Επιμέλεια λύσεων: Μάκης Χατζόπουλος

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΗ ΝΕΑ ΥΛΗ 2018 – 19

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

I.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής <u>δικαιολογώντας συγχρόνως την απάντησή σας</u>.

1. Ισχύει $\int_\alpha^\beta (f(x)+g(x))dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(x)dx$ **Α** Ψ

Αιτιολογία

Βασική ιδιότητα του ολοκληρώματος. Αν δεν γνωρίζουμε ότι οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς – όπως λανθασμένα έχει αμεληθεί από το σχολικό βιβλίο - τότε η προσέγγισή μας σε αυτό το ερώτημα θα ήταν διαφορετική (όπως και σε άλλα ερωτήματα).

Μπορεί η συνάρτηση $f+g$ *να είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα* $[\alpha,\beta]$ *άρα να ορίζεται το ολοκλήρωμα του πρώτου μέλους δηλαδή το* $\int_\alpha^\beta (f(x)+g(x))dx$ *ενώ οι συναρτήσεις* f,g *να μην είναι συνεχείς στο διάστημα αυτό, άρα μην ορίζεται καν τα ολοκληρώματα του β΄ μέλους δηλαδή τα* $\int_\alpha^\beta f(x)dx,\ \int_\alpha^\beta g(x)dx$.

Πάρτε για παράδειγμα τις συναρτήσεις

$$f(x)=\begin{cases}-1 & ,\alpha\le x<\dfrac{\alpha+\beta}{2}\\ 1 & ,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\le x\le\beta\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}1 & ,\alpha\le x<\dfrac{\alpha+\beta}{2}\\ -1 & ,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\le x\le\beta\end{cases}$$

δεν είναι συνεχής στο μέσο του διαστήματος $[\alpha,\beta]$ *δηλαδή στο* $x_0=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ *όμως η συνάρτηση* $f(x)+g(x)=0$ *είναι συνεχής στο* $[\alpha,\beta]$.

2. Ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)\cdot g(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx\cdot\int_\alpha^\beta g(x)dx$ Α **Ψ**

Αιτιολογία

Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=g(x)=1$ *και* $\alpha=0,\beta=2$ *τότε*

$$\int_0^2 1\cdot 1dx=1(2-0)=2 \text{ ενώ } \int_0^2 1dx\cdot\int_0^2 1dx=1(2-0)\cdot 1(2-0)=4$$

3. Αν $\alpha=\beta$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$. **Α** Ψ

Αιτιολογία

Βασική ιδιότητα του ολοκληρώματος

4. Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Α **Ψ**

Αιτιολογία

Ένα αντιπαράδειγμα: $\int_0^{2\pi}\eta\mu x dx=[-\sigma\upsilon\nu x]_0^{2\pi}=0=[-\sigma\upsilon\nu x]_0^{2\pi}=-\sigma\upsilon\nu 2\pi+\sigma\upsilon\nu 0=0$

όμως η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ *δεν είναι παντού μηδέν για κάθε* $x\in[\alpha,\beta]$.

Επίσης, για αντιπαράδειγμα μπορούμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε περιττή συνάρτηση f με αντίθετα άκρα, δηλαδή $\int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$ *ενώ* $x^3 \neq 0 \Leftrightarrow x \in [-1,0) \cup (0,1]$.

5. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$. **Α** Ψ

Αιτιολογία

Γεωμετρική ερμηνεία του ολοκληρώματος

6. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Α **Ψ**

Αιτιολογία

Ένα αντιπαράδειγμα: $\int_{0}^{3\pi/2} \eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_{0}^{3\pi/2} = 1 > 0$ *όμως η συνάρτηση* $f(x) = \eta\mu x$ *είναι αρνητική για κάθε* $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Επίσης, ένα άλλο αντιπαράδειγμα είναι το εξής: $\int_{-1}^{2} 2x dx = \left[x^2\right]_{-1}^{2} = 4 - 1 = 3 > 0$ *ενώ η* $f(x) = 2x < 0$ *για κάθε* $x \in (-1, 0)$.

