<u>ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ</u>

☐ <u>Ορισμός</u>

Η ν-οστή ρίζα (ν θετικός ακέραιος) ενός μη <u>αρνητικού αριθμού</u> α συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και είναι μη <u>αρνητικός αριθμός</u> που όταν υψωθεί εις την ν δίνει α. $\left(\sqrt[\nu]{\alpha} \geq 0 \text{ και } \alpha \geq 0\right)$

- **Αν $\alpha \geq 0$ τότε $\sqrt[\nu]{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^\nu = \alpha$**

☐ <u>ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΡΙΖΩΝ</u>

1. **Αν $\alpha \geq 0$ τότε $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu = \alpha$**
2. **Αν $\alpha \geq 0$ τότε $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \alpha$**
3. **Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$ τότε $\sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta} = \sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$**
4. **Αν $\alpha_1 \geq 0,\ \alpha_2 \geq 0,\ \ldots\ldots,\ \alpha_\nu \geq 0$ τότε $\sqrt[\nu]{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \ldots\ldots \cdot \alpha_\nu} = \sqrt[\nu]{\alpha_1} \cdot \sqrt[\nu]{\alpha_2} \cdot \sqrt[\nu]{\alpha_3} \cdot \ldots\ldots \cdot \sqrt[\nu]{\alpha_\nu}$**
5. **Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta > 0$ τότε $\sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}} = \dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}$**
6. **Αν $\alpha \geq 0$ και $\nu, \kappa \in N$ τότε $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\kappa = \sqrt[\nu]{\alpha^\kappa}$**
7. **Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$ τότε $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu \cdot \beta} = \alpha\sqrt[\nu]{\beta}$**
8. **Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$ τότε $\alpha\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha^\nu \cdot \beta}$**
9. **Αν $\alpha \geq 0$ τότε $\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}} = \sqrt[\nu\cdot\mu]{\alpha}$**
10. **Αν $\alpha \geq 0$ τότε $\sqrt[\nu\cdot\rho]{\alpha^{\mu\cdot\rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$**
11. **Αν $\alpha \geq 0$ τότε $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu} = \sqrt[\nu\cdot\phi]{\alpha^{\mu\cdot\phi}}$**
12. **$0 \leq \alpha \leq \beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} \leq \sqrt[\nu]{\beta}$**

<u>Ορισμός δύναμης με ρητό εκθέτη</u>

Αν $\alpha \geq 0$ και μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος τότε $\boxed{\alpha^{\frac{\nu}{\mu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}}$

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ</u>

1. $\sqrt{x^2} = |x|$
2. **Οι ρίζες ορίζονται για μη αρνητικούς αριθμούς ,άρα όλες οι ποσότητες κάτω από τις ρίζες είναι θετικές ή μηδέν.**
3. **Η ρίζα είναι μη αρνητική Το αποτέλεσμα που δίνει κάθε ρίζα είναι θετικό ή μηδέν . $\sqrt[\nu]{x} \geq 0$**
4. **Οι ιδιότητες των ριζών εφαρμόζονται μόνο όταν οι ρίζες πολλαπλασιάζονται ή διαιρούνται**

<u>ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΡΙΖΩΝ</u>

<u>**Α.** Εύρεση συνόλου που ορίζεται μια παράσταση με ρίζες</u>

Γνωρίζουμε ότι οι υπόριζες ποσότητες πρέπει να είναι μη αρνητικές . Άρα η παράσταση $\sqrt{\mathbf{A}}$ ορίζεται όταν $\mathbf{A \geq 0}$

<u>Άσκηση 1:</u> Να βρεθεί που ορίζονται οι παραστάσεις

$\mathbf{A = 2 + \sqrt{x-1}}$, $\mathbf{B = 5 + \sqrt{x-2} + \sqrt{5-x}}$, $\mathbf{\Gamma = \dfrac{5+x}{\sqrt{2x-4}}}$, $\mathbf{\Delta = \dfrac{1}{x-3} + \sqrt{x+2}}$

$\mathbf{E = \sqrt[3]{x+2} + \sqrt{5-x}}$, $\mathbf{Z = \sqrt{x-10} + \sqrt{10-x}}$

<u>**Β.** Απλοποίηση παραστάσεων με ρίζες</u>

<u>Άσκηση 2:</u> Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις

α) $\mathbf{\sqrt{32}}$, **β)** $\mathbf{\sqrt[3]{256}}$, γ) $\sqrt[3]{\alpha^{13}}$ **δ)** $\mathbf{\sqrt{\alpha^2 \cdot \beta^3}}$, **ε)** $\mathbf{\sqrt[3]{\alpha^{10}}}$, **στ)** $\mathbf{\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{\sqrt{3}}}$

ζ) $\mathbf{2\sqrt{8} + 3\sqrt{128} - 5\sqrt{32}}$ **η)** $\mathbf{\sqrt{9\alpha^2\beta} + \sqrt{16\alpha^2\beta} - \sqrt{49\alpha^2\beta}}$ **θ)** $\mathbf{\sqrt{9x^2y} + \sqrt{25x^2y} - 4x\sqrt{y}}$

