρείτε το σημείο K, και την ακτίνα του κύκλου $(C_1)$ που έχει κέντρο το σημείο $K(x_0, y_0)$.

## ΘΕΜΑ $13^0$

Δίνονται τα σημεία $A(-1, 2)$, $B(-3, 1)$, $\Gamma(3, -2)$ και $\Delta(4, -1)$ ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων.

**Α.** Να αναλύσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μία να έχει τη διεύθυνση του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.

**Β.** Να δείξετε ότι η γραμμή που γράφουν τα σημεία $M(x, y)$ του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Gamma M} = 0$, είναι κύκλος του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

**Γ.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου του προηγούμενου ερωτήματος που είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{u} = \pi\rho o\beta_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{\Gamma\Delta}$

## ΘΕΜΑ $14^0$

Δίνεται ο κύκλος C: $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 19 = 0$. Να βρείτε:

**Α.** το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου — Μονάδες 15

**Β.** την εξίσωση του κύκλου $C_1$, ο οποίος είναι ομόκεντρος με τον κύκλο C και εφάπτεται στην ευθεία (ε): $3x - 4y + 24 = 0$ — Μονάδες 10

## ΘΕΜΑ $15^0$

Δίνεται η εξίσωση C: $x^2 + y^2 - 2x - 4\lambda x + 4\lambda = 0$ (1)

**Α.** Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να προσδιοριστεί το κέντρο και η ακτίνα συναρτήσει του λ. — Μονάδες 7

**Β.** Ποιος ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων (C) Μονάδες 7

**Γ.** Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο Α.

**Δ.** Έστω Β, Γ τα σημεία τομής της ευθείας (ε): $y = 6x$ με τον κύκλο (c).
Να προσδιορίσετε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{A\Gamma}$. Μονάδες 5

## ΘΕΜΑ 16$^0$

Δίνεται η εξίσωση C: $x^2 + y^2 - 6kx - 8ky = 0$ , $k \in R^*$

**Α.** Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο (για οποιαδήποτε τιμή του $k \in R^*$) του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

**Β.** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων

**Γ.** Δείξτε ότι οι κύκλοι C διέρχονται από το σημείο O(0, 0) για κάθε $k \in R^*$

**Δ.** Έστω $C_1$ ο κύκλος για $k = 1$ και ευθεία (ε) με εξίσωση (ε): $y = \lambda x + 2$. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$

ώστε η ευθεία (ε) να τέμνει τον κύκλο $C_1$ σε δύο σημεία Α και Β έτσι ώστε $\widehat{AOB} = 90^\circ$

## ΘΕΜΑ 17$^0$

Δίνεται η παραβολή $y^2 = 2px$, $p > 0$. Μια ευθεία ε εφάπτεται της παραβολής στο σημείο της $A(\frac{p}{2}, p)$ και του κύκλου $x^2 + y^2 = 2$.

**α.** Να αποδείξετε ότι $p = 4$ Μονάδες 9

**β.** Να αποδείξετε ότι οι κοινές εφαπτόμενες της παραβολής και του κύκλου είναι
ε: $y = x + 2$ και ε΄: $y = -x - 2$ Μονάδες 9

**γ.** Αν η ε τέμνει τον y΄y στο Β και τον x΄x στο Γ, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{E\Gamma} = 2\overrightarrow{EB}$
όπου Ε η εστία της παραβολής Μονάδες 7

## ΘΕΜΑ 18$^0$

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4\lambda x - 4 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (ε)

**α.** Να δείξετε ότι η (ε) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του

**β.** Να δείξετε ότι ο κύκλος διέρχεται από δύο σταθερά σημεία.

**γ.** Να βρεθεί το λ ώστε η ευθεία $y = x - 2$ να εφάπτεται στον παραπάνω κύκλο .

**δ.** Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης που έχει ως εστίες τα σημεία (0, –2) και (0,2) και μεγάλο άξονα μήκους 10 Μονάδες 6 + 6 + 7 + 6