7. $\int_{-\alpha}^{\alpha} (x^4+1)dx < \int_{-\alpha}^{\alpha} (x^4+x^2+1)dx$, για κάθε $\alpha > 0$. **Α** Ψ

Αιτιολογία

$$\begin{aligned}\int_{-\alpha}^{\alpha}(x^4+x^2+1)dx - \int_{-\alpha}^{\alpha}(x^4+1)dx &= \int_{-\alpha}^{\alpha}[(x^4+x^2+1)-(x^4+1)]dx \\ &= \int_{-\alpha}^{\alpha}(x^4+x^2+1-x^4-1)]dx \\ &= \int_{-\alpha}^{\alpha} x^2 dx \\ &= \frac{2\alpha^3}{3} > 0\end{aligned}$$

8. $\int_{0}^{\pi/4} \ln(1-\eta\mu^2 x)dx = 2\int_{0}^{\pi/4} \ln \sigma\upsilon\nu x dx$. **Α** Ψ

Αιτιολογία

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1-\eta\mu^2 x\right)dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sigma\upsilon\nu^2 x\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln|\sigma\upsilon\nu x|^2 dx \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln|\sigma\upsilon\nu x| dx \overset{\sigma\upsilon\nu x>0,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]}{=} 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sigma\upsilon\nu x)dx\end{aligned}$$

9. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \alpha f(\alpha) = \beta f(\beta) - \int_{\alpha}^{\beta} x f'(x)dx$ **Α** Ψ

Αιτιολογία

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \alpha f(\alpha) &= \int_{\alpha}^{\beta} (x)' f(x)dx + \alpha f(\alpha) = \left[x f(x)\right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} x f'(x)dx + \alpha f(\alpha) \\ &= \beta f(\beta) - \int_{\alpha}^{\beta} x f'(x)dx\end{aligned}$$

10. $\int_{1}^{e} \ln x dx = \int_{e}^{1} \ln\frac{1}{t} dt$. **Α** Ψ

Αιτιολογία

$$\int_e^1 \ln\frac{1}{t}dt = \int_e^1 \ln t^{-1}dt = -\int_e^1 \ln t dt = \int_1^e \ln t dt = \int_1^e \ln x dx$$

11. Αν $\int_0^1 (f(x)-1)dx = 0$ τότε $\int_0^1 f(x)dx = 1$. **Α** Ψ

Αιτιολογία

$$\int_0^1 (f(x)-1)dx = 0 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 1dx = 0 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 1dx \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = 1$$

12. Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$, τότε $f(\xi)=0$ για κάποιο $\xi \in (\alpha,\beta)$. **Α** Ψ

Αιτιολογία

Έστω η αρχική συνάρτηση F της f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ *άρα* $F'(x)=f(x)$ *για κάθε* $x\in[\alpha,\beta]$. *Έχουμε,* $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0 \Rightarrow F(\beta)-F(\alpha)=0 \Rightarrow F(\beta)=F(\alpha)$

- *Η F είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα* $[\alpha,\beta]$
- *παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα* (α,β)
- *και* $F(\beta)=F(\alpha)$

άρα η συνάρτηση F ικανοποιεί το θεώρημα Rolle στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ *επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον* $\xi\in(\alpha,\beta)$ *τέτοιο ώστε:* $F'(\xi)=0 \Rightarrow f(\xi)=0$.

13. Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει δυο, τουλάχιστον, ετερόσημες τιμές. **Α** Ψ

Αιτιολογία

Έστω ότι η συνάρτηση f δεν παίρνει ετερόσημες τιμές τότε:

- *αν* $f(x)\ge 0$ *για κάθε* $x\in[\alpha,\beta]$ *και επειδή η f δεν είναι παντού μηδέν στο* $[\alpha,\beta]$ *από θεωρία έχουμε* $\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0 \Rightarrow 0>0$ *άτοπο.*
- *αν* $f(x)\le 0$ *για κάθε* $x\in[\alpha,\beta]$ *και επειδή η f δεν είναι παντού μηδέν στο* $[\alpha,\beta]$ *έχουμε* $\int_\alpha^\beta f(x)dx < 0 \Rightarrow 0<0$ *άτοπο.*

Οπότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in[\alpha,\beta]$ *τέτοια ώστε* $f(x_1)f(x_2)<0$.