<u>Άσκηση 3:</u> Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις,

$\mathbf{A = \sqrt{(x-2)^2} + x - 1}$, $\mathbf{B = \sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{x^2 - 2x + 1} - 2x}$

<u>Άσκηση 4:</u> Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις

α) $\mathbf{\sqrt{6 + \sqrt{4 + \sqrt{15 + \sqrt{100}}}}}$, **β)** $\mathbf{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\sqrt{x}} + \sqrt{1-\sqrt{x}}\right) \cdot \left(\sqrt{1+\sqrt{x}} - \sqrt{1-\sqrt{x}}\right)}$

γ) $\mathbf{\sqrt[3]{4}\ \sqrt[3]{\left(32-\sqrt{7}\right)}\ \sqrt[3]{(32)+\sqrt{7}}}$ **δ)** $\mathbf{\sqrt[4]{\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}}}$

ε) $\mathbf{\dfrac{\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)}{\sqrt{\alpha-\sqrt{\beta}}} + \dfrac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}}$ **στ)** $\mathbf{\sqrt[5]{3^2} \cdot \sqrt[4]{3^3} \cdot \sqrt{3}}$

<u>**Γ.** Μετατροπή ριζικών σε ομώνυμα</u>

<u>**Παράδειγμα:**</u> Να μετατραπούν σε ομώνυμα τα ριζικά $\mathbf{\sqrt{3}}$, $\mathbf{\sqrt[3]{3^2}}$, και $\mathbf{\sqrt[4]{3^3}}$.

<u>Λύση</u> Ε.Κ.Π(2,3,4)=12.

Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π των ριζικών

$$\overset{6}{\underset{\cup}{}}\ \sqrt{3}\ ,\quad \overset{4}{\underset{\cup}{}}\ \sqrt[3]{3^2}\ ,\quad \overset{3}{\underset{\cup}{}}\ \sqrt[4]{3^3} \qquad \textbf{άρα}\quad \sqrt[12]{3^6}\ ,\ \sqrt[12]{3^8}\ ,\ \sqrt[12]{3^9}$$

Πολλαπλασιάζουμε ρίζα και δύναμη με τον κατάλληλο αριθμό ώστε κάθε ριζικό που θα προκύψει να είναι ίσο με το Ε.Κ.Π .

<u>**Δ.** Μετατροπή παράστασης σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή</u>

<u>**Περίπτωση 1:**</u>

Όταν έχω στο παρονομαστή άθροισμα ή διαφορά με τετραγωνική ρίζα δηλαδή παρονομαστή μία από τις παραστάσεις $\mathbf{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}}$, $\mathbf{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}$, $\mathbf{\sqrt{\alpha} \pm \beta}$, $\mathbf{\alpha \pm \sqrt{\beta}}$, $\mathbf{\kappa\sqrt{\alpha} \pm \beta}$, $\mathbf{\alpha \pm \kappa\sqrt{\beta}}$, τότε πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή με τη συζυγή παράταση του παρονομαστή .

$$\alpha-\beta \quad \text{συζυγή παράσταση} \quad \alpha+\beta \quad \overset{\rightarrow}{\underset{\leftarrow}{}} \quad \text{Ισχύει: } (\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2$$

Παραδείγματα:

α) $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}=\dfrac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)\cdot\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)}=\dfrac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\alpha-\beta}$,

β) $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}=\dfrac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}{\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)}=\dfrac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}{\alpha-\beta}$.

Άσκηση 5: Να γραφούν οι παραστάσεις χωρίς ρίζες στον παρονομαστή.

α) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$, β) $\dfrac{5}{\sqrt{10}+\sqrt{15}}$, γ) $\dfrac{3}{2\sqrt{3}-1}$ δ) $\dfrac{1}{2-5\sqrt{7}}$, ε) $\dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+5}$,

στ) $\dfrac{6}{\sqrt[4]{3}+1}$ ζ) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$, η) $\dfrac{12}{\sqrt{75}+\sqrt{50}-\sqrt{8}-\sqrt{27}}$

Περίπτωση 2:

Όταν έχω στον παρονομαστή μία ρίζα ή γινόμενο με ρίζες.

