
Μαθηματικά Κατεύθυνσης Β' Λυκείου

Βασικό Τυπολόγιο Διανυσμάτων

Συντεταγμένες Διανύσματος: Αν $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, τότε:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Γραμμικός Συνδυασμός Διανυσμάτων: $\vec{u} = \kappa \vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta}$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ τότε: $\vec{u} = (\kappa x_1 + \lambda x_2, \kappa y_1 + \lambda y_2)$.

Μέσο Ευθύγραμμου Τμήματος: Έστω M το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB . Τότε:

- αν O σημείο αναφοράς,
- αν $A = (x_1, y_1)$ και $B = (x_2, y_2)$,

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} \qquad M \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

Μέτρο Διανύσματος: Αν $\vec{\alpha} = (x, y)$ τότε: $|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Απόσταση 2 σημείων: Αν $A = (x_1, y_1)$ και $B = (x_2, y_2)$, τότε:

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Τριγωνική Αισότητα: $||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|| \leq |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$.

Συντελεστής Διεύθυνσης Διανύσματος: Αν $\vec{\alpha} = \overrightarrow{OA} = (x, y)$ και θ η γωνία που διαγράφει ο άξονας $x'x$ όταν στραφεί κατά τη θετική φορά γύρω από το σημείο O μέχρι να συμπίπτει με την ημιευθεία OA , τότε:

$$\lambda_{\vec{\alpha}} = \frac{y}{x} = \epsilon \phi \theta, \quad x \neq 0.$$

Εσωτερικό Γινόμενο: Έχουμε ότι:

- $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$.

- αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ τότε:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

- $\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2$.
- $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|$.
- $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 \leq \vec{\alpha}^2 \vec{\beta}^2$.
- $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$.
- $\vec{\alpha} \cdot (\lambda \vec{\beta}) = (\lambda \vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta} = \lambda (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})$.

Ίσα Διανύσματα: Για μη μηδενικά διανύσματα έχουμε: $\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta} \\ \text{και} \\ |\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| \end{cases}$ ή

$$\text{αν } \vec{\alpha} = (x_1, y_1) \text{ και } \vec{\beta} = (x_2, y_2) \text{ τότε: } \vec{\alpha} = \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ \text{και} \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

Αντίθετα Διανύσματα: Για μη μηδενικά διανύσματα έχουμε: $\vec{\alpha} = -\vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\alpha} \updownarrow \vec{\beta} \\ \text{και} \\ |\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| \end{cases}$

$$\text{ή αν } \vec{\alpha} = (x_1, y_1) \text{ και } \vec{\beta} = (x_2, y_2) \text{ τότε: } \vec{\alpha} = -\vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ \text{και} \\ y_1 = -y_2 \end{cases}$$

Παραλληλία (Ομόρροπα-Αντίρροπα): Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1) \neq \vec{0}$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2) \neq \vec{0}$,

- $\vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}, \lambda > 0$.
- $\vec{\alpha} \updownarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}, \lambda < 0$.
- $\vec{\alpha} \parallel x'x \Leftrightarrow y_1 = 0$.
- $\vec{\alpha} \parallel y'y \Leftrightarrow x_1 = 0$.
- $\vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$.
- $\vec{\alpha} \updownarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|$.
- $\vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|$.
- Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \parallel y'y$ τότε $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$, όπου λ_1, λ_2 οι συντελεστές διεύθυνσης των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ αντίστοιχα.
- $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} \vec{\alpha} & \vec{\beta} \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$.

Καθετότητα: Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα, τότε:

- $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$.
- $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$.

Συνημίτονο Γωνίας: Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε $\text{συν}(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|}$.

Προβολή: Αν $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, τότε:

- $\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} = \lambda \vec{\alpha}, \lambda \in \mathbb{R}$
- $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta}$.