Άλγεβρα

Α΄ Λυκείου

Τράπεζα Θεμάτων

lisari team

lisari.blogspot.gr

Εκφωνήσεις-Λύσεις

η καλύτερη ομάδα λόγω team_ής

(Έκδοση: 07 – 01 – 2015)

Οι απαντήσεις και οι λύσεις

είναι αποτέλεσμα της συλλογικής δουλειάς

των συνεργατών του δικτυακού τόπου

http://lisari.blogspot.gr

Έκδοση: 07 –01 – 2015 *(συνεχής ανανέωση)*

Το βιβλίο διατίθεται **αποκλειστικά**

από το μαθηματικό ιστότοπο

http://lisari.blogspot.gr

Περιεχόμενα

Σελίδες

Πρόλογος

Στο παρόν αρχείο δίνονται όλες οι ασκήσεις της **Τράπεζας Θεμάτων** που αφορούν στην **Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου** μαζί με τις λύσεις τους. Η παρουσίαση των λύσεων είναι κατά το δυνατόν αναλυτική έτσι, ώστε το αρχείο να μπορεί να διαβαστεί και να μελετηθεί εύκολα από τους μαθητές. Σε αρκετές περιπτώσεις οι λύσεις συνοδεύονται με αναφορές σε παρόμοιες ασκήσεις του σχολικού βιβλίου ή της τράπεζας θεμάτων καθώς και με κάποια στοιχεία θεωρίας ή ακόμα και μεθοδολογίας.

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε από μια **διαδικτυακή** (και όχι μόνο) **ομάδα μαθηματικών** από διάφορα μέρη της Ελλάδος. Η ομάδα συγκροτήθηκε από τους μαθηματικούς που ανταποκρίθηκαν στο κάλεσμα που απεύθυνε μέσα από το blog **http://lisari.blogspot.gr** ο ακούραστος **Μάκης Χατζόπουλος.** Εργάστηκε με μεράκι, κάτω από πίεση χρόνου, για να προσφέρει στην εκπαιδευτική κοινότητα, μαθητές και καθηγητές, το συγκεκριμένο υλικό.

Επιθυμία όλων μας είναι να συμβάλλουμε, έστω και ελάχιστα, στην **βελτίωση της διδασκαλίας** των μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, μέσα από την παροχή υποστηρικτικού υλικού στην ελληνική εκπαιδευτική κοινότητα.

Μετά την αρχική συγγραφή των λύσεων έγιναν ενδελεχείς έλεγχοι, διορθώσεις και βελτιώσεις για την όσο το δυνατό **ποιοτικότερη παρουσίαση**. Ζητούμε συγνώμη για τυχόν παραλείψεις, λάθη ή αστοχίες οι οποίες ενδεχομένως θα έχουν διαλάθει της προσοχής μας, κάτι αναπόδραστο στην εκπόνηση μιας εργασίας τέτοιας έκτασης σε τόσο στενά περιθώρια χρόνου. Θα ακολουθήσουν επόμενες εκδόσεις, όπου το υλικό θα βελτιωθεί. Οποιαδήποτε σχόλια, παρατηρήσεις, διορθώσεις και βελτιώσεις των λύσεων είναι ευπρόσδεκτα στην ηλεκτρονική διεύθυνση lisari.blogspot@gmail.com.

Με εκτίμηση

Η ομάδα του lisari

30 – 11 – 2014

lisari ***team***

Αντωνόπουλος Νίκος (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίου Κατεύθυνση - Άργος)
Αυγερινός Βασίλης (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίου ΔΙΑΤΑΞΗ - Ν. Σμύρνη και Νίκαια)
Βελαώρας Γιάννης (Φροντιστήριο ΒΕΛΑΩΡΑΣ - Λιβαδειά Βοιωτίας)
Βοσκάκης Σήφης (Φροντιστήριο Ευθύνη - Ρέθυμνο)
Γιαννόπουλος Μιχάλης (Αμερικάνικη Γεωργική Σχολή)
Γκριμπαβιώτης Παναγιώτης (Φροντιστήριο Αστρολάβος - Άρτα)
Δούδης Δημήτρης (3ο Λύκειο Αλεξανδρούπολης)
Ζαμπέλης Γιάννης (Φροντιστήρια Πουκαμισάς Γλυφάδας)
Κακαβάς Βασίλης (Φροντιστήριο Ώθηση - Αργυρούπολη)
Κάκανος Γιάννης (Φροντιστήριο Παπαπαναγιώτου – Παπαπαύλου - Σέρρες)
Κανάβης Χρήστος (Διδακτορικό στο ΕΜΠ – 2ο ΣΔΕ φυλακών Κορυδαλλού)
Καρδαμίτσης Σπύρος (Πρότυπο Λύκειο Αναβρύτων)
Κοπάδης Θανάσης (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίων 19+ - Πολύγωνο)
Κουλούρης Αντρέας (3ο ΓΕΛ Γαλατσίου)
Κουστέρης Χρήστος (Φροντιστήριο Στόχος - Περιστέρι)
Μανώλης Ανδρέας (Φροντιστήριο Ρηγάκης - Κοζάνη)
Μαρούγκας Χρήστος (3ο ΓΕΛ Κηφισιάς)
Νάννος Μιχάλης (1ο Γυμνάσιο Σαλαμίνας)
Νικολόπουλος Θανάσης (Λύκειο Κατασταρίου, Ζάκυνθος)
Παγώνης Θεόδωρος (Φροντιστήριο Φάσμα - Αγρίνιο)
Παντούλας Περικλής (Φροντιστήρια Γούλα-Δημολένη - Ιωάννινα)
Παπαδομανωλάκη Μαρία (Ιδιοκτήτρια Πρότυπου Κέντρου Μάθησης ΔΙΑΚΡΙΣΙΣ - Ρέθυμνο)
Παπαμικρούλης Δημήτρης (Εκπαιδευτικός Οργανισμός Ρόμβος)
Πορίχης Λευτέρης (Γυμνάσιο Λιθακιάς – Ζάκυνθος)
Ράπτης Γιώργος (6ο ΓΕΛ Βόλου)
Σίσκας Χρήστος (Φροντιστήριο Μπαχαράκης - Θεσσαλονίκη)
Σκομπρής Νίκος (Συγγραφέας – 1ο Λύκειο Χαλκίδας)
Σπλήνης Νίκος (Φροντιστήριο ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ - Ηράκλειο Κρήτης)
Σπυριδάκης Αντώνης (Γυμνάσιο Βιάννου - Λασίθι)
Σταυρόπουλος Παύλος (Ιδιωτικά Εκπαιδευτήρια Δούκα)
Σταυρόπουλος Σταύρος (Γραμματέας Ε.Μ.Ε Κορινθίας - Γυμνάσιο Λ.Τ. Λέχαιου Κορινθίας)
Τηλέγραφος Κώστας (Φροντιστήριο Θεμέλιο - Αλεξανδρούπολη)
Τρύφων Παύλος (1ο Εσπερινό ΕΠΑΛ Περιστερίου)
Φιλιππίδης Χαράλαμπος (Ελληνογαλλική Σχολή Καλαμαρί)
Χαραλάμπους Σταύρος (Μουσικό Σχολείο Λαμίας)
Χατζόπουλος Μάκης (Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων)

Τράπεζα Θεμάτων
Άλγεβρα Α΄ τάξης

30 Νοεμβρίου 2014

Λύτες

Νίκος Αντωνόπουλος
Βασίλης Αυγερινός
Σήφης Βοσκάκης
Παναγιώτης Γκριμπαβιώτης
Δημήτρης Δούδης
Γιάννης Ζαμπέλης
Βασίλης Κακαβάς
Γιάννης Κάκανος
Θανάσης Κοπάδης
Ανδρέας Μανώλης
Περικλής Παντούλας
Μαρία Παπαδομανωλάκη
Δημήτρης Παπαμικρούλης
Λευτέρης Πορίχης
Γιώργος Ράπτης
Νίκος Σπλήνης
Σταύρος Χαραλάμπους
Μάκης Χατζόπουλος

Έλεγχος

Χρήστος Μαρούγκας

Συντονιστής

Μάκης Χατζόπουλος

Εξώφυλλο

Μιχάλης Νάννος

Πρόλογος
Ανδρέας Κουλούρης

Επιμελητής

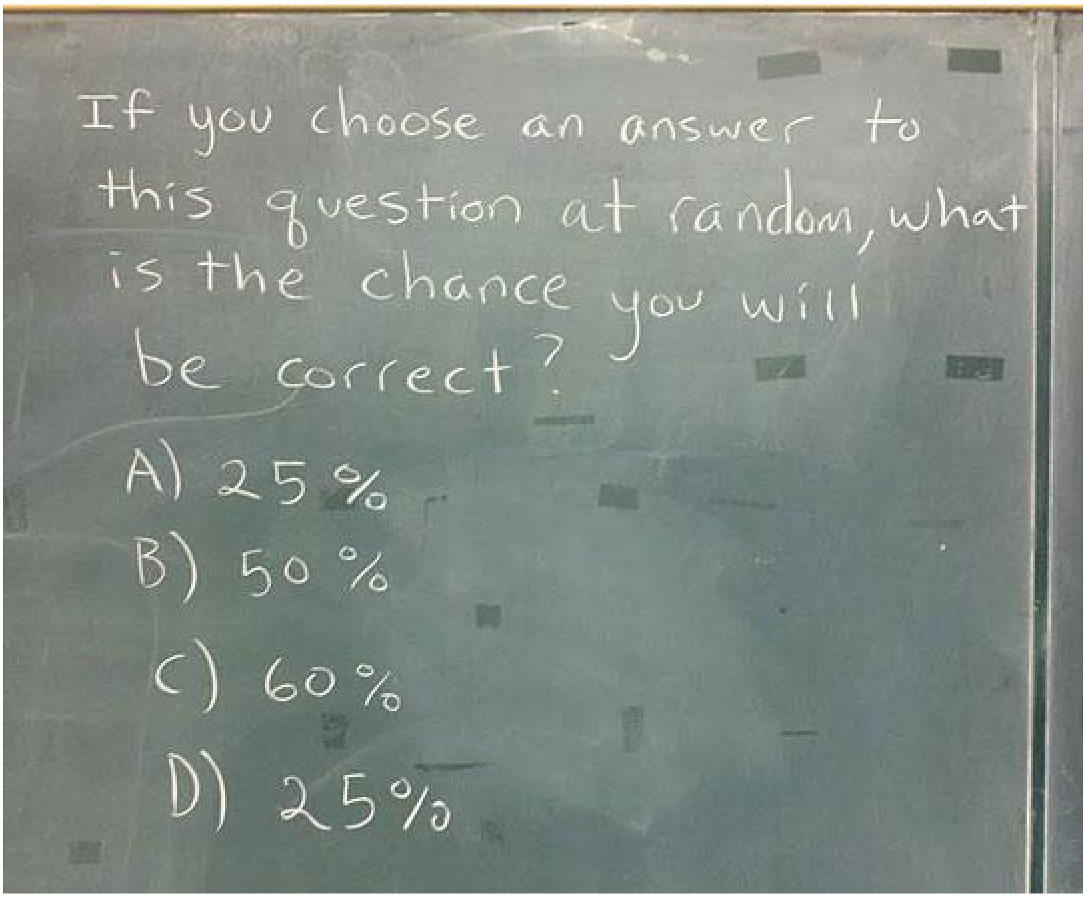
Μάκης Χατζόπουλος

lisari team

η καλύτερη ομάδα λόγω…team_ής!

Άλγεβρα Α΄ Λυκείου

Κεφάλαιο 1^{ο} : Πιθανότητες



1.1: Δειγματικός χώρος – Ενδεχόμενα

1.2: Έννοια της Πιθανότητας

ΑΣΚΗΣΗ 1 (2_497)

Ένα τηλεοπτικό παιχνίδι παίζεται με ζεύγη αντιπάλων των δυο φύλων. Στο παιχνίδι συμμετέχουν 3 άντρες: ο Δημήτρης (Δ), ο Κώστας (Κ), ο Μιχάλης (Μ) και 2 γυναίκες: η Ειρήνη (Ε) και η Ζωή (Ζ). Επιλέγονται στην τύχη ένας άντρας και μια γυναίκα για να διαγωνιστούν και καταγράφονται τα ονόματά τους.

α) Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος.

Μονάδες 10

β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

Α : Να διαγωνίστηκαν ο Κώστας ή ο Μιχάλης.

Β : Να διαγωνίστηκε η Ζωή.

Γ: Να μη διαγωνίστηκε ούτε ο Κώστας ούτε ο Δημήτρης

Μονάδες 15

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) Θα βρούμε το δειγματικό χώρο Ω με δεντροδιάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} \textbf{Άντρας} & & \textbf{Γυναίκα} \\ & \nearrow & \text{Ζ} \\ \text{Δ} & & \\ & \searrow & \text{Ε} \\ & \nearrow & \text{Ζ} \\ \text{Κ} & & \\ & \searrow & \text{Ε} \\ & \nearrow & \text{Ζ} \\ \text{Μ} & & \\ & \searrow & \text{Ε} \end{array}$$

Επομένως: $\Omega=\{\Delta Z,\Delta E,KZ,KE,ME,MZ\}$ και $N(\Omega)=6$

β) Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

- Κ: διαγωνίστηκε ο Κώστας, με $K=\{KZ,KE\}$ και $N(K)=2$
- Μ: διαγωνίστηκε ο Μιχάλης, με $M=\{ME,MZ\}$ και $N(M)=2$
- Δ: διαγωνίστηκε ο Δημήτρης, με $\Delta=\{\Delta Z,\Delta E\}$ και $N(\Delta)=2$
- Β : διαγωνίστηκε η Ζωή, με $B=\{\Delta Z,KZ,MZ\}$ και $N(B)=3$

Τότε:

$$K\cup M=\{KZ,KE,ME,MZ\} \text{ με } N(K\cup M)=4, \text{ και}$$

$$K\cup\Delta=\{KZ,KE,\Delta E,\Delta Z\} \text{ με } N(K\cup\Delta)=4$$

Άρα:

$$P(A)=P(K\cup M)=\frac{N(K\cup M)}{N(\Omega)}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3},\ P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$$P(\Gamma)=P(K\cup\Delta)'=1-P(K\cup\Delta)=1-\frac{N(K\cup\Delta)}{N(\Omega)}=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2 (2_499)

Από τους μαθητές ενός Λυκείου, το 25% συμμετέχει στη θεατρική ομάδα, το 30% συμμετέχει στην ομάδα ποδοσφαίρου και το 15% των μαθητών συμμετέχει και στις δύο ομάδες. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Αν ονομάσουμε τα ενδεχόμενα:

Α: «ο μαθητής να συμμετέχει στη θεατρική ομάδα» και

Β: «ο μαθητής να συμμετέχει στην ομάδα ποδοσφαίρου»

α) να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα

i) $A \cup B$ ii) $A \cap B$ iii) $B - A$ iv) A'

Μονάδες 12

β) να υπολογίσετε τις πιθανότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων

i) ο μαθητής που επιλέχθηκε να συμμετέχει μόνο στην ομάδα ποδοσφαίρου

ii) ο μαθητής που επιλέχθηκε να μη συμμετέχει σε καμία ομάδα.

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α)

i) $A \cup B$: Ο μαθητής να συμμετέχει στην θεατρική ομάδα ή την ποδοσφαιρική ομάδα.

ii) $A \cap B$: Ο μαθητής συμμετέχει στην θεατρική ομάδα και στην ποδοσφαιρική ομάδα

iii) $B - A$ **:** Ο μαθητής να συμμετέχει στην ποδοσφαιρική ομάδα αλλά όχι στην θεατρική ομάδα.

iv) A' **:** Ο μαθητής να μην συμμετέχει στην θεατρική ομάδα.

Γνωρίζουμε ότι:

$$P(A) = 25\% = \frac{25}{100}, \quad P(B) = 30\% = \frac{30}{100}, \quad P(A \cap B) = 15\% = \frac{15}{100}$$

β) i) $P(B - A) = P(B) - P(B \cap A) = \frac{30}{100} - \frac{15}{100} = \frac{15}{100} = 15\%$

ii) $$P\left((A \cup B)'\right) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \left(P(A) + P(B) - P(A \cap B)\right) =$$

$$= 1 - \frac{25}{100} - \frac{30}{100} + \frac{15}{100} = \frac{60}{100} = 60\%$$

ΑΣΚΗΣΗ 3 (2_999)

Ένα κουτί περιέχει άσπρες, μαύρες, κόκκινες και πράσινες μπάλες. Οι άσπρες είναι 5, οι μαύρες είναι 9, ενώ οι κόκκινες και οι πράσινες είναι μαζί 16. Επιλέγουμε μια μπάλα στην τύχη. Δίνονται τα παρακάτω ενδεχόμενα:

Α: η μπάλα που επιλέγουμε είναι ΑΣΠΡΗ

Κ: η μπάλα που επιλέγουμε είναι ΚΟΚΚΙΝΗ

Π: η μπάλα που επιλέγουμε είναι ΠΡΑΣΙΝΗ

α. Χρησιμοποιώντας τα Α, Κ και Π να γράψετε στη γλώσσα των συνόλων τα ενδεχόμενα:

1. Η μπάλα που επιλέγουμε δεν είναι άσπρη.
2. Η μπάλα που επιλέγουμε είναι κόκκινη ή πράσινη.

Μονάδες 13

β. Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης καθενός από τα δύο ενδεχόμενα του ερωτήματος α).

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α. 1. A' : Η μπάλα που επιλέγουμε δεν είναι άσπρη .

2. $K \cup \Pi$: Η μπάλα που επιλέγουμε είναι κόκκινη ή πράσινη .

β. Ο συνολικός αριθμός των μπάλων είναι: $5+9+16=30$.

1. Ο αριθμός των μπάλων που δεν είναι άσπρες είναι: $30-5=25$, οπότε

$$P(A') = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$$

2. Έχουμε, $P(K \cup \Pi) = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$

ΑΣΚΗΣΗ 4 (2_1102)

Δίνονται δύο ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω και οι πιθανότητες

$$P(A) = \frac{3}{4},\ P(A-B) = \frac{5}{8} \text{ και } P(B) = \frac{1}{4}$$

α) Να υπολογίσετε την $P(A \cap B)$

Μονάδες 9

β) i) Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και να γράψετε στη γλώσσα των συνόλων το ενδεχόμενο : « Α ή Β ».

Μονάδες 7

ii) Να υπολογίσετε την πιθανότητα πραγματοποίησης του παραπάνω ενδεχομένου.

Μονάδες 9

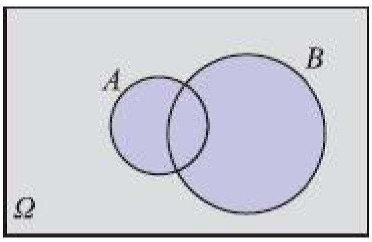
ΛΥΣΗ

α) Έχουμε

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{5}{8} = \frac{3}{4} - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{4} - \frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{6}{8} - \frac{5}{8} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

β) i) Το ενδεχόμενο « Α ή Β » πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α, Β, συμβολίζεται με $A \cup B$ και παριστάνεται με διάγραμμα Venn όπως το παρακάτω σχήμα :



ii) Από τον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων έχουμε ότι:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow P(A\cup B)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\Leftrightarrow P(A\cup B)=\frac{6}{8}+\frac{2}{8}-\frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow P(A\cup B)=\frac{6+2-1}{8}\Leftrightarrow P(A\cup B)=\frac{7}{8}$$

Παρόμοιες Ασκήσεις

Η παραπάνω άσκηση μοιάζει με τις ασκήσεις 7, 8, 9, 10 (Α Ομάδας) της παραγράφου 1.2 του σχολικού βιβλίου.

ΑΣΚΗΣΗ 5 (2_1287)

Δίνεται ο πίνακας:

	1	2	3
1	11	12	13
2	21	22	23
3	31	32	33

Επιλέγουμε τυχαία έναν από τους 9 διψήφιους αριθμούς του παραπάνω πίνακα.
Να βρείτε την πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:

Α: ο διψήφιος να είναι άρτιος

Μονάδες 7

Β: ο διψήφιος να είναι άρτιος και πολλαπλάσιο του 3

Μονάδες 9

Γ: ο διψήφιος να είναι άρτιος ή πολλαπλάσιο του 3

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

Είναι: $\Omega=\{11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33\}$ με $N(\Omega)=9$

$A=\{12, 22, 32\}$ με $N(A)=3$

$B=\{12\}$ με $N(B)=1$

$\Gamma=\{12, 21, 22, 32, 33\}$ με $N(\Gamma)=5$

Οπότε

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{3}{9}\Rightarrow P(A)=\frac{1}{3}$$

$$P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}\Rightarrow P(B)=\frac{1}{9}$$

$$P(\Gamma)=\frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)}\Rightarrow P(\Gamma)=\frac{5}{9}$$

ΑΣΚΗΣΗ 6 (2_1506)

Δίνεται το σύνολο $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και τα υποσύνολα

$$A=\{1, 2, 4, 5\} \text{ και } B=\{2,\ 4, 6\}.$$

α) Να παραστήσετε στο ίδιο διάγραμμα Venn, με βασικό σύνολο Ω, τα σύνολα Α και Β. Κατόπιν, να προσδιορίσετε τα σύνολα $A\cup B$, $A\cap B$, A' και B'.

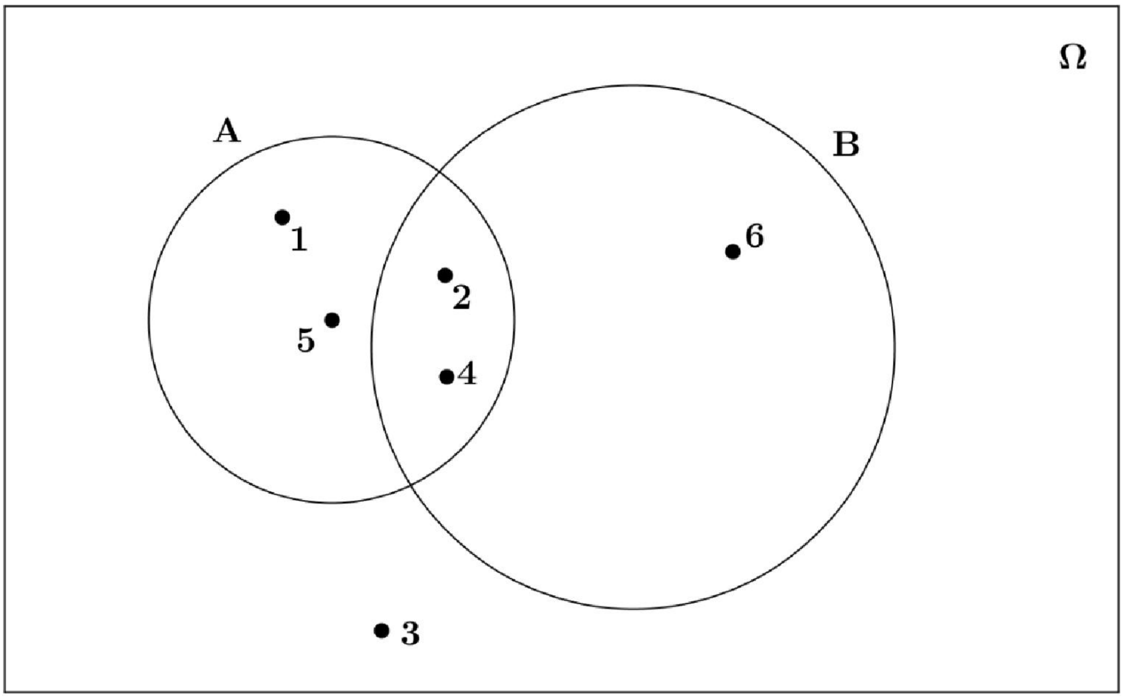
Μονάδες 13

β) Επιλέγουμε τυχαία ένα στοιχείο του Ω.
Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
(i) Να μην πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Α.
Μονάδες 4
(ii) Να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα ενδεχόμενα Α και Β.
Μονάδες 4
(iii) Να μην πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Α
Μονάδες 4

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε,

$$A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6\}\ ,\quad A \cap B = \{2, 4\}\ ,\quad A' = \{3, 6\}\ ,\quad B' = \{1, 3, 5\}$$



β. i) Το ενδεχόμενο να μην πραγματοποιηθεί το Α είναι το Α΄

$$N(\Omega) = 6\,,\ N(A') = 2$$

οπότε

$$P(A') = \frac{N(A')}{N(\Omega)} \Rightarrow P(A') = \frac{2}{6} \Rightarrow \boxed{P(A') = \frac{1}{3}}$$

ii) Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα ενδεχόμενα Α και Β είναι το $A \cap B$. Είναι: $N(A \cap B) = 2$ οπότε

$$P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{6} \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = \frac{1}{3}}$$

iii) Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα Α, Β είναι το $A \cup B$. Είναι: $N(A \cup B) = 5$ οπότε

$$P(A\cup B)=\frac{N(A\cup B)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow \boxed{P(A\cup B)=\frac{5}{6}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7 (2_1520)

Από τους σπουδαστές ενός ωδείου, το 50% μαθαίνει πιάνο, το 40% μαθαίνει κιθάρα, ενώ το 10% των σπουδαστών μαθαίνει και τα δύο αυτά όργανα. Επιλέγουμε τυχαία ένα σπουδαστή του Ωδείου. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Α: ο σπουδαστής αυτός μαθαίνει πιάνο

Β: ο σπουδαστής αυτός μαθαίνει κιθάρα

Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου:

α) Ο σπουδαστής αυτός να μαθαίνει ένα τουλάχιστον από τα δύο παραπάνω όργανα.

Μονάδες 12

β) Ο σπουδαστής αυτός να μην μαθαίνει κανένα από τα δύο παραπάνω όργανα.

Μονάδες 13

<u>ΛΥΣΗ</u>

Από τα δεδομένα έχουμε ότι: $P(A)=50\%, P(B)=40\%$ και $P(A\cap B)=10\%$.

α) Το ενδεχόμενο ο σπουδαστής να μαθαίνει ένα τουλάχιστον από τα δύο παραπάνω όργανα στη γλώσσα των συνόλων είναι $A\cup B$.

Από τον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων έχουμε:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Leftrightarrow P(A\cup B)=50\%+40\%-10\% \Leftrightarrow$$

$$P(A\cup B)=80\%$$

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι 80%.

β) Το ενδεχόμενο ο σπουδαστής να μην μαθαίνει κανένα από τα δύο παραπάνω όργανα στη γλώσσα των συνόλων είναι $(A\cup B)'$.

Επομένως:

$$P\left[(A\cup B)'\right]=1-P(A\cup B)=1-80\%=20\%$$

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι 20%.

ΑΣΚΗΣΗ 8 (2_3383)

Το 70% των κατοίκων μιας πόλης έχει αυτοκίνητο, το 40% έχει μηχανάκι και το 20% έχει και αυτοκίνητο και μηχανάκι. Επιλέγουμε τυχαία έναν κάτοικο αυτής της πόλης. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A : ο κάτοικος να έχει αυτοκίνητο

M : ο κάτοικος να έχει μηχανάκι.

α. Να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα:

i. $A\cup M$

ii. $M-A$

iii. M'

Μονάδες 9

β. Να βρείτε τη πιθανότητα ο κάτοικος που επιλέχθηκε:
i. Να μην έχει μηχανάκι.
Μονάδες 7

ii. Να μην έχει ούτε μηχανάκι ούτε αυτοκίνητο. (Μονάδες 9)
Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

Έχουμε

$$P(A)=\frac{70}{100}=0,7\ ,\ P(M)=\frac{40}{100}=0,4\ ,\ P(A\cup M)=\frac{20}{100}=0,2$$

α. i. $A\cup M$: Ο κάτοικος της πόλης να έχει αυτοκίνητο ή μηχανάκι.
ii. $M-A$: Ο κάτοικος της πόλης να έχει μόνο μηχανάκι.
iii. M': Ο κάτοικος της πόλης δεν έχει μηχανάκι.

β. i. $P(M')=1-P(M)=1-0,4=0,6$

ii. $P\left[(A\cup M)'\right]=1-P(A\cup M)=1-\{P(A)+P(M)-P(A\cup M)\}=$

$=1-(0,7+0,4-0,2)=0,1$

ΑΣΚΗΣΗ 9 (2_3384)

Από τους 180 μαθητές ενός λυκείου, 20 μαθητές συμμετέχουν στη θεατρική ομάδα, 30 συμμετέχουν στην ομάδα στίβου, ενώ 10 συμμετέχουν και στις δύο ομάδες.
Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή του λυκείου. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:
A: ο μαθητής συμμετέχει στη θεατρική ομάδα
B: ο μαθητής συμμετέχει στην ομάδα στίβου
α. Να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα:
i. $A\cup B$
ii. $B-A$
iii. A'
Μονάδες 9

β. Να βρείτε τη πιθανότητα ο μαθητής που επιλέχθηκε:
i. Να μη συμμετέχει σε καμία ομάδα.
Μονάδες 9

ii. Να συμμετέχει μόνο στην ομάδα στίβου.
Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

Ισχύει $N(\Omega)=180$, $N(A)=20$, $N(B)=30$, $N(A\cap B)=10$.

Έχουμε,

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{20}{180}=\frac{1}{9},\quad P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{30}{180}=\frac{1}{6}$$

και $P(A\cap B)=\dfrac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}=\dfrac{10}{180}=\dfrac{1}{18}$

α. i. $A\cup B$: Ο μαθητής συμμετέχει στην θεατρική ομάδα ή στην ομάδα στίβου

ii. $B-A$: Ο μαθητής συμμετέχει μόνο στην ομάδα στίβου

iii. A': Ο μαθητής δεν συμμετέχει στην θεατρική ομάδα

β. i. Η πιθανότητα, ο μαθητής που επιλέχθηκε, να μη συμμετέχει σε καμία ομάδα είναι

$P\left[(A\cup B)'\right]=1-P(A\cup B)=1-\left(P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right)=1-\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{18}=\dfrac{14}{18}=\dfrac{7}{9}$

ii. Η πιθανότητα, ο μαθητής που επιλέχθηκε, να συμμετέχει μόνο στην ομάδα στίβου είναι

$$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{6}-\frac{1}{18}=\frac{3-1}{18}=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}$$

ΑΣΚΗΣΗ 10 (2_3878)

Ένα Λύκειο έχει 400 μαθητές από τους οποίους οι 200 είναι μαθητές της Α΄ τάξης. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή, η πιθανότητα να είναι μαθητής της Γ΄ τάξης είναι 20% Να βρείτε:

α. Το πλήθος των μαθητών της Γ΄ τάξης

Μονάδες 10

β. Το πλήθος των μαθητών της Β΄ τάξης.

Μονάδες 5

γ. Την πιθανότητα ο μαθητής που επιλέξαμε να είναι της Β΄ τάξης.

Μονάδες10

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα A: ο μαθητής να είναι της A τάξης

B: ο μαθητής να είναι της B τάξης

Γ: ο μαθητής να είναι της Γ τάξης και

Ω: το σύνολο των μαθητών του σχολείου

α. Έχουμε $N(\Omega)=400$ και $N(A)=200$, άρα

$P(\Gamma)=20\%\Leftrightarrow \dfrac{N(\Gamma)}{N(\Omega)}=0,2\Leftrightarrow \dfrac{N(\Gamma)}{400}=0,2\Leftrightarrow N(\Gamma)=0,2\cdot 400=80$ μαθητές.

β. Έχουμε

$$N(B)=N(\Omega)-N(A)-N(\Gamma)=400-200-80=120 \text{ μαθητές.}$$

γ. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η

$$P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{120}{400}=\frac{30}{100}=30\%.$$

Δηλαδή η πιθανότητα ο μαθητής που επιλέξαμε να είναι της B' τάξης, είναι 30%

ΑΣΚΗΣΗ 11 (4_1868)

Σε ένα τμήμα της Α' Λυκείου κάποιοι μαθητές παρακολουθούν μαθήματα Αγγλικών και κάποιοι Γαλλικών. Η πιθανότητα ένας μαθητής να μην παρακολουθεί Γαλλικά είναι $0,8$. Η πιθανότητα ένας μαθητής να παρακολουθεί Αγγλικά είναι τετραπλάσια από την πιθανότητα να παρακολουθεί Γαλλικά. Τέλος, η πιθανότητα ένας μαθητής να παρακολουθεί μαθήματα τουλάχιστον μιας από τις δύο γλώσσες είναι $0,9$.

α) Επιλέγουμε ένα μαθητή στην τύχη.

i) Ποια είναι η πιθανότητα αυτός να παρακολουθεί μαθήματα και των δύο γλωσσών;

(Μονάδες 9)

ii) Ποια είναι η πιθανότητα αυτός να παρακολουθεί μαθήματα μόνο μιας από τις δύο γλώσσες;

(Μονάδες 9)

β) Αν 14 μαθητές παρακολουθούν μόνο Αγγλικά, πόσοι είναι οι μαθητές του τμήματος;

(Μονάδες 7)

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) Ορίζουμε τα ενδεχόμενα A και B , όπου:

A το ενδεχόμενο ο μαθητής να παρακολουθεί Αγγλικά και

Γ το ενδεχόμενο ο μαθητής να παρακολουθεί Γαλλικά.

Τότε, το ενδεχόμενο ο μαθητής να παρακολουθεί μαθήματα τουλάχιστον μιας από τις δύο γλώσσες, είναι η ένωση $\mathrm{A} \cup \Gamma$.

Από τα δεδομένα έχουμε:

$$\mathrm{P}(\Gamma')=0,8 \Leftrightarrow \mathrm{P}(\Gamma)=1-\mathrm{P}(\Gamma')=1-0,8=0,2$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A})=4\mathrm{P}(\Gamma)=4\cdot 0,2=0,8 \text{ και } \mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\Gamma)=0,9.$$

i. Το ενδεχόμενο ένας μαθητής που επιλέγεται τυχαία να παρακολουθεί μαθήματα και των δύο γλωσσών είναι το $\mathrm{A} \cap \Gamma$ και η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\Gamma)=\mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\Gamma)-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\Gamma)=0,8+0,2-0,9=0,1$$

Δηλαδή η πιθανότητα ένας μαθητής που επιλέγεται τυχαία να παρακολουθεί και Αγγλικά και Γαλλικά είναι 10%.

ii. Το ενδεχόμενο ο μαθητής που επιλέγεται τυχαία να παρακολουθεί μαθήματα μόνο μιας από τις δύο γλώσσες είναι το $(\mathrm{A}-\Gamma)\cup(\Gamma-\mathrm{A})$ και η ζητούμενη πιθανότητα είναι η $\mathrm{P}\left[(\mathrm{A}-\Gamma)\cup(\Gamma-\mathrm{A})\right]$.