Να γραφεί η παράσταση χωρίς ρίζα στον παρονομαστή $\dfrac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}}$, $\alpha>0$

α) $\mu<\nu$ τότε πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή με $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-\mu}}$

$$\frac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}}=\frac{\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-\mu}}}{\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}\cdot\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-\mu}}}=\frac{\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-\mu}}}{\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}\cdot\alpha^{\nu-\mu}}}=\frac{\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-\mu}}}{\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu+\nu-\mu}}}=\frac{\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-\mu}}}{\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}}}=\frac{\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-\mu}}}{\alpha}$$

β) $\mu\geq\nu$ τότε μ = κ. ν + λ όπου κ πηλίκο και λ υπόλοιπο της διαίρεσης (μ :ν) και άρα λ<ν Τότε

$$\frac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}}=\frac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha^{\kappa.\nu+\lambda}}}=\frac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha^{\kappa.\nu}}\cdot\sqrt[\nu]{\alpha^{\lambda}}}=\frac{1}{\alpha^{\kappa}.\sqrt[\nu]{\alpha^{\lambda}}}=\frac{1}{\alpha^{\kappa}}\cdot\frac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha^{\lambda}}}$$

Για την $\dfrac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha^{\lambda}}}$ κάνω τη διαδικασία του α) Αποτέλεσμα $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-\lambda}}}{\alpha^{\kappa+1}}$.

Άσκηση 6: Να γραφούν οι παραστάσεις χωρίς ρίζες στον παρονομαστή.

α) $\dfrac{2}{\sqrt{13}}$, β) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{5}}$, γ) $\dfrac{3}{\sqrt{2}\sqrt{6}}$ δ) $\dfrac{1}{5\sqrt{7}}$, ε) $\dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{18}+\sqrt{50}}$, στ) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{3^2}}$ ζ) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2^5}}$

Ε. Υπολογισμός παραστάσεων που περιέχουν δυνάμεις με ρητό εκθέτη

Όταν έχουμε να υπολογίσουμε παραστάσεις αυτού του είδους προσπαθούμε να τις απλοποιήσουμε εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των δυνάμεων.

Άσκηση 7:

α)Εάν $x=\sqrt{3}$ και $y=\sqrt[3]{3}$ να υπολογιστεί η παράσταση $A=\left[\left(x^{\frac{1}{2}}y\right)^{\frac{2}{3}}\cdot y^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{4}{3}}\right]^{12}$

β) Να υπολογιστεί η παράσταση $A=5^{\frac{1}{2}}\cdot 125^{-\frac{5}{6}}\cdot 25^{\frac{3}{2}}\cdot 5^{-3}$.

γ) Να υπολογιστεί η παράσταση $A=\sqrt{7}\cdot\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[6]{7}$.

ΣΤ. Σύγκριση παραστάσεων με ρίζες.

Χρησιμοποιούμε μια από τις ιδιότητες:

$$0 \le \alpha < \beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} < \sqrt[\nu]{\beta} \quad (1) \quad \text{ή} \quad 0 \le \alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu < \beta^\nu \quad (2)$$

Παραδείγματα:

α) Να συγκριθούν οι αριθμοί $\sqrt[3]{1999}$ **και** $\sqrt[3]{2000}$

Λύση: $1999 < 2000 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \sqrt[3]{1999} < \sqrt[3]{2000}$

β) Να συγκριθούν οι αριθμοί $\sqrt{11}$ **και** $\sqrt{5}+\sqrt{6}$

Λύση:

$$\begin{cases} \left(\sqrt{11}\right)^2 = 11 \\ \left(\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)^2 = 11 + 2\sqrt{5}\cdot\sqrt{6} \end{cases} \quad \text{άρα} \quad \left(\sqrt{11}\right)^2 < \left(\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)^2 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \sqrt{11} < \sqrt{5}+\sqrt{6}$$

γ) Δείξτε ότι: $\sqrt{5+\sqrt{6}} < \sqrt{2}+\sqrt{3}$

Λύση:

$$\sqrt{5+\sqrt{6}} < \sqrt{2}+\sqrt{3} \Leftrightarrow \left(\sqrt{5+\sqrt{6}}\right)^2 < \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow 5+\sqrt{6} < 5+2\sqrt{6} \Leftrightarrow \sqrt{6} < 2\sqrt{6} \quad \text{ισχύει}$$

<u>Άσκηση 8:</u> Σε κάθε περίπτωση να συγκριθούν οι αριθμοί

α) $\sqrt{10}$ **και** $\sqrt{11}$ **β)** $\sqrt{10}+\sqrt{11}$ **και** $\sqrt{21}$ **γ)** $\sqrt{3}+1$ **και** $\sqrt{2}+2$

δ) $\sqrt{10}-\sqrt{2}$ **και** $\sqrt{5}-\sqrt{7}$ **ε)** $\sqrt{\alpha+\beta}$ **και** $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ με **α, β**

<u>Άσκηση 9:</u> Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισοτηκές σχέσεις:

α) $\sqrt[3]{7} < 2$ **β)** $\sqrt{\sqrt{2}+3} < 1+\sqrt{2}$ **γ)** $\sqrt{3\sqrt{3}+6} > 1+\sqrt{5}$ **δ)** $\dfrac{\alpha+\beta}{2} \ge \sqrt{\alpha\beta}$

ε) $\sqrt{\kappa+\lambda}\cdot\sqrt{\mu+\nu} \ge \sqrt{\kappa\mu}+\sqrt{\lambda\nu}$