14. Το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 (x^3-x)dx$ παριστάνει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3-x$ και τον άξονα των x. Α **Ψ**

Αιτιολογία

Για να παριστάνει το εμβαδόν πρέπει να υπολογίσουμε: $E(\Omega)=\int_{-1}^1 |x^3-x|dx$

Το πρόσημο του x^3-x *φαίνεται στο παρακάτω πίνακα προσήμων.*

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$
x^2-1	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
x^3-x	$-$	$+$	$-$	$+$	

Άρα για κάθε $x \in [0,1]$ *έχουμε:* $x^3 - x < 0$ *οπότε το ολοκλήρωμα* $\int_{-1}^{1}(x^3 - x)dx$ *δεν εκφράζει εμβαδόν. Το σωστό θα ήταν:* $\int_{-1}^{0}(x^3 - x)dx - \int_{0}^{1}(x^3 - x)dx = \ldots$

II.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση

1. Αν $f'(x) = \eta\mu\pi x$ και $f(0) = 0$, τότε το $f(1)$ ισούται με

Α) $-\frac{1}{\pi}$ Β) $\frac{1}{\pi}$ Γ) $\frac{-2}{\pi}$ Δ) $\frac{2}{\pi}$

Απάντηση

Είναι $f(x) = -\frac{1}{\pi}\sigma\upsilon\nu\pi x + c$ *όμως* $f(0) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{\pi} + c = 0 \Leftrightarrow c = \frac{1}{\pi}$ *άρα*

$f(x) = -\frac{1}{\pi}\sigma\upsilon\nu\pi x + \frac{1}{\pi}$ *οπότε* $f(1) = -\frac{1}{\pi}\sigma\upsilon\nu\pi + \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi}$

2. Το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{4-x}dx$ όπου $4 < \alpha < \beta$ είναι ίσο με

Α) $[\ln(4-x)]_{\alpha}^{\beta}$ Β) $[-\ln(4-x)]_{\alpha}^{\beta}$

Γ) $[\ln(x-4)]_{\alpha}^{\beta}$ Δ) $[-\ln(x-4)]_{\alpha}^{\beta}$

Απάντηση

Είναι $[-\ln|4-x|]_{\alpha}^{\beta} \overset{x>4 \Leftrightarrow x-4>0}{=} [-\ln(x-4)]_{\alpha}^{\beta}$

3. Το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta}\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 dx$ με $0 < \alpha < \beta$ είναι ίσο με

Α) $\left[\frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)^3}{3}\right]_{\alpha}^{\beta}$ Β) $\left[2\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]_{\alpha}^{\beta}$

Γ) $\left[\frac{(1-\ln x)^3}{3}\right]_{\alpha}^{\beta}$ Δ) $\left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} - 2x\right]_{\alpha}^{\beta}$ Ε) $\left[\frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)^3}{3}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]_{\alpha}^{\beta}$

Απάντηση

Είναι $\int_{\alpha}^{\beta}\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 dx = \int_{\alpha}^{\beta}\left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x}\right]_{\alpha}^{\beta}$

4. Το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1}|x^2 - 1|dx$ είναι ίσο με

Α) $\frac{4}{3}$ Β) 0 Γ) $-\frac{4}{3}$ Δ) $\frac{2}{3}$ Ε) $\frac{5}{3}$

Απάντηση

Είναι $\int_{-1}^{1}|x^2 - 1|dx = \int_{-1}^{1}(1 - x^2)dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$

Σημείωση: Η συνάρτηση $f(x) = |x^2 - 1|$ *είναι άρτια οπότε το ισούται*

$$\int_{-1}^{1}\left|x^2-1\right|dx = 2\int_{0}^{1}\left|x^2-1\right|dx = 2\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}$$

(προφανώς θέλει απόδειξη).

5. Το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta}\ln x dx$ είναι ίσο με

Α) $\left[\frac{1}{x}\right]_{\alpha}^{\beta}$ Β) $\left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_{\alpha}^{\beta}$ Γ) $\left[x(\ln x-1)\right]_{\alpha}^{\beta}$ Δ) $\left[x\ln x\right]_{\alpha}^{\beta}$

Απάντηση

Είναι, $\int_{\alpha}^{\beta}\ln x dx = \int_{\alpha}^{\beta}(x)'\ln x dx = [x\ln x]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta}1dx = [x\ln x]_{\alpha}^{\beta} - [x]_{\alpha}^{\beta} = [x(\ln x-1)]_{\alpha}^{\beta}$

6. Έστω f', g' συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x)\le g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει:

Α) $f'(x)\le g'(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$, Β) $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \le \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

Γ) $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$, $x\in[\alpha,\beta]$, Δ) $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx \le \int_{\beta}^{\alpha} g(x)dx$.