Επιπλέον, επειδή τα ενδεχόμενα $\mathrm{A}-\Gamma, \Gamma-\mathrm{A}$ είναι ασυμβίβαστα, για την πιθανότητα της ένωσής τους θα χρησιμοποιήσουμε τον απλό προσθετικό νόμο. Έχουμε:

$$\begin{aligned}P\left[(A-\Gamma)\cup(\Gamma-A)\right] &= P(\Gamma-A)+P(A-\Gamma)\\ &= P(\Gamma)-P(A\cap\Gamma)+P(A)-P(A\cap\Gamma)\\ &= P(\Gamma)+P(A)-2P(A\cap\Gamma)\\ &= 0,2+0,8-2\cdot 0,1\\ &= 0,8\end{aligned}$$

β) Το ενδεχόμενο ο μαθητής που επιλέγεται τυχαία να παρακολουθεί μόνο Αγγλικά είναι το $A-\Gamma$ και η αντίστοιχη πιθανότητα είναι $P(A-\Gamma)$.

Τότε:

$$P(A-\Gamma)=P(A)-P(A\cap\Gamma)=0,8-0,1=0,7$$

Από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε:

$$P(A-\Gamma)=\frac{N(A-\Gamma)}{N(\Omega)}\Leftrightarrow 0,7=\frac{14}{N(\Omega)}\Leftrightarrow N(\Omega)=\frac{14}{0,7}=20$$

Δηλαδή το τμήμα έχει 20 μαθητές.

ΑΣΚΗΣΗ 12 (4_1936)

Η εξέταση σε έναν διαγωνισμό των Μαθηματικών περιλάμβανε δύο θέματα τα οποία έπρεπε να απαντήσουν οι εξεταζόμενοι. Για να βαθμολογηθούν με άριστα έπρεπε να απαντήσουν και στα δύο θέματα, ενώ για να περάσουν την εξέταση έπρεπε να απαντήσουν σε ένα τουλάχιστον από τα δύο θέματα. Στο διαγωνισμό εξετάσθηκαν 100 μαθητές. Στο πρώτο θέμα απάντησαν σωστά 60 μαθητές. Στο δεύτερο θέμα απάντησαν σωστά 50 μαθητές, ενώ και στα δύο θέματα απάντησαν σωστά 30 μαθητές. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή.

α) Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και με χρήση της γλώσσας των συνόλων (ορίζοντας τα κατάλληλα ενδεχόμενα) τα παραπάνω δεδομένα.

(Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο μαθητής:

i. Να απάντησε σωστά μόνο στο δεύτερο θέμα.

ii. Να βαθμολογηθεί με άριστα.

iii. Να μην απάντησε σωστά σε κανένα θέμα.

iv. Να πέρασε την εξέταση.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Έστω τα ενδεχόμενα A,B, όπου A: οι μαθητές απάντησαν σωστά στο πρώτο θέμα και B: οι μαθητές απάντησαν σωστά στο δεύτερο θέμα, τότε:

$$N(A)=60,\ N(B)=50,\ N(A\cap B)=30.$$

β) Από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε:

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{60}{100}=\frac{3}{5},\qquad P(B)=\frac{N(B)}{100}=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$$

και

$$P(A\cap B)=\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}=\frac{30}{100}=\frac{3}{10}$$

i. Το ενδεχόμενο ο μαθητής που επιλέχθηκε τυχαία να απάντησε σωστά μόνο στο δεύτερο θέμα είναι το ενδεχόμενο $B-A$ και η αντίστοιχη πιθανότητα είναι:

$$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}-\frac{3}{10}=\frac{5-3}{10}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

ii. Ένας μαθητής βαθμολογείται με άριστα όταν απαντά σωστά και στα δύο θέματα. Το ενδεχόμενο ο μαθητής που επιλέγεται τυχαία να απάντησε σωστά και στα δύο θέματα είναι το $A\cap B$ και η αντίστοιχη πιθανότητα είναι:

$$P(A\cap B)=\frac{3}{10}$$

iii. Το ενδεχόμενο ο μαθητής που επιλέγεται τυχαία να μην απάντησε σωστά σε κανένα θέμα είναι το $(A\cup B)'$ και η αντίστοιχη πιθανότητα είναι:

$$P\left((A\cup B)'\right)=1-P(A\cup B)=1-\left(P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right)=$$

$$=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)=1-\frac{3}{5}-\frac{1}{2}+\frac{3}{10}=\frac{10-6-5+3}{10}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

iv. Περνάει την εξέταση όταν απαντά σωστά σε ένα τουλάχιστον από τα δύο, άρα αναζητούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A\cup B$, δηλαδή

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{3}{5}+\frac{1}{2}-\frac{3}{10}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$$

ΑΣΚΗΣΗ 13 (4_2064)

Σε μια ομάδα που αποτελείται από 7 άνδρες και 13 γυναίκες, 4 από τους άνδρες και 2 από τις γυναίκες παίζουν σκάκι. Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα άτομα αυτά.

α) Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και με χρήση της γλώσσας των συνόλων το ενδεχόμενο το άτομο που επιλέχθηκε:

i) να είναι άνδρας ή να παίζει σκάκι.

Μονάδες 6

ii) να μην είναι άνδρας και να παίζει σκάκι.

Μονάδες 6

β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα το άτομο που επιλέχθηκε να είναι γυναίκα και να παίζει σκάκι.

Μονάδες 13

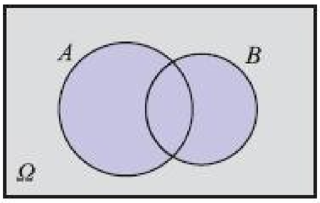
ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

Α: « το άτομο που επιλέγουμε να είναι Άντρας» και

Β: « το άτομο που επιλέγουμε να παίζει σκάκι»

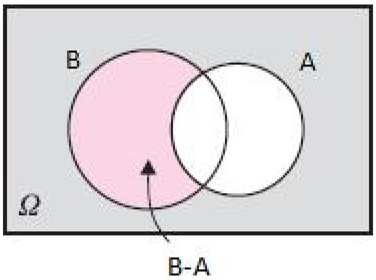
α) i) Το ενδεχόμενο να είναι άνδρας ή να παίζει σκάκι είναι το $A\cup B$. Επομένως το διάγραμμα Venn είναι:



$A \cup B$

ii) Το ενδεχόμενο να μην είναι άνδρας και να παίζει σκάκι είναι το $A' \cap B = B - A$.

Επομένως το διάγραμμα Venn είναι:



β) Το ενδεχόμενο A': «το άτομο που επιλέγουμε να μην είναι άνδρας» είναι το ενδεχόμενο το άτομο που επιλέγουμε να είναι γυναίκα. Από τα 20 άτομα, οι γυναίκες που παίζουν σκάκι είναι δύο.

Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με:

$$P(A' \cap B) = P(B - A) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

ΑΣΚΗΣΗ 14 (4_2073)

Οι δράστες μιας κλοπής διέφυγαν μ' ένα αυτοκίνητο και μετά από την κατάθεση διαφόρων μαρτύρων έγινε γνωστό ότι ο τετραψήφιος αριθμός της πινακίδας του αυτοκίνητου είχε πρώτο και τέταρτο ψηφίο το 2. Το δεύτερο ψηφίο ήταν 6 ή 8 ή 9 και το τρίτο ψηφίο του ήταν 4 ή 7.

α) Με χρήση δενδροδιαγράμματος, να προσδιορίσετε το σύνολο των δυνατών αριθμών της πινακίδας του αυτοκινήτου

Μονάδες 13

β) Να υπολογίσατε της πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

Α: Το τρίτο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας είναι το 7.

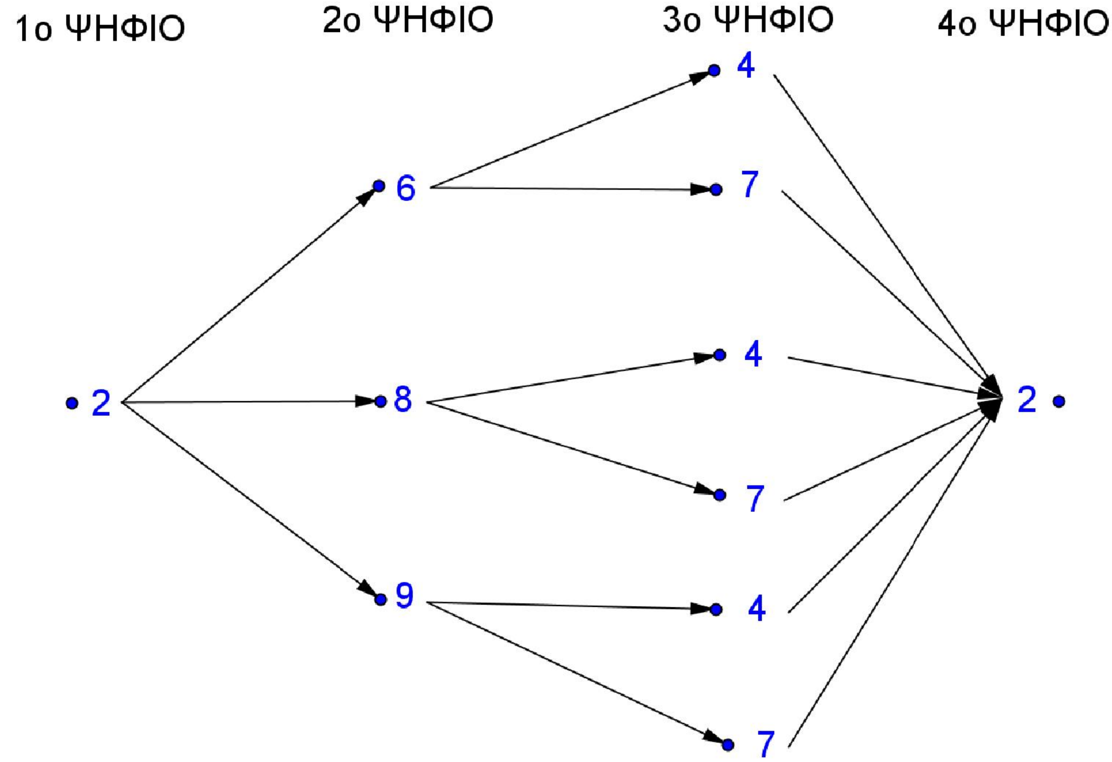
Β: Το δεύτερο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας είναι 6 ή 8.

Γ: Το δεύτερο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας δεν είναι ούτε 8 ούτε 9.

Μονάδες 12

<u>ΛΥΣΗ</u>

Το δενδροδιάγραμμα είναι:



α) Το σύνολο των δυνατών αριθμών της πινακίδας (ο δειγματικός χώρος) είναι:

$$\Omega = \{2642 \text{ , } 2672 \text{ , } 2842 \text{ , } 2872 \text{ , } 2942 \text{ , } 2972\}$$

και το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου Ω είναι $N(\Omega)=6$.

β) Έστω το ενδεχόμενο

Α: «Το τρίτο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας είναι το **7**»

τότε $A=\{2672 \text{ , } 2872 \text{ , } 2972\}$, οπότε το πλήθος των στοιχείων του Α είναι $N(A)=3$.

Επιλέγουμε στην τύχη μία από τις 6 (ισοπίθανες) πινακίδες. Τότε, η πιθανότητα να ανήκει στο ενδεχόμενο Α είναι:

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Έστω το ενδεχόμενο:

Β: «Το δεύτερο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας είναι 6 ή 8».

τότε $B=\{2642 \text{ , } 2672 \text{ , } 2842 \text{ , } 2872\}$, οπότε το πλήθος των στοιχείων του Β είναι $N(B)=4$.

Επιλέγουμε στην τύχη μία από τις 6 (ισοπίθανες) πινακίδες. Τότε, η πιθανότητα να ανήκει στο ενδεχόμενο Β είναι:

$$P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Έστω το ενδεχόμενο:

Γ: « Το δεύτερο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας δεν είναι ούτε 8, ούτε 9».

Άρα να είναι 6 οπότε $\Gamma=\{2642 \text{ , } 2672\}$, οπότε το πλήθος των στοιχείων του Γ είναι $N(\Gamma)=2$.

Επιλέγουμε στην τύχη μία από τις 6 (ισοπίθανες) πινακίδες.

Τότε, η πιθανότητα να ανήκει στο ενδεχόμενο Γ είναι:

$$P(\Gamma)=\frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

ΑΣΚΗΣΗ 15 (4_2080)

Από μια έρευνα μεταξύ μαθητών ενός Λυκείου της χώρας, προέκυψε ότι το 80% των μαθητών πίνει γάλα ή τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι στο σπίτι το πρωί .

Επιλέγουμε ένα μαθητή στην τύχη και ορίζουμε τα ενδεχόμενα :

Α: ο μαθητής πίνει γάλα

Β: ο μαθητής τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι

Αν από το σύνολο των μαθητών το 60% πίνει γάλα και το 45% τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι.

α) Να ορίσετε με χρήση της γλώσσας των συνόλων τα ενδεχόμενα:

i) Ο μαθητής ούτε να πίνει γάλα ούτε να τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι

ii) Ο μαθητής να πίνει γάλα και να τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι.

iii) Ο μαθητής να πίνει μόνο γάλα.

(Μονάδες 12)

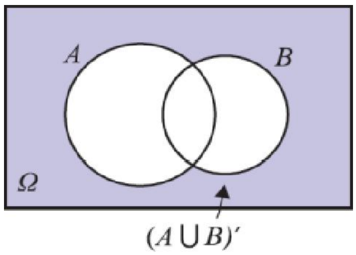
β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα πραγματοποίησης των ενδεχομένων του α) ερωτήματος.

(Μονάδες 13)

<u>ΛΥΣΗ</u>

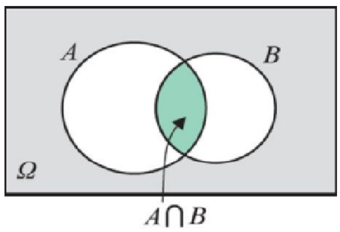
α) i) Έστω Γ το ενδεχόμενο: « ο μαθητής ούτε να πίνει γάλα, ούτε να τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι » δηλ. <u>δεν πραγματοποιείται κανένα από τα ενδεχόμενα Α και Β</u> οπότε:

$\Gamma=(A\cup B)'$ με αντίστοιχο διάγραμμα Venn :



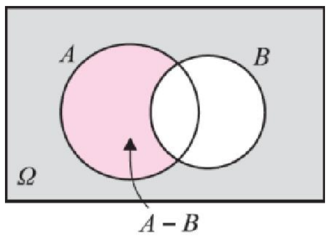
ii) Έστω Δ είναι το ενδεχόμενο: «ο μαθητής να πίνει γάλα και να τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι» δηλ. <u>πραγματοποιούνται αμφότερα τα ενδεχόμενα Α και Β</u> οπότε:

$\Delta=A\cap B$ με αντίστοιχο διάγραμμα Venn :



iii) Έστω Ε είναι το ενδεχόμενο: « ο μαθητής να πίνει μόνο γάλα » δηλ. <u>πραγματοποιείται μόνο το ενδεχόμενο Α</u> οπότε:

$E=A-B=A\cap B'$ με αντίστοιχο διάγραμμα Venn :



β) Από υπόθεση έχουμε: το 80% των μαθητών πίνει γάλα ή τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι στο σπίτι το πρωί άρα: $P(A\cup B)=0,8$.

Το 60% πίνει γάλα άρα, $P(A)=0,6$,ενώ το 45% τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι, άρα, $P(B)=0,45$.

Οπότε:

$$P(\Gamma)=P\left((A\cup B)'\right)=1-P(A\cup B)=1-0,8=0,2$$

$$P(\Delta)=P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0,6+0,45-0,8=0,25$$

$$P(E)=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=0,6-0,25=0,35.$$

ΑΣΚΗΣΗ 16 (4_6144)

Μια ημέρα, στο τμήμα A_1 ενός Λυκείου, το $\frac{1}{4}$ των μαθητών δεν έχει διαβάσει ούτε Άλγεβρα ούτε Γεωμετρία, ενώ το $\frac{1}{3}$ των μαθητών έχει διαβάσει και τα δύο αυτά μαθήματα. Η καθηγήτρια των μαθηματικών επιλέγει τυχαία ένα μαθητή για να τον εξετάσει. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Α: ο μαθητής να έχει διαβάσει Άλγεβρα

Γ: ο μαθητής να έχει διαβάσει Γεωμετρία

α) Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και με χρήση της γλώσσας των συνόλων τα δεδομένα του προβλήματος.

Μονάδες 9

β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο μαθητής:

i) να έχει διαβάσει ένα τουλάχιστον από τα δύο μαθήματα

ii) να έχει διαβάσει ένα μόνο από τα δυο μαθήματα.

Μονάδες 8

γ) Αν γνωρίζουμε επιπλέον ότι οι μισοί από τους μαθητές έχουν διαβάσει Γεωμετρία, να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής:

i) να έχει διαβάσει Γεωμετρία

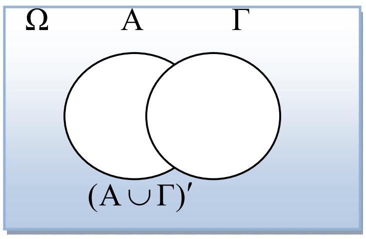
ii) να έχει διαβάσει Άλγεβρα.

Μονάδες 8

<u>ΛΥΣΗ</u>

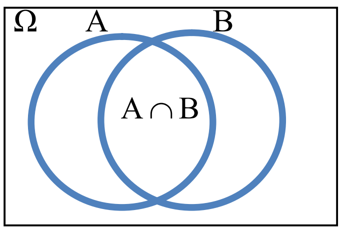
α) Το ενδεχόμενο ο μαθητής να μην έχει διαβάσει ούτε Άλγεβρα ούτε Γεωμετρία είναι το:

$(A\cup\Gamma)'$ το οποίο φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα Venn



Το ενδεχόμενο ο μαθητής να έχει διαβάσει και τα δύο μαθήματα είναι το:

$A\cap\Gamma$ το οποίο φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα Venn



β) Αφού το $\frac{1}{4}$ των μαθητών δεν έχει διαβάσει ούτε Άλγεβρα ούτε Γεωμετρία ισχύει:

$$P[(A\cup \Gamma)'] = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1 - P(A\cup\Gamma) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{4} = P(A\cup\Gamma) \Leftrightarrow P(A\cup\Gamma) = \frac{3}{4}$$

Αφού το $\frac{1}{3}$ των μαθητών έχει διαβάσει και τα δύο αυτά μαθήματα ισχύει:

$$P(A\cap\Gamma) = \frac{1}{3}$$

i) Η πιθανότητα ο μαθητής να έχει διαβάσει ένα τουλάχιστον από τα δύο μαθήματα είναι:

$$P(A\cup\Gamma) = \frac{3}{4}$$

ii) Η πιθανότητα ο μαθητής να έχει διαβάσει ένα μόνο από τα δύο μαθήματα είναι:

$$\begin{aligned} P[(A-\Gamma)\cup(\Gamma-A)] &= P(A-\Gamma)+P(\Gamma-A) \\ &= P(A)-P(A\cap\Gamma)+P(\Gamma)-P(A\cap\Gamma) \\ &= [P(A)+P(\Gamma)-P(A\cap\Gamma)]-P(A\cap\Gamma) \\ &= P(A\cup\Gamma)-P(A\cap\Gamma) = \frac{3}{4}-\frac{1}{3} = \frac{9-4}{12} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

γ) Αφού οι μισοί από τους μαθητές έχουν διαβάσει Γεωμετρία ισχύει:

$$N(\Gamma) = \frac{1}{2}N(\Omega) \Leftrightarrow 2N(\Gamma) = N(\Omega)$$

i) Η πιθανότητα ο μαθητής να έχει διαβάσει Γεωμετρία είναι:

$$P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{N(\Gamma)}{2N(\Gamma)} = \frac{1}{2}$$

ii) Ισχύει

$$P(A\cup\Gamma) = P(A)+P(\Gamma)-P(A\cap\Gamma) \Leftrightarrow P(A\cup\Gamma)-P(\Gamma)+P(A\cap\Gamma) = P(A) \Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3} = P(A) \Leftrightarrow \frac{9-6+4}{12} = P(A) \Leftrightarrow P(A) = \frac{7}{12}$$

Η πιθανότητα ο μαθητής να έχει διαβάσει Άλγεβρα είναι:

$$P(A) = \frac{7}{12}$$

Άλγεβρα Α΄ Λυκείου

Κεφάλαιο 2^{ο} : Οι πραγματικοί αριθμοί

2.1: Οι Πράξεις και οι ιδιότητές τους

ΑΣΚΗΣΗ 1 (2_487)

i. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2+(y+3)^2=x^2+y^2-2x+6y+10.$$

(Μονάδες 12)

ii. Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε: $x^2+y^2-2x+6y+10=0$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

i. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y έχουμε:

$$(x-1)^2+(y+3)^2=x^2-2\cdot x\cdot 1+1^2+y^2+2\cdot y\cdot 3+3^2=x^2+y^2-2x+6y+10$$

ii. Είναι,

$$\begin{aligned} x^2+y^2-2x+6y+10=0 &\overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow} (x-1)^2+(y+3)^2=0 \\ &\Leftrightarrow x-1=0 \text{ και } y+3=0 \\ &\Leftrightarrow x=1 \text{ και } y=-3 \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2 (2_1070)

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ, δ με $\beta\neq 0$ και $\delta\neq\gamma$ ώστε να ισχύουν :

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta}=4 \text{ και } \frac{\gamma}{\delta-\gamma}=\frac{1}{4}$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=3\beta$ και $\delta=5\gamma$

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης :

$$\Pi=\frac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}$$

(Μονάδες 15)

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) Από τις δοθείσες σχέσεις έχουμε:

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta}=4\Leftrightarrow \alpha+\beta=4\beta\Leftrightarrow \alpha=3\beta$$

και

$$\frac{\gamma}{\delta-\gamma}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow 4\gamma=\delta-\gamma\Leftrightarrow \delta=5\gamma$$

β) Έχουμε $\Pi=\dfrac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}=\dfrac{\gamma(\alpha+\beta)}{\beta(\delta-\gamma)}\overset{(\alpha)}{=}\dfrac{\gamma(3\beta+\beta)}{\beta(5\gamma-\gamma)}=\dfrac{4\beta\gamma}{4\beta\gamma}=1$.

ΑΣΚΗΣΗ 3 (2_1080)

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει : $\frac{4x+5y}{x-4y}=-2$

α) Να αποδείξετε ότι : $y=2x$

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης : $A=\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}$

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Αρχικά πρέπει και αρκεί $x-4y\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 4y$

Οπότε,

$$\frac{4x+5y}{x-4y}=-2 \Rightarrow 4x+5y=-2(x-4y)$$
$$\Rightarrow 4x+5y=-2x+8y$$
$$\Rightarrow 4x+2x=8y-5y$$
$$\Rightarrow 6x=3y \Rightarrow y=2x \ (1)$$

β) Χρησιμοποιώντας το πρώτο ερώτημα βρίσκουμε:

$$A=\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}\overset{(1)}{=}\frac{2x^2+3(2x)^2+x\cdot 2x}{x\cdot 2x}=\frac{2x^2+12x^2+2x^2}{2x^2}=\frac{16x^2}{2x^2}=8$$

ΑΣΚΗΣΗ 4 (2_3874)

Δίνονται οι μη μηδενικοί αριθμοί α,β, με $\alpha\neq\beta$ για τους οποίους ισχύει $\frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1}=\frac{\alpha}{\beta}$

α. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

Μονάδες 13

β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K=\frac{\alpha^{22}\cdot(\beta^3)^8}{\alpha^{-2}\cdot(\alpha\beta)^{25}}$

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε

$$\frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1}=\frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow (\alpha^2+1)\cdot\beta=(\beta^2+1)\cdot\alpha \Leftrightarrow \alpha^2\beta+\beta=\beta^2\alpha+\alpha \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2\beta+\beta-\beta^2\alpha-\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha-\beta)-(\alpha-\beta)=0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)(\alpha\beta-1)=0$$

και εφόσον $\alpha\neq\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta\neq 0$, αναγκαία έπεται ότι $\alpha\beta-1=0 \Leftrightarrow \alpha\beta=1$

Άρα οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

β. Έχουμε

$$K=\frac{\alpha^{22}\cdot\left(\beta^{3}\right)^{8}}{\alpha^{-2}\cdot\left(\alpha\beta\right)^{25}}=\frac{\alpha^{22}\cdot\beta^{24}}{\alpha^{-2}\cdot\alpha^{25}\cdot\beta^{25}}=\frac{\alpha^{22}\cdot\beta^{24}}{\alpha^{23}\cdot\beta^{25}}=\frac{1}{\alpha\cdot\beta}=\frac{1}{1}=1$$

2.2: Διάταξη Πραγματικών αριθμών

ΑΣΚΗΣΗ 1 (2_486)
Αν $0<\alpha<1$, τότε:
i. Να αποδείξετε ότι: $\alpha^3<\alpha$.

(Μονάδες 13)

ii. Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: $0, \alpha^3, 1, \alpha, \frac{1}{\alpha}$

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

i. Είναι $0<\alpha<1 \Rightarrow \alpha<1 \overset{\alpha>0}{\Rightarrow} \alpha\cdot\alpha<\alpha\cdot 1 \Rightarrow \alpha^2<\alpha \overset{\alpha>0}{\Rightarrow} \alpha^2\cdot\alpha<\alpha\cdot 1 \Rightarrow \alpha^3<\alpha$

Άρα:

$$\left\{\begin{array}{l} 0<\alpha^2<\alpha \\ \quad\text{και} \\ 0<\alpha<1 \end{array}\right. \Rightarrow \alpha^2\cdot\alpha<\alpha\cdot 1 \Rightarrow \alpha^3<\alpha$$

ii. Είναι $0<\alpha$ άρα $0<\alpha^3$ και από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε $\alpha^3<\alpha$, επομένως $0<\alpha^3<\alpha$.

Από την υπόθεση ισχύει $\alpha<1$ και τα μέλη της ανισότητας είναι θετικά, άρα $\frac{1}{\alpha}>1$.

Συνεπώς:

$$0<\alpha^3<\alpha<1<\frac{1}{\alpha}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2 (2_506)
Αν $2\le x\le 3$ και $1\le y\le 2$, να βρείτε μεταξύ ποιών ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:
α) $x+y$

Μονάδες 5

β) $2x-3y$

Μονάδες 10

γ) $\frac{x}{y}$

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Προσπαθώ να δημιουργήσω την παράσταση : $x+y$.
Μπορώ να προσθέσω ανισότητες κατά μέλη αρκεί να είναι της ίδιας φοράς οπότε θέτοντας τη μια κάτω από την άλλη έχουμε:

$$\begin{array}{rl} (+) & 2 \le x \le 3 \\ & 1 \le y \le 2 \\ \hline & 3 \le x+y \le 5 \end{array}$$

β) Προσπαθώ να δημιουργήσω την παράσταση : $2x-3y$

Για το $2x$ πολλαπλασιάζω όλους τους όρους της $2 \le x \le 3$ με το 2 και έχω :

$$2 \cdot 2 \le 2x \le 2 \cdot 3$$

δηλ: $4 \le 2x \le 6 \quad (1)$

Επειδή δεν επιτρέπεται να αφαιρέσω ανισότητες κατά μέλη για να δημιουργήσω το $-3y$ πολλαπλασιάζω όλους τους όρους της $1 \le y \le 2$ με το (-3) και έχω :

$1(-3) \ge -3y \ge 2(-3)$ που αλλάζει φορά αφού πολλαπλασιάζω με αρνητικό.

Οπότε: $-3 \ge -3y \ge -6$ ή επειδή θέλω να προσθέσω κατά μέλη τη γράφω :

$-6 \le -3y \le -3 \quad (2)$ ώστε να είναι ίδιας φοράς .

Βάζω τις ανισότητες (1) και (2) τη μια κάτω από την άλλη και προσθέτω κατά μέλη:

$$\begin{array}{rl} (+) & 4 \le 2x \le 6 \\ & -6 \le -3y \le -3 \\ \hline & -2 \le 2x-3y \le 3 \end{array}$$

γ) Επειδή δεν επιτρέπεται να διαιρέσω ανισότητες κατά μέλη , αρχικά θα βρούμε το $\frac{1}{y}$

Από την εφαρμογή του σχ. βιβλίου σελ. 58 είναι γνωστό ότι:

Αν α, β ομόσημοι τότε: $\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$

Έχουμε,

$$1 \le y \le 2 \Rightarrow 1 \ge \frac{1}{y} \ge \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \le \frac{1}{y} \le 1$$

Μπορώ να πολ/σω ανισότητες κατά μέλη αρκεί να είναι ίδιας φοράς και όλοι θετικοί

οπότε:

$$\begin{array}{rl} & 2 \le x \le 3 \\ (\cdot) & \frac{1}{2} \le \frac{1}{y} \le 1 \\ \hline & 2 \cdot \frac{1}{2} \le x \cdot \frac{1}{y} \le 3 \cdot 1 \end{array}$$

Άρα: $1 \le \frac{x}{y} \le 3$

Εδώ προβληματιζόμαστε…

Η έκφραση, που χρησιμοποιείται σε πολλές ασκήσεις, συμπεριλαμβανομένου και του σχολικού βιβλίου (Α6/ σελ. 67), «***μεταξύ ποιων ορίων βρίσκεται μια παράσταση***», δεν είναι η καλύτερη, όπως υποστηρίζει ο αγαπητό μας δάσκαλος **Αντώνης Κυριακόπουλος**. Γιατί; Η απάντηση σε τέτοιου είδους ερωτήσεις μπορεί να είναι μεταξύ του μείον ένα εκατομμύριο και του (συν) ένα εκατομμύριο και θα είμαστε πάντα σωστή!

Επομένως σε αυτές τις ασκήσεις, προτείνουμε να δίνετε η σχέση που επιθυμούμε να αποδείξουμε, πχ. να αποδείξετε ότι $1 \leq \frac{x}{y} \leq 3$.

ΑΣΚΗΣΗ 3 (2_1092)

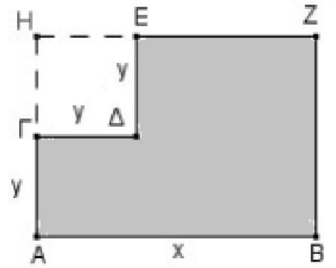
Από το ορθογώνιο ΑΒΖΗ αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y.

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος ΕΖΒΑΓΔ που απέμεινε δίνετε από τη σχέση : $\Pi = 2x + 4y$

Μονάδες 10

β) Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος.

Μονάδες 15



<u>ΛΥΣΗ</u>

α) Θέλουμε να βρούμε την περίμετρο του ΑΒΖΕ συναρτήσει του y και x. Αρχικά έχουμε Π = ΑΒ + ΒΖ + ΖΗ + ΗΑ. Ξέρω ότι ΑΒ = x, οπότε αρκεί να προσδιορίσουμε τις πλευρές ΒΖ, ΖΗ και ΗΑ.

Το ΓΔΕΗ είναι τετράγωνο οπότε έχει όλες τις πλευρές του ίσες, δηλαδή

ΗΕ = ΕΔ = ΔΓ = ΓΗ = y.

Το ΑΒΖΗ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο άρα έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες, δηλαδή ΒΖ = ΑΗ και ΑΒ = ΗΖ.

Οπότε από τα παραπάνω έχουμε ότι

ΒΖ = ΑΗ = ΑΓ + ΓΗ = y + y = 2y

ΖΗ = ΑΒ = x και

ΗΑ = ΗΓ + ΓΑ = y + y = 2y

Άρα

Π = ΑΒ + ΒΖ + ΖΗ + ΗΑ = x + 2y + x + 2y = 2x + 4y

β) Αρκεί να βρούμε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται το άθροισμα 2x + 4y.

Έχουμε,

$$5 < x < 8 \overset{\cdot(2)}{\Leftrightarrow} 10 < 2x < 16 \quad (1)$$

$$1 < y < 2 \overset{\cdot(4)}{\Leftrightarrow} 4 < 4y < 8 \quad 1 < y < 2 \overset{\cdot(4)}{\Leftrightarrow} 4 < 4y < 8 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2) και έχουμε :

$$10 + 4 < 2x + 4y < 16 + 8 \Rightarrow 14 < \Pi < 24$$

<u>Παρόμοιες ασκήσεις</u> : Το α ερώτημα μοιάζει με την ΑΣΚΗΣΗ 5 (Β΄ Ομάδας) της παραγράφου 2.3 του σχολικού βιβλίου.