## ΘΕΜΑ 19$^0$

**Α.** Να βρείτε το κέντρο Κ και την ακτίνα ρ του κύκλου που έχει εξίσωση:
$x^2 + y^2 - 2\lambda^2 x - 4\lambda y + \lambda^4 + 3\lambda^2 - 1 = 0$ , $\lambda \in \mathbb{R}$ Μονάδες 6

**Β.** Να αποδείξετε ότι η γραμμή (c) πάνω στην οποία βρίσκεται το κέντρο Κ όταν το λ μεταβάλλεται είναι παραβολή , της οποίας να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα
Μονάδες 8

**Γ.** Αν η εφαπτομένη της παραβολής (c) στο σημείο της $A(3, 2\sqrt{3})$ τέμνει τη διευθετούσα στο σημείο Β τότε:

**α.** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο το ΑΒ Μονάδες 7

**β.** Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο το ΑΒ εφάπτεται στον άξονα x΄x στην εστία της παραβολής Μονάδες 4

## ΘΕΜΑ $20^0$

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $\left(\widehat{\vec{\alpha}\,\vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{3}$ και $x^2 + y^2 - 2|\vec{\alpha}|x - |\vec{\beta}|y + \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0$ (1)

Να δείξετε ότι :

**α.** $2\vec{\alpha} \neq \vec{\beta}$

**β.** Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με ακτίνα $\rho = \frac{|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}|}{2}$

**γ.** Αν το κέντρο του κύκλου είναι Κ(1 , 1) τότε $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $\rho=1$

**α.** Ο κύκλος εφάπτεται στην ευθεία $3x + 4y - 12 = 0$

**ε.** Η προβολή του $\vec{\beta}$ στο $\vec{\alpha}$ είναι $\vec{\alpha}$ Μονάδες $5 \times 5$

## ΘΕΜΑ $21^0$

Δίνονται τα σημεία $M(9 - 4\kappa,\ 3\kappa - \frac{3}{4})$ και $N(4\eta\mu\varphi,\ 4\sigma\upsilon\nu\varphi)$, $0 < \varphi < 2\pi$

**α.** Δείξτε ότι το Μ βρίσκεται σε ευθεία (ε): $3x + 4y = 24$ και το Ν βρίσκεται σε κύκλο (C ) με κέντρο Ο (0, 0) και ακτίνα $\rho = 4$. Μονάδες 5

**β.** Αν Α, Β τα σημεία που τέμνει η (ε) τους άξονες x΄x, y΄y αντίστοιχα και Γ μέσο ΑΒ, να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων $(\varepsilon_1)$, $(\varepsilon_2)$ του κύκλου (C) από το σημείο Γ και το συνημίτονο της αμβλείας γωνίας που σχηματίζουν Μονάδες 12

**γ.** Αν $\overrightarrow{O\Gamma} = 2\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ όπου Ο(0, 0) δείξτε ότι το σημείο Δ έχει συντεταγμένες $\Delta\left(6,\ \frac{9}{2}\right)$ και να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου ΔΑΒ . Μονάδες 8

## ΘΕΜΑ $22^0$

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 1)x + (\lambda - 1)y - 3\lambda + 1 = 0$ (1), με $\lambda \in \mathbb{R}$

**Α.** Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή της παραμέτρου λ Μονάδες 5

**Β.** Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση (1) είναι ευθεία παράλληλη στη διευθετούσα της παραβολής $y^2 = 4x$ και να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας Μονάδες 7

**Γ.**

**α.** Να δείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση (1) που διέρχεται από το σημείο Μ(2, 2) είναι η ε: $y = 2$ Μονάδες 5

**β.** Στη συνέχεια να βρείτε δύο ευθείες που διέρχονται από την αρχή Ο των αξόνων και τέμνουν την ευθεία ε στα σημεία Α, Β αντίστοιχα έτσι ώστε το σημείο Μ να είναι το μέσο του ΑΒ και το τρίγωνο ΟΑΒ να έχει εμβαδόν 10. Μονάδες 8