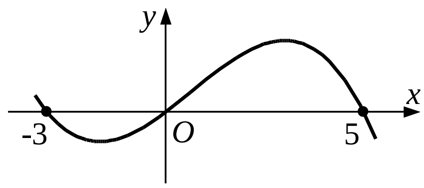
Απάντηση

Από τις οδηγίες – πρόταση χωρίς απόδειξη. Υπενθυμίζουμε πώς προκύπτει:

$f(x)\le g(x)\Leftrightarrow g(x)-f(x)\ge 0$ *για κάθε* $x\in[\alpha,\beta]$ *άρα από θεωρία έχουμε:*

$\int_{\alpha}^{\beta}(g(x)-f(x))\ge 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx \le \int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$

7. Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του διπλανού σχήματος είναι ίσο με



Α) $\int_{-3}^{5} f(x)dx$,

Β) $\int_{5}^{-3} f(x)dx$.

Γ) $\int_{-3}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{5} f(x)dx$,

Δ) $\int_{0}^{-3} f(x)dx + \int_{0}^{5} f(x)dx$.

Απάντηση

Είναι, $E(\Omega) = -\int_{-3}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{5} f(x)dx = \int_{0}^{-3} f(x)dx + \int_{0}^{5} f(x)dx$

8. Αν $f'(x)=g'(x)$ για κάθε $x\in[-1,1]$ και $f(0)=g(0)+2$, τότε για κάθε $x\in[-1,1]$ ισχύει:

Α) $f(x)=g(x)-2$, Β) $\int_{-1}^{1}(f(x)-g(x))dx = 4$.

Γ) $f(x)\le g(x)$, $x\in[-1,1]$ Δ) οι C_f, C_g έχουν κοινό σημείο στο $[-1,1]$.

Απάντηση

Οι f, g συνεχείς για κάθε $[-1,1]$ *άρα υπάρχει σταθερά* $c\in\mathbb{R}$ *τέτοια ώστε:*

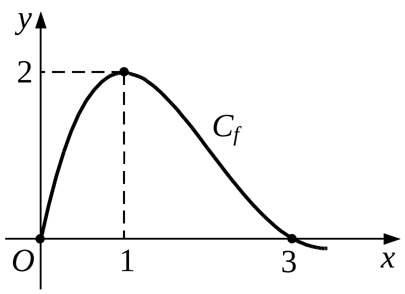
$f'(x)=g'(x)\Rightarrow f(x)=g(x)+c$ *όμως* $f(0)=g(0)+2$ *άρα* $c=2$ *οπότε*

$f(x)=g(x)+2$ *(αποκλείεται η επιλογή Α, Γ και Δ).*

Επομένως, $\int_{-1}^{1}(f(x)-g(x))dx = \int_{-1}^{1}2dx = 2(1+1)=4$

9. Έστω η συνάρτηση f με γραφική παράσταση όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν F μια αρχική της f τότε η $F'(1)$ είναι ίση με

Α) 0, Β) 1, Γ) 2, Δ) $\frac{1}{2}$.

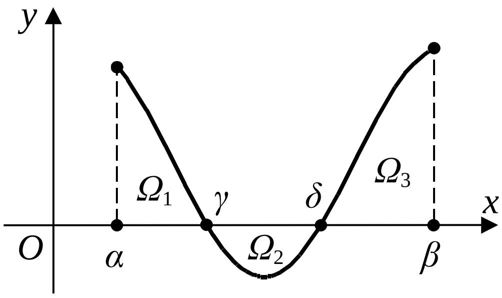


Απάντηση

Είναι, $F'(1)=f(1)=2$

10. Έστω η συνάρτηση f του διπλανού σχήματος. Αν, $E(\Omega_1)=2$, $E(\Omega_2)=1$ και $E(\Omega_3)=3$ τότε το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ είναι ίσο με:

Α) 6 Β) −4 Γ) 4
Δ) 0 Ε) 2



Απάντηση

Είναι,

$$
\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta f(x)dx &= \int_\alpha^\gamma f(x)dx+\int_\gamma^\delta f(x)dx+\int_\delta^\beta f(x)dx \\
&= \int_\alpha^\gamma f(x)dx-\int_\gamma^\delta (-f(x))dx+\int_\delta^\beta f(x)dx \\
&= \int_\alpha^\gamma |f(x)|dx-\int_\gamma^\delta |f(x)|dx+\int_\delta^\beta |f(x)|dx \\
&= E(\Omega_1)-E(\Omega_2)+E(\Omega_3) \\
&= 2-1+3 \\
&= 4
\end{aligned}
$$