Το β ερώτημα μοιάζει με την ΑΣΚΗΣΗ 4 (Α΄ Ομάδας) της παραγράφου 2.2 του σχολικού βιβλίου.
Σημείωση: Δείτε τον προβληματισμό στην άσκηση **2_506.**

ΑΣΚΗΣΗ 4 (2_1541)
Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει:

$$4 \le x \le 7 \ \text{ και } 2 \le y \le 3 \ \text{ τότε :}$$

α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Μονάδες 10

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Μονάδες 15

__**Λύση**__
α) Η περίμετρος ενός ορθογωνίου με μήκος x και πλάτος y δίνεται από την σχέση:

$$\Pi = x + y + x + y \Longleftrightarrow \Pi = 2x + 2y$$

$$4 \le x \le 7 \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} 2\cdot 4 \le 2\cdot x \le 2\cdot 7 \Leftrightarrow 8 \le 2x \le 14 \ (1)$$

$$2 \le y \le 3 \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} 2\cdot \le 2\cdot y \le 2\cdot 3 \Leftrightarrow 4 \le 2y \le 6 \ (2)$$

Από την πρόσθεση κατά μέλη των ανισοτήτων (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$8 + 4 \le 2x + 2y \le 14 + 6 \Leftrightarrow 12 \le \Pi \le 20$$

Άρα η ανίσωση που ικανοποιεί η περίμετρος του ορθογωνίου είναι η:

$$12 \le \Pi \le 20$$

β) Αν x' είναι το μήκος και y' το πλάτος του νέου ορθογωνίου, τότε η περίμετρος του νέου ορθογωνίου θα δίνεται από την σχέση:

$$\Pi' = x' + y' + x' + y' \Longleftrightarrow \Pi' = 2x' + 2y'$$

$$4 \le x \le 7 \overset{-1}{\Leftrightarrow} 4-1 \le x-1 \le 7-1 \Leftrightarrow 3 \le x' \le 6 \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} 2\cdot 3 \le 2\cdot x' \le 2\cdot 6 \Leftrightarrow$$

$$6 \le 2x' \le 12 \ (3)$$

$$2 \le y \le 3 \overset{\cdot 3}{\Leftrightarrow} 3\cdot 2 \le 3\cdot y \le 3\cdot 3 \Leftrightarrow 6 \le y' \le 9 \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} 2\cdot 6 \le 2\cdot y' \le 2\cdot 9 \Leftrightarrow$$

$$12 \le 2y' \le 18 \ (4)$$

Από την πρόσθεση κατά μέλη των ανισοτήτων (3) και (4) προκύπτει ότι:

$$6 + 12 \le 2x' + 2y' \le 12 + 18 \Longleftrightarrow 18 \le \Pi' \le 30$$

Άρα η ανίσωση που ικανοποιεί η περίμετρος του νέου ορθογωνίου είναι η:

$$18 \le \Pi' \le 30$$

Σημείωση: Δείτε τον προβληματισμό στην άσκηση **2_506.**

ΑΣΚΗΣΗ 5 (2_3852)

Για τους πραγματικούς αριθμούς α,β ισχύουν: $2 \le \alpha \le 4$ και $-4 \le \beta \le -3$

Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α. $\alpha - 2\beta$

Μονάδες 12

β. $\alpha^2 - 2\alpha\beta$

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε

$$\begin{cases} 2 \le \alpha \le 4 \\ -4 \le \beta \le -3 \end{cases} \underset{\cdot(-2)}{\Rightarrow} \begin{cases} 2 \le \alpha \le 4 \\ 8 \ge -2\beta \ge 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \le \ \alpha \ \le 4 \\ 6 \le -2\beta \le 8 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 8 \le \alpha - 2\beta \le 12$$

β. Έχουμε

$$2 \le \alpha \le 4 \text{ τότε } 4 \le \alpha^2 \le 16$$

Επίσης από τις σχέσεις

$$\begin{cases} 2 \le \ \alpha \ \le 4 \\ 6 \le -2\beta \le 8 \end{cases} \Rightarrow 12 \le -2\alpha\beta \le 32$$

Συνεπώς

$$\begin{cases} 4 \le \ \alpha^2 \ \le 16 \\ 12 \le -2\alpha\beta \le 32 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 16 \le \alpha^2 - 2\alpha\beta \le 48$$

Σημείωση: Δείτε τον προβληματισμό στην άσκηση **2_506.**

ΑΣΚΗΣΗ 6 (2_3870)

Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9$ και $\Lambda = 2\alpha(3-\beta)$, όπου $\alpha, \beta \in R$

α. Να δείξετε ότι: $K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$

Μονάδες 3

β. Να δείξετε ότι $K \ge \Lambda$, για κάθε τιμή των α,β.

Μονάδες 10

γ. Για ποιες τιμές των α,β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α.Έχουμε

$$K - \Lambda = (2\alpha^2 + \beta^2 + 9) - 2\alpha(3-\beta) = \alpha^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 9 - 6\alpha + 2\alpha\beta$$
$$= (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$$

β. Για κάθε $\alpha, \beta \in R$ έχουμε

$$K - \Lambda = \left(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2\right) + \left(\alpha^2 - 6\alpha + 9\right) = \left(\alpha + \beta\right)^2 + \left(\alpha - 3\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow K - \Lambda \geq 0$$
$$\Leftrightarrow K \geq \Lambda$$

γ. Έχουμε

$$K = \Lambda \Leftrightarrow K - \Lambda = 0 \overset{(\beta)}{\Leftrightarrow} \left(\alpha + \beta\right)^2 + \left(\alpha - 3\right)^2 = 0$$

Εφόσον $\left(\alpha+\beta\right)^2 \geq 0$ και $\left(\alpha-3\right)^2 \geq 0$, η ισότητα ισχύει για

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -3 \\ \alpha = 3 \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7 (2_4299)

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν: $3 \leq x \leq 5$ και $-2 \leq y \leq -1$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:

α. $y - x$

(Μονάδες 12)

β. $x^2 + y^2$

(Μονάδες 13)

<u>ΛΥΣΗ</u>

α. Είναι $-2 \leq y \leq -1$ (1) και $3 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow -3 \geq -x \geq -5 \Leftrightarrow -5 \leq -x \leq -3$ (2).
Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2)
[*μπορώ να προσθέσω κατά μέλη ανισότητες της ίδιας φοράς*] έχουμε :
$-7 \leq y + (-x) \leq -4 \Leftrightarrow -7 \leq y - x \leq -4$, άρα $y - x \in \left[-7, -4\right]$.

β. Είναι $-2 \leq y \leq -1 \Leftrightarrow 2 \geq -y \geq 1 \Leftrightarrow 1 \leq -y \leq 2 \Leftrightarrow 1^2 \leq \left(-y\right)^2 \leq 2^2 \Leftrightarrow 1 \leq y^2 \leq 4$ (1)
και $3 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow 3^2 \leq x^2 \leq 5^2 \Leftrightarrow 9 \leq x^2 \leq 25$ (2).
[*μπορώ να υψώσω σε οποιαδήποτε θετικό ακέραιο τα μέλη μιας ανισότητας, αρκεί αυτά να είναι θετικοί αριθμοί και αντιστρόφως*]
Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) έχουμε : $10 \leq x^2 + y^2 \leq 29$, άρα $x^2 + y^2 \in \left[10, 29\right]$.

<u>Σχόλια</u>: *Τα ερωτήματα α) και β) αντιστοιχούν στην ΑΣΚΗΣΗ Α' Ομάδας 4) περιπτώσεις ii) και iv) της §2.2*
Σημείωση: Δείτε τον προβληματισμό στην άσκηση **2_506.**

ΑΣΚΗΣΗ 8 (2_7519)

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α. $\alpha + \dfrac{4}{\alpha} \geq 4$

(Μονάδες 12)

β. $\left(\alpha+\frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{4}{\beta}\right)\geq 16$

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\alpha>0$, άρα:

$$\alpha+\frac{4}{\alpha}\geq 4 \Leftrightarrow \alpha^2+\alpha\frac{4}{\alpha}\geq 4\alpha \Leftrightarrow \alpha^2+4\geq 4\alpha \Leftrightarrow \alpha^2-4\alpha+4\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-2)^2\geq 0$$

που ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό α.

β) Από το πρώτο ερώτημα έχουμε ότι:

$$\begin{cases}\alpha+\frac{4}{\alpha}\geq 4\\ \beta+\frac{4}{\beta}\geq 4\end{cases} \Rightarrow \left(\alpha+\frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{4}{\beta}\right)\geq 4\cdot 4 \Leftrightarrow \left(\alpha+\frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{4}{\beta}\right)\geq 16$$

2.3: Απόλυτη τιμή Πραγματικών Αριθμών

ΑΣΚΗΣΗ 1 (2_504)

α) Αν $\alpha<0$, να αποδειχθεί ότι: $\alpha+\frac{1}{\alpha}\le -2$.

Μονάδες 15

β) Αν $\alpha<0$, να αποδειχθεί ότι: $|\alpha|+\left|\frac{1}{\alpha}\right|\ge 2$

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε :

$$\alpha+\frac{1}{\alpha}\le -2 \overset{\alpha<0}{\Leftrightarrow} \alpha^2+1\ge -2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha+1\ge 0 \Leftrightarrow (\alpha+1)^2\ge 0$$

που ισχύει αφού κάθε αριθμός υψωμένος στο τετράγωνο είναι μη αρνητικός.

β) Αν $\alpha<0$ τότε $|\alpha|=-\alpha$, συνεπώς

$$|\alpha|+\left|\frac{1}{\alpha}\right|\ge 2 \overset{\alpha<0}{\Leftrightarrow} -\alpha-\frac{1}{\alpha}\ge 2 \Leftrightarrow \alpha+\frac{1}{\alpha}\le -2$$

,που ισχύει λόγω του ερωτήματος (α).

ΑΣΚΗΣΗ 2 (2_509)

α) Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}-\{0\}$, να αποδειχθεί ότι: $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|+\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\ge 2 \quad (1)$

Μονάδες 15

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Για $\alpha,\beta\in\mathbb{R}-\{0\}$

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|+\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\ge 2 \Leftrightarrow \frac{|\alpha|}{|\beta|}+\frac{|\beta|}{|\alpha|}\ge 2 \Leftrightarrow \frac{|\alpha|^2+|\beta|^2}{|\alpha||\beta|}\ge 2 \Leftrightarrow |\alpha|^2+|\beta|^2\ge 2|\alpha||\beta| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\alpha|^2+|\beta|^2-2|\alpha||\beta|\ge 0 \Leftrightarrow (|\alpha|-|\beta|)^2\ge 0 \text{ που ισχύει.}$$

β) Η ισότητα στην (1) ισχύει αν και μόνο αν:

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|+\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|=2 \Leftrightarrow \frac{|\alpha|}{|\beta|}+\frac{|\beta|}{|\alpha|}=2 \Leftrightarrow \frac{|\alpha|^2+|\beta|^2}{|\alpha||\beta|}=2$$

$$\Leftrightarrow |\alpha|^2+|\beta|^2=2|\alpha||\beta| \Leftrightarrow |\alpha|^2+|\beta|^2-2|\alpha||\beta|=0 \Leftrightarrow (|\alpha|-|\beta|)^2=0 \Leftrightarrow |\alpha|=|\beta| \Leftrightarrow \alpha=\pm\beta$$

ΑΣΚΗΣΗ 3 (2_996)

Δίνεται η παράσταση $A = |x-1| + |y-3|$, με x, y πραγματικούς αριθμούς , για τους οποίους ισχύει $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$.

Να αποδείξετε ότι:

α. $A = x - y + 2$.

Μονάδες 12

β. $0 < A < 4$.

Μονάδες 13

<u>ΛΥΣΗ</u>

α. Έχουμε:

$1 < x < 4 \Rightarrow 0 < x-1 \langle 3 \Rightarrow x-1 \rangle 0 \Rightarrow |x-1| = x-1$ και

$2 < y < 3 \Rightarrow -1 < y-3 < 0 \Rightarrow y-3 < 0 \Rightarrow |y-3| = -y+3$.

Άρα

$$A = |x-1| + |y-3| = x-1-y+3 = x-y+2.$$

β. Έχουμε:

$$\begin{cases} 1 < x < 4 \\ 2 < y < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 < x < 4 \\ -3 < -y < -2 \end{cases} \Rightarrow 1-3 < x-y < 4-2 \Rightarrow$$

$$-2 < x-y < 2 \Rightarrow 0 < x-y+2 < 4$$

Οπότε προκύπτει: $0 < A < 4$

ΑΣΚΗΣΗ 4 (2_1009)

Δίνεται η παράσταση $A = |3x-6| + 2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α. Να αποδείξετε ότι:

1. Για κάθε $x \geq 2$, $A = 3x-4$
2. για κάθε $x < 2$, $A = 8-3x$

Μονάδες 12

β. Αν για τον x ισχύει $x \geq 2$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{9x^2 - 16}{|3x-6|+2} = 3x+4$$

Μονάδες 13

<u>ΛΥΣΗ</u>

α. 1. Αν $x \geq 2 \Leftrightarrow 3x \geq 6 \Leftrightarrow 3x-6 \geq 0$, οπότε $|3x-6| = 3x-6$.

Άρα:

$$A = |3x-6| + 2 = 3x-6+2 = 3x-4 \;.$$

2. Αν $x < 2 \Leftrightarrow 3x < 6 \Leftrightarrow 3x-6 < 0$, οπότε $|3x-6| = -3x+6$.

Άρα:

$$A = |3x-6| + 2 = -3x + 6 + 2 = 8 - 3x\ .$$

β. Για κάθε $x \geq 2$ είδαμε στ α.ερώτημα ότι $|3x-6| = 3x-6$ οπότε :

$$\frac{9x^2-16}{|3x-6|+2} = \frac{9x^2-16}{3x-6+2} = \frac{(3x)^2-4^2}{3x-6+2} = \frac{(3x-4)(3x+4)}{3x-4} = 3x+4$$

ΑΣΚΗΣΗ 5 (2_1089)

Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$,

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x - 5|$ και $|x - 10|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

Μονάδες 10

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $A = \dfrac{|x-5|}{x-5} + \dfrac{|x-10|}{x-10}$

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $5 < x < 10$, άρα $5 < x \Leftrightarrow x-5 > 0$ οπότε $|x - 5| = x - 5$ και $x < 10 \Leftrightarrow x - 10 < 0$ οπότε $|x - 10| = - x + 10$.

β) Για να ορίζεται η Α πρέπει να ισχύει $x - 5 \neq 0$ και $x - 10 \neq 0$, τα οποία ισχύουν αφού $5 < x < 10$.

Έχουμε,

$$A = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10} = \frac{x-5}{x-5} + \frac{-x+10}{x-10} = 1 + \frac{-(x-10)}{x-10} = 1 - 1 = 0$$

Παρόμοια Άσκηση :

Το α ερώτημα μοιάζει με την άσκηση 2(Α΄ ομάδας) της παραγράφου 2.3 του σχολικού βιβλίου.

ΑΣΚΗΣΗ 6 (2_1091)

Δίνεται η παράσταση :

$$A = |x - 1| - |x - 2|$$

α) Για $1 < x < 2$ να δείξετε ότι : $A = 2x - 3$

Μονάδες 13

β) Για $x < 1$ να δείξετε ότι η παράσταση Α έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $1 < x < 2$, άρα $1 < x \Leftrightarrow x - 1 > 0$ οπότε $|x - 1| = x - 1$.

Επίσης, $x < 2 \Leftrightarrow x - 2 < 0$ άρα $|x - 2| = - x + 2$.

Επομένως,

$$A = x - 1 - (- x + 2) = x - 1 + x - 2 = 2x - 3$$

β) Αν $x < 1$ τότε θα είναι και $x < 2$.

Άρα $x<1 \Leftrightarrow x-1<0$ οπότε $|x-1| = -x+1$

και $x<2 \Leftrightarrow x-2<0$ οπότε $|x-2| = -x+2$

Έχουμε, $A = -x+1-(-x+2) = -x+1+x-2 = -1$

Παρόμοιες Ασκήσεις :

Το α ερώτημα μοιάζει με την ΑΣΚΗΣΗ 2 (Α΄ Ομάδας) της παραγράφου 2.3 του σχολικού βιβλίου.

Το β ερώτημα μοιάζει με την ΑΣΚΗΣΗ 3(Α΄ Ομάδας) της παραγράφου 2.3 του σχολικού βιβλίου.

ΑΣΚΗΣΗ 7 (2_1273) *(δείτε σημείωση)*

Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y, για τα οποία ισχύουν :

$$|x-3| \le 2 \text{ και } |y-6| \le 4.$$

α) Να δείξετε ότι $1 \le x \le 5$ και $2 \le y \le 10$

Μονάδες 12

β) Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις 2x και y

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

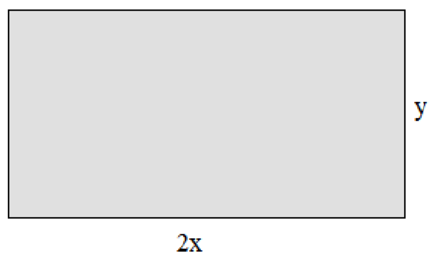
α) Έχουμε :

$$|x-3| \le 2 \Rightarrow -2 \le x-3 \le 2 \Rightarrow -2+3 \le x-3+3 \le 2+3 \Rightarrow 1 \le x \le 5$$

και

$$|y-6| \le 4 \Rightarrow -4 \le y-6 \le 4 \Rightarrow -4+6 \le y-6+6 \le 4+6 \Rightarrow 2 \le y \le 10$$

β) Η περίμετρος του ορθογωνίου με διαστάσεις 2x και y είναι Π = 2x + y + 2x + y = 4x + 2y. Οπότε αρκεί να βρω τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή του 4x + 2y.



Έχουμε :

$$1 \le x \le 5 \overset{\cdot(4)}{\Rightarrow} 4 \le 4x \le 20 \quad (1)$$

$$2 \le y \le 10 \overset{\cdot(2)}{\Rightarrow} 4 \le 2y \le 20 \quad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε :

$$4+4 \le 4x+2y \le 20+20 \Rightarrow 8 \le 4x+2y \le 40 \Rightarrow 8 \le \Pi \le 40$$

Άρα η μικρότερη τιμή της περιμέτρου είναι 8 και πραγματοποιείτε (;) για x = 1 και y = 2 *(δείτε σημείωση)*, ενώ μεγαλύτερη τιμή είναι 40 και πραγματοποιείτε (;) για x = 5 και y = 10 *(δείτε σημείωση)*.

Παρόμοια ΑΣΚΗΣΗ

Η παραπάνω άσκηση **μοιάζει** με την άσκηση 5 (Β Ομάδας) της παραγράφου 2.3 του σχολικού βιβλίου, με διαφορετική εκφώνηση.

Εδώ προβληματιζόμαστε….

Μετά από τον προβληματισμό στην άσκηση 2_506, εδώ έχουμε μια διαφορετική εκφώνηση. Να βρεθεί «η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση». Είναι σωστή;
Αν έχουμε $\alpha \leq x \leq \beta$, **είναι σωστό** να γράφουμε $x_{min} = \alpha$ και $x_{max} = \beta$; Φυσικά ισχύει και είναι μια ισοδύναμη έκφραση που πρέπει να χρησιμοποιούν οι ασκήσεις.

ΑΣΚΗΣΗ 8 (2_1305)

α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x+4| \geq 3$

Μονάδες 12

β) Αν $\alpha \geq -1$, να γράψετε την παράσταση $A = ||\alpha+4|-3|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Με τη βοήθεια της ιδιότητας $|x| > \rho \Leftrightarrow x < -\rho \quad ή \quad x > \rho$ έχουμε:

$$|x+4| \geq 3 \Leftrightarrow x+4 \leq -3 \quad ή \quad x+4 \geq 3$$
$$\Leftrightarrow x+4-4 \leq -3-4 \quad ή \quad x+4-4 \geq 3-4$$
$$\Leftrightarrow x \leq -7 \quad ή \quad x \geq -1$$

β) Από (α) ερώτημα, όταν $\alpha \geq -1$, είναι

$$|\alpha+4| \geq 3 \Leftrightarrow |\alpha+4|-3 \geq 0$$

οπότε:

$$A = ||\alpha+4|-3| = |\alpha+4|-3$$

αλλά

$$\alpha \geq -1 \Leftrightarrow \alpha+4 \geq 4-1 \Leftrightarrow \alpha+4 \geq 3 > 0 \text{ οπότε } |\alpha+4| = \alpha+4$$

άρα,

$$A = |\alpha+4|-3 = \alpha+4-3 = \alpha+1 \Leftrightarrow \boxed{A = \alpha+1}$$

ΑΣΚΗΣΗ 9 (2_2702)

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = |2x-4| \text{ και } B = |x-3|$$

όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Για κάθε $2 \leq x < 3$ να αποδείξετε ότι $A + B = x - 1$.

Μονάδες 16

β) Υπάρχει $x \in [2,3)$ ώστε να ισχύει $A + B = 2$; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Μονάδες 9

<u>Λύση</u>

α) Επειδή

$$2 \le x < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \le x \\ \text{και} \\ x < 3 \end{cases}$$

$x \ge 2 \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} 2 \cdot x \ge 2 \cdot 2 \Leftrightarrow 2x \ge 4 \Leftrightarrow 2x - 4 \ge 0$, οπότε $|2x-4| = 2x-4$

$x < 3 \Leftrightarrow x - 3 < 0$, οπότε $|x-3| = -(x-3) = -x+3 = 3-x$

Επομένως

$$A + B = 2x - 4 + 3 - x = x - 1$$

β) Αν $x \in [2,3)$, τότε:

$$A + B = 2 \Leftrightarrow x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 3 \text{, απορρίπτεται αφού } 3 \notin [2,3).$$

Άρα δεν υπάρχει $x \in [2,3)$ ώστε $A + B = 2$.

ΑΣΚΗΣΗ 10 (2_3884)

Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x,3) = 3 - 2x$

α. Να αποδείξετε ότι $x \le \frac{3}{2}$

Μονάδες 12

β. Αν $x \le \frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K = |2x-3| - 2|3-x|$ είναι ανεξάρτητη του x

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε, $d(2x,3) = |2x-3|$,

άρα

$$d(2x,3) = 3 - 2x \Leftrightarrow |2x-3| = 3 - 2x \Leftrightarrow 2x - 3 \le 0 \Leftrightarrow x \le \frac{3}{2}$$

β. Έχουμε

$$x \le \frac{3}{2} \Leftrightarrow |2x-3| = -(2x-3) = -2x+3$$

Επίσης $x \le \frac{3}{2} < 3 \Leftrightarrow 3 - x > 0$ οπότε $|3-x| = 3-x$

Συνεπώς

$$K = |2x-3| - 2|3-x| = 3 - 2x - 2(3-x) = 3 - 2x - 6 + 2x = -3,$$

δηλαδή η παράσταση K είναι ανεξάρτητη του x.

ΑΣΚΗΣΗ 11 (2_4290)

Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x-2| < 3$.

α. Να αποδείξετε ότι: $-1 < x < 5$.

(Μονάδες 12)

β. Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \dfrac{|x+1|+|x-5|}{2}$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Ισχύει $|x - x_0| < \rho \Leftrightarrow x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$, όπου $x_0 \in R$ και $\rho > 0$.

Οπότε έχουμε:

$|x-2| < 3 \Leftrightarrow 2-3 < x < 2+3 \Leftrightarrow -1 < x < -3 < x-2 < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 5$

β. Έχουμε:

$$-1 < x < 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x-5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+1| = x+1 \\ |x-5| = -(x-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+1| = x+1 & (1) \\ |x-5| = -x+5 & (2) \end{cases}$$

Συνεπώς η παράσταση γίνεται:

$$K = \frac{|x+1|+|x-5|}{3} \overset{(1),(2)}{=} \frac{x+1+(-x+5)}{3} = \frac{x+1-x+5}{3} = \frac{6}{3} = 2 \text{, δηλαδή } K = 2.$$

<u>*Σχόλια:*</u>

1) Το α) ερώτημα αντιστοιχεί σε τμήμα της ΑΣΚΗΣΗς Α' Ομάδας 7) της §2.3.
Ο μαθητής καλείται να κατανοεί τις τρεις διαφορετικές μορφές του πίνακα της ΑΣΚΗΣΗς (i) ανισοτική έκφραση με απόλυτη τιμή ii) απόσταση δυο αριθμών, iii) διάστημα ή ένωση διαστημάτων) [στην συγκεκριμένη ΑΣΚΗΣΗ μας ενδιαφέρουν οι περιπτώσεις i) και iii)] και να μπορεί να μετατρέπει την μία μορφή στην άλλη

2) Το β) ερώτημα αντιστοιχεί στις ασκήσεις: Α' Ομάδας 3) και Β' Ομάδας 2) της §2.3, όπου για να απλοποιήσει ο μαθητής τη εκάστοτε παράσταση με απόλυτες τιμές, πρέπει να γνωρίζει τον ορισμό της απόλυτης τιμής και να χρησιμοποιήσει γνωστές ανισοτικές σχέσεις.

3) Είναι ίδια με την 2_4295

ΑΣΚΗΣΗ 12 (2_4295)

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί y, για τους οποίους ισχύει $|y-2| < 1$.

α. Να αποδείξετε ότι: $y \in (1,3)$.

(Μονάδες 12)

β. Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \dfrac{|y-1|+|y-3|}{2}$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Ισχύει $|x - x_0| < \rho \Leftrightarrow x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$, όπου $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$.

Οπότε έχουμε:

$$|y-2|<1 \Leftrightarrow 2-1<y<2+1 \Leftrightarrow 1<y<3 \text{, άρα } y \in (1,3).$$

β. Επειδή $y \in (1,3)$ ισοδύναμα θα έχουμε:

$$1<y<3 \Leftrightarrow \begin{cases} y>1 \\ y<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-1>0 \\ y-3<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |y-1|=y-1 \\ |y-3|=-(y-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |y-1|=y-1 & (1) \\ |y-3|=-y+3 & (2) \end{cases}$$

Άρα η δοθείσα παράσταση απλοποιείται ως εξής:

$$K=\frac{|y-1|+|y-3|}{2} \overset{(1),(2)}{=} \frac{y-1+3-y}{2}=\frac{2}{2}=1 \text{, δηλαδή } K=1.$$

<u>Σχόλια:</u>

1) Το α) ερώτημα αντιστοιχεί σε τμήμα της ΑΣΚΗΣΗς Α' Ομάδας 7) της §2.3. Ο μαθητής καλείται να κατανοεί τις τρεις διαφορετικές μορφές του πίνακα της ΑΣΚΗΣΗς (i) ανισοτική έκφραση με απόλυτη τιμή ii) απόσταση δυο αριθμών, iii) διάστημα ή ένωση διαστημάτων) [στην συγκεκριμένη ΑΣΚΗΣΗ μας ενδιαφέρουν οι περιπτώσεις i) και iii)] και να μπορεί να μετατρέπει την μία μορφή στην άλλη

2) Το β) ερώτημα αντιστοιχεί στις ασκήσεις: Α' Ομάδας 3) και Β' Ομάδας 2) της §2.3, όπου για να απλοποιήσει ο μαθητής τη εκάστοτε παράσταση με απόλυτες τιμές, πρέπει να γνωρίζει τον ορισμό της απόλυτης τιμής και να χρησιμοποιήσει γνωστές ανισοτικές σχέσεις.

3) Είναι ίδια με την 2_4290

ΑΣΚΗΣΗ 13 (2_4318)

Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x-1|<1$ τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $0<x<1$

(Μονάδες 15)

β. Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς $1, x, x^2$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Έχουμε,

$$|2x-1|<1 \Leftrightarrow -1<2x-1<1 \Leftrightarrow -1+1<2x-1+1<1+1 \Leftrightarrow 0<2x<2 \Leftrightarrow 0<x<1$$

β) Από την υπόθεση είναι $0<x<1$ και πολλαπλασιάζοντας με $x>0$ έχουμε ότι: $x^2<x$. Τελικά είναι $x^2<x<1$.

ΑΣΚΗΣΗ 14 (4_2287)

Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός *x* που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x,\ 5)\le 9$.

α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά.

Μονάδες 5

β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του *x*.

Μονάδες 5

γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β).

Μονάδες 10

δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι:

$$|x+4| + |x-14| = 18$$

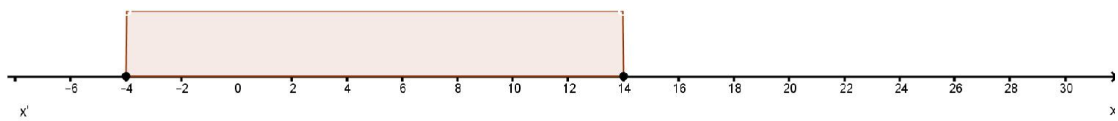
Μονάδες 5

ΛΥΣΗ

α) Η ανίσωση $d(x,5) \le 9$ είναι ισοδύναμη με την πρόταση:

«Η απόσταση του x από το 5 είναι το πολύ 9».

β) Το σύνολο των δυνατών τιμών του x παριστάνεται στον παρακάτω άξονα:



γ) Για θ>0 ισχύει:

$$\boxed{|x| \ge \theta \Leftrightarrow x \le -\theta \text{ ή } x \ge \theta}$$

Έχουμε

$$d(x,5) \le 9 \Leftrightarrow |x-5| \le 9 \Leftrightarrow -9 \le x-5 \le 9 \Leftrightarrow -9+5 \le x-5+5 \le 9+5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -4 \le x \le 14$$

δ) Είναι:

$$x \ge -4 \Leftrightarrow x+4 \ge 0 \ \text{ άρα } \ |x+4| = x+4$$

και

$$x \le 14 \Leftrightarrow x-14 \le 0 \ \text{ άρα } \ |x-14| = -x+14$$

Συνεπώς ,

$$|x+4| + |x-14| = (x+4) + (-x+14) = x+4-x+14 = 18$$

ΑΣΚΗΣΗ 15 (4_2301)

Δίνονται τα σημεία Α , Β και Μ που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2, 7 και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων.

i) $|x+2|$

Μονάδες 4

ii) $|x-7|$

Μονάδες 4

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία το αθροίσματος:

$$|x+2|+|x-7|$$

Μονάδες 5

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $K=|x+2|+|x-7|$ γεωμετρικά.

Μονάδες 5

δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

Μονάδες 7

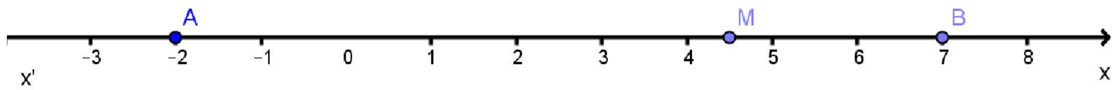
ΛΥΣΗ

α) Τα σημεία είναι A(-2,0), B(7,0) και M(x,0) με $-2 < x < 7$

(i) Η παράσταση $|x+2|$ συμβολίζει την απόσταση του Μ από το σημείο Α

(ii) Η παράσταση $|x-7|$ συμβολίζει την απόσταση του Μ από το Β

β) Τα σημεία Α, Β και Μ όπως αυτά δίνονται, παριστάνονται στον παρακάτω άξονα:



Το άθροισμα $|x+2|+|x-7|$ είναι το άθροισμα των αποστάσεων του Μ από τα Α,Β.

Δηλαδή $(MA)+(MB)=(AB)$, άρα το μήκος του ΑΒ.

γ) Έχουμε,

$$K=|x+2|+|x-7|=(AB)=d(-2,7)=|-2-7|=|-9|=9$$

δ) Έχουμε,

$$-2<x<7 \Leftrightarrow x>-2 \text{ και } x<7 \Leftrightarrow x+2>0 \text{ και } x-7<0$$

άρα

$$|x+2|=x+2 \text{ και } |x-7|=-x+7$$

Άρα τελικά,

$$K=|x+2|+|x-7|=(x+2)+(-x+7)=x+2-x+7=9$$

ΑΣΚΗΣΗ 16 (4_2302)

Σε έναν άξονα τα σημεία Α , Β και Μ αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, 9 και x αντίστοιχα.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x-5|$ και $|x-9|$.

Μονάδες 10

β) Αν ισχύει $|x-5|=|x-9|$,

i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου Μ αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο Μ. Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

α) Η παράσταση $|x-5|$ συμβολίζει την απόσταση του σημείου Μ από το Α.

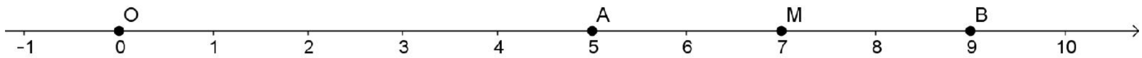
Η παράσταση $|x-9|$ συμβολίζει την απόσταση του σημείου Μ από το Β.

β) i) Έχουμε,

$$|x-5|=|x-9| \Leftrightarrow (MA)=(MB)$$

Τα Α, Β, Μ είναι συνευθειακά και το Μ ισαπέχει από τα Α, Β άρα το Μ είναι μέσον του τμήματος ΑΒ.

ii) Τα σημεία Α, Β και Μ όπως αυτά δίνονται, παριστάνονται στον παρακάτω άξονα:



Το σημείο Μ παριστάνεται από τον αριθμό 7. Ισχύει $\boxed{|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha \text{ ή } x= -\alpha}$

Οπότε έχουμε:

$$|x-5|=|x-9| \Leftrightarrow x-5=x-9 \text{ ή } x-5=-x+9 \Leftrightarrow \text{αδύνατη ή } 2x=14 \Leftrightarrow x=7$$

ΑΣΚΗΣΗ 17 (4_4946)

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-3| \leq 5$

(Μονάδες 7)

β) Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x-3|$

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $|x-3| \leq 5$

(Μονάδες 5)

δ) Να βρείτε το πλήθος των ακέραιων αριθμών x που ικανοποιούν την ανίσωση $||x|-3| \leq 5$. Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

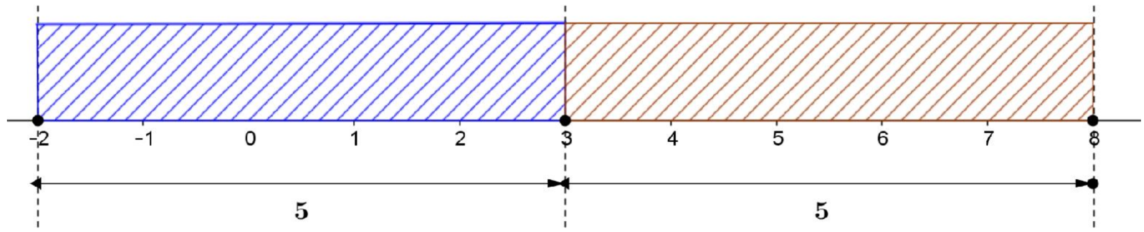
α) Έχουμε,

$$|x-3| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x-3 \leq 5 \Leftrightarrow -5+3 \leq x-3+3 \leq 5+3 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 8$$

β) Η παράσταση $|x-3|$ γεωμετρικά παριστάνει την απόσταση των αριθμών x , 3 (και συμβολίζεται με $d(x,3)$)

Οπότε η ανίσωση $|x-3| \leq 5$ παριστάνει το σύνολο των πραγματικών αριθμών που απέχουν από το 3 απόσταση μικρότερη ή ίση του 5.