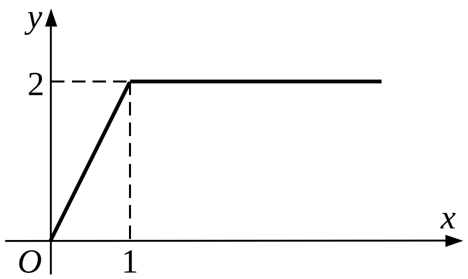
11. Έστω η συνάρτηση f με γραφική παράσταση όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν F μια αρχική της f τότε:

Α) $F(x)=x^2$,

Β) $F(x)=\begin{cases} 2x, & 0\le x<1 \\ 2, & 1\le x \end{cases}$,

Γ) $F(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x<1 \\ 2x, & 1\le x \end{cases}$,

Δ) $F(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x<1 \\ 2x-1, & 1\le x \end{cases}$



Απάντηση

Είναι, $f(x)=\begin{cases} 2x & ,0\le x<1 \\ 2 & ,x\ge 1 \end{cases}$ *άρα όλες οι αρχικές συναρτήσεις της f είναι*

$$F(x)=\begin{cases} x^2+c_1 & ,0\le x<1 \\ 2x+c_2 & ,x\ge 1 \end{cases}$$

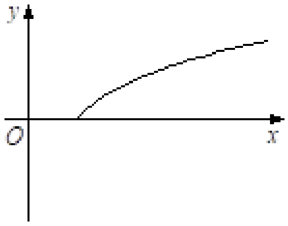
Όμως, η F είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής, οπότε

$$\lim_{x\to 1^-}F(x)=\lim_{x\to 1^+}F(x)\Rightarrow 1+c_1=2+c_2\Rightarrow c_1-c_2=1$$

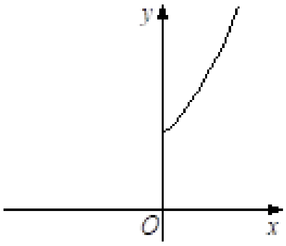
άρα αν θέσουμε πχ. $c_1=0$ *τότε* $c_2=-1$ *άρα* $F(x)=\begin{cases} x^2 & ,0\le x<1 \\ 2x-1 & ,x\ge 1 \end{cases}$

III.

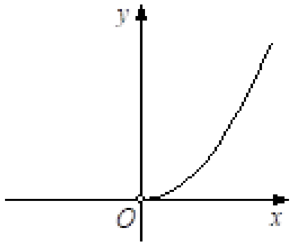
1. Ποιο από τα παρακάτω σχήματα αντιπροσωπεύει τη γραφική παράσταση της f, αν $xf'(x)=f(x)$ για κάθε $x>0$.



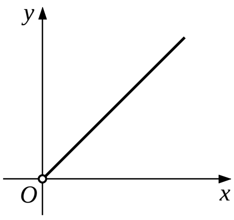
(A)



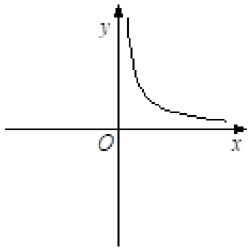
(B)



(Γ)



(Δ)



(Ε)

Απάντηση

Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$xf'(x)=f(x)\Leftrightarrow xf'(x)-f(x)=0\Leftrightarrow \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=0\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)'=0\Leftrightarrow f(x)=cx$$

2. Ποια από τα παρακάτω ολοκληρώματα είναι καλώς ορισμένα;

Α) $\int_0^1 \frac{1}{x-1}dx$ Β) $\int_0^{\pi/2} ημx dx$ Γ) $\int_0^{\pi} εφx dx$

Δ) $\int_0^1 \ln x dx$ Ε) $\int_0^2 \sqrt{1-x^2}dx$ Ζ) $\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx$.

Απάντηση

Το ολοκλήρωμα Α δεν ορίζεται διότι το άκρο 1 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{x-1}$, $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

Το ολοκλήρωμα Β είναι καλώς ορισμένο διότι η συνάρτηση $f(x)=ημx$ ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Το ολοκλήρωμα Γ δεν ορίζεται διότι $\frac{\pi}{2}$ δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=εφx$ (διότι $συν\frac{\pi}{2}=0$).

Το ολοκλήρωμα Δ δεν ορίζεται διότι το άκρο 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\ln x$, $x>0$.