Δηλαδή



γ) Στο ερώτημα α) βρήκαμε ότι λύση της ανίσωσης $|x-3|\leq 5$ είναι η $-2\leq x\leq 8$

Από το προηγούμενο σχήμα που απεικονίζει το σύνολο αυτών των λύσεων πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών παρατηρούμε ότι οι ακέραιοι που ικανοποιούν την παραπάνω ανίσωση είναι οι: $-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8$

δ) Έχουμε,

$$\big||x|-3\big|\leq 5 \Leftrightarrow -5\leq |x|-3\leq 5 \Leftrightarrow -2\leq |x|\leq 8$$

● $|x|\geq -2$, που ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x

και

● $|x|\leq 8 \Leftrightarrow -8\leq x\leq 8$

Το πλήθος των ακεραίων που βρίσκονται στο παραπάνω διάστημα είναι 8 αρνητικοί ακέραιοι , 8 θετικοί ακέραιοι και το μηδέν , σύνολο: $8+8+1=17$

ΑΣΚΗΣΗ 18 (4_7791)

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει η ανίσωση:

$$(\alpha-1)(1-\beta)>0$$

α) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α , β.

Μονάδες 13

β) Αν επιπλέον $|\beta-\alpha|=4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K=|\alpha-1|+|1-\beta|$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας είτε γεωμετρικά είτε αλγεβρικά.

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Θα δείξουμε ότι: $\alpha<1<\beta$ ή $\beta<1<\alpha$

Ένα γινόμενο δύο παραγόντων είναι θετικό όταν οι δύο παράγοντες του γινομένου είναι ομόσημοι δηλαδή ή και οι δύο είναι θετικοί ή και οι δύο είναι αρνητικοί.

Οπότε:

$$(\alpha-1)(1-\beta)>0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha-1>0 \ \text{ και } \ 1-\beta>0 \\ \text{ή} \\ \alpha-1<0 \ \text{ και } \ 1-\beta<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha>1 \ \text{ και } \ \beta<1 \\ \text{ή} \\ \alpha<1 \ \text{ και } \ \beta>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta<1<\alpha \\ \\ \alpha<1<\beta \end{cases}$$

Σε κάθε περίπτωση το 1 βρίσκεται ανάμεσα στους αριθμούς α , β.

β) Διακρίνοντας περιπτώσεις, η παράσταση K γράφεται:

- Αν $\beta<1<\alpha$ τότε

$$K=\underbrace{|\alpha-1|}_{+}+\underbrace{|1-\beta|}_{+}=(\alpha-1)+(1-\beta)=\alpha-\beta\overset{\alpha-\beta>0}{=}|\alpha-\beta|=|\beta-\alpha|=4$$

- Αν $\alpha<1<\beta$ τότε

$$K=\underbrace{|\alpha-1|}_{-}+\underbrace{|1-\beta|}_{-}=(-\alpha+1)+(-1+\beta)=\beta-\alpha\overset{\beta-\alpha>}{=}|\beta-\alpha|=4$$

άρα $K=4$.

<u>Γεωμετρική και αλγεβρική ερμηνεία</u>

Γνωρίζουμε ότι η απόλυτη τιμή της διαφοράς δύο αριθμών α, β, **γεωμετρικά** εκφράζει την μεταξύ τους απόσταση και δίνεται από τον τύπο $d(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|$. Όμως οι αριθμοί α, β βρίσκονται εκατέρωθεν του 1, άρα το άθροισμα $|\alpha-1|+|1-\beta|$ εκφράζει το άθροισμα των αποστάσεων των αριθμών α, β από τον αριθμό 1, άρα το άθροισμά τους μας δίνει την απόσταση του α από το β, δηλαδή 4!

Αλγεβρικά φαίνεται και ως εξής: $|\alpha-1|+|1-\beta|=d(\alpha,1)+d(\beta,1)=d(\alpha,\beta)=|\beta-\alpha|=4$

Γενίκευση: Αν ο β είναι εκατέρωθεν των α, γ, τότε $d(\alpha,\beta)+d(\beta,\gamma)=d(\alpha,\gamma)$

ΑΣΚΗΣΗ 19 (4_8443)

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύει $|x-4|<2$.

Μονάδες 10

β) Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x που η απόστασή του από το 4 στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη από 2.

i) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλασίου του αριθμού αυτού από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14.

Μονάδες 5

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων περιέχεται η τιμή της απόστασης του 3x από το 19.

Μονάδες 10

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) Έχουμε,

$$|x-4|<2\Leftrightarrow-2<x-4<2\Leftrightarrow2<x<6\text{, άρα } x\in(2,6)$$

β) Έχουμε,

$$d(x,4)<2\Leftrightarrow|x-4|<2\overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}2<x<6$$

i) Θα δείξουμε ότι: $d(3x,4)<14$

Από το υποερώτημα (α) έχουμε,

$$2<x<6\overset{\cdot(3)}{\Leftrightarrow}6<3x<18\Leftrightarrow2<3x-4<14\overset{3x-4>0}{\Leftrightarrow}2<|3x-4|<14\Leftrightarrow2<d(3x,4)<14$$

ii) Έχουμε,

$$2 < x < 6 \overset{\cdot(3)}{\Leftrightarrow} 6 < 3x < 18 \Leftrightarrow -13 < 3x - 19 < -1 \overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow} 13 > -3x + 19 > 1 \Leftrightarrow 1 < -3x + 19 < 13$$

Όμως, $d(3x,19) = |3x - 19| = -3x + 19$ αφού $3x - 19 < 0$

Επομένως η απόσταση του $3x$ από το 19 είναι μεγαλύτερη από 1 και μικρότερη από 13.

ΑΣΚΗΣΗ 20 (4_8453)

Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

- $|\alpha - 2| < 1$
- $|\beta - 3| \leq 2$

α) Να αποδειχθεί ότι $1 < \alpha < 3$

Μονάδες 4

β) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο β.

Μονάδες 5

γ) Να βρεθεί μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2\alpha - 3\beta$.

Μονάδες 7

δ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\dfrac{\alpha}{\beta}$.

Μονάδες 9

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) Είναι,

$$|\alpha - 2| < 1 \Rightarrow -1 < \alpha - 2 < 1 \Rightarrow 1 < \alpha < 3$$

β) Είναι,

$$|\beta - 3| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq \beta - 3 \leq 2 \Rightarrow 1 \leq \beta \leq 5$$

γ) Έχουμε, $1 < \alpha < 3 \Leftrightarrow 2 < 2\alpha < 6 \quad (1)$

Επίσης $1 \leq \beta \leq 5 \Rightarrow 3 \leq 3\beta \leq 15 \Rightarrow -15 \leq -3\beta \leq -3 \quad (2)$

Με πρόσθεση κατά μέλη των ανισώσεων (1) και (2) παίρνουμε

$$-13 < 2\alpha - 3\beta < 3$$

δ) Έχουμε,

$$1 \leq \beta \leq 5 \Rightarrow 1 \geq \frac{1}{\beta} \geq \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{\beta} \leq 1 \ ,$$

αφού είναι ομόσημοι αριθμοί.

Έχουμε, $1 < \alpha < 3$, άρα με πολλαπλασιασμό κατά μέλη οι δύο τελευταίες ανισότητες (*επιτρέπεται αφού έχουμε θετικά μέλη και την ίδια φορά*), γίνονται

$$\frac{1}{5} < \frac{\alpha}{\beta} < 3$$

Σημείωση: Δείτε τον προβληματισμό στην άσκηση 2_506

2.4: Ρίζες Πραγματικών Αριθμών

ΑΣΚΗΣΗ 1 (2_936)

Δίνεται η παράσταση: $A=\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1}\right)$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 12

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

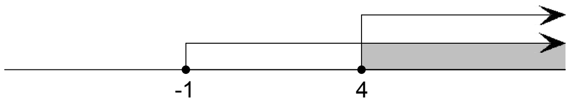
Μονάδες 13

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) Για να ορίζεται η παράσταση Α επειδή έχει ριζικά πρέπει:

$x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$ και $x-4\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 4$ οπότε από τη συναλήθευση των ανισοτήτων

έχουμε: $x\in[4,+\infty)$



β) Για $x\in[4,+\infty)$ δηλ. $x\geq 4$ έχουμε: $|x-4|=x-4$ και $|x+1|=x+1$

$$A=\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1}\right)=\left(\sqrt{x-4}\right)^2-\left(\sqrt{x+1}\right)^2=$$

$$=(x-4)-(x+1)=\cancel{x}-4-\cancel{x}-1=-5$$

Παρατηρούμε ότι η παράσταση Α είναι ανεξάρτητη του x

ΑΣΚΗΣΗ 2 (2_938)

α. Να δείξετε ότι: $3<\sqrt[3]{30}<4$.

Μονάδες 12

β. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6-\sqrt[3]{30}$.

Μονάδες 13

<u>ΛΥΣΗ</u>

α. Έχουμε:

$$3<\sqrt[3]{30}<4 \Longleftrightarrow 3^3<(\sqrt[3]{30})^3<4^3 \Longleftrightarrow 27<30<64$$, που ισχύει.

β. Από το α ερώτημα έχουμε ότι:

$$3<\sqrt[3]{30}<4 \Longleftrightarrow -4<-\sqrt[3]{30}<-3 \Longleftrightarrow$$

$$6-4<6-\sqrt[3]{30}<6-3 \Longleftrightarrow 2<6-\sqrt[3]{30}<3.$$

Οπότε ισχύει:

$$3<\sqrt[3]{30} \text{ και } 6-\sqrt[3]{30}<3.$$

Άρα καταλήγουμε ότι:

$$6-\sqrt[3]{30}<3<\sqrt[3]{30} \Rightarrow 6-\sqrt[3]{30}<\sqrt[3]{30}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3 (2_944)

Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}$.

α. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

Μονάδες 13

β. Για $x=5$, να αποδείξετε ότι: $A^2+A-6=0$.

Μονάδες 12

<u>ΛΥΣΗ</u>

α. Η παράσταση Α ορίζεται για εκείνα τα x για τα οποία ισχύει:

$$x-4\geq 0 \text{ και } 6-x\geq 0$$

ή ισοδύναμα $x\geq 4$ και $x\leq 6$ οπότε $x\in[4,6]$

β. Για $x=5$ έχουμε ότι:

$$A=\sqrt{5-4}+\sqrt{6-5} \Rightarrow A=2.$$

Οπότε:

$$A^2+A-6=2^2+2-6 \Rightarrow A^2+A-6=0$$

ΑΣΚΗΣΗ 4 (2_947)

Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x-4}$.

α. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

Μονάδες 12

β. Αν $x=4$, να αποδείξετε ότι: $A^2-A=2\left(10-\sqrt{5}\right)$

Μονάδες 13

<u>ΛΥΣΗ</u>

α. Η παράσταση Α ορίζεται για εκείνα τα x για τα οποία ισχύει:

$$\begin{cases} x^2+4\geq 0 \\ x-4\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in R, \text{ αφού } x^2+4\geq 0 \text{ για κάθε } x\in R \\ x\geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq 4$$

Οπότε $x\in[4,+\infty)$

β. Για $x=4$ έχουμε ότι:

$$A=\sqrt{4^2+4}-\sqrt{4-4} \Rightarrow A=\sqrt{20} \Rightarrow A=\sqrt{4\cdot 5} \Rightarrow A=2\sqrt{5}.$$

Οπότε:

$$A^2 - A = \left(2\sqrt{5}\right)^2 - 2\sqrt{5} = 20 - 2\sqrt{5} = 2\left(10 - \sqrt{5}\right)$$

ΑΣΚΗΣΗ 5 (2_950)

Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{1-x} - \sqrt[4]{x^4}$.

α. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

Μονάδες 13

β. Αν $x = -3$, να αποδείξετε ότι: $A^3 + A^2 + A + 1 = 0$

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α. Η παράσταση Α ορίζεται για εκείνα τα x για τα οποία ισχύει:

$$\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x^4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \in R, \text{ αφού } x^4 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in R \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 1$$

Οπότε $x \in \left[-\infty, 1\right]$.

β. Για $x = -3$ έχουμε ότι:

$$A = \sqrt{1-(-3)} - \sqrt[4]{(-3)^4} \Rightarrow A = \sqrt{4} - |-3| \Rightarrow A = -1.$$

Οπότε:

$$A^3 + A^2 + A + 1 = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 6 (2_952)

Δίνεται η παράσταση: $B = \sqrt[5]{(x-2)^5}$

α. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Β; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

Μονάδες 13

β. Αν $x = 4$, να αποδείξετε ότι: $B^2 + 6B = B^4$

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α. Η παράσταση Β ορίζεται για εκείνα τα x για τα οποία ισχύει:

$$(x-2)^5 \geq 0 \Leftrightarrow x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$$

Οπότε $x \in \left[2, +\infty\right]$

β. Για $x = 4$ έχουμε ότι:

$$B = \sqrt[5]{(4-2)^5} = \sqrt[5]{2^5} = 2$$

Οπότε:

$$B^2+6B=2^2+6\cdot 2=4+12=16 \text{ και } \quad B^4=2^4=16.$$

Άρα:

$$B^2+6B=B^4$$

ΑΣΚΗΣΗ 7 (2_955)

Δίνονται οι αριθμοί: $A=\left(\sqrt{2}\right)^6$ και $B=\left(\sqrt[3]{2}\right)^6$

α. Να δείξετε ότι: $A-B=4$

Μονάδες 13

β. Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$\sqrt{2},1,\sqrt[3]{2}$

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α. **1^{ος} τρόπος:**

$$A=\left(\sqrt{2}\right)^6=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6=2^{\frac{6}{2}}=2^3=8 \quad \text{και}$$

$$B=\left(\sqrt[3]{2}\right)^6=\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^6=2^{\frac{6}{3}}=2^2=4 \quad \text{οπότε}$$

$$A-B=8-4=4.$$

2^{ος} τρόπος:

$$A=\left(\sqrt{2}\right)^6=\left[\left(\sqrt{2}\right)^2\right]^3=2^3=8 \text{ και}$$

$$B=\left(\sqrt[3]{2}\right)^6=\left[\left(\sqrt[3]{2}\right)^3\right]^2=2^2=4 \text{ οπότε}$$

$$A-B=8-4=4.$$

β. Από το α ερώτημα έχουμε:

$$\left(\sqrt{2}\right)^6=8,\ \left(\sqrt[3]{2}\right)^6=4 \text{ και } 1^6=1.$$

Οπότε:

$$1^6<\left(\sqrt[3]{2}\right)^6<\left(\sqrt{2}\right)^6 \Rightarrow 1<\sqrt[3]{2}<\sqrt{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 8 (2_1276)

Δίνεται η παράσταση $K=\dfrac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2}-\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$

α) Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το x, ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού

Μονάδες 12

β) Αν $-2<x<3$, να αποδείξετε ότι η παράσταση K είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Για να έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση Κ πρέπει να ισχύουν :

- ✓ $x+2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -2$ και
- ✓ $x-3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 3$ και
- ✓ $x^2+4x+4\geq 0 \Leftrightarrow (x+2)^2\geq 0$ που ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x και
- ✓ $x^2-6x+9\geq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2\geq 0$ που ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x

Άρα το x μπορεί να πάρει όλες τις πραγματικές τιμές εκτός του – 2 και του 3.

β) Έχουμε :

$$K=\frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2}-\frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}=\frac{\sqrt{(x+2)^2}}{x+2}-\frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}=\frac{|x+2|}{x+2}-\frac{|x-3|}{x-3}$$

όμως $-2<x<3$, δηλαδή $x>-2 \Leftrightarrow x+2>0$, οπότε $|x+2|=x+2$ και $x<3 \Leftrightarrow x-3<0$, οπότε $|x-3|=-(x-3)$.

Άρα το Κ γίνεται :

$$K=\frac{|x+2|}{x+2}-\frac{|x-3|}{x-3}=\frac{x+2}{x+2}-\frac{-(x-3)}{x-3}=\frac{x+2}{x+2}+\frac{x-3}{x-3}=1+1=2$$

ΑΣΚΗΣΗ 9 (2_1300)

Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις:

$$A=\left(\sqrt{2}\right)^6,\qquad B=\left(\sqrt[3]{3}\right)^6,\qquad \Gamma=\left(\sqrt[6]{6}\right)^6$$

α) Να δείξετε ότι:

$$A+B+\Gamma=23$$

Μονάδες 13

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$\sqrt[3]{3}\quad \text{και}\quad \sqrt[6]{6}$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα: $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}=\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$

Είναι:

$$\begin{aligned}A+B+\Gamma&=\left(\sqrt{2}\right)^6+\left(\sqrt[3]{3}\right)^6+\left(\sqrt[6]{6}\right)^6\\&=2^{\frac{6}{2}}+3^{\frac{6}{3}}+6^{\frac{6}{6}}\\&=2^3+3^2+6\\&=8+9+6=23\end{aligned}$$

β) Χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}=\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$, $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}=\sqrt[\nu\cdot\rho]{\alpha^{\mu\cdot\rho}}$

Προσπαθούμε να μετατρέψουμε τις ποσότητες σε δυνάμεις με τον ίδιο εκθέτη

Είναι:

$$\sqrt[6]{6}=6^{\frac{1}{6}} \text{ και } \sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{1\cdot 2}{3\cdot 2}}=3^{\frac{2}{6}}=\left(3^2\right)^{\frac{1}{6}}=9^{\frac{1}{6}}$$

Άρα από δύο δυνάμεις με τον ίδιο εκθέτη, μεγαλύτερη είναι εκείνη που έχει μεγαλύτερη βάση, άρα

$$\sqrt[3]{3}=9^{\frac{1}{6}}>6^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{6}\Leftrightarrow \sqrt[6]{6}<\sqrt[3]{3}$$

ΑΣΚΗΣΗ 10 (2_4311)

Δίνονται οι παραστάσεις $\mathrm{A}=\sqrt{(x-2)^2}$. και $B=\sqrt[3]{(2-x)^3}$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α;

(Μονάδες 7)

β. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Β;

(Μονάδες 8)

γ. Να δείξετε ότι, για κάθε $x\le 2$, ισχύει $\mathrm{A}=\mathrm{B}$

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Για να ορίζεται η παράσταση A πρέπει: $(x-2)^2\ge 0$ που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Για να ορίζεται η παράσταση B πρέπει: $(2-x)^3\ge 0\Leftrightarrow 2-x\ge 0\Leftrightarrow x\le 2$

γ) Για κάθε $x\le 2$. είναι $x-2\le 0$ άρα η παράσταση A γίνεται:

$$\mathrm{A}=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|=-(x-2)=2-x$$

Για κάθε $x\le 2$ είναι $2-x\ge 0$ άρα η παράσταση B γίνεται:

$$B=\sqrt[3]{(2-x)^3}=2-x$$

Τελικά $\mathrm{A}=\mathrm{B}$ για κάθε $x\le 2$

ΑΣΚΗΣΗ 11 (2_4314)

Αν είναι $A=\sqrt[3]{5},\ B=\sqrt{3},\ \Gamma=\sqrt[6]{5}$ τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A}\cdot B\cdot\Gamma=\sqrt{15}$.

(Μονάδες 15)

β. Να συγκρίνετε τους αριθμούς A,B.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Τα A,B γράφονται ως εξής:

$$A=\sqrt[3]{5}=\sqrt[3\cdot 2]{5^2}=\sqrt[6]{5^2}$$

$$\mathrm{B}=\sqrt{3}=\sqrt[2\cdot 3]{3^3}=\sqrt[6]{3^3}$$

Οπότε η παράσταση $\mathrm{A}\cdot B\cdot\Gamma$ γίνεται:

$$A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt[6]{5^2} \cdot \sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[6]{5} = \sqrt[6]{5^2 \cdot 3^3 \cdot 5} = \sqrt[6]{(5 \cdot 3)^3} = \sqrt[6]{15^3} = \sqrt{15}$$

β) Είναι:

$$A = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25} \text{ και } B = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27}$$

Όμως $25 < 27$ άρα και $A < B$

ΑΣΚΗΣΗ 12 (2_4316)

Αν είναι $A = 2 - \sqrt{3}$, $B = 2 + \sqrt{3}$ τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $A \cdot B = 1$.

(Μονάδες 12)

β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = A^2 + B^2$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε,

$$A \cdot B = \left(2 - \sqrt{3}\right) \cdot \left(2 + \sqrt{3}\right) = 2^2 - \sqrt{3}^2 = 4 - 3 = 1$$

β) Έχουμε,

$$\Pi = A^2 + B^2 = \left(2 - \sqrt{3}\right)^2 + \left(2 + \sqrt{3}\right)^2 = 4 - 4\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 + 4 + 4\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 = 4 + 3 + 4 + 3 = 14$$

ΑΣΚΗΣΗ 13 (2_8173)

Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις):

$$\sqrt{2} \cong 1,41 \quad \sqrt{3} \cong 1,73 \quad \sqrt{5} \cong 2,24 \quad \sqrt{7} \cong 2,64$$

α. Να επιλέξετε έναν τρόπο, ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}, \sqrt{45}$ και $\sqrt{80}$.

(Μονάδες 12)

β. Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$\frac{3\sqrt{20} + \sqrt{80}}{\sqrt{45} - \sqrt{5}}$$

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\sqrt{20} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5} \cong 2 \cdot 2,24 = 4,48$$

$$\sqrt{45} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5} \cong 3 \cdot 2,24 = 6,72$$

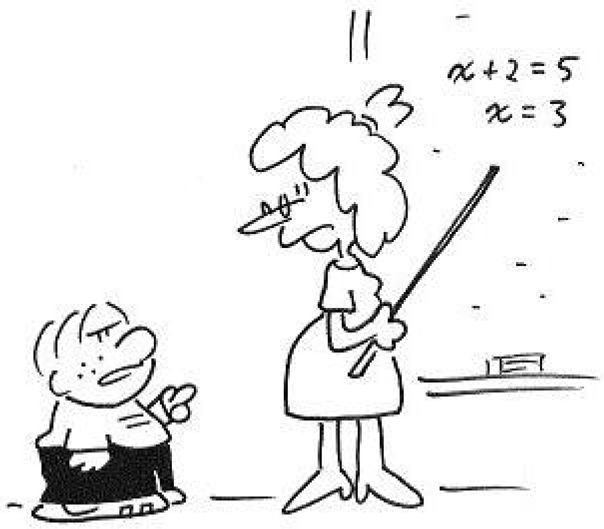
$$\sqrt{80} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5} \cong 4 \cdot 2,24 = 8,96$$

β) Αναλύοντας τις ρίζες όπως στο πρώτο ερώτημα, η παράσταση γίνεται:

$$\frac{3\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45}-\sqrt{5}}=\frac{3\cdot 2\sqrt{5}+4\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}+4\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=\frac{10\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=5$$

Άλγεβρα Α΄ Λυκείου

Κεφάλαιο 3^{o} : Εξισώσεις



Μα κυρία, χθες μας είπατε ότι το x είναι 2!!

3.1: Εξισώσεις 1ου βαθμού

ΑΣΚΗΣΗ 1 (2_485)

Δίνεται η εξίσωση $\lambda \cdot x = x + \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1), \lambda \in \mathbb{R}$$

(Μονάδες 8)

ii. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε.

(Μονάδες 8)

iii. Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

i. Έχουμε,

$$\lambda \cdot x = x + \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow \lambda \cdot x - x = \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow (\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1), \lambda \in \mathbb{R} : (1)$$

ii. Για να έχει η εξίσωση (1) ακριβώς μία λύση πρέπει και αρκεί:

$$\lambda - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$$

Για την μοναδική λύση, έχουμε:

$$\frac{(\lambda - 1)x}{\lambda - 1} = \frac{(\lambda - 1)(\lambda + 1)}{\lambda - 1} \Leftrightarrow x = \lambda + 1.$$

iii. Για να είναι η εξίσωση (1) ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών πρέπει να έχει την μορφή $0 \cdot x = 0$, άρα :

$$\begin{cases} \lambda - 1 = 0 \\ \text{και} \\ (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \text{και} \\ \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = 1$$

ΑΣΚΗΣΗ 2 (2_1055)

Δίνεται η εξίσωση : $(\lambda^2 - 1)x = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$, με παράμετρο $\lambda \in R$

α) Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda = 1$ και για $\lambda = -1$.

(Μονάδες 12)

β) Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Για $\lambda = 1$ η παραπάνω εξίσωση γίνεται,

$$(1^2 - 1)x = (1 + 1)(1 + 2) \Leftrightarrow 0x = 6, \text{ η οποία είναι αδύνατη.}$$

Για $\lambda = -1$ η παραπάνω εξίσωση γίνεται,
$\left[(-1)^2 - 1\right]x = (-1+1)(-1+2) \Leftrightarrow (1-1)x = (-1+1)(-1+2) \Leftrightarrow 0x = 0$
η οποία είναι αόριστη ή ταυτότητα.

β) Η παραπάνω εξίσωση έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν

$\lambda^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 \neq 1$, από όπου προκύπτει ισοδύναμα ότι $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -1$.

Συνεπώς για $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -1$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση την

$$x = \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{\lambda^2-1} = \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{(\lambda-1)(\lambda+1)} = \frac{\lambda+2}{\lambda-1}$$

Παρόμοια άσκηση βιβλίου : α) και β) 3 /Α΄ Ομάδας/σελ. 83

ΑΣΚΗΣΗ 3 (2_3382)

Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

α. Να δείξετε ότι $A = 4$

Μονάδες 12

β. Να λύσετε την εξίσωση $|x + A| = 1$

Μονάδες 13

<u>ΛΥΣΗ</u>

α. Έχουμε

$$A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)+\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{15}+3+5-\sqrt{15}}{\sqrt{5}^2-\sqrt{3}^2} = \frac{8}{5-3} = \frac{8}{2} = 4$$

β. Έχουμε

$$|x+A| = 1 \Leftrightarrow |x+4| = 1 \Leftrightarrow x+4=1 \text{ ή } x+4=-1 \Leftrightarrow x=-3 \text{ ή } x=-5$$

ΑΣΚΗΣΗ 4 (2_4302)

Δίνεται η εξίσωση $(\alpha+3)x = \alpha^2 - 9$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) όταν $\alpha = 1$.

(Μονάδες 5)

ii) όταν $\alpha = -3$.

(Μονάδες 8)

β. Να βρείτε τις τιμές του α, για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε την λύση αυτή.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α. Η εξίσωση $(\alpha+3)x=\alpha^2-9$ (1) είναι πρώτου βαθμού ως προς x, ορισμένη στο $\mathbb{R}$.

i) Για $\alpha=1$ η εξίσωση (1) γίνεται $4x=-8 \Leftrightarrow x=-2$.
Δηλαδή, για $\alpha=1$ η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση, την $x=-2$.

ii) Για $\alpha=-3$ η εξίσωση (1) γίνεται $0x=0$, οπότε έχει ως λύση κάθε πραγματικό αριθμό, άρα είναι ταυτότητα.

β. Η δοθείσα εξίσωση (1), είναι της μορφής $\alpha x+\beta=0 \Leftrightarrow \alpha x=-\beta$. Οπότε η (1) έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν $\alpha+3\neq 0 \Leftrightarrow \alpha\neq -3$.

Για $\alpha\neq-3$, έχουμε $(\alpha+3)x=(\alpha-3)(\alpha+3) \Leftrightarrow x=\dfrac{(\alpha-3)(\alpha+3)}{\alpha+3} \Leftrightarrow x=\alpha-3$, μοναδική λύση.

Σχόλια:

1) *Τα ερωτήματα α) και β) αντιστοιχούν εν μέρει στην άσκηση Α' Ομάδας 3) περιπτώσεις ii) και iv) της §3.1*

2) *Στην αντίστοιχη άσκηση του σχολικού όπου ο μαθητής καλείται να λύσει από την αρχή μια εξίσωση 1^{ου} βαθμού με παράμετρο (κάτι που μπορεί να μάθει να το κάνει ίσως και τυφλά-αυτόματα).*
Εδώ, αν και πιο απλή παραλλαγή της άσκησης (δίνονται στο 1^{ο} ερώτημα συγκεκριμένες τιμές της παραμέτρου, οπότε παύει να είναι παραμετρική), ο μαθητής καλείται να δείξει ότι γνωρίζει την διαδικασία επίλυσης και τμηματικά, άρα ότι κατέχει πλήρως τι κάνει!

ΑΣΚΗΣΗ 5 (4_2084)

Για την κάλυψη, με τετράγωνα πλακάκια, μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου Α με πλευρά d cm ή πλακάκια τύπου Β με πλευρά (d+1)cm.

α) Να βρείτε, ως συνάρτηση του d, το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α και κάθε πλακάκι τύπου Β.

Μονάδες 6

β) Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου Α είτε με 128 τύπου Β, να βρείτε:

i) Τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου.

Μονάδες 12

ii) Το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν.

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

α) Το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς x δίνεται από τον τύπο

$$\boxed{E = x^2}$$

Συνεπώς, κάθε πλακάκι τύπου Α θα καλύπτει εμβαδόν

$$E_1 = d^2 \text{ ή } \boxed{E_1(d) = d^2} \text{ με } d>0,$$

Κάθε πλακάκι τύπου Β θα καλύπτει εμβαδόν

$$E_2 = (d+1)^2 \text{ ή } \boxed{E_2(d) = (d+1)^2} \text{ με } d>0,$$

β) (i) Αν Ε η συνολική επιφάνεια τότε $E = 200E_1$ ή $E = 128E_2$, δηλαδή

$$200E_1(d) = 128E_2(d) \Leftrightarrow 200d^2 = 128(d+1)^2 \overset{\div 8}{\Leftrightarrow} 25d^2 = 16(d+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |5d| = |4(d+1)| \underset{d+1>0}{\overset{d>0}{\Leftrightarrow}} 5d = 4(d+1) \Leftrightarrow 5d = 4d + 4 \Leftrightarrow d = 4$$

Άρα, το πλακάκι τύπου Α έχει πλευρά 4 cm και το πλακάκι τύπου Β έχει πλευρά 4+1=5cm.

(ii) Το πλακάκι τύπου Α θα καλύπτει επιφάνεια

$$E_1(4) = 4^2 = 16 \text{ cm}^2$$

Άρα, η συνολική επιφάνεια θα είναι

$$E = 200 \cdot 16 = 3200 \text{ cm}^2.$$

3.2: Η Εξίσωση $x^\nu = \alpha$
3.3: Εξισώσεις 2ου βαθμού

ΑΣΚΗΣΗ (2_481)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης.

(Μονάδες 8)

ii. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

(Μονάδες 8)

iii. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει: $x_1 + x_2 = x_1 x_2$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

i. Έχουμε,

$$\Delta = (-2\lambda)^2 - 4\cdot 1\cdot 4(\lambda - 1) = 4\lambda^2 - 16\lambda + 16 = 4(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 4(\lambda - 2)^2$$

ii. Επειδή για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι $\Delta = 4(\lambda - 2)^2 \geq 0$ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς.

iii. Από τους τύπους Vieta έχουμε:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha} \\ P = x_1 x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2\lambda \\ x_1 x_2 = 4\lambda - 4 \end{cases}.$$

Οπότε, $x_1 + x_2 = x_1 x_2 \Rightarrow 2\lambda = 4\lambda - 4 \Rightarrow \lambda = 2$

ΑΣΚΗΣΗ (2_483)

i. Να λύσετε την εξίσωση $|2x - 1| = 3$.

(Μονάδες 12)

ii. Αν α, β με $\alpha < \beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + 3 = 0$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

i. Έχουμε,

$$|2x - 1| = 3 \Leftrightarrow 2x - 1 = 3 \text{ ή } 2x - 1 = -3 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -1$$

ii. Από το (α) ερώτημα $\alpha < \beta$, άρα $\alpha = -1$ και $\beta = 2$.

Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + 3 = 0$ γίνεται $-x^2 + 2x + 3 = 0$ και έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = 2^2 - 4\cdot(-1)\cdot 3 = 16$$

και ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-2\pm 4}{-2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-2+4}{-2} = -1 \\ x_2 = \dfrac{-2-4}{-2} = 3 \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_493)

α) Να λύσετε την εξίσωση $|x-2| = \sqrt{3}$

Μονάδες 10

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του α) ερωτήματος.

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε :

$$|x-2| = \sqrt{3} \Leftrightarrow x-2 = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=\sqrt{3} \\ \text{ή} \\ x-2=-\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+\sqrt{3} \\ \text{ή} \\ x=2-\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=2+\sqrt{3} \\ \text{ή} \\ x_2=2-\sqrt{3} \end{cases}$$

β) Για να κατασκευάσουμε μια δευτεροβάθμια εξίσωση, ενώ γνωρίζουμε τις ρίζες της x_1, x_2, βρίσκουμε,

το άθροισμα τους :

$$S = x_1 + x_2 = 2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3} = 4$$

και το γινόμενο τους :

$$P = x_1\cdot x_2 = \left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right) = 2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 4-3 = 1$$

και στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τον τύπο: $x^2 - Sx + P = 0$ οπότε η ζητούμενη εξίσωση γίνεται :

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_496)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2\lambda x + 4(\lambda-1) = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης.

Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 8

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει: $(x_1+x_2)^2 + x_1x_2 + 5 = 0$.

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε,

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (2\lambda)^2 - 4\cdot 4(\lambda-1) = 4\lambda^2 - 16\lambda + 16$$

β) Από θεωρία γνωρίζουμε ότι :

$\alpha^2 \geq 0$ (κάθε αριθμός υψωμένος στο τετράγωνο είναι μη αρνητικός).

Βλέπουμε ότι : $\Delta = 4(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 4(\lambda-2)^2 \geq 0$

Επομένως η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

γ) Από τους τύπους Vieta παίρνουμε:

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -2\lambda \text{ και } x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = 4(\lambda-1)$$

Επομένως

$$(x_1+x_2)^2 + x_1x_2 + 5 = 0 \Leftrightarrow (-2\lambda)^2 + 4(\lambda-1) + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\lambda^2 + 4\lambda - 4 + 5 = 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\lambda+1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_507)

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - 9)x = \lambda^2 - 3\lambda$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α) Επιλέγοντας τρεις διαφορετικές πραγματικές τιμές για το λ, να γράψετε τρεις εξισώσεις.

Μονάδες 6

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μία και μοναδική λύση.

Μονάδες 9

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της (1) να ισούται με 4

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Θέτω $\lambda = 1$ και έχω την εξίσωση: $(1^2 - 9)x = 1^2 - 3\cdot 1$ δηλ.: $-8x = -2$

Θέτω $\lambda = 2$ και έχω την εξίσωση: $(2^2 - 9)x = 2^2 - 3\cdot 2$ δηλ.: $-5x = -2$

Θέτω $\lambda = 3$ και έχω την εξίσωση: $(3^2 - 9)x = 3^2 - 3\cdot 3$ δηλ.: $0\cdot x = 0$

β) Η (1) έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν ο συντελεστής του αγνώστου είναι διάφορος του μηδενός οπότε :

$$\lambda^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda-3)(\lambda+3) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda - 3 \neq 0 \\ \text{και} \\ \lambda + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \neq 3 \\ \text{και} \\ \lambda \neq -3 \end{cases}$$

γ) Η μοναδική λύση της (1), ισούται με 4, αν και μόνο αν $(\lambda \neq -3 \text{ και } \lambda \neq 3)$ από ερώτημα (β) και

$$(\lambda^2-9)4=\lambda^2-3\lambda \Leftrightarrow 4\lambda^2-36=\lambda^2-3\lambda \Leftrightarrow 3\lambda^2+3\lambda-36=0 \Leftrightarrow \lambda^2+\lambda-12=0$$

Έχουμε:

$$\Delta=49 \text{ και } \lambda=\frac{-1\pm 7}{2}=\begin{cases}\lambda=3\\ \lambda=-4\end{cases} \text{ και επειδή } \lambda\neq\pm 3 \text{ είναι } \lambda=-4$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_1005)

Δίνονται οι παραστάσεις $A=\frac{1+x}{x-1}$ και $B=\frac{2}{x^2-x}$ όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α. Να αποδείξετε ότι για να ορίζονται ταυτόχρονα οι παραστάσεις A και B πρέπει $x\neq 1$ και $x\neq 0$.

Μονάδες 12

β. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $A=B$.

Μονάδες 13

<u>ΛΥΣΗ</u>

α. Η παράσταση A ορίζεται για εκείνα τα x για τα οποία:

$$x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$$

Η παράσταση B ορίζεται για εκείνα τα x για τα οποία:

$$x^2-x\neq 0 \Leftrightarrow x(x-1)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0 \text{ και } x\neq 1.$$

Οπότε για να ορίζονται ταυτόχρονα οι παραστάσεις A και B πρέπει $x\neq 1$ και $x\neq 0$.

β. Για κάθε $\boldsymbol{x}\neq 1$ και $\boldsymbol{x}\neq 0$ έχουμε:

$$A=B \Leftrightarrow \frac{1+x}{x-1}=\frac{2}{x^2-x} \Leftrightarrow \frac{1+x}{x-1}=\frac{2}{x(x-1)} \Leftrightarrow \frac{1+x}{1}=\frac{2}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(1+x)=2 \Leftrightarrow x+x^2=2 \Leftrightarrow x^2+x-2=0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1^2-4\cdot 1\cdot(-2)=9>0,$$

οπότε έχει δύο πραγματικές ρίζες:

$$x_{1,2}=\begin{cases}\frac{-1+\sqrt{9}}{2\cdot 1}=\frac{-1+3}{2}=1\\ \frac{-1-\sqrt{9}}{2\cdot 1}=\frac{-1-3}{2}=-2\end{cases}$$

όπου δεχόμαστε μόνο την $x=-2$ λόγω των περιορισμών $x\neq 1$ και $x\neq 0$.

ΑΣΚΗΣΗ (2_1007)

α. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης:

$$-2x^2+10x=12\;(1)$$

Μονάδες 15

β. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{-2x^2+10x-12}{x-2}=0$$

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε:

$-2x^2+10x=12 \Leftrightarrow -2x^2+10x-12=0 \Leftrightarrow$ $-2\left(x^2-5x+6\right)=0 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0$.

Η τελευταία εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=(-5)^2-4\cdot1\cdot6=1>0,$$

οπότε έχει δύο πραγματικές ρίζες:

$$x_{1,2}=\begin{cases}\dfrac{-(-5)+\sqrt{1}}{2\cdot1}=\dfrac{5+1}{2}=3\\[2mm]\dfrac{-(-5)-\sqrt{1}}{2\cdot1}=\dfrac{5-1}{2}=2\end{cases}$$

β. Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x\neq2$.

Τότε:

$$\frac{-2x^2+10x-12}{x-2}=0 \Leftrightarrow -2x^2+10x-12=0 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0$$

$$\Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=3\;(\text{από το α.ερώτημα})$$

όπου δεχόμαστε μόνο την $x=3$ λόγω του περιορισμού $x\neq2$.

ΑΣΚΗΣΗ (2_1093)

Δίνονται οι αριθμοί : $A=\dfrac{1}{5+\sqrt{5}}$, $B=\dfrac{1}{5-\sqrt{5}}$

α) Να δείξετε ότι :

i) $A+B=\dfrac{1}{2}$

Μονάδες 8

ii) $A\cdot B=\dfrac{1}{20}$

Μονάδες 8

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς Α και Β

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) i) Έχουμε,

$$\frac{1}{5+\sqrt{5}}+\frac{1}{5-\sqrt{5}}=\frac{1\cdot\left(5-\sqrt{5}\right)}{\left(5+\sqrt{5}\right)\cdot\left(5-\sqrt{5}\right)}+\frac{1\cdot\left(5+\sqrt{5}\right)}{\left(5-\sqrt{5}\right)\cdot\left(5+\sqrt{5}\right)}=\frac{5-\sqrt{5}+5+\sqrt{5}}{\left(5-\sqrt{5}\right)\cdot\left(5+\sqrt{5}\right)}=\frac{10}{5^2-\sqrt{5}^2}$$

$$=\frac{10}{25-5}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$$

ii) Έχουμε,

$$\frac{1}{5+\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{5-\sqrt{5}}=\frac{1\cdot 1}{\left(5+\sqrt{5}\right)\cdot\left(5-\sqrt{5}\right)}=\frac{1}{5^2-\sqrt{5}^2}=\frac{1}{25-5}=\frac{1}{20}$$

β) Ξέρουμε ότι η εξίσωση με ρίζες x_1 και x_2 είναι η $x^2 – Sx + P = 0$, όπου $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 \cdot x_2$ (τύποι Vieta).

Έχουμε

$$S=A+B=\frac{1}{2} \text{ και } P=A\cdot B=\frac{1}{20},$$

οπότε η εξίσωση είναι

$$x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{20}=0 \Leftrightarrow 20x^2-10x+1=0$$

<u>Παρόμοιες Ασκήσεις :</u>

Το α.i ερώτημα μοιάζει την άσκηση 4.i (Β Ομάδας) της παραγράφου 2.4 του σχολικού βιβλίου.

Το β ερώτημα μοιάζει με την άσκηση 6 (Α Ομάδας) της παραγράφου 3.3 του σχολικού βιβλίου.

ΑΣΚΗΣΗ (2_1275)

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + 5x – 1$

α) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες x_1 και x_2

Μονάδες 6

β) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων : x_1+x_2, x_1x_2 και $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$

Μονάδες 9

γ) Να προσδιορίσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$

Μονάδες 10

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) Για να έχει το τριώνυμο δύο άνισες πραγματικές ρίζες πρέπει η διακρίνουσα του να είναι μεγαλύτερη του μηδενός.

Το τριώνυμο $2x^2 + 5x – 1$ έχει συντελεστές $α = 2$, $β = 5$ και $γ = – 1$, οπότε έχουμε :

$$Δ = β^2 – 4αγ = 5^2 – 4\cdot 2\cdot(– 1) = 25 + 8 = 33 > 0$$

Άρα το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

β) Από τους τύπους Vieta έχουμε ότι :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{5}{2} \text{ και } P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = -\frac{1}{2}$$

Επίσης

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2}{x_1x_2} + \frac{x_1}{x_1x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{-\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{5 \cdot 2}{2 \cdot 1} = 5$$

γ) Ξέρουμε ότι η εξίσωση με ρίζες $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$ είναι η $x^2 - S'x + P' = 0$, όπου

$$S' = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 5 \text{ και } P' = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1x_2} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2.$$

Άρα η εξίσωση είναι : $x^2 - 5x - 2 = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ (2_1298)

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha + \beta = 2 \quad \text{ή} \quad \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = -30$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -15$

Μονάδες 15

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = -30 \Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha + \beta) = -30 \Leftrightarrow \alpha\beta \cdot 2 = -30 \Leftrightarrow \frac{\alpha\beta \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} = -\frac{30}{2} \Leftrightarrow \alpha\beta = -15$$

β) Για να βρούμε 2 αριθμούς των οποίων γνωρίζουμε το άθροισμα και το γινόμενο, χρησιμοποιούμε την εξίσωση:

$$x^2 - Sx + P = 0 \underset{P=\alpha\beta=-15}{\overset{S=\alpha+\beta=2}{\Leftrightarrow}} x^2 - 2x - 15 = 0$$

η οποία έχει

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 4 + 60 = 64 > 0,$$

οπότε έχει δύο ρίζες, τις

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = 5 \text{ και } x_2 = \frac{2 - \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = -3$$

Επομένως,

$$\alpha = 5, \beta = -3 \text{ ή } \alpha = -3, \beta = 5$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_1509)

Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2-(\lambda-1)x+6=0, \quad ①$$

με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1, να βρείτε το λ.

Μονάδες 13

β) Για $\lambda = 2$, να λύσετε την εξίσωση ①

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Ο αριθμός 1 είναι λύση της εξίσωσης, άρα θα την επαληθεύει, άρα

$$x^2-(\lambda-1)x+6=0 \overset{x=1}{\Rightarrow} 1^2-(\lambda-1)\cdot 1+6=0 \Rightarrow 1-\lambda+1+6=0 \Rightarrow \boxed{\lambda=8}$$

β) Είναι:

$$x^2-(\lambda-1)x+6=0 \overset{\lambda=2}{\Rightarrow} x^2-(2-1)x+6=0 \Rightarrow x^2-x+6=0$$

Είναι:

$$\Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot 6=1-24=-23<0$$

Οπότε η εξίσωση ① είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$

ΑΣΚΗΣΗ (2_1533)

Θεωρούμε την εξίσωση $x^2+2x+\lambda-2=0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 10

β) Στην περίπτωση που η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2, να προσδιορίσετε το λ ώστε να ισχύει:

$$x_1x_2-2(x_1+x_2)=1$$

Μονάδες 15

<u>Λύση</u>

α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2+2x+\lambda-2$ είναι:

$$\Delta=2^2-4\cdot 1\cdot(\lambda-2)=4-4(\lambda-2)=4-4\lambda+8=12-4\lambda.$$

Η εξίσωση $x^2+2x+\lambda-2=0$ έχει πραγματικές ρίζες, όταν $\Delta \geq 0$.

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 12-4\lambda \geq 0 \Leftrightarrow -4\lambda \geq -12 \Leftrightarrow \lambda \leq 3$$

Άρα η εξίσωση $x^2+2x+\lambda-2=0$ έχει πραγματικές ρίζες όταν $\lambda \in (-\infty, 3]$.

β) Από τους τύπους Vieta ισχύει ότι:

$$x_1 + x_2 = -\frac{2}{1} = -2 \quad \text{και} \quad x_1 x_2 = \frac{\lambda - 2}{1} = \lambda - 2.$$

Όταν έχει δύο ρίζες (δηλ. όταν $\lambda \le 3$) έχω:

$x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) = 1 \Leftrightarrow \lambda - 2 - 2 \cdot (-2) = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1 + 2 - 4 \Leftrightarrow \lambda = -1$, δεκτή.

Άρα η ζητούμενη τιμή του λ είναι -1.

ΑΣΚΗΣΗ (2_3839)

Δίνεται η εξίσωση: $\lambda x^2 - (\lambda - 1)x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq 0$

α. Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -2

Μονάδες 12

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \neq 0$

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α. Αφού η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -2 , τότε

$\lambda(-2)^2 - (\lambda - 1)(-2) - 1 = 0 \Leftrightarrow 4\lambda + 2(\lambda - 1) - 1 = 0 \Leftrightarrow 4\lambda + 2\lambda - 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$6\lambda = 3 \Leftrightarrow \lambda = ½$

β. Για κάθε $\lambda \neq 0$ η εξίσωση είναι 2ου βαθμού, άρα θα πρέπει $\Delta \ge 0$.

Έχουμε

$$\Delta = [-(\lambda - 1)]^2 - 4 \cdot \lambda \cdot (-1) = (\lambda - 1)^2 + 4\lambda = \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 4\lambda = (\lambda + 1)^2 \ge 0 ,$$

για κάθε $\lambda \neq 0$

ΑΣΚΗΣΗ (2_3857)

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\alpha \cdot \beta = 4$ και $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20$

α. Να αποδείξετε ότι: $\alpha + \beta = 5$.

Μονάδες 10

β. Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε,

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20 \Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha + \beta) = 20$$

όμως $\alpha\beta = 4$ άρα $4(\alpha + \beta) = 20 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 5$

β. Το άθροισμα S και το γινόμενο P των α και β είναι

$$S = \alpha + \beta = 5 \text{ και } P = \alpha\beta = 4$$

Άρα οι α, β είναι λύσεις της εξίσωσης $x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$

Έχουμε

$$\Delta = (-5)^2 - 4\cdot 1\cdot 4 = 25 - 16 = 9 > 0 \ ,$$

άρα $x_{1,2} = \dfrac{5 \pm 3}{2}$ οπότε $x_1 = 4$ και $x_2 = 1$

Συνεπώς $\alpha = 4$, $\beta = 1$ ή $\alpha = 1$, $\beta = 4$

ΑΣΚΗΣΗ (2_3863)

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha + \beta = -1 \text{ και } \alpha^3\beta + 2\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 = -12$$

α. Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -12$

Μονάδες 10

β. Να κατασκευάσετε εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε

$\alpha^3\beta + 2\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 = -12 \Leftrightarrow \alpha\beta\left(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2\right) = -12 \Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha + \beta)^2 = -12$

όμως $\alpha + \beta = -1$, άρα $\alpha\beta(-1)^2 = -12 \Leftrightarrow \alpha\beta = -12$

β. Οι α **,** β έχουν άθροισμα $S = \alpha + \beta = -1$ και γινόμενο $P = \alpha\beta = -12$.

Άρα οι α, β είναι λύσεις της εξίσωσης

$$x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0$$

Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι,

$$\Delta = 1^2 - 4\cdot 1\cdot(-12) = 1 + 48 = 49 > 0$$

και οι ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \text{ άρα } x_1 = 3 \ , \ x_2 = -4$$

Άρα $\alpha = 3$, $\beta = -4$ ή $\alpha = -4$, $\beta = 3$

ΑΣΚΗΣΗ (2_4308)

α. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση $\Pi = \dfrac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \dfrac{1}{1 - x}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

(Μονάδες 10)

β. Για τις τιμές του x που βρήκατε στο α) ερώτημα, να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x} = 0$$

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Για να έχει νόημα η παράσταση Π πρέπει οι παρονομαστές να είναι αριθμοί διαφορετικοί από το μηδέν. Πρέπει:

$$\begin{cases} x^2 - x \neq 0 \\ 1 - x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) \neq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \text{και} \\ x \neq 1 \end{cases}$$

β) Για $x \neq 0$ και $x \neq 1$ η εξίσωση γίνεται:

$$\frac{2x^2-1}{x^2-x} + \frac{1}{1-x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-1}{x(x-1)} - \frac{1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x(x-1)\frac{2x^2-1}{x(x-1)} - x(x-1)\frac{1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 - x = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού με διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \Leftrightarrow \Delta = (-1)^2 - 4\cdot 2\cdot(-1) \Leftrightarrow \Delta = 9$$

άρα η εξίσωση έχει 2 ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2\cdot 2} = \frac{1 \pm 3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1+3}{4} \Leftrightarrow x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{1-3}{4} \Leftrightarrow x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Όμως είναι $x \neq 1$ άρα η λύση της εξίσωσης είναι μόνο η $x = -\frac{1}{2}$

ΑΣΚΗΣΗ (2_4309)

Δίνεται ορθογώνιο με περίμετρο $\Pi = 20\text{cm}$ και εμβαδό $E = 24\text{cm}^2$.

α. Να κατασκευάσετε μία εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ως ρίζες τα μήκη των πλευρών αυτού του ορθογωνίου.

(Μονάδες 15)

β. Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Έστω x_1, x_2 οι διαστάσεις του ορθογωνίου τότε η περίμετρός του θα είναι

$\Pi = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2)$ και το εμβαδό του $E = x_1 \cdot x_2$

Αν θεωρήσουμε $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 \cdot x_2$ τότε έχουμε

$$\begin{cases} \Pi = 2S \\ E = P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2S = 20 \\ P = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 10 \\ P = 24 \end{cases}$$

Η ζητούμενη εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με ρίζες τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου είναι η: $x^2 - 10x + 24 = 0$

β) Για να βρούμε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $x^2 - 10x + 24 = 0$ η οποία έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-10)^2 - 4\cdot 1\cdot 24 = 100 - 96 \Leftrightarrow \Delta = 4$$

άρα έχει 2 λύσεις τις:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-10)\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{10\pm 2}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{10+2}{2}\Leftrightarrow x_1=6\\ x_2=\dfrac{10-2}{2}\Leftrightarrow x_2=4\end{cases}$$

Άρα τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου είναι $6cm$ και $4cm$

ΑΣΚΗΣΗ (2_4310)

Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α,β, τέτοιοι ώστε:

$$\alpha+\beta=12 \text{ και } \alpha^2+\beta^2=272$$

α. Με τη βοήθεια της ταυτότητας

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$$

να δείξετε ότι: $\alpha\beta=-64$

(Μονάδες 8)

β. Να κατασκευάσετε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α,β

(Μονάδες 10)

γ. Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α,β.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Χρησιμοποιώντας τη δοσμένη ταυτότητα έχουμε:

$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\Leftrightarrow 12^2=272+2\alpha\beta\Leftrightarrow 2\alpha\beta=144-272\Leftrightarrow$

$$2\alpha\beta=-128\Leftrightarrow\alpha\beta=-64$$

β) Η ζητούμενη εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α και β θα έχει άθροισμα ριζών $S=a+\beta=12$ και γινόμενο $P=\alpha\beta=-64$ άρα θα είναι η:

$$x^2-12x-64=0$$

γ) Αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $x^2-12x-64=0$ που έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-12)^2-4\cdot1\cdot(-64)=144+256\Leftrightarrow\Delta=400$$

άρα έχει 2 ρίζες

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-12)\pm\sqrt{400}}{2}=\frac{12\pm 20}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{12+20}{2}\Leftrightarrow x_1=16\\ x_2=\dfrac{12-20}{2}\Leftrightarrow x_2=-4\end{cases}.$$

Άρα οι αριθμοί α,β είναι οι 16 και -4

ΑΣΚΗΣΗ (2_4313)

Δίνονται οι αριθμοί $A=\dfrac{1}{3-\sqrt{7}}$ και $B=\dfrac{1}{3+\sqrt{7}}$

α. Να δείξετε ότι $A+B=3$ και $A\cdot B=\dfrac{1}{2}$

(Μονάδες 12)

β. Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς A, B.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή κάθε κλάσματος με τη συζυγή παράσταση του παρονομαστή και έχουμε:

$$A = \frac{1}{3-\sqrt{7}} = \frac{3+\sqrt{7}}{\left(3-\sqrt{7}\right)\left(3+\sqrt{7}\right)} = \frac{3+\sqrt{7}}{3^2-\sqrt{7}^2} = \frac{3+\sqrt{7}}{9-7} = \frac{3+\sqrt{7}}{2}$$

$$B = \frac{1}{3+\sqrt{7}} = \frac{3-\sqrt{7}}{\left(3+\sqrt{7}\right)\left(3-\sqrt{7}\right)} = \frac{3-\sqrt{7}}{3^2-\sqrt{7}^2} = \frac{3-\sqrt{7}}{9-7} = \frac{3-\sqrt{7}}{2}$$

Άρα είναι:

$$A+B = \frac{3+\sqrt{7}}{2} + \frac{3-\sqrt{7}}{2} = \frac{3+\sqrt{7}+3-\sqrt{7}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$A \cdot B = \frac{3+\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{3-\sqrt{7}}{2} = \frac{\left(3+\sqrt{7}\right)\left(3-\sqrt{7}\right)}{4} = \frac{3^2-\sqrt{7}^2}{4} = \frac{9-7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

β) Η ζητούμενη εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με ρίζες τα A, B

Θα έχει άθροισμα ριζών $S = A + B = 3$ και γινόμενο ριζών $P = A \cdot B = \frac{1}{2}$,

άρα θα είναι η:

$$x^2 - 3x + \frac{1}{2} = 0$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_4317)

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda+2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq -2$.

α. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 12)

β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, να βρείτε το λ ώστε $x_1 \cdot x_2 = -3$

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού αφού $\lambda \neq 2$ με διακρίνουσα:

$$\Delta = (2\lambda)^2 - 4(\lambda+2)(\lambda-1) = 4\lambda^2 - 4\left(\lambda^2 - \lambda + 2\lambda - 2\right)$$

$$= 4\lambda^2 - 4\lambda^2 + 4\lambda - 8\lambda + 8 = 8 - 4\lambda$$

Για να έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες πρέπει:

$$\begin{cases}\Delta>0\\ \text{και}\\ \lambda\neq-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8-4\lambda>0\\ \text{και}\\ \lambda\neq-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda<2\\ \text{και}\\ \lambda\neq-2\end{cases}\Leftrightarrow\lambda\in(-\infty,-2)\cup(-2,2)$$

β) Το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης είναι $P=\dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{\lambda-1}{\lambda+2}$, άρα:

$$P=x_1x_2=-3\Leftrightarrow\frac{\lambda-1}{\lambda+2}=-3\Leftrightarrow\lambda-1=-3\lambda-6\Leftrightarrow4\lambda=-5\Leftrightarrow\lambda=-\frac{5}{4}$$

λύση η οποία είναι δεκτή αφού ανήκει στο διάστημα $(-\infty,-2)\cup(-2,2)$

ΑΣΚΗΣΗ (4_1890)

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda+2)x^2+(2\lambda+3)x+\lambda-2=0 \quad (1)$, με παράμετρο $\lambda\neq-2$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι: $\Delta=12\lambda+25$

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\neq-2$, ώστε η εξίσωση (1) να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 7)

γ) Να εκφράσετε ως συνάρτηση του λ το άθροισμα των ριζών $S=x_1+x_2$ και το γινόμενο των ριζών $P=x_1\cdot x_2$.

(Μονάδες 4)

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ ώστε για τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) να ισχύει η σχέση: $(x_1+x_2-1)^2+(x_1\cdot x_2+3)^2=0 \quad (2)$

(Μονάδες 8)

Λύση

α) Η εξίσωση (1) είναι στη μορφή $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, με $\alpha=\lambda+2\neq0$, $\beta=2\lambda+3$ και $\gamma=\lambda-2$.

Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι:

$$\Delta=(2\lambda+3)^2-4\cdot(\lambda+2)\cdot(\lambda-2)=(2\lambda)^2+2\cdot2\lambda\cdot3+3^2-4(\lambda^2-4)$$
$$=4\lambda^2+12\lambda+9-4\lambda^2+16=12\lambda+25$$

β) Η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες όταν η διακρίνουσά της είναι θετική, δηλαδή:

$$\Delta>0\Leftrightarrow12\lambda+25>0\Leftrightarrow12\lambda>-25\Leftrightarrow\lambda>\frac{-25}{12}.$$

Επιπλέον όμως από την αρχική υπόθεση είναι $\lambda\neq-2$, οπότε η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για $\lambda\in\left(\dfrac{-25}{2},-2\right)\cup(-2,+\infty)$.

γ) Από τους τύπους Vieta για το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης, έχουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{2\lambda+3}{\lambda+2} \text{ και } P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda-2}{\lambda+2}, \text{ με } \lambda \neq -2$$

δ) Έστω ότι υπάρχει $\lambda \neq -2$ τέτοιο ώστε να ισχύει η σχέση (2). Τότε, χρησιμοποιώντας και τις εκφράσεις των $x_1 + x_2$ και $x_1 \cdot x_2$ από το τρίτο ερώτημα, έχουμε:

$$(x_1 + x_2 - 1)^2 + (x_1 \cdot x_2 + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{2\lambda+3}{\lambda+2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\lambda-2}{\lambda+2} + 3\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2\lambda+3}{\lambda+2} - 1 = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\lambda-2}{\lambda+2} + 3 = 0$$

τότε,

$$\frac{\lambda-2}{\lambda+2} + 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda-2}{\lambda+2} = -3 \Leftrightarrow \lambda - 2 = -3(\lambda+2) \Leftrightarrow \lambda - 2 = -3\lambda - 6 \Leftrightarrow 4\lambda = -4 \Leftrightarrow \lambda = -1$$

και

$$-\frac{2\lambda+3}{\lambda+2} - 1 = 0 \Leftrightarrow -\frac{2\lambda+3}{\lambda+2} = 1 \Leftrightarrow -(2\lambda+3) = \lambda + 2 \Leftrightarrow -2\lambda - 3 = \lambda + 2 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{5}{3}$$

Άρα δεν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει η (2).

ΑΣΚΗΣΗ (4_1955)

Τέσσερις αθλητές, ο Αργύρης, ο Βασίλης, ο Γιώργος και ο Δημήτρης τερμάτισαν σε έναν αγώνα δρόμου με αντίστοιχους χρόνους (σε λεπτά) t_A, t_B, t_Γ και t_Δ, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

- $t_A < t_B$
- $t_\Gamma = \dfrac{t_A + 2t_B}{3}$ και
- $|t_A - t_\Delta| = |t_B - t_\Delta|$

α) i. Να δείξετε ότι: $t_\Delta = \dfrac{t_A + t_B}{2}$.

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε τη σειρά με την οποία τερμάτισαν οι αθλητές. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

β) Δίνεται επιπλέον ότι ισχύει:

$$t_A + t_B = 6 \text{ και } t_A \cdot t_B = 8$$

i. Να γράψετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς t_A και t_B.

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε τους χρόνους τερματισμού των τεσσάρων αθλητών.

(Μονάδες 5)

Λύση

α) i. Από τις ιδιότητες των απολύτων τιμών έχουμε:

$$|t_A - t_\Delta| = |t_B - t_\Delta| \Leftrightarrow t_A - t_\Delta = t_B - t_\Delta \quad \text{ή} \quad t_A - t_\Delta = -(t_B - t_\Delta)$$

Οπότε:

- $t_A - t_\Delta = t_B - t_\Delta \Leftrightarrow t_A - t_B = 0 \Leftrightarrow t_A = t_B$. Άτοπο γιατί $t_A < t_B$ από την υπόθεση, ή
- $t_A - t_\Delta = -(t_B - t_\Delta) \Leftrightarrow t_A - t_\Delta = -t_B + t_\Delta \Leftrightarrow t_A + t_B = 2t_\Delta \Leftrightarrow t_\Delta = \dfrac{t_A + t_B}{2}$

ii. Θα συγκρίνουμε τους χρόνους ανά δύο, παίρνοντας τις διαφορές τους.

- Συγκρίνουμε t_Γ με t_A.

$$t_\Gamma - t_A = \frac{t_A + 2t_B}{3} - t_A = \frac{t_A + 2t_B - 3t_A}{3} = \frac{2t_B - 2t_A}{3} = \frac{2(t_B - t_A)}{3} > 0 \text{ γιατί } t_B > t_A.$$

Άρα $t_\Gamma - t_A > 0 \Leftrightarrow \boxed{t_\Gamma > t_A}$ (1).

- Συγκρίνουμε t_Γ με t_B.

$$t_\Gamma - t_B = \frac{t_A + 2t_B}{3} - t_B = \frac{t_A + 2t_B - 3t_B}{3} = \frac{t_A - t_B}{3} < 0 \text{ γιατί } t_A < t_B.$$

Άρα $t_\Gamma - t_B < 0 \Leftrightarrow \boxed{t_\Gamma < t_B}$ (2).

Από τις (1) και (2) έχουμε μέχρι στιγμής $\boxed{t_A < t_\Gamma < t_B}$ (3).

- Συγκρίνουμε t_Δ με t_B (που είναι το μεγαλύτερο ως τώρα)

$$t_\Delta - t_B = \frac{t_A + t_B}{2} - t_B = \frac{t_A + t_B - 2t_B}{2} = \frac{t_A - t_B}{2} < 0 \text{ γιατί } t_A < t_B.$$

Άρα $t_\Delta - t_B < 0 \Leftrightarrow \boxed{t_\Delta < t_B}$ (4).

- Αφού από τη σχέση (4) προέκυψε το t_Δ να είναι μικρότερο του t_B, συγκρίνουμε t_Δ με t_Γ. (Αν προέκυπτε $t_\Delta > t_B$, δεν θα υπήρχε η ανάγκη σύγκρισης των t_Δ και t_Γ)

$$t_\Delta - t_\Gamma = \frac{t_A + t_B}{2} - \frac{t_A + 2t_B}{3} = \frac{3t_A + 3t_B - 2t_A - 4t_B}{6} = \frac{t_A - t_B}{6} < 0 \text{ γιατί } t_A < t_B.$$

Άρα $t_\Delta - t_\Gamma < 0 \Leftrightarrow \boxed{t_\Delta < t_\Gamma}$ (5)

- Συγκρίνουμε t_Δ με t_A.

$$t_\Delta - t_A = \frac{t_A + t_B}{2} - t_A = \frac{t_A + t_B - 2t_A}{2} = \frac{t_B - t_A}{2} > 0 \text{ γιατί } t_A < t_B.$$

Άρα $t_\Delta - t_A > 0 \Leftrightarrow \boxed{t_\Delta > t_A}$ (6).

Τελικά από τις σχέσεις (3),(4),(5) και (6), για τους χρόνους των τεσσάρων αθλητών προκύπτει ότι $\boxed{t_A < t_\Delta < t_\Gamma < t_B}$.

β) i. Η εξίσωση με ρίζες τους αριθμούς x_1, x_2 για τους οποίους γνωρίζουμε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενό τους $P = x_1 \cdot x_2$ είναι η $x^2 - Sx + P = 0$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω η εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς t_A και t_B με $S = t_A + t_B = 6$ και $P = t_A \cdot t_B = 8$ είναι η $t^2 - St + P = 0 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 8 = 0$ με $t > 0$.

ii) Η δευτεροβάθμια εξίσωση $t^2 - 6t + 8 = 0$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 36 - 32 = 4$$

και ρίζες:

$$t_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = 4 \end{cases}$$

Από την υπόθεση όμως $t_A < t_B$, οπότε θα είναι $t_A = t_1 = 2$ min και $t_B = t_2 = 4$ min. Επομένως,

$$t_\Gamma = \frac{t_A + 2t_B}{3} = \frac{2 + 2 \cdot 4}{3} = \frac{10}{3} \text{ min και } t_\Delta = \frac{t_A + t_B}{2} = \frac{2+4}{2} = 3 \text{ min}.$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_2055)

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - \lambda)x^2 - (\lambda^2 - 1)x + \lambda - 1 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

1. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού

(Μονάδες 6)

2. Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) παίρνει τη μορφή: $\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0$.

(Μονάδες 6)

3. Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 7)

4. Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι $2^{ου}$ βαθμού.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

1. Η εξίσωση (1), θα παριστάνει εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού αν ο συντελεστής του x^2 δεν είναι μηδέν, δηλαδή αν

$$(\lambda^2 - \lambda) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1) \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda \neq 0 \text{ και } \lambda \neq 1).$$

2. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$ η εξίσωση (1) ισοδύναμα γράφεται,

$$\lambda(\lambda - 1)x^2 - (\lambda - 1)(\lambda + 1)x + \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)\left[\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1\right] = 0$$

$$\overset{\lambda - 1 \neq 0}{\Leftrightarrow} \lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0$$

3. Η εξίσωση $\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0$ έχει διακρίνουσα,

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\left[-\left(\lambda+1\right)\right]^2-4\lambda=\left(\lambda+1\right)^2-4\lambda=\lambda^2+2\lambda+1-4\lambda=\lambda^2-2\lambda+1=\left(\lambda-1\right)^2>0$$

που ισχύει για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ με $\lambda\neq 0$ και $\lambda\neq 1$

Άρα η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ με $\lambda\neq 0$ και $\lambda\neq 1$

4. Αν $\lambda\neq 0$ και $\lambda\neq 1$ η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες που δίνονται από τον τύπο,

$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-\left[-\left(\lambda+1\right)\right]\pm\sqrt{\left(\lambda-1\right)^2}}{2\lambda}=\frac{\left(\lambda+1\right)\pm\left(\lambda-1\right)}{2\lambda}$$

άρα,

$$\left(x=\frac{\left(\lambda+1\right)+\left(\lambda-1\right)}{2\lambda}=\frac{2\lambda}{2\lambda}=1 \text{ ή } x=\frac{\left(\lambda+1\right)-\left(\lambda-1\right)}{2\lambda}=\frac{2}{2\lambda}=\frac{1}{\lambda}\right)$$

Άρα $x=1$ ή $x=\dfrac{1}{\lambda}$

ΑΣΚΗΣΗ (4_2332)

Δίνεται η εξίσωση $x^2-4x+2-\lambda^2=0$ (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

Μονάδες 10

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1):

i) Να βρείτε το $S=x_1+x_2$.

ii) Να βρείτε το $P=x_1\cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ.

Μονάδες 5

γ) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2+\sqrt{3}$ τότε:

i) να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2-\sqrt{3}$,

ii) να βρείτε το λ.