Το ολοκλήρωμα Ε δεν ορίζεται διότι το άκρο 2 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1,1]$.

Το ολοκλήρωμα Ζ είναι καλώς ορισμένο διότι η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x+1}$ ορίζεται για κάθε $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

3. Να εντοπίσετε το λάθος στις παρακάτω πράξεις:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+1}\frac{1}{x}dx=\int_{\alpha}^{\alpha+1}(x)'\frac{1}{x}dx=\left[x\cdot\frac{1}{x}\right]_{\alpha}^{\alpha+1}-\int_{\alpha}^{\alpha+1}x\left(\frac{1}{x}\right)'dx$$

$$=[1]_{\alpha}^{\alpha+1}-\int_{\alpha}^{\alpha+1}x\left(\frac{1}{x}\right)'dx$$

$$=\alpha+1-\alpha+\int_{\alpha}^{\alpha+1}\frac{1}{x}dx$$

$$=1+\int_{\alpha}^{\alpha+1}\frac{1}{x}dx$$

Άρα, $\int_{\alpha}^{\alpha+1}\frac{1}{x}dx=1+\int_{\alpha}^{\alpha+1}\frac{1}{x}dx$ οπότε $1=0$.

Απάντηση

Το λάθος εντοπίζεται στο σημείο $\left[x\cdot\frac{1}{x}\right]_{\alpha}^{\alpha+1}$ που γράφεται ως εξής

$$\left[x\cdot\frac{1}{x}\right]_{\alpha}^{\alpha+1}=[1]_{\alpha}^{\alpha+1}=\alpha+1-\alpha=1.$$

Το σωστό είναι:

$$\left[x\cdot\frac{1}{x}\right]_{\alpha}^{\alpha+1}=\left(\alpha+1\cdot\frac{1}{\alpha+1}\right)-\left(\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}\right)=1-1=0$$

4. Να εντοπίσετε το λάθος στις παρακάτω πράξεις

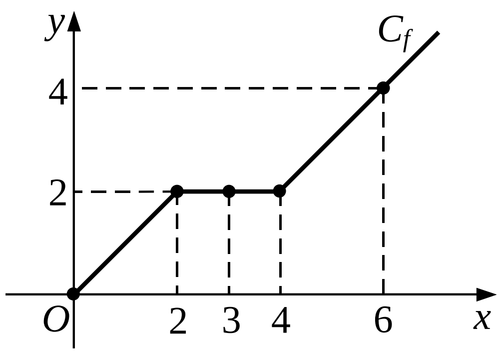
$$I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+\frac{1}{u^2}}\cdot\left(-\frac{1}{u^2}\right)du=-\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+u^2}du=-I$$

(Θέσαμε $x=\frac{1}{u}$ οπότε $dx=-\frac{1}{u^2}du$). Άρα $I=-I$ οπότε $I=0$. Αυτό, όμως, είναι άτοπο, αφού $I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx>0$, επειδή $\frac{1}{1+x^2}>0$ για κάθε $x\in[-1,1]$.

Απάντηση

Η αντικατάσταση $\frac{1}{u}=x$ *δεν είναι σωστή διότι όταν το x λάβει την τιμή μηδέν δεν υπάρχει αντίστοιχο u, τέτοιο ώστε* $x=\frac{1}{u}$.

5. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι του διπλανού σχήματος τότε να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά:



i. $\int_0^0 f(x)dx=0$

ii. $\int_0^2 f(x)dx=2$

iii. $\int_0^3 f(x)dx=4$

iv. $\int_0^4 f(x)dx=6$

v. $\int_0^6 f(x)dx=12$

Απάντηση

Είναι,

i. Από θεωρία

ii. $\int_0^2 f(x)dx = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 = 2$ (εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου)

iii. $\int_0^3 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx = 2 + (3-2)\cdot 2 = 4$

(από 2 έως 3 είναι εμβαδόν ορθογωνίου παρ/μου).

iv. $\int_0^4 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx = 2 + (4-2)\cdot 2 = 6$

(από 2 έως 4 είναι εμβαδόν ορθογωνίου παρ/μου).

v. $\int_0^6 f(x)dx = \int_0^4 f(x)dx + \int_4^6 f(x)dx = 6 + \frac{(2+4)\cdot 2}{2} = 12$

(από 4 έως 6 είναι εμβαδόν τραπεζίου)