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\left(-4\right)^2-4\cdot 1\cdot\left(2-\lambda^2\right)=16-8+4\lambda^2=4\lambda^2+12>0 \text{ για κάθε } \lambda\in\mathbb{R}$$

αφού $\lambda^2\geq 0\Leftrightarrow\lambda^2+3\geq 3>0$, άρα, η (1) έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών της εξίσωσης δίνονται από τους τύπους Vieta: $S=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ και $P=\dfrac{\gamma}{\alpha}$ άρα

(i) $S=x_1+x_2=-\dfrac{-4}{1}=4$

(ii) $P=x_1\cdot x_2=\dfrac{2-\lambda^2}{1}=2-\lambda^2$

γ) (i) Αν $x_1 = 2+\sqrt{3}$ τότε από (β)(i) θα ισχύει:

$$\left(2+\sqrt{3}\right)+x_2 = 4 \Leftrightarrow x_2 = 4-2-\sqrt{3} \Leftrightarrow x_2 = 2-\sqrt{3}$$

(ii) Από (β)(ii) θα έχουμε

$$x_1 \cdot x_2 = 2-\lambda^2 \Leftrightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right) = 2-\lambda^2 \Leftrightarrow 2^2-\sqrt{3}^2 = 2-\lambda^2 \Leftrightarrow 4-3 = 2-\lambda^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 = 2-\lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_4654)

1. Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση $x^4-7x^2+12=0$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 10)

2. Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση: $x^4+\beta x^2+\gamma=0$ (1) με παραμέτρους, $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι:

Αν $\beta<0$, $\gamma>0$ και $\beta^2-4\gamma>0$, τότε η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

1. Η εξίσωση ισοδύναμα,

$$\left(x^2\right)^2-7x^2+12=0 \quad (2)$$

και θέτουμε $x^2=\omega\geq 0$, οπότε η (2) γίνεται

$$\omega^2-7\omega+12=0 \quad ,\text{με} \quad \omega\geq 0$$

Για το τριώνυμο έχουμε διακρίνουσα,

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=7^2-4\cdot 1\cdot 12=1>0$$

άρα έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες,

$$\omega=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-7)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}\Rightarrow\left\{\omega_1=\frac{7+1}{2}=4>0 \ \text{ ή } \ \omega_2=\frac{7-1}{2}=3>0\right\}\text{δεκτές.}$$

Για

$$\omega=4\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow |x|=\sqrt{4}\Leftrightarrow x=2 \ \text{ ή } \ x=-2$$

Και για

$$\omega=3\Leftrightarrow x^2=3\Leftrightarrow |x|=\sqrt{3}\Leftrightarrow x=\sqrt{3} \ \text{ ή } \ x=-\sqrt{3}$$

επομένως η διτετράγωνη εξίσωση $x^4-7x^2+12=0$ έχει τέσσερις πραγματικές ρίζες,

$$x=-\sqrt{3}\ ,\ x=\sqrt{3}\ ,\ x=2\ ,\ x=-2$$

2. <u>Α' τρόπος</u>

Η εξίσωση ισοδύναμα,

$$\left(x^2\right)^2+\beta x^2+\gamma=0\quad(3)$$

και θέτουμε $x^2=\omega\geq 0$, οπότε η (3) γίνεται

$$\omega^2+\beta\omega+\gamma=0\ \ (4)\text{ με }\omega\geq 0$$

Για το τριώνυμο έχουμε διακρίνουσα,

$$\Delta=\beta^2-4\gamma$$

και αν $\beta^2-4\gamma>0$ είναι $\Delta>0$ επομένως η εξίσωση (4) έχει δύο πραγματικές και άνισες.

Έστω αυτές ω_1,ω_2, τότε, αν

$\beta<0\Leftrightarrow-\beta>0$ τότε

$$S=\frac{-\beta}{\alpha}\Leftrightarrow\omega_1+\omega_2=-\beta>0$$

και αν $\gamma>0$ τότε

$$P=\frac{\gamma}{\alpha}\Leftrightarrow\omega_1\cdot\omega_2=\gamma>0$$

Επομένως οι ρίζες ω_1,ω_2 είναι θετικές, δηλαδή

$$\text{αν }\omega=\omega_1\Rightarrow x^2=\omega_1>0\Rightarrow x=\pm\sqrt{\omega_1}$$

και όμοια αν $\omega=\omega_2\Rightarrow x^2=\omega_2>0\Rightarrow x=\pm\sqrt{\omega_2}$

Επομένως η εξίσωση (3) έχει 4 διαφορετικές πραγματικές ρίζες αν $\beta<0$, $\gamma>0$ και $\beta^2-4\gamma>0$

<u>Β' τρόπος</u>

Η εξίσωση ισοδύναμα, $\left(x^2\right)^2+\beta x^2+\gamma=0\ \ (3)$ και θέτουμε $x^2=\omega\geq 0$, οπότε η

$(3)\Leftrightarrow\omega^2+\beta\omega+\gamma=0\ \ (4)$ με $\omega\geq 0$

Για το τριώνυμο έχουμε διακρίνουσα, $\Delta=\beta^2-4\gamma$

και αν $\beta^2-4\gamma>0$ είναι $\Delta>0$ επομένως η εξίσωση (4) έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες,

$$\omega=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\Rightarrow\omega=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\gamma}}{2}\quad\text{ή}\quad\omega=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\gamma}}{2}$$

Τώρα, αν $\beta<0\Leftrightarrow-\beta>0$, έχουμε

$$\omega=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\gamma}}{2}>0\Leftrightarrow x^2=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\gamma}}{2}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\gamma}}{2}}$$

Ακόμη,

$$-\beta-\sqrt{\beta^2-4\gamma}>0\Leftrightarrow-\beta>\sqrt{\beta^2-4\gamma}>0\Leftrightarrow(-\beta)^2>\left(\sqrt{\beta^2-4\gamma}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\beta^2>\beta^2-4\gamma\Leftrightarrow 4\gamma>0\Leftrightarrow\gamma>0$$

Άρα αν $\gamma > 0$ τότε

$$\omega = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2} \Leftrightarrow |x| = \sqrt{\frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}}$$

Επομένως η διτετράγωνη εξίσωση $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ έχει τέσσερις πραγματικές ρίζες αν ρίζες $\beta < 0$, $\gamma > 0$ και $\beta^2 - 4\gamma > 0$ και είναι οι

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}}, \; x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}}$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_4665)

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x - (\lambda^2 + 5) = 0 \; (1)$ με παράμετρο $\lambda \in R$.

1. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (1).

(Μονάδες 5)

2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in R$.

(Μονάδες 10)

3. Αν x_1, x_2 είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1), να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in R$ για τις οποίες ισχύει: $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = -4$.

(Μονάδες 10)

<u>Λύση</u>

1. Είναι

$$x^2 - \lambda x - (\lambda^2 + 5) = 0 \; (1)$$

όπου $\alpha = 1$, $\beta = -\lambda$ και $\gamma = -(\lambda^2 + 5)$

με διακρίνουσα,

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot [-(\lambda^2 + 5)] = \lambda^2 + 4 \cdot (\lambda^2 + 5) = \lambda^2 + 4\lambda^2 + 20 = 5\lambda^2 + 20$$

2. Έχουμε $\Delta = 5\lambda^2 + 20 > 0$, αφού $5\lambda^2 \geq 0$ και $20 > 0$, οπότε η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in R$**.**

3. Είναι x_1, x_2 οι δύο άνισες και πραγματικές ρίζες. Από τους τύπους του Vieta έχουμε ότι:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-\lambda}{1} = \lambda$$

και

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-(\lambda^2 + 5)}{1} = -(\lambda^2 + 5)$$

άρα,

$(x_1-2)(x_2-2)=-4 \Leftrightarrow x_1x_2-2x_1-2x_2+4=-4 \Leftrightarrow x_1x_2-2(x_1+x_2)+8=0$

$\Leftrightarrow P-2S+8=0 \Leftrightarrow -(\lambda^2+5)-2\lambda+8=0 \Leftrightarrow -\lambda^2-2\lambda+3=0 \Leftrightarrow \lambda=1$ ή $\lambda=-3$

αφού το τριώνυμο $-\lambda^2-2\lambda+3$ έχει $\alpha=-1,\ \beta=-2$ και $\gamma=3$

και διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-2)^2-4(-1)\cdot 3=16$$

και ρίζες

$$\lambda_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\cdot\alpha}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{16}}{2\cdot(-1)}=\frac{2\pm 4}{-2}=\begin{cases}\dfrac{2+4}{-2}=-3\\ \text{ή}\\ \dfrac{2-4}{-2}=1\end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_4667)

1.Να λύσετε την εξίσωση: $x^2-3x-4=0\ \ (1)$.

(Μονάδες 10)

2.Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α , β για τους οποίους ισχύει: $\alpha^2-3\alpha\beta-4\beta^2=0$.

i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\dfrac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1).

(Μονάδες 7)

ii) Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β.

(Μονάδες 8)

Λύση

1. Είναι

$$x^2-3x-4=0\ \ (1)$$

$\alpha=1,\ \beta=-3$ και $\gamma=-4$

με διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-3)^2-4(-4)\cdot 1=25$$

και έχει ρίζες

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{25}}{2\cdot 1}=\frac{3\pm 5}{2}=\begin{cases}\dfrac{3+5}{2}=4\\ \text{ή}\\ \dfrac{3-5}{2}=-1\end{cases}.$$

Συνεπώς $x^2-3x-4=0 \Leftrightarrow x=4$ ή $x=-1$.

2. i) Θέτουμε όπου $x=\dfrac{\alpha}{\beta}$ στο τριώνυμο x^2-3x-4, έχουμε,

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-3\frac{\alpha}{\beta}-4=\frac{\alpha^2}{\beta^2}-3\frac{\alpha\beta}{\beta^2}-\frac{4\beta^2}{\beta^2}=\frac{\alpha^2-3\alpha\beta-4\beta^2}{\beta^2}=\frac{0}{\beta^2}=0,$$

άρα ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2-3x-4=0$.

ii) Αφού ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2-3x-4=0$, από το (α) ερώτημα έχουμε ότι: $\frac{\alpha}{\beta}=4$ ή $\frac{\alpha}{\beta}=-1$.

Όμως οι αριθμοί α,β είναι ομόσημοι, οπότε η περίπτωση $\frac{\alpha}{\beta}=-1$ απορρίπτεται αφού το κλάσμα δύο ομόσημων αριθμών είναι πάντα θετικός αριθμός, άρα δε μπορεί να ισούται με -1. Συνεπώς ισχύει $\frac{\alpha}{\beta}=4 \Leftrightarrow \alpha=4\beta$, δηλαδή ο α είναι τετραπλάσιος του β

ΑΣΚΗΣΗ (4_4680)

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-x+\lambda-\lambda^2=0$ με παράμετρο $\lambda\in R$ (1)

1. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in R$

(Μονάδες 10)

2. Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

(Μονάδες 6)

3. Αν $x_{1,}\ x_2$ είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $0<d(x_{1,}\ x_2)<2$.

(Μονάδες 9)

Λύση

1. Η εξίσωση

$$x^2-x+\lambda-\lambda^2=0$$

έχει

$$\alpha=1,\ \beta=-1 \quad \text{και } \gamma=\lambda-\lambda^2$$

με διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-1)^2-4\cdot1\cdot(\lambda-\lambda^2)1-4(\lambda-\lambda^2)=4\lambda^2-4\lambda+1=(2\lambda-1)^2\geq 0$$

Επομένως αφού $\Delta\geq0$ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in R$.

2. Για να έχει η εξίσωση (1) δύο ρίζες ίσες πρέπει $\Delta=0$.

Έχουμε λοιπόν:

$$\Delta=0\Leftrightarrow(2\lambda-1)^2=0\Leftrightarrow 2\lambda-1=0\Leftrightarrow\lambda=\frac{1}{2}$$

3. Οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2-x+\lambda-\lambda^2=0$$

με $\alpha=1,\ \beta=-1$ και $\gamma=\lambda-\lambda^2$ με διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (2\lambda - 1)^2 \ge 0$$

και ρίζες,

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(2\lambda-1)^2}}{2\cdot 1} = \begin{cases} \dfrac{1+(2\lambda-1)}{2} = \dfrac{1+2\lambda-1}{2} = \dfrac{2\lambda}{2} = \lambda \\ \text{ή} \\ \dfrac{1-(2\lambda-1)}{2} = \dfrac{1-2\lambda+1}{2} = \dfrac{2-2\lambda}{2} = \dfrac{2(1-\lambda)}{2} = 1-\lambda \end{cases}$$

άρα $x = \lambda$ ή $x = 1-\lambda$

Επομένως ,

$$d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2| = |\lambda - (1-\lambda)| = |\lambda - 1 + \lambda| = |2\lambda - 1|$$

Όμως ,

$$0 < d(x_1, x_2) < 2 \Leftrightarrow 0 < |x_1 - x_2| < 2 \Leftrightarrow 0 < |2\lambda - 1| < 2$$

Είναι $|2\lambda - 1| \ge 0$ για κάθε $\lambda \in R$, άρα $|2\lambda - 1| > 0$ για κάθε $\lambda \ne \frac{1}{2}$ αφού είναι

$|2\lambda - 1| = 0$ όταν $2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$.

Επίσης,

$$|2\lambda - 1| < 2 \Leftrightarrow -2 < 2\lambda - 1 < 2 \Leftrightarrow -1 < 2\lambda < 3 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{2}.$$

Άρα $\lambda \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

ΑΣΚΗΣΗ (4_4681)

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$ με παράμετρο $\lambda \in R$ (1)

1. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in R$

(Μονάδες 10)

2. Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

(Μονάδες 6)

3. Αν $\lambda \ne \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $d(x_1, x_2) = \dfrac{1}{d(x_1, x_2)}$.

(Μονάδες 9)

Λύση

1. Η εξίσωση

$$x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$$

έχει $\alpha = 1$, $\beta = -1$ και $\gamma = \lambda - \lambda^2$

και διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-1)^2-4\cdot1\cdot(\lambda-\lambda^2)1-4(\lambda-\lambda^2)=4\lambda^2-4\lambda+1=(2\lambda-1)^2\geq0$$

Επομένως αφού $\Delta\geq0$ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in R$.

2. Για να έχει η εξίσωση (1) δύο ρίζες ίσες πρέπει

$$\Delta=0\Leftrightarrow(2\lambda-1)^2=0\Leftrightarrow\lambda=\frac{1}{2}$$

3. Οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2-x+\lambda-\lambda^2=0$$

με $\alpha=1,\ \beta=-1$ και $\gamma=\lambda-\lambda^2$

και διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(2\lambda-1)^2\geq0$$

με ρίζες,

$$x_{1,2}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(2\lambda-1)^2}}{2\cdot1}=\begin{cases}\dfrac{1+(2\lambda-1)}{2}=\dfrac{1+2\lambda-1}{2}=\dfrac{2\lambda}{2}=\lambda\\ \text{ή}\\ \dfrac{1-(2\lambda-1)}{2}=\dfrac{1-2\lambda+1}{2}=\dfrac{2-2\lambda}{2}=\dfrac{2(1-\lambda)}{2}=1-\lambda\end{cases}$$

άρα $x=\lambda$ ή $x=1-\lambda$

Επομένως

$$d(x_1,x_2)=|x_1-x_2|=|\lambda-(1-\lambda)|=|\lambda-1+\lambda|=|2\lambda-1|$$

Άρα για $\lambda\neq\frac{1}{2}$ έχουμε:

$$d(x_1,x_2)=\frac{1}{d(x_1,x_2)}\Leftrightarrow|2\lambda-1|=\frac{1}{|2\lambda-1|}\Leftrightarrow|2\lambda-1|^2=1\Leftrightarrow|2\lambda-1|=1 \text{ ή } |2\lambda-1|=-1$$

$|2\lambda-1|=-1$ αδύνατη, αφού $|2\lambda-1|\geq0$ για κάθε $\lambda\in R$.

Επομένως

$$|2\lambda-1|=1\Leftrightarrow2\lambda-1=1 \text{ ή } 2\lambda-1=-1.$$

Δηλαδή $\lambda=1$ ή $\lambda=0$.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4819)

Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2-x+\lambda-\lambda^2$ με $\lambda\in R$

1. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in R$.

(Μονάδες 10)

2. Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες;

(Μονάδες 6)

3. Αν $\lambda\neq\frac{1}{2}$ και x_1,x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1<x_2$, τότε:

i) Να δείξετε ότι $x_1 < \dfrac{x_1+x_2}{2} < x_2$.

(Μονάδες 4)

ii) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς

$$f(x_2),\quad f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right),\quad f(x_2+1)$$

(Μονάδες 5)

Λύση

1. Η εξίσωση

$$x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$$

έχει $\alpha = 1,\ \beta = -1$ και $\gamma = \lambda - \lambda^2$

και διακρίνουσα

$$\Delta = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(\lambda-\lambda^2) = 1 - 4(\lambda-\lambda^2) = 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = (2\lambda-1)^2 \geq 0$$

Επομένως αφού $\Delta \geq 0$ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in R$.

2. Για να έχει το τριώνυμο δύο ρίζες ίσες πρέπει

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (2\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

3. i) Έχουμε,

$$x_1 < \frac{x_1+x_2}{2} < x_2 \Leftrightarrow 2x_1 < x_1 + x_2 < 2x_2,$$

που προφανώς ισχύει, αφού

$2x_1 < x_1 + x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$ και $x_1 + x_2 < 2x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$ που ισχύει από υπόθεση.

ii) Αφού x_1, x_2 είναι δύο άνισες ρίζες, το πρόσημο του τριωνύμου είναι:

- $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ (ετερόσημο του $\alpha = 1 > 0$)
- $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ (ομόσημο του α)
- και $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Άρα αφού

$$x_1 < \frac{x_1+x_2}{2} < x_2 \Rightarrow f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < 0$$

Επίσης

$$x_2 + 1 > x_2 \Rightarrow (x_2+1) \in (x_2, +\infty) \Rightarrow f(x_2+1) > 0$$

Επομένως

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < f(x_2) = 0 < f(x_2+1)$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_4833)

Μία υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε, όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x, να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που δίνεται από τη σχέση: $\lambda=(2x+5)^2-8x \quad (1)$

1. Αν ο εισαγόμενος αριθμός είναι το -5, ποιος είναι ο εξαγόμενος;

(Μονάδες 6)

2. Αν ο εξαγόμενος αριθμός είναι το 20, ποιος μπορεί να είναι ο εισαγόμενος;

(Μονάδες 6)

3. Να γράψετε τη σχέση (1) στη μορφή $4x^2+12x+(25-\lambda)=0$ και στη συνέχεια:

   i) να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός x, ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5.

   (Μονάδες 6)

   ii) να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του εξαγόμενου αριθμού λ.

   (Μονάδες 7)

Λύση

1. Αν ο λοιπόν ο εισαγόμενος αριθμός $x=-5$ τότε:

$$\lambda=(2(-5)+5)^2-8(-5)=(-5)^2+40=65.$$

2. Αν ο εξαγόμενος αριθμός $\lambda=20$, τότε

$$20=(2x+5)^2-8x \Leftrightarrow 4x^2+12x+5=0.$$

Το τριώνυμο $4x^2+12x+5$ έχει $\alpha=4$, $\beta=12$ και $\gamma=5$, με διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=12^2-4\cdot4\cdot5=144-80=64>0$$

και συνεπώς η εξίσωση $4x^2+12x+5=0$ έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες, τις:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\cdot\alpha}=\frac{-12\pm\sqrt{64}}{2\cdot4}=\frac{-12\pm8}{8}\Leftrightarrow\left\{x_1=-\frac{1}{2} \text{ ή } x_2=-\frac{5}{2}\right\}$$

3. Η σχέση (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$\lambda=(2x+5)^2-8x \Leftrightarrow \lambda=4x^2+12x+25 \Leftrightarrow 4x^2+12x+(25-\lambda)=0$$

i) Αν $\lambda=5$ τότε πράγματι η εξίσωση γίνεται

$$4x^2+12x+20=0 \Leftrightarrow x^2+3x+5=0$$

με $\alpha=1$, $\beta=3$ και $\gamma=5$ και διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=3^2-4\cdot1\cdot5=-11<0$$

δηλαδή είναι αδύνατη (δηλαδή δεν επαληθεύεται για καμία τιμή του εισαγόμενου αριθμού x).

ii) Για να επαληθεύεται για κάποια τιμή του εισαγόμενου αριθμού x η σχέση

$$4x^2+12x+(25-\lambda)=0$$

(δηλαδή να έχει πραγματικές ρίζες η εξίσωση), πρέπει $\Delta\geq0$.

Αφού $\alpha=4$, $\beta=12$ και $\gamma=25-\lambda$ και διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 12^2 - 4\cdot 4(25-\lambda) = 144 - 16(25-\lambda) = -256 + 16\lambda$$

όμως, $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -256 + 16\lambda \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq 16$

ΑΣΚΗΣΗ (4_4835)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \beta x + \gamma = 0$ με β, γ πραγματικούς αριθμούς.

Αν η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες για τις οποίες ισχύει $|x_1 + x_2| = 4$, τότε:

1. Να βρείτε τις δυνατές τιμές του β.

(Μονάδες 6)

2. Να αποδείξετε ότι $\gamma < 4$.

(Μονάδες 7)

3. Δίνεται επιπλέον η εξίσωση $x^2 - \beta|x| + 3 = 0$ (1)

Να εξετάσετε για ποια από τις τιμές του β που βρήκατε στο (α) ερώτημα, η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 12)

Λύση

1. Έχουμε, $x^2 - \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha = 1$, $\beta = -\beta$ και $\gamma = \gamma$, από τους τύπους Vieta παίρνουμε,

$$|x_1 + x_2| = 4 \Leftrightarrow |S| = 4 \Leftrightarrow \left|\frac{-(-\beta)}{1}\right| = 4 \Leftrightarrow |\beta| = 4.$$

Άρα $\beta = 4$ ή $\beta = -4$.

2. Αφού η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες, έχουμε

$$\Delta > 0 \Rightarrow (-\beta)^2 - 4\gamma > 0 \Rightarrow 4\gamma < \beta^2 \Rightarrow 4\gamma < \beta^2 \Rightarrow 4\gamma < |\beta|^2 \Rightarrow 4\gamma < 16 \Rightarrow \gamma < 4$$

3. Είναι,

$$x^2 - \beta|x| + 3 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 - \beta|x| + 3 = 0.$$

Αν θέσουμε $|x| = \omega$ η εξίσωση γίνεται $\omega^2 - \beta\omega + 3 = 0$.

Για $\beta = 4$ έχουμε $\omega^2 - 4\omega + 3 = 0$, άρα $\alpha = 1$, $\beta = -4$ και $\gamma = 3$ και διακρίνουσα,

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 3 = 4$$

με ρίζες,

$$\omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2\cdot 1} = \begin{cases} \dfrac{4+2}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ \text{ή} \\ \dfrac{4-2}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

άρα $\omega = 1$ ή $\omega = 3$, οπότε

$$|x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \text{ ή } |x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

Όμοια για $\beta = -4$ έχουμε

$$\omega^2 + 4\omega + 3 = 0 \ ,$$

όπου $\alpha = 1,\ \beta = 4$ και $\gamma = 3$ και διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4^2 - 4\cdot 1\cdot 3 = 4$$

με ρίζες

$$\omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2\cdot 1} = \begin{cases} \dfrac{-4+2}{2} = \dfrac{2}{2} = -1 \\ \text{ή} \\ \dfrac{-4-2}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3 \end{cases} \quad \text{άρα } \omega = -1 \text{ ή } \omega = -3$$

Άρα $|x| = -1$ αδύνατη ή $|x| = -3$ αδύνατη.

Επομένως για $\beta = -4$ η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4836)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x + 1 = 0 \ (1)$ με παράμετρο $\lambda \in R$.

1. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 8)

2. Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1), τότε και ο αριθμός $\dfrac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα της εξίσωσης.

(Μονάδες 5)

3. Για $\lambda > 2$, να αποδείξετε ότι:

   i) Οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) είναι αριθμοί θετικοί.

   ii) $x_1 + 4x_2 \geq 4$.

(Μονάδες 12)

Λύση

1. Για να έχει η εξίσωση

$$x^2 - \lambda x + 1 = 0 \quad (1)$$

ρίζες πραγματικές και άνισες, θα πρέπει $\Delta > 0$.

Είναι: $\alpha = 1,\ \beta = -\lambda$ και $\gamma = 1$ με διακρίνουσα,

$$\Delta = (-\lambda)^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = \lambda^2 - 4$$

όμως $\Delta > 0$, οπότε,

$$\lambda^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 > 4 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2} > \sqrt{4} \Leftrightarrow |\lambda| > 2 \Leftrightarrow \lambda < -2 \text{ ή } \lambda > 2 .$$

2. Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1), τότε επαληθεύει τη σχέση (1), δηλαδή $\rho^2-\lambda\rho+1=0$. (2)

Ο αριθμός ρ είναι προφανώς διάφορος του μηδενός, γιατί διαφορετικά θα είχαμε $0-0+1=0 \Leftrightarrow 1=0$ το οποίο είναι άτοπο.

Ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ επαληθεύει τη σχέση (1), αφού:

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)^2-\lambda\left(\frac{1}{\rho}\right)+1=0 \Leftrightarrow \frac{1}{\rho^2}-\frac{\lambda}{\rho}+1=0 \Leftrightarrow \rho^2-\lambda\rho+1=0 \text{ που ισχύει από την } (2)$$

3. i) Από τους τύπους Vieta παίρνουμε:

$$x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}=\lambda \text{ και } x_1x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=1$$

Επομένως για $\lambda>2$ έχουμε $x_1+x_2>0$ και $x_1x_2>0$, δηλαδή οι ρίζες x_1,x_2 είναι ομόσημοι αριθμοί με άθροισμα θετικό.

Άρα οι ρίζες x_1,x_2 της εξίσωσης (1) είναι αριθμοί θετικοί

ii) Αφού x_1,x_2 είναι αριθμοί θετικοί, έχουμε:

$$x_1+4x_2\ge 4 \Leftrightarrow (x_1+4x_2)^2\ge 16 \Leftrightarrow x_1^2+8x_1x_2+16x_2^2\ge 16 \quad (3)$$

Όμως $x_1x_2=1$, άρα η (3) γράφεται ισοδύναμα

$$x_1^2+8x_1x_2+16x_2^2\ge 16x_1x_2 \Leftrightarrow x_1^2-8x_1x_2+16x_2^2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1-4x_2)^2\ge 0,$$

που ισχύει για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x_1,x_2.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4857)

Δίνεται η εξίσωση

$$\alpha\beta x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha\beta=0$$

όπου α,β δύο θετικοί αριθμοί.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι: $\Delta=(\alpha^2-\beta^2)^2$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των αριθμών α και β , ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες άνισες , τις οποίες να προσδιορίσετε , ως συνάρτηση των α,β

(Μονάδες 10)

γ) Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_1=\frac{\alpha}{\beta}$ και $x_2=\frac{\beta}{\alpha}$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$(1+x_1)(1+x_2)\ge 0$$

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Χρησιμοποιώντας τον τύπο της διακρίνουσας έχουμε:

$$\Delta = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha\beta\alpha\beta = \alpha^4 + \beta^4 + 2\alpha^2\beta^2 - 4\alpha^2\beta^2 = \alpha^4 + \beta^4 - 2\alpha^2\beta^2 = (\alpha^2 - \beta^2)^2$$

β) Η δευτεροβάθμια εξίσωση θα έχει δύο ρίζες άνισες, αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (\alpha^2 - \beta^2)^2 > 0 \Leftrightarrow (\alpha^2 - \beta^2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 \neq 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) \neq 0 \quad (1)$$

Από υπόθεση $\alpha, \beta > 0$, άρα και $\alpha + \beta > 0$

Επομένως από την (1) ισοδύναμα έχουμε: $\alpha - \beta \neq 0$, δηλαδή $\alpha \neq \beta$ που αποτελεί και τη ζητούμενη σχέση μεταξύ των θετικών αριθμών α, β

Οι ρίζες της εξίσωσης θα είναι:

$$x_{1,2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 \pm (\alpha^2 - \beta^2)}{2\alpha\beta} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{2\alpha^2}{2\alpha\beta} = \dfrac{\alpha}{\beta} \\ \text{ή} \\ x_2 = \dfrac{2\beta^2}{2\alpha\beta} = \dfrac{\beta}{\alpha} \end{cases}$$

γ)Έχουμε,

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \geq 4 \Leftrightarrow (1 + \frac{\alpha}{\beta})(1 + \frac{\beta}{\alpha}) \geq 4 \Leftrightarrow 1 + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha\beta}{\beta\alpha} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + 2 \geq 4 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} \geq 2 \quad (2)$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη τις ανίσωσης με $\alpha\beta > 0$, οπότε η (2) ισοδύναμα γράφεται: $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 \geq 0$, η οποία προφανώς ισχύει για κάθε $\alpha, \beta > 0$

Μέθοδος: *Όταν θέλουμε να αποδείξουμε μια ανισότητα , υποθέτουμε ότι ισχύει και με ισοδύναμους μετασχηματισμούς (μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος, δημιουργούμε γνωστές ταυτότητες, παραγοντοποιούμε κ.α.) καταλήγουμε σε σχέση που ισχύει , οπότε ισοδύναμα θα ισχύει και η αρχική ανισότητα.*

ΑΣΚΗΣΗ (4_4903)

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή.

(Μονάδες 8)

β) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης συναρτήσει του λ

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Από τον τύπο της διακρίνουσας δευτεροβάθμιας εξίσωσης , προκύπτει:

$$\Delta = (2\lambda - 1)^2 - 4\lambda(\lambda - 1) = 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 - 4\lambda^2 + 4\lambda = 1 > 0$$

ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή.

β) Είναι

$$x_{1,2}=\frac{-(2\lambda-1)\pm\sqrt{1}}{2\lambda}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{-2\lambda+1+1}{2\lambda}=\dfrac{-2\lambda+2}{2\lambda}=\dfrac{2(-\lambda+1)}{2\lambda}=\dfrac{-\lambda+1}{\lambda}\\ \text{ή}\\ x_2=\dfrac{-2\lambda+1-1}{2\lambda}=\dfrac{-2\lambda}{2\lambda}=-1\end{cases}$$

γ) Γνωρίζουμε ότι απόσταση δύο αριθμών x_1,x_2 στον άξονα των πραγματικών αριθμών , ορίζεται ως η απόλυτη τιμή της διαφοράς τους.

Επομένως θα πρέπει να βρούμε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$, ώστε να ισχύει:

$$|x_1-x_2|=2\Leftrightarrow\left|\frac{-\lambda+1}{\lambda}-(-1)\right|=2\Leftrightarrow\left|\frac{-\lambda+1}{\lambda}+1\right|=2\Leftrightarrow\left|\frac{-\lambda+1}{\lambda}+\frac{\lambda}{\lambda}\right|=2\Leftrightarrow\left|\frac{1}{\lambda}\right|=2\Leftrightarrow$$

$$\frac{|1|}{|\lambda|}=2\Leftrightarrow\frac{1}{|\lambda|}=2\Leftrightarrow|\lambda|=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=\dfrac{1}{2}\\ \text{ή}\\ \lambda=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Μέθοδος*: Όταν μας ζητείται να δείξουμε ότι μια παράσταση είναι σταθερή , αρκεί να την υπολογίσουμε και να δείξουμε ότι ισούται με σταθερό αριθμό , ανεξάρτητη δηλαδή από οποιαδήποτε παράμετρο υπάρχει στο πρόβλημα.*

ΑΣΚΗΣΗ (4_4957)

Δίνεται το τριώνυμο

$$\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$

(Μονάδες 8)

β) Αν x_1,x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda\neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών.

(Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda>0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

(Μονάδες 6)

δ) Για κάθε $\lambda>0$, αν x_1,x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, να αποδείξετε ότι

$$\sqrt{x_1x_2}\le\frac{x_1+x_2}{2}$$

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

Τράπεζα θεμάτων – lisari team

α) Από τον τύπο της διακρίνουσας , προκύπτει:

$$\Delta=(\lambda^2+1)^2-4\cdot\lambda\cdot\lambda=\lambda^4+2\lambda^2+1-4\lambda^2=\lambda^4-2\lambda^2+1=(\lambda^2-1)^2\geq 0\ ,$$

για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$, οπότε το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\neq 0$

β) Εφαρμόζοντας τους τύπους Vieta για το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών ενός τριωνύμου, για $\lambda\neq 0$ έχουμε:

$$S=x_1+x_2=\frac{-\beta}{\alpha}=\frac{-\left[-(\lambda^2+1)\right]}{\lambda}=\frac{\lambda^2+1}{\lambda}$$

και

$$P=x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\lambda}{\lambda}=1$$

γ) Αφού το γινόμενο των ριζών x_1,x_2 του τριωνύμου είναι $P=1>0$ οι ρίζες του θα είναι ομόσημες. Το αν θα είναι θετικές ή αρνητικές εξαρτάται από το άθροισμά τους S

Είναι $\lambda^2+1>0$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ και $\lambda>0$

Άρα $S=\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda}>0$, που σημαίνει ότι οι ρίζες του τριωνύμου θα είναι θετικές.

δ) Είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα ότι για $\lambda>0$ είναι

$$S=x_1+x_2=\frac{\lambda^2+1}{\lambda}>0 \text{ και } P=x_1\cdot x_2=1>0$$

Έχουμε ,

$$\sqrt{x_1\cdot x_2}\leq\frac{x_1+x_2}{2}\Leftrightarrow 2\sqrt{x_1\cdot x_2}\leq x_1+x_2\Leftrightarrow 2\sqrt{1}\leq\frac{\lambda^2+1}{\lambda}\Leftrightarrow 2\leq\frac{\lambda^2+1}{\lambda}\ (1)$$

Όμως $\lambda>0$, άρα η (1) ισοδύναμα γίνεται:

$$2\lambda\leq\lambda^2+1\Leftrightarrow\lambda^2-2\lambda+1\geq 0\Leftrightarrow(\lambda-1)^2\geq 0\ ,$$

που προφανώς ισχύει για κάθε $\lambda>0$

ΑΣΚΗΣΗ (4_4962)

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2-\left(\lambda^2+1\right)x+\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$

(Μονάδες 8)

β) Αν x_1,x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda\neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών.

(Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda>0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

(Μονάδες 6)

δ) Αν $0<\lambda\neq 1$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να συγκρίνεται τους αριθμούς $\frac{x_1+x_2}{2}$ και 1

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Από τον τύπο της διακρίνουσας , προκύπτει:

$$\Delta=(\lambda^2+1)^2-4\cdot\lambda\cdot\lambda=\lambda^4+2\lambda^2+1-4\lambda^2=\lambda^4-2\lambda^2+1=(\lambda^2-1)^2\geq 0 ,$$

για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$, οπότε το τριώνυμο ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\neq 0$

β) Εφαρμόζοντας τους τύπους Vieta για το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών ενός τριωνύμου, για $\lambda\neq 0$ έχουμε:

$$S=x_1+x_2=\frac{-\beta}{\alpha}=\frac{-\left[-(\lambda^2+1)\right]}{\lambda}=\frac{\lambda^2+1}{\lambda}$$

και

$$P=x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\lambda}{\lambda}=1$$

γ) Αφού το γινόμενο των ριζών x_1, x_2 του τριωνύμου είναι $P=1>0$ οι ρίζες του θα είναι ομόσημες. Το αν θα είναι θετικές ή αρνητικές εξαρτάται από το άθροισμά τους S

Είναι $\lambda^2+1>0$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ και $\lambda>0$, άρα $S=\frac{\lambda^2+1}{\lambda}>0$, που σημαίνει ότι οι ρίζες του τριωνύμου θα είναι θετικές.

δ) Έστω

$$\frac{x_1+x_2}{2}>1\Leftrightarrow x_1+x_2>2\Leftrightarrow S>2\Leftrightarrow\frac{\lambda^2+1}{\lambda}>2 \quad (1)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (1) με $\lambda>0$ ισοδύναμα έχουμε:

$$(1)\Leftrightarrow\lambda\frac{\lambda^2+1}{\lambda}>2\lambda\Leftrightarrow\lambda^2+1>2\lambda\Leftrightarrow\lambda^2-2\lambda+1>0\Leftrightarrow(\lambda-1)^2>0 ,$$

που ισχύει για κάθε $0<\lambda\neq 1$

Οπότε ο αριθμός $\frac{x_1+x_2}{2}$ (όπου x_1, x_2 οι ρίζες του αρχικού τριωνύμου) είναι μικρότερος του αριθμού 1

Μέθοδος: *Όταν θέλουμε να συγκρίνουμε δύο παραστάσεις* A, B *, τότε υποθέτουμε για παράδειγμα ότι* $A>B$ *και με ισοδυναμίες καταλήγουμε είτε σε κάτι που ισχύει, οπότε ο αρχικός ισχυρισμός μας είναι αληθής , δηλαδή* $A>B$ *, είτε σε κάτι που δεν ισχύει , οπότε ο αρχικός ισχυρισμός μας θα είναι ψευδής, δηλαδή* $A<B$

ΑΣΚΗΣΗ (4_4970)

Δίνεται η εξίσωση: $2x^2+\lambda x-36=0$ (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι , για κάθε τιμή του λ , η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 8)

β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία από τις ρίζες της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός ρ

i) Να δείξετε ότι ο αριθμός $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης

$$2x^2-\lambda x-36=0$$

(Μονάδες 7)

ii) Να δείξετε ότι:

- $\rho\neq 0$ και
- ο αριθμός $\dfrac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης: $-36x^2+\lambda x+2=0$

(Μονάδες 4+6=10)

ΛΥΣΗ

α) Εφαρμόζοντας τον τύπο της διακρίνουσας στην εξίσωση (1) έχουμε:

$$\Delta=\lambda^2-4\cdot 2\cdot(-36)=\lambda^2+288>0$$

για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, οπότε η δευτεροβάθμια εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές ρίζες και άνισες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$

β) i) Αφού ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1) θα την επαληθεύει, δηλαδή θα ισχύει:

$$2\rho^2+\lambda\cdot\rho-36=0\Leftrightarrow 2(-\rho)^2-\lambda(-\rho)-36=0 \ ,$$

που σημαίνει ότι ο αριθμός $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης $2x^2-\lambda x-36=0$

ii) Έχουμε,

● Ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1) , άρα όπως είπαμε θα την επαληθεύει. Αν υποθέσουμε ότι $\rho=0$, τότε θα ισχύει: $2\cdot 0^2+\lambda\cdot 0-36=0\Leftrightarrow -36=0$ που είναι άτοπο. Άρα $\rho\neq 0$

● Αφού ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1) θα ισχύει $2\rho^2+\lambda\cdot\rho-36=0$ (2)

Δείξαμε ότι $\rho\neq 0$, οπότε διαιρώντας και τα δύο μέλη της (2) με $\rho^2\neq 0$, προκύπτει:

$$\frac{2\rho^2+\lambda\cdot\rho-36}{\rho^2}=\frac{0}{\rho^2}\Leftrightarrow\frac{2\rho^2}{\rho^2}+\frac{\lambda\cdot\rho}{\rho^2}-\frac{36}{\rho^2}=0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{36}{\rho^2}+\frac{\lambda}{\rho}+2=0\Leftrightarrow -36\left(\frac{1}{\rho}\right)^2+\lambda\left(\frac{1}{\rho}\right)+2=0$$

που σημαίνει ότι ο αριθμός $\dfrac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $-36x^2+\lambda x+2=0$

ΑΣΚΗΣΗ (4_4975)

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4-8x^2-9=0$

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

Μονάδες 10

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση: $x^4+\beta x^2+\gamma=0$ (1) με παραμέτρους $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$

Να δείξετε ότι:

Αν $\gamma<0$ τότε:

i) $\beta^2-4\gamma>0$

Μονάδες 3

ii) η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 12

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) Θέτουμε $x^2=\omega\geq 0$, τότε η εξίσωση $x^4-8x^2-9=0$ γίνεται $\omega^2-8\omega-9=0$

Η διακρίνουσα είναι

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=64+36=100>0\ ,$$

επομένως η εξίσωση έχει δυο ρίζες διαφορετικές.

Αν ω_1, ω_2 οι ρίζες της εξίσωσης, ισχύει $\omega_1\cdot\omega_2=-9<0$ συνεπώς ω_1, ω_2 ετερόσημες.

Έστω $\omega_1>0$ και $\omega_2<0$ απορρίπτεται ($x^2=\omega\geq 0$), τότε $x^2=\omega_1\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\omega_1}$

Άρα η διτετράγωνη εξίσωση έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες.

Ανάλογο συμπέρασμα προκύπτει αν $\omega_1<0$ και $\omega_2>0$

Για τον υπολογισμό των ριζών έχουμε:

Η εξίσωση $\omega^2-8\omega-9=0$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=64+36=100$$

Και ρίζες

$$\omega_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{8\pm 10}{2}$$

άρα,

$$\omega_1=\frac{8+10}{2}=9 \text{ και } \omega_2=\frac{8-10}{2}=-1 \text{ απορρίπτεται}$$

Συνεπώς $\omega=9\Leftrightarrow x^2=9\Leftrightarrow x=\pm 3$

Άρα η εξίσωση $x^4-8x^2-9=0$ έχει ρίζες, τις 3 και – 3.

β) i) Ισχύει

$$\gamma<0\Leftrightarrow -4\gamma>0 \text{ και } \beta^2\geq 0$$

Προσθέτοντας τις παραπάνω ανισότητες κατά μέλη προκύπτει

$$\beta^2-4\gamma>0$$

ii) Θέτουμε $x^2 = \omega \geq 0$, τότε η εξίσωση $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$, γίνεται $\omega^2 + \beta\omega + \gamma = 0$ με διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\gamma > 0$$

οπότε η εξίσωση $\omega^2 + \beta\omega + \gamma = 0$ έχει δύο πραγματικές ρίζες ω_1, ω_2.

Επειδή ισχύει $\omega_1 \cdot \omega_2 = \gamma < 0$ οι ρίζες είναι ετερόσημες. Έστω $\omega_1 > 0$ και $\omega_2 < 0$ απορρίπτεται (αφού $x^2 = \omega \geq 0$), τότε $x^2 = \omega_1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\omega_1}$

Ανάλογο συμπέρασμα προκύπτει αν $\omega_1 < 0$ και $\omega_2 > 0$

Άρα η εξίσωση $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4992)

α) Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο $\Pi = 34$ cm και διαγώνιο $\delta = 13$ cm

i) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = 60\ cm^2$

Μονάδες 5

ii) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που να έχει ρίζες τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

Μονάδες 5

iii) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

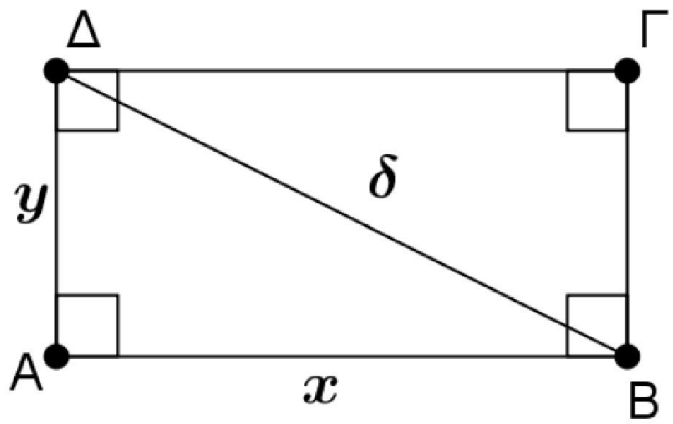
Μονάδες 5

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν $40\ cm^2$ και διαγώνιο 8 cm

Μονάδες 10

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) i) Έστω x, y οι διαστάσεις του ορθογωνίου



Τότε η περίμετρός του είναι $\Pi = 2x + 2y$ και το εμβαδόν του $E = xy$

άρα

$$2x + 2y = 34 \Leftrightarrow x + y = 17$$

Από Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ προκύπτει

$$x^2 + y^2 = \delta^2 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 2xy = 13^2 \Leftrightarrow 17^2 - 2xy = 169 \Leftrightarrow 289 - 169 = 2xy \Leftrightarrow xy = 60$$

Άρα το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = 60\ cm^2$

ii) Αφού για τις πλευρές του ορθογωνίου ισχύει $x + y = 17$ και $xy = 60$
η εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου είναι η

$$\omega^2 - 17\omega + 60 = 0$$

iii) Η εξίσωση $\omega^2 - 17\omega + 60 = 0$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 289 - 240 = 49$$

Και ρίζες

$$\omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{17 \pm 7}{2}$$

άρα,

$$\omega_1 = \frac{17+7}{2} = 12 \text{ και } \omega_2 = \frac{17-7}{2} = 5$$

Άρα τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου είναι 12 cm και 5 cm.
β) Έστω x, y οι διαστάσεις του ορθογωνίου, τότε το εμβαδόν του $E = xy$
άρα $xy = 40$.
Από Πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει,

$$x^2 + y^2 = \delta^2 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 2xy = 8^2 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 80 = 64 \Leftrightarrow (x+y)^2 = 144 \Leftrightarrow x + y = 12$$

Έχουμε λοιπόν:

$$x + y = 12 \text{ και } xy = 40$$

η εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου είναι η
$\omega^2 - 12\omega + 40 = 0$ αδύνατη (αφού έχει διακρίνουσα $\Delta = 144 - 160 = -16 < 0$)
Άρα δεν υπάρχει ορθογώνιο με εμβαδόν $40\ cm^2$ και διαγώνιο $8\ cm^2$

ΑΣΚΗΣΗ (4_5317)

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$
Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

Μονάδες 10

β) Να κατασκευάσετε μια διτετράγωνη εξίσωση της μορφής

$$x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$$

η οποία να έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες. Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας λύνοντας την εξίσωση που κατασκευάσατε.

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) Θέτουμε $x^2 = \omega \geq 0$, τότε η εξίσωση $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$, γίνεται $\omega^2 - 9\omega + 20 = 0$
Αν ω_1, ω_2 οι ρίζες της τελευταίας ισχύει

$$\omega_1 + \omega_2 = 9 > 0 \text{ και } \omega_1 \cdot \omega_2 = 20 > 0$$

συνεπώς ω_1, ω_2 θετικές (με $\omega_1 \neq \omega_2$)
Τότε

$$x^2=\omega_1 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\omega_1} \text{ ή } x^2=\omega_2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\omega_2}$$

Άρα η διτετράγωνη εξίσωση έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.
Για τον υπολογισμό των ριζών έχουμε:
Η εξίσωση $\omega^2-9\omega+20=0$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=81-80=1$$

Και ρίζες

$$\omega_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{9\pm1}{2}$$

άρα,

$$\omega_1=\frac{9+1}{2}=5 \text{ και } \omega_2=\frac{9-1}{2}=4$$

Συνεπώς

$$x^2=5 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{5} \text{ ή } x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm2$$

Άρα η εξίσωση $x^4-9x^2+20=0$ έχει τις $-\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$, -2 και 2

β) Για να έχει η διτετράγωνη εξίσωση δύο μόνο πραγματικές ρίζες θα πρέπει το τριώνυμο που προκύπτει (κάνοντας την αντικατάσταση $x^2=\omega\geq0$) να έχει μια θετική και μια αρνητική ρίζα, αφού η αρνητική ρίζα απορρίπτεται και η θετική δίνει δύο ρίζες.

Έστω ότι η εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού $\omega^2+\beta\omega+\gamma=0$ (που προκύπτει κάνοντας την αντικατάσταση $x^2=\omega\geq0$) έχει ρίζες τις $\omega_1=9$ και $\omega_2=-2$

Τότε

$$\omega_1+\omega_2=-\beta \Leftrightarrow 9-2=-\beta \Leftrightarrow \beta=-7 \text{ και } \omega_1\cdot\omega_2=\gamma \Leftrightarrow 9\cdot(-2)=\gamma \Leftrightarrow \gamma=-18$$

Άρα η διτετράγωνη που έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες είναι η

$$x^4-7x^2-18=0$$

Πράγματι, θέτουμε $x^2=\omega\geq0$ τότε η εξίσωση $x^4-7x^2-18=0$ γίνεται $\omega^2-7\omega-18=0$ με διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=49+72=121$$

Και ρίζες

$$\omega_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{7\pm11}{2}$$

άρα

$$\omega_1=\frac{7+11}{2}=9 \text{ και } \omega_2=\frac{7-11}{2}=-2 \text{ απορρίπτεται}$$

Συνεπώς

$$x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm3$$

Άρα η εξίσωση $x^4-7x^2-18=0$ έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

ΑΣΚΗΣΗ (4_6223)
Δίνεται η εξίσωση: $x^2-5\lambda x-1=0$ με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$
α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Μονάδες 7

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε:

i) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 \cdot x_2)^{24} = 0$$

Μονάδες 9

ii) Για $\lambda = 1$ να βρείτε την τιμή της παράστασης: $x_1^2 x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 x_2^2$

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση $x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 25\lambda^2 + 4 > 0 \text{ (αφού } \lambda^2 \geq 0 \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R})$$

Άρα η εξίσωση $x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

β) i) Αφού x_1, x_2 οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης ισχύει

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-5\lambda}{1} = 5\lambda \text{ και } x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-1}{1} = -1$$

Ισχύει

$$(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 \cdot x_2)^{24} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(5\lambda)^2 - 18 - 7(-1)^{24} = 0 \Leftrightarrow$$

$$25\lambda^2 - 18 - 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$$25\lambda^2 = 25 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$$

ii) Για $\lambda = 1$ ισχύει

$$x_1 + x_2 = 5\lambda = 5 \text{ και } x_1 \cdot x_2 = -1$$

Τότε

$$x_1^2 x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 x_2^2 = x_1 x_2 (x_1 + x_2) - 3(x_1 + x_2) + 4 = -1 \cdot 5 - 3 \cdot 5 + 4 = -16$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_6224)

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)x + 16 = 0, \text{ με } \lambda \in (0, 4)$$

α) Να βρείτε:

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ.

(Μονάδες 6)

ii) το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 16$, για κάθε $\lambda \in (0, 4)$.

(Μονάδες 7)

γ) Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Εξετάζουμε αρχικά ότι η εξίσωση που μας δίνεται έχει διακρίνουσα μη αρνητική ώστε να έχει δυο ρίζες.

Έχουμε λοιπόν: $\alpha=1$, $\beta=-4\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)$ και $\gamma=16$, οπότε:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=16\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)^2-4\cdot1\cdot16=16\left(\lambda^2+2\lambda\cdot\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}-4\right)=16\left(\lambda^2-2+\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

δηλαδή $\Delta=16\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)^2\geq 0$ οπότε έχει 2 πραγματικές ρίζες τις x_1,x_2.

Επειδή ακόμη τα x_1,x_2 είναι πλευρές γεωμετρικού σχήματος πρέπει $x_1>0,\ x_2>0$ δηλαδή πρέπει να είναι ομόσημες και να έχουν άθροισμα θετικό άρα το γινόμενο τους $x_1x_2>0$ και $x_1+x_2>0$

Σύμφωνα με τους τύπους του Vieta είναι $P=x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=16>0$ ισχύει, και

$S=x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}=4\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)>0$ που ισχύει αφού $\lambda\in(0,4)$

i) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $\Pi=2x_1+2x_2=2(x_1+x_2)$.

και επειδή από τον τύπο του Vieta έχουμε:

$$S=x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}=4\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right) \text{ και}$$

είναι :

$$\Pi=2(x_1+x_2)=2\cdot4\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)=8\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right),\lambda\in(0,4)$$

ii. Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι: $E=x_1\cdot x_2$ και επειδή από τον τύπο του Vieta έχουμε:

$$P=x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=16 \text{ είναι } E=16$$

β) Ισοδύναμα έχουμε:

$$\Pi\geq16\Leftrightarrow 8\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)\geq16\Leftrightarrow\lambda+\frac{1}{\lambda}\geq2 \text{ (και επειδή } \lambda>0)$$

$$\Leftrightarrow\lambda^2-2\lambda+1\geq0\Leftrightarrow(\lambda-1)^2\geq0 \text{ που ισχύει.}$$

γ) Η περίμετρος Π γίνεται ελάχιστη όταν:

$$\Pi=16\Leftrightarrow8\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)=16\Leftrightarrow\lambda+\frac{1}{\lambda}=2\Leftrightarrow\lambda^2-2\lambda+1=0\Leftrightarrow(\lambda-1)^2=0\Leftrightarrow\lambda=1$$

Για $\lambda=1$ η αρχική εξίσωση γίνεται $x^2-8x+16=0\Leftrightarrow(x-4)^2=0\Leftrightarrow\boxed{x=4}$

Η εξίσωση τότε έχει δύο ρίζες ίσες δηλαδή $x_1=x_2=4$, που σημαίνει ότι οι πλευρές του ορθογωνίου είναι ίσες, επομένως έχουμε ελάχιστη περίμετρο όταν το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

ΑΣΚΗΣΗ (4_6226)

Τράπεζα θεμάτων – lisari team

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2-2x+\lambda(2-\lambda)=0, \text{ με } \lambda\in(0,2)$$

α) Να βρείτε:

i) Την περίμετρο Π του ορθογωνίου.

(Μονάδες 6)

ii) Το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου συναρτήσει του λ.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $E\le 1$, για κάθε $\lambda\in(0,2)$.

(Μονάδες 7)

γ) Για ποια τιμή του λ το εμβαδόν E του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Εξετάζουμε αρχικά ότι η εξίσωση που μας δίνεται έχει διακρίνουσα μη αρνητική ώστε να έχει δυο ρίζες.

Έχουμε λοιπόν: $\alpha=1$, $\beta=-2$ και $\gamma=\lambda(2-\lambda)$, οπότε:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=4-4\lambda(2-\lambda)=4-8\lambda+4\lambda^2=4\lambda^2-8\lambda+4=(2\lambda-1)^2\ge 0$$

και άρα έχει 2 πραγματικές ρίζες τις x_1, x_2.

Πρέπει επίσης, επειδή x_1, x_2 είναι πλευρές ορθογωνίου παραλληλογράμμου να είναι θετικές, άρα ομόσημες και με άθροισμα θετικό, δηλαδή: $x_1, x_2>0$, και

$x_1+x_2>0 \Leftrightarrow 2>0$, που ισχύει ,

αλλά και

$x_1x_2>0 \Rightarrow \lambda(2-\lambda)>0$ που ισχύει αφού $\lambda\in(0,2)\Leftrightarrow 0<\lambda<2$.

i) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι

$$\Pi=2x_1+2x_2=2(x_1+x_2).$$

Σύμφωνα με το τύπο του Vieta έχουμε: $x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}=2$ επομένως :

$$\Pi=2(x_1+x_2)=2\cdot 2=4.$$

ii) Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E=x_1\cdot x_2$ και σύμφωνα με το τύπο του Vieta είναι: $x_1\cdot x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}=\lambda(2-\lambda)$ άρα

$$E=\lambda(2-\lambda),\ \ \lambda\in(0,\ 2)$$

β) Εργαζόμαστε ισοδύναμα και έχουμε :

$$E\le 1\Leftrightarrow \lambda(2-\lambda)\le 1\Leftrightarrow 2\lambda-\lambda^2\le 1\Leftrightarrow 0\le \lambda^2-2\lambda+1\Leftrightarrow \lambda^2-2\lambda+1\ge 0\Leftrightarrow(\lambda-1)^2\ge 0$$

Η τελευταία σχέση ισχύει, οπότε ισχύει και η ζητούμενη ανισότητα.

γ) Το εμβαδόν E γίνεται μέγιστο, όταν:

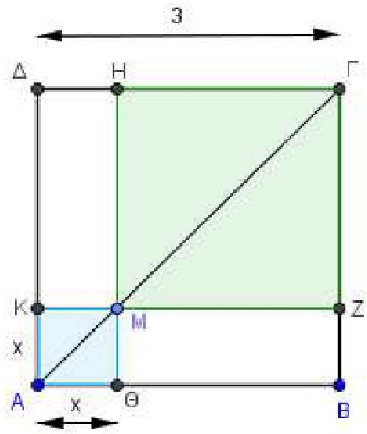
$$E=1\Leftrightarrow \lambda(2-\lambda)=1\Leftrightarrow \lambda^2-2\lambda+1=0\Leftrightarrow(\lambda-1)^2=0\Leftrightarrow \lambda=1$$

Για $\lambda = 1$ η εξίσωση γίνεται: $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Η εξίσωση έχει λοιπόν δύο ρίζες ίσες, την $x_1 = x_2 = 1$, που σημαίνει ότι οι πλευρές του ορθογωνίου είναι ίσες. Άρα το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

ΑΣΚΗΣΗ (4_6231)

Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς $AB = 3$ και το Μ είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο της διαγωνίου ΑΓ. Έστω Ε το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος.



α)Να αποδείξετε ότι $E = 2x^2 - 6x + 9$ με $x \in (0, 3)$.

(Μονάδες 9)

β)Να αποδείξετε ότι $E \geq \frac{9}{2}$ για κάθε $x \in (0, 3)$.

(Μονάδες 8)

γ)Για ποια θέση του Μ πάνω στην ΑΓ το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{9}{2}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Αφού μιλάμε για πλευρές τετραγώνου θα πρέπει τόσο η πλευρά του τετραγώνου ΑΚΜΘ που έχει μήκος (x) όσο και η πλευρά του τετραγώνου ΗΓΖΜ που έχει μήκος ($3-x$) να είναι θετικές ποσότητες, δηλ. πρέπει $x > 0$ και $3 - x > 0 \Rightarrow x < 3$, επομένως έχουμε: $0 < x < 3$

Τώρα το άθροισμα των εμβαδών των δυο τετραγώνων θα είναι ίσο με:

$$E = E_{AKM\Theta} + E_{H\Gamma ZM} = x^2 + (3-x)^2 = x^2 + 9 - 6x + x^2 = 2x^2 - 6x + 9 \text{ με } x \in (0, 3)$$

β) Αρκεί να δείξουμε : $E - \frac{9}{2} \geq 0$ για κάθε $x \in (0, 3)$ οπότε ισοδύναμα έχουμε :

$$E - \frac{9}{2} \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 9 - \frac{9}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 12x + 18 - 9}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 12x + 9}{2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$\frac{(2x-3)^2}{2} \geq 0$ που προφανώς ισχύει για κάθε $x \in (0,3)$.

γ) Βρίσκουμε για ποιό x ισχύει

$$E = \frac{9}{2} \Leftrightarrow E - \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{(2x-3)^2}{2} = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ υπολογίζουμε τη διαγώνιο ΑΓ του τετραγώνου .

Έχουμε λοιπόν: $ΑΓ^2 = 3^2 + 3^2 \Leftrightarrow ΑΓ^2 = 18 \Leftrightarrow \boxed{ΑΓ = 3\sqrt{2}}$

Ομοίως για το ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΘΜ$ προκύπτει:

$$ΑΜ^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow ΑΜ^2 = \frac{18}{4} \Leftrightarrow \boxed{ΑΜ = \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{ΑΓ}{2}}$$

Επομένως το εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος γίνεται ελάχιστο, όταν το σημείο $Μ$ ταυτίζεται με το μέσο της διαγωνίου του τετραγώνου.

ΑΣΚΗΣΗ (4_7510)

Τα σπίτια τεσσάρων μαθητών, της Άννας, του Βαγγέλη, του Γιώργου και της Δήμητρας βρίσκονται πάνω σε ένα ευθύγραμμο δρόμο, ο οποίος ξεκινάει από το σχολείο τους. Οι αποστάσεις των τεσσάρων σπιτιών από το σχολείο $s_Α$, $s_Β$, $s_Γ$ και $s_Δ$ αντίστοιχα, ικανοποιούν τις σχέσεις: $s_Α < s_Β$ $s_Γ = \frac{s_Α + 3s_Β}{4}$ και $|s_Δ - s_Α| = |s_Δ - s_Β|$

Στον παρακάτω άξονα, το σχολείο βρίσκεται στο σημείο Ο και τα σημεία Α, Β, παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών της Άννας και του Βαγγέλη αντίστοιχα:

α) Να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα τα σημεία Γ και Δ, που παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών του Γιώργου και της Δήμητρας. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

Μονάδες 12

β) Αν επιπλέον, οι τιμές των αποστάσεων $s_Α$, $s_Β$ σε km ικανοποιούν τις σχέσεις $s_Α + s_Β = 1{,}4$ και $s_Α \cdot s_Β = 0{,}45$ τότε:

i) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς $s_Α$, $s_Β$.

Μονάδες 6

ii) Να υπολογίσετε τις αποστάσεις $s_Α$, $s_Β$, $s_Γ$ και $s_Δ$.

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

α) Για να βρούμε την σχετική θέση των σημείων $Α, Β$ και $Γ$, αρκεί να συγκρίνουμε τις αποστάσεις των 3 σπιτιών από το σχολείο, $s_Α$, $s_Β$ και $s_Γ$.

Αυτό μπορεί να συμβεί αν βρούμε το πρόσημο των διαφορών $s_Α - s_Γ$ και $s_Β - s_Γ$

Έτσι $s_Α - s_Γ = s_Α - \frac{s_Α + 3s_Β}{4} = \frac{4s_Α - (s_Α + 3s_Β)}{4} = \frac{3s_Α - 3s_Β}{4} = \frac{3(s_Α - s_Β)}{4} < 0$

γιατί από υπόθεση είναι

$s_A < s_B \Leftrightarrow s_A - s_B < 0$ άρα $s_A - s_\Gamma < 0 \Leftrightarrow s_A < s_\Gamma$

Όμοια

$$s_B - s_\Gamma = s_B - \frac{s_A + 3s_B}{4} = \frac{4s_B - (s_A + 3s_B)}{4} = \frac{s_B - s_A}{4} > 0$$

άρα $s_B - s_\Gamma > 0 \Leftrightarrow s_B > s_\Gamma$

Συνεπώς $s_A < s_\Gamma < s_B$, δηλαδή το σημείο Γ βρίσκεται μεταξύ των Α και Β.

Επίσης η σχέση $|s_\Delta - s_A| = |s_\Delta - s_B| \Leftrightarrow d(s_\Delta, s_A) = d(s_\Delta, s_B)$, όπου A, B, Δ συνευθειακά σημεία, σημαίνει ότι το Δ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB, άρα $s_A < s_\Delta < s_B$.

Τέλος για να βρούμε τη σχετική θέση των Γ και Δ βρούμε το πρόσημο των διαφορών $s_\Delta - s_\Gamma$

Έχουμε:

$$|s_\Delta - s_A| = |s_\Delta - s_B| \Leftrightarrow s_\Delta - s_A = s_\Delta - s_B \text{ ή } s_\Delta - s_A = -s_\Delta + s_B$$

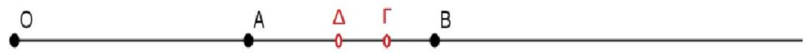
$\Leftrightarrow s_A = s_B$ (απορρίπτεται) ή $2s_\Delta = s_A + s_B \Leftrightarrow s_\Delta = \frac{s_A + s_B}{2}$.

Έτσι

$$s_\Gamma - s_\Delta = \frac{s_A + 3s_B}{4} - \frac{s_A + s_B}{2} = \frac{s_A + 3s_B - 2(s_A + s_B)}{4} = \frac{s_B - s_A}{4} > 0$$

Άρα $s_\Gamma - s_\Delta > 0 \Leftrightarrow s_\Gamma > s_\Delta$

Τελικά τα σημεία Γ και Δ είναι μεταξύ των A και B, με το Δ να είναι αριστερά του Γ, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα:



β) i) Οι αριθμοί s_A και s_B έχουν άθροισμα $S = s_A + s_B = 1,4$ και γινόμενο $P = s_A \cdot s_B = 0,45$, άρα θα είναι οι λύσεις της εξίσωσης: $x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 1,4x + 0,45 = 0$, που είναι και η ζητούμενη εξίσωση.

ii) Η εξίσωση $x^2 - 1,4x + 0,45 = 0$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1,4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0,45 = 1,96 - 1,80 = 0,16 = 0,4^2 > 0,$$

και λύσεις

$$x_{1,2} = \frac{-(-1,4) \pm \sqrt{0,4^2}}{2 \cdot 1} = \frac{1,4 \pm 0,4}{2}$$

άρα

$$x_1 = \frac{1,4 + 0,4}{2} = \frac{1,8}{2} = 0,9 \text{ και } x_2 = \frac{1,4 - 0,4}{2} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Αφού $s_A < s_B$, θα είναι $s_A = 0,5$ και $s_B = 0,9$.

Τότε

$$s_\Gamma = \frac{s_A + 3s_B}{4} \Rightarrow s_\Gamma = \frac{0,5 + 3\cdot 0,9}{4} = 0,8$$

$$\text{και } s_\Delta = \frac{s_A + s_B}{2} \Rightarrow s_\Delta = \frac{0,5 + 0,9}{2} = 0,7.$$

Τελικά $s_A = 0,5$, $s_B = 0,9$, $s_\Gamma = 0,8$ και $s_\Delta = 0,7$

ΑΣΚΗΣΗ (4_7515)

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2x + \lambda = 0$, με παράμετρο $\lambda < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

Μονάδες 6

β) Να δείξετε ότι: $x_1 + x_2 = 2$.

Μονάδες 4

γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον, $|x_1 - 2| = |x_2 + 2|$, τότε:

i) Να δείξετε ότι: $x_1 - x_2 = 4$.

Μονάδες 7

ii) Να προσδιορίσετε τις ρίζες x_1, x_2 και η τιμή του λ.

Μονάδες 8

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) Η εξίσωσή μας είναι δευτέρου βαθμού ως προς x με διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot \lambda \Rightarrow \Delta = 4 - 4\lambda > 0$$

αφού ισχύει από υπόθεση $\lambda < 1 \Rightarrow 4\lambda < 4 \Rightarrow 4 - 4\lambda > 0$.

Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

β) Σύμφωνα με τον πρώτο τύπο Vieta το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι ίσο με $S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$, δηλαδή $S = x_1 + x_2 = -\frac{-2}{1} = 2$

γ) i. Έχουμε:

$$|x_1 - 2| = |x_2 + 2| \Leftrightarrow x_1 - 2 = x_2 + 2 \text{ ή } x_1 - 2 = -(x_2 + 2)$$

$$\Leftrightarrow x_1 - x_2 = 2 + 2 \text{ ή } x_1 \cancel{-2} = -x_2 \cancel{-2}$$

$$\Leftrightarrow x_1 - x_2 = 4 \text{ ή } x_1 + x_2 = 0.$$

Όμως η δεύτερη σχέση είναι αδύνατη αφού από το (β) ερώτημα βρήκαμε ότι $x_1 + x_2 = 2$. Συνεπώς $x_1 - x_2 = 4$

ii. Οι σχέσεις $x_1 + x_2 = 2$ και $x_1 - x_2 = 4$, με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν:

$2x_1 = 6 \Leftrightarrow x_1 = 3$, οπότε αντικαθιστώντας στην $x_1 + x_2 = 2$ βρίσκουμε

$$3 + x_2 = 2 \Leftrightarrow x_2 = 2 - 3 = -1.$$

Για το **λ** έχουμε:

1ος τρόπος: Το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης, από τον δεύτερο τύπο Vieta δίνεται από τη σχέση: $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$ ή $3 \cdot (-1) = \frac{\lambda}{1} \Leftrightarrow \lambda = -3 < 1$, λύση που είναι δεκτή λόγω περιορισμού.

2ος τρόπος: Ο αριθμός 3 είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2 - 2x + \lambda = 0$, άρα θα την επαληθεύει, δηλαδή:

$$3^2 - 2 \cdot 3 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \ 9 - 6 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \ \lambda = -9 + 6 \Leftrightarrow \ \lambda = -3 < 1$$

που είναι δεκτή. Τελικά $x_1 = 3$, $x_2 = -1$ και $\lambda = -3$.

ΑΣΚΗΣΗ (4_7516)

Δίνεται η εξίσωση: $\alpha x^2 - (\alpha^2 - 1)x - \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι: $\Delta = (\alpha^2+1)^2$

Μονάδες 5

β) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι: $p_1 = \alpha$ και $p_2 = -\frac{1}{\alpha}$.

Μονάδες 10

γ) Να βρεθούν οι τιμές του α, ώστε: $|p_1 - p_2| = 2$.

Μονάδες 10

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) Έχουμε

$$\Delta = \left[-\left(\alpha^2 - 1\right)\right]^2 - 4 \cdot \alpha \cdot (-\alpha) = \left(\alpha^2 - 1\right)^2 + 4\alpha^2 = \left(\alpha^2\right)^2 - 2\alpha^2 + 1 + 4\alpha^2 = \left(\alpha^2 + 1\right)^2$$

β) Είναι $\Delta = \left(\alpha^2 + 1\right)^2 > 0$ και αφού $\alpha^2 + 1 \geq 1 > 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες:

$$\rho_{1,2} = \frac{-\left[-\left(\alpha^2 - 1\right)\right] \pm \sqrt{\left(\alpha^2 + 1\right)^2}}{2\alpha} = \frac{\alpha^2 - 1 \pm \left|\alpha^2 + 1\right|}{2\alpha} = \frac{\alpha^2 - 1 \pm \left(\alpha^2 + 1\right)}{2\alpha}$$

άρα

$$\rho_1 = \frac{\alpha^2 - 1 + \alpha^2 + 1}{2\alpha} = \frac{2\alpha^2}{2\alpha} = \alpha \ \text{ και } \ \rho_2 = \frac{\alpha^2 - 1 - \alpha^2 - 1}{2\alpha} = \frac{-2}{2\alpha} = -\frac{1}{\alpha}.$$

γ) **1ος τρόπος:** Έχουμε

$$\left|\rho_1 - \rho_2\right| = 2 \Leftrightarrow \left|\alpha - \left(-\frac{1}{\alpha}\right)\right| = 2 \Leftrightarrow \left|\alpha + \frac{1}{\alpha}\right| = 2 \Leftrightarrow \alpha + \frac{1}{\alpha} = 2 \ \text{ ή } \ \alpha + \frac{1}{\alpha} = -2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 + 1 - 2\alpha = 0 \ \text{ ή } \ \alpha^2 + 1 + 2\alpha = 0 \Leftrightarrow \left(\alpha - 1\right)^2 = 0 \ \text{ ή } \ \left(\alpha + 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha - 1 = 0 \ \text{ ή } \ \alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1 \ \text{ ή } \ \alpha = -1.$$

2ος τρόπος: Είναι $|\rho_1 - \rho_2| = 2 \overset{(\beta)}{\Leftrightarrow} \left|\alpha + \frac{1}{\alpha}\right| = 2 \Leftrightarrow \left|\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right| = 2 \Leftrightarrow \frac{|\alpha^2 + 1|}{|\alpha|} = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^2 + 1 = 2|\alpha| \Leftrightarrow |\alpha|^2 - 2|\alpha| + 1 = 0 \Leftrightarrow (|\alpha| - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow |\alpha| = 1 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \alpha = \pm 1$ (δεκτές)

ΑΣΚΗΣΗ (4_7940)

α) Να λύσετε τις εξισώσεις

$$3x^2-14x+8=0 \quad (1) \quad \text{και} \quad 8x^2-14x+3=0 \quad (2)$$

Μονάδες 10

β) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \quad (3) \quad \text{και} \quad \gamma x^2+\beta x+\alpha=0 \quad (4),$$

με $\alpha,\gamma\neq 0$.

Αποδείξτε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι:

Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha\cdot\gamma\neq 0$, τότε

i) $\rho\neq 0$ και

Μονάδες 5

ii) ο $\dfrac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση (4).

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

Για την εξίσωση (1) η διακρίνουσα είναι

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-14)^2-4\cdot 3\cdot 8=196-96=100>0$$

και συνεπώς η (1) έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, τις:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-14)\pm\sqrt{100}}{2\cdot 3}=\frac{14\pm 10}{6}\Rightarrow\begin{cases} x_1=\dfrac{14+10}{6}=\dfrac{24}{6}=4 \\ x_2=\dfrac{14-10}{6}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

Για την εξίσωση (2) η διακρίνουσα είναι

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-14)^2-4\cdot 8\cdot 3=196-96=100>0$$

και συνεπώς η (2) έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, τις:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-14)\pm\sqrt{100}}{2\cdot 8}=\frac{14\pm 10}{16}\Rightarrow\begin{cases} x_1=\dfrac{14+10}{16}=\dfrac{24}{16}=\dfrac{3}{2} \\ x_2=\dfrac{14-10}{16}=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

β) i) Θα δείξουμε ότι $\rho\neq 0$

Μεθοδολογία για άτοπο: *Συχνά όταν η ζητούμενη σχέση περιέχει άρνηση, λέξεις όπως δεν, μην, διάφορο κ.τ.λ εφαρμόζουμε απαγωγή σε άτοπο. Θεωρούμε ότι ισχύει η κατάφαση (όχι η άρνηση) της ζητούμενης σχέσης και καταλήγουμε σε κάτι που δεν ισχύει.*

Έστω $\rho=0$ τότε την αντικαθιστούμε στην εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ και έχουμε,

$$\alpha\cdot 0^2+\beta\cdot 0+\gamma=0 \Leftrightarrow \gamma=0$$ **άτοπο,**

επειδή $\alpha\gamma\neq 0$. Επομένως $\rho\neq 0$

ii) Θα δείξουμε ότι το $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $\gamma x^2+\beta x+\alpha=0$,

$$\gamma\cdot\frac{1}{\rho^2}+\beta\cdot\frac{1}{\rho}+\alpha=0 \overset{\cdot\rho^2}{\Leftrightarrow} \gamma+\beta\rho+\alpha\rho^2=0 \Leftrightarrow \alpha\rho^2+\beta\rho+\gamma=0$$

που ισχύει, αφού ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3).

Σημείωση: Το ερώτημα (β) είναι η άσκηση Β4 /σελ. 95 σχ. βιβλίου.

ΑΣΚΗΣΗ (4_13078)

Δίνεται η εξίσωση $(8-\lambda)x^2-2(\lambda-2)x+1=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$ (1)

α) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η εξίσωση να είναι 1ου βαθμού.

Μονάδες 5

β) Αν η εξίσωση είναι 2ου βαθμού, να βρείτε τις τιμές του λ ώστε αυτή να έχει μια διπλή ρίζα. Για τις τιμές του λ που βρήκατε, να προσδιορίσετε τη διπλή ρίζα της εξίσωσης.

Μονάδες 10

γ) Για τις τιμές του λ που βρήκατε στο ερώτημα (β), να δείξετε ότι το τριώνυμο $(8-\lambda)x^2-2(\lambda-2)x+1$ είναι μη αρνητικό, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ είναι 1ου βαθμού αν, και μόνο αν, $\begin{cases}\alpha=0\\ \text{και}\\ \beta\neq 0\end{cases}$

άρα $\begin{cases}8-\lambda=0\\ \text{και}\\ \lambda-2\neq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda=8\\ \text{και}\\ \lambda\neq 2\end{cases}$ οπότε για λ = 8 η εξίσωση (1) είναι πρώτου βαθμού.

β) Αν η (1) είναι 2ου βαθμού, τότε $8-\lambda\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 8$

Η (1) έχει μία διπλή ρίζα όταν Δ=0.
Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$$\begin{aligned}\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma&=\left[-2(\lambda-2)\right]^2-4\cdot(8-\lambda)\cdot 1\\ &=4\cdot(\lambda-2)^2-4\cdot(8-\lambda)\\ &=4\cdot(\lambda^2-4\lambda+4)-32+4\lambda\\ &=4\lambda^2-16\lambda+16-32+4\lambda\\ &=4\lambda^2-12\lambda-16\end{aligned}$$

Οπότε,

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 12\lambda - 16 = 0 \overset{\div 4}{\Leftrightarrow} \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \quad (2)$$

Η νέα διακρίνουσα της εξίσωσης (2) είναι:

$$\Delta' = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4\cdot 1\cdot(-4) = 9 + 16 = 25 > 0$$

Οπότε η (2) θα έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta'}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2\cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{3+5}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \\ \lambda_2 = \dfrac{3-5}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

Οι ρίζες είναι δεκτές αφού και οι δύο είναι διαφορετικές του 8.

Συνεπώς, η (1) έχει μία διπλή ρίζα όταν λ = 4 και όταν λ = – 1.

- Για λ = 4 η (1) γίνεται:

$$(8-4)x^2 - 2(4-2)x + 1 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

και η διπλή της ρίζα είναι:

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-4}{2\cdot 4} = \frac{1}{2}$$

- Για λ = – 1 η (1) γίνεται:

$$(8+1)x^2 - 2(-1-2)x + 1 = 0 \Leftrightarrow 9x^2 + 6x + 1 = 0$$

και η διπλή της ρίζα είναι:

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{6}{2\cdot 9} = -\frac{6}{18} = -\frac{1}{3}$$

γ) Έχουμε,

- Για λ = 4 το τριώνυμο της (1) γίνεται:

$4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού $\alpha^2 \geq 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$

- Για λ = – 1 το τριώνυμο της (1) γίνεται:

$9x^2 + 6x + 1 = (3x+1)^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού $\alpha^2 \geq 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$

Άσκηση (4_13102)

Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0 \; (1)$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι αν $\lambda = 5$ η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα.

(Μονάδες 5)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει κα άλλη τιμή του λ, ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες άνισες.

(Μονάδες 10)

δ) Αν $|\lambda^2 - 4\lambda - 5| = 4\lambda - \lambda^2 + 5$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 5\}$ να δείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει ρίζες.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Αν $\lambda=5$ η εξίσωση (1) γίνεται :

$$x^2-2\cdot5\cdot x+4\cdot5+5=0\Leftrightarrow x^2-10x+25=0$$

Οπότε

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-10)^2-4\cdot1\cdot25=100-100=0.$$

Άρα η εξίσωση $x^2-10x+25=0$ έχει διπλή ρίζα.

β) Για την εξίσωση (1) η οποία έχει διπλή ρίζα, είναι αναγκαίο να ισχύει Δ =0, δηλαδή

$$\Delta=0\Leftrightarrow(-2\lambda)^2-4\cdot1\cdot(4\lambda+5)=0\Leftrightarrow4\lambda^2-16\lambda-20=0\Leftrightarrow\lambda^2-4\lambda-5=0$$

η νέα διακρίνουσα της εξίσωσης είναι

$$\Delta'=(-4)^2-4\cdot1\cdot(-5)=16+20=36>0$$

με ρίζες,

$$\lambda_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{36}}{2\cdot1}=\frac{4\pm6}{2}=\begin{cases}5\\-1\end{cases}$$

Άρα για λ=5 και λ= -1 η αρχική εξίσωση έχει διπλή ρίζα

γ) Για την εξίσωση (1) η οποία έχει δύο ρίζες άνισες, είναι αναγκαίο να ισχύει :

$$.\ \Delta>0\Leftrightarrow\lambda^2-4\lambda-5>0\Leftrightarrow\{\lambda<-1 \text{ ή } \lambda>5\}$$

δ) Ισχύει ότι

$$|\lambda^2-4\lambda-5|=4\lambda-\lambda^2+5\Leftrightarrow|\lambda^2-4\lambda-5|=-(\lambda^2-4\lambda-5)\ (2)$$

Για να ισχύει η σχέση (2) πρέπει :

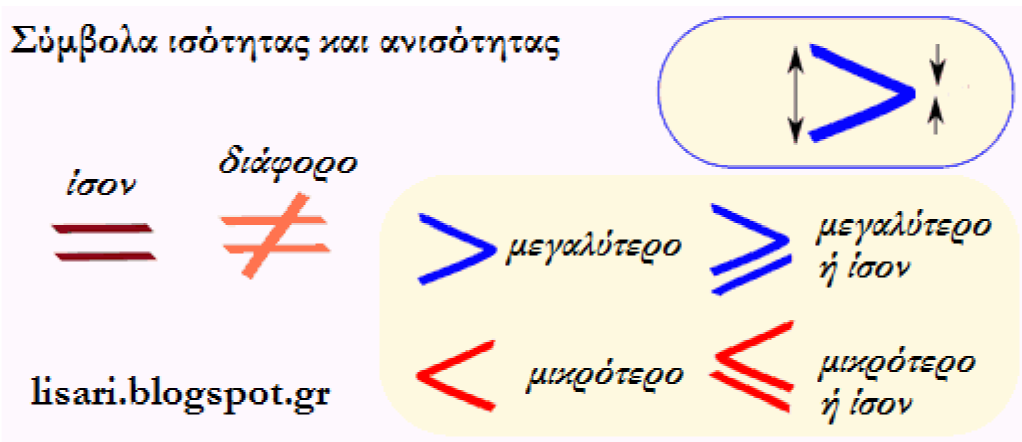
$$\left.\begin{array}{l}\lambda^2-4\lambda-5\le0\Leftrightarrow-1\le\lambda\le5\\ \text{Όμως}\quad \lambda\in\mathbb{R}-\{-1,\,5\}\end{array}\right\}\Leftrightarrow-1<\lambda<5$$

Όμως όταν -1 < λ < 5, τότε η διακρίνουσα της (1) είναι αρνητική, οπότε η (1) δεν έχει ρίζες.

Παρόμοιες ασκήσεις βιβλίου : 3, 4 σελ. 93 και 6 σελ. 95.

Άλγεβρα Α΄ Λυκείου

Κεφάλαιο 4^{ο} : Ανισώσεις



4.1: Ανισώσεις 1ου Βαθμού

ΑΣΚΗΣΗ 1 (2_489)

i. Να λύσετε την ανίσωση $|x-5|<2$.

(Μονάδες 8)

ii. Να λύσετε την ανίσωση $|2-3x|>5$.

(Μονάδες 8)

iii. Να παραστήσετε τις λύσεις των δύο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

i. Έχουμε,

$$|x-5|<2 \Leftrightarrow -2<x-5<2 \Leftrightarrow -2+5<x<2+5 \Leftrightarrow 3<x<7.$$

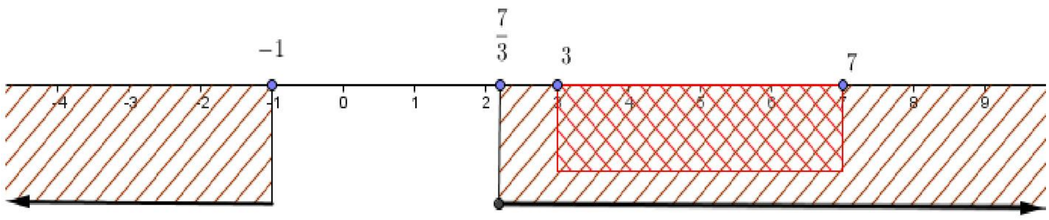
ii. Είναι,

$$|2-3x|>5 \Leftrightarrow 2-3x>5 \text{ ή } 2-3x<-5$$

$$\Leftrightarrow -3x>5-2 \text{ ή } -3x<-5-2$$

$$\Leftrightarrow x<-1 \text{ ή } x>\frac{7}{3}$$

iii. Η παράσταση των λύσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών γίνεται



Όπως φαίνεται το σύνολο των κοινών λύσεων είναι το διάστημα $(3,7)$.

ΑΣΚΗΣΗ 2 (2_491)

Δίνονται οι ανισώσεις: $3x-1<x+9$ και $2-\frac{x}{2}\le x+\frac{1}{2}$

i. Να βρείτε τις λύσεις τους.

(Μονάδες 15)

ii. Να βρείτε το σύνολο των κοινών τους λύσεων.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

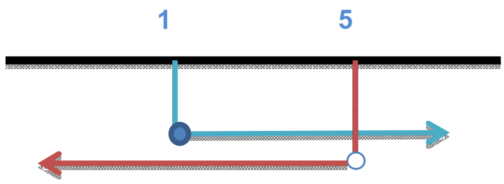
i. Για την πρώτη ανίσωση έχουμε

$$3x-1<x+9 \Leftrightarrow 3x-x<9+1 \Leftrightarrow 2x<10 \Leftrightarrow x<5,$$

ενώ για τη δεύτερη

$$2-\frac{x}{2}\le x+\frac{1}{2} \Leftrightarrow 4-x\le 2x+1 \Leftrightarrow -2x-x\le 1-4 \Leftrightarrow -3x\le -3 \Leftrightarrow x\ge 1$$

ii. Οι κοινές τους λύσεις είναι $1 \le x < 5$ ή $x \in [1,5)$.



ΑΣΚΗΣΗ 3 (2_503)

α) Να λύσετε την ανίσωση: $\left|x - \frac{1}{2}\right| < 4$

Μονάδες 9

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x+5| \ge 3$.

Μονάδες 9

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων (α) και (β) με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών και να τις γράψετε με τη μορφή διαστήματος.

Μονάδες 7

<u>ΛΥΣΗ</u>

Από θεωρία είναι γνωστό ότι:

$$|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta \quad \text{και} \quad |x| > \theta \Leftrightarrow x < -\theta \quad \text{ή} \quad x > \theta$$

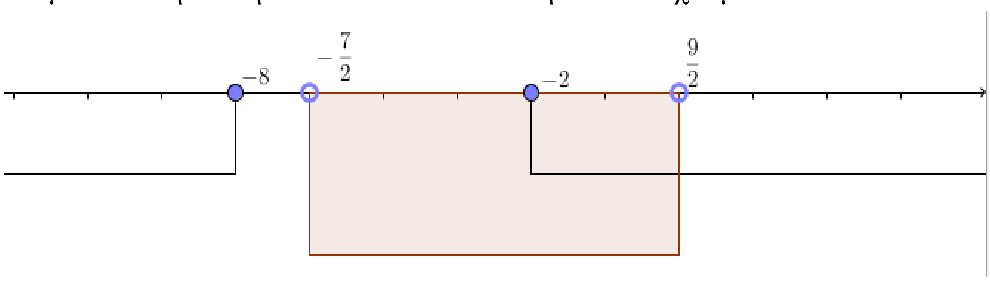
α) Έχουμε,

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| < 4 \Leftrightarrow -4 < x - \frac{1}{2} < 4 \Leftrightarrow -\frac{7}{2} < x < \frac{9}{2}$$

β) Έχουμε,

$$|x+5| \ge 3 \Leftrightarrow x+5 \le -3 \quad \text{ή} \quad x+5 \ge 3 \quad \Leftrightarrow \quad x \le -8 \quad \text{ή} \quad x \ge -2$$

γ) Κάνουμε συναλήθευση των πιο πάνω ανισοτήτων και έχουμε:



Στη συνέχεια γράφουμε τις κοινές λύσεις με τη μορφή διαστήματος, δηλαδή προκύπτει $x \in \left[-2, \frac{9}{2}\right)$

ΑΣΚΗΣΗ 4 (2_505)

α) Να λύσετε την εξίσωση: $|2x-4| = 3|x-1|$

Μονάδες 9

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|3x-5| > 1$

Μονάδες 9

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

α) Είναι γνωστό ότι: $|x|=|\alpha| \Leftrightarrow x=\pm\,\alpha$, οπότε έχουμε :

$$|2x-4|=3|x-1| \Leftrightarrow 2x-4=\pm 3(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4=3(x-1) \\ \quad ή \\ 2x-4=-3(x-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4=3x-3 \\ \quad ή \\ 2x-4=-3x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ \quad ή \\ x_2=\dfrac{7}{5} \end{cases}$$

β) Έχουμε,

$$|3x-5|>1 \Leftrightarrow (3x-5<-1 \;\; ή \;\; 3x-5>1) \Leftrightarrow \left(x<\frac{4}{3} \;\; ή \;\; x>2\right) \Leftrightarrow x\in\left(-\infty,\frac{4}{3}\right)\cup(2,+\infty)$$

γ) Είναι προφανές ότι:

$$-1\in\left(-\infty,\frac{4}{3}\right) \Rightarrow -1\in\left(-\infty,\frac{4}{3}\right)\cup(2,+\infty)$$

Επειδή

$$\frac{4}{3}=\frac{20}{15}<\frac{21}{15}=\frac{7}{5}<\frac{10}{5}=2,$$

η λύση $x=\frac{7}{5}$ της εξίσωσης του ερωτήματος α) δεν περιέχεται στο σύνολο των λύσεων της ανίσωσης του ερωτήματος β).

Τελικά, μόνο η λύση $x=-1$ είναι και λύση της ανίσωσης του (β) ερωτήματος.

ΑΣΚΗΣΗ 5 (2_991)

Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x+1|<2$

α. να δείξετε ότι $x\in(-3,1)$.

Μονάδες 12

β. να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $K=\dfrac{|x+3|+|x-1|}{4}$ είναι αριθμός ανεξάρτητος του x .

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε ότι:

$$|x+1|<2 \Leftrightarrow -2<x+1<2 \Leftrightarrow -2-1<x<2-1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -3<x<1 \Leftrightarrow x \in (-3,1).$$

β. Από το α ερώτημα έχουμε ότι:

$$-3<x<1 \Rightarrow \begin{cases} x>-3 \\ x<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3>0 \\ x-1<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x+3|=x+3 \\ |x-1|=-x+1 \end{cases}$$

Οπότε

$$K=\frac{|x+3|+|x-1|}{4}=\frac{x+3-x+1}{4}=\frac{4}{4}=1.$$

Οπότε η τιμή της παράστασης Κ είναι αριθμός ανεξάρτητος του x.

ΑΣΚΗΣΗ 6 (2_1039)

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-1|\geq 5$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των (α) και (β).

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

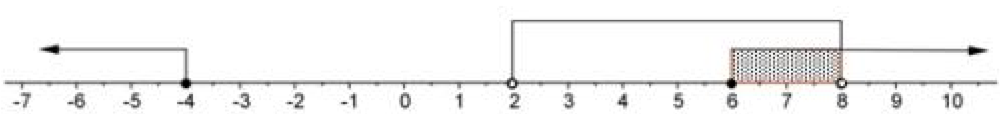
α) Έχουμε:

$$|x-1|\geq 5 \Leftrightarrow (x-1\geq 5 \text{ ή } x-1\leq -5) \Leftrightarrow x\geq 6 \text{ ή } x\leq -4 \quad (1)$$

β) Για τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3 ισχύει:

$$d(x,5)<3 \Leftrightarrow |x-5|<3 \Leftrightarrow -3<x-5<3 \Leftrightarrow -3+5<x<3+5 \Leftrightarrow 2<x<8 \quad (2)$$

γ) Οι κοινές λύσεις των (1) και (2) είναι οι $6\leq x<8$ οι οποίες φαίνονται στο παρακάτω σχήμα



Παρόμοια άσκηση βιβλίου : α) 6/Α΄ Ομάδας/σελ. 104, β) 7/Α΄ Ομάδας/σελ. 67, γ) 2/Α΄ Ομάδας/σελ.104

ΑΣΚΗΣΗ 7 (2_1062)

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του y ισχύει : $|y-3|<1$

(Μονάδες 12)

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή του εμβαδού Ε του ορθογωνίου.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε

$$|y-3| < 1 \Leftrightarrow -1 < y-3 < 1 \Leftrightarrow -1+3 < y-3+3 < 1+3 \Leftrightarrow \boxed{2 < y < 4}$$

β) Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι το γινόμενο των διαστάσεών του. Οπότε $E = xy$. Επειδή $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$ και όλα τα μέλη είναι θετικά, πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις δύο σχέσεις έχουμε:

$$1 \cdot 2 < xy < 3 \cdot 4 \Leftrightarrow 2 < E < 12$$

Παρόμοια άσκηση βιβλίου : α) 5/Α΄ Ομάδας/σελ. 104, β) 5 ii/Α΄ Ομάδας/σελ. 60

ΑΣΚΗΣΗ 8 (2_1074)

α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει : $|y-3|<1$.

(Μονάδες 12)

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1<x<3$ και $2<y<4$, τότε να αποδείξετε ότι : $6<\Pi<14$, όπου Π είναι η περίμετρος του ορθογωνίου.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε

$$|y-3| < 1 \Leftrightarrow -1 < y-3 < 1 \Leftrightarrow -1+3 < y-3+3 < 1+3 \Leftrightarrow \boxed{2 < y < 4}$$

β) Η περίμετρος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου με διαστάσεις x, y είναι $\Pi = 2x + 2y = 2(x+y)$. Από τις σχέσεις που δόθηκαν για τις διαστάσεις, έχουμε:

$$\left.\begin{cases} 1 < x < 3 \Leftrightarrow 2<2x<6 \\ 2 < y < 4 \Leftrightarrow 4<2y<8 \end{cases}\right\} \overset{\oplus}{\Leftrightarrow} 6 < 2x+2y < 14 \Leftrightarrow 6 < \Pi < 14$$

Παρόμοια άσκηση βιβλίου : α) 5/Α΄ Ομάδας/σελ. 104, β) 5/Α΄ Ομάδας/σελ. 60

ΑΣΚΗΣΗ 9 (2_1077)

α) Να λύσετε την ανίσωση : $|x-5|<4$

(Μονάδες 10)

β) Αν κάποιος αριθμός α επαληθεύει την παραπάνω ανίσωση, να αποδείξετε ότι :

$$\frac{1}{9}<\frac{1}{\alpha}<1$$

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$|x-5|<4 \Leftrightarrow -4<x-5<4 \Leftrightarrow -4+5<x-5+5<4+5 \Leftrightarrow 1<x<9$$

β) Αφού ο α επαληθεύει την παραπάνω ανίσωση ισχύει: $1<\alpha<9$. Αφού τα μέλη είναι θετικά, αντιστρέφοντας και αλλάζοντας φορά στην ανίσωση παίρνουμε:

$$1<\alpha<9 \Leftrightarrow 1>\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{9} \Leftrightarrow \frac{1}{9}<\frac{1}{\alpha}<1$$

Παρόμοια άσκηση βιβλίου: α) 5/Α΄ Ομάδας/σελ. 104, β) 6/Α΄ Ομάδας/σελ. 60

ΑΣΚΗΣΗ 10 (2_1293)

Η θερμοκρασία Τ σε βαθμούς $\left({}^{o}C\right)$, σε βάθος x χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης, δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση:

$$T=15+25\cdot x,\quad 0\le x\le 200$$

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία ενός σημείου που βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

β) Να βρείτε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι ίση με $290^{o}C$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 10

γ) Σε ποιο βάθος μπορεί να βρίσκεται ένα σημείο, στο οποίο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από $440^{o}C$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

α) Για x = 30, η συνάρτηση Τ δίνει:

$$T=15+25\cdot 30=15+750=765^{o}\,C$$

β) Για Τ = $290^{o}C$, είναι: $290=15+25\cdot x \Leftrightarrow 290-15=25\cdot x$

$$\Leftrightarrow 275=25\cdot x$$

$$\Leftrightarrow \frac{275}{25}=\frac{\cancel{25}\cdot x}{\cancel{25}}$$

$$\Leftrightarrow x=11$$

Άρα, η θερμοκρασία είναι $290^{o}C$ σε βάθος 11 χιλιόμετρων κάτω από την επιφάνεια της Γης.

γ) Για $T>440^{o}C$, είναι: $440<15+25\cdot x \Leftrightarrow 440-15<25\cdot x$

$$\Leftrightarrow 425<25\cdot x$$

$$\Leftrightarrow \frac{425}{25}<\frac{\cancel{25}\cdot x}{\cancel{25}}$$

$$\Leftrightarrow x>17$$

Άρα, η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 440^oC σε βάθος μεγαλύτερο των 17 χιλιόμετρων κάτω από την επιφάνεια της Γης.

ΑΣΚΗΣΗ 11 (2_3847)

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda+2)x^2+2\lambda x+\lambda-1=0$, με παράμετρο $\lambda\neq-2$. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες:

α. Η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Μονάδες 13

β. Το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι ίσο με 2.

Μονάδες 12

<u>ΛΥΣΗ</u>

α. Για $\lambda\neq-2$ η εξίσωση είναι $2^{ου}$ βαθμού. Για να έχει λοιπόν δύο ρίζες πραγματικές και άνισες θα πρέπει

$\Delta>0 \Leftrightarrow (2\lambda)^2-4(\lambda+2)(\lambda-1)>0 \Leftrightarrow$

$4\lambda^2-4(\lambda^2-\lambda+2\lambda-2)>0 \Leftrightarrow 4\lambda^2-4\lambda^2+4\lambda-8\lambda+8>0 \Leftrightarrow -4\lambda+8>0 \Leftrightarrow 4\lambda<8$

$\Leftrightarrow \lambda<2$

Όμως έχουμε $\lambda\neq-2$, οπότε $\lambda\in(-\infty,-2)\cup(-2,2)$

β. Έστω x_1 , x_2 οι ρίζες της εξίσωσης με $x_1\neq x_2$.

Τότε έχουμε

$S=2 \Leftrightarrow x_1+x_2=2 \Leftrightarrow \dfrac{-2\lambda}{\lambda+2}=2$ και $\lambda\neq-2 \Leftrightarrow -2\lambda=2(\lambda+2) \Leftrightarrow -2\lambda=2\lambda+4$

$\Leftrightarrow -4\lambda=4 \Leftrightarrow \lambda=-1$

ΑΣΚΗΣΗ 12 (2_4305)

α. Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|2x-3|\leq5$

(Μονάδες 9)

ii) $|2x-3|\geq1$

(Μονάδες 9)

β. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

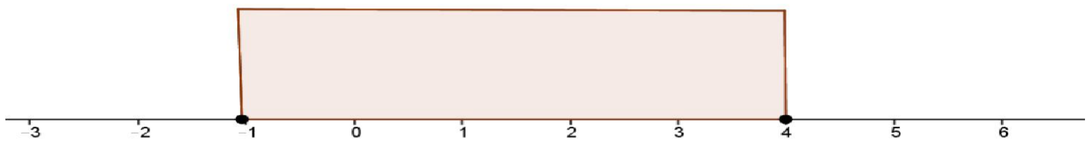
(Μονάδες 7)

<u>ΛΥΣΗ</u>

α. i) Ισχύει $|x|<\rho\Leftrightarrow-\rho<x<\rho$, όπου $\rho>0$. Οπότε

$$\begin{aligned}|2x-3|\leq5 &\Leftrightarrow -5\leq2x-3\leq5\\ &\Leftrightarrow -5+3\leq2x-3+3\leq5+3\\ &\Leftrightarrow -2\leq2x\leq8\\ &\Leftrightarrow -1\leq x\leq4\end{aligned}$$

άρα $x \in [-1,4]$,

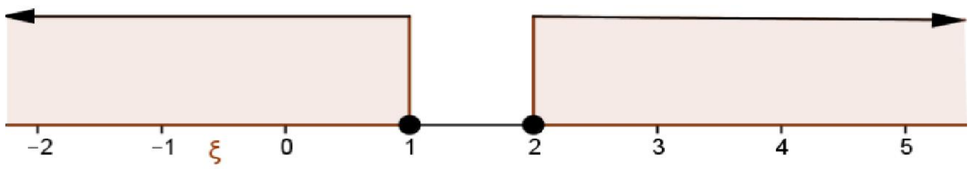


ii) Ισχύει $|x| \geq \rho \Leftrightarrow (x \geq \rho \text{ ή } x \leq -\rho)$, όπου $\rho > 0$.

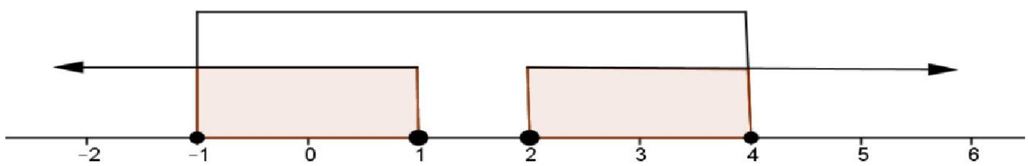
Οπότε,

$$\begin{aligned} |2x-3| \geq 1 &\Leftrightarrow (2x-3 \geq 1 \text{ ή } 2x-3 \leq -1) \\ &\Leftrightarrow (2x-3+3 \geq 1+3 \text{ ή } 2x-3+3 \leq -1+3) \\ &\Leftrightarrow (2x \geq 4 \text{ ή } 2x \leq 2) \\ &\Leftrightarrow (x \geq 2 \text{ ή } x \leq 1) \end{aligned},$$

άρα $x \in (-\infty,1] \cup [2,+\infty)$,



β. Οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν στα γραμμοσκιασμένα διαστήματα.



Επομένως $x \in [-1,1] \cup [2,4]$

<u>*Σχόλια:*</u>

1) *Το α i) ερώτημα αντιστοιχεί στην άσκηση Α' Ομάδας 5) περίπτωση ii) της §4.1*
2) *Το α ii) ερώτημα αντιστοιχεί στην άσκηση Α' Ομάδας 6) περίπτωση iii) της §4.1*
3) *Την συναλήθευση τιμών δύο ανισώσεων μπορούμε να την δούμε στις ασκήσεις Α' Ομάδας 2), 3) και Β' Ομάδας 1) της §4.1 του σχολικού.*

ΑΣΚΗΣΗ 13 (2_4306)

α. Να λύσετε την εξίσωση $2x^2 - x - 6 = 0 \ (1)$.

(Μονάδες 9)

β. Να λύσετε την ανίσωση $|x-1| < 2 \ (2)$.

(Μονάδες 9)

γ. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2).

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α. Η εξίσωση (1) είναι δευτεροβάθμια ως προς x της μορφής

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0,\ \text{όπου}\ \alpha=2,\ \beta=-1,\ \gamma=-6$$

Έχει διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma \Leftrightarrow \Delta=(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-6)\Leftrightarrow \Delta=1+48\Leftrightarrow \Delta=49>0,$$

οπότε η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, τις:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{49}}{2\cdot 2}\Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm 7}{4},$$

οπότε

$$x_1=\frac{1-7}{4}=-\frac{3}{2}\ \text{και}\ x_2=\frac{1+7}{4}=\frac{8}{4}=2$$

β. Ισχύει $|x|<\rho\Leftrightarrow -\rho<x<\rho$, όπου $\rho>0$.

Οπότε

$$\begin{aligned}|x-1|<2 &\Leftrightarrow -2<x-1<2\\ &\Leftrightarrow -2+1<x-1+1<2+1\\ &\Leftrightarrow -1<x<3\\ &\Leftrightarrow x\in(-1,3)\end{aligned}$$

γ. Επειδή $x_1=-\frac{3}{2}\notin(-1,3)$ ενώ $x_2=2\in(-1,3)$, ο $x=2$ είναι ο μοναδικός πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2).

Σχόλια:

1) *Το α) ερώτημα αντιστοιχεί στην άσκηση Α' Ομάδας 1) περίπτωση i) της §3.3*
2) *Το β) ερώτημα αντιστοιχεί στην άσκηση Α' Ομάδας 5) περίπτωση iii) της §4.1*
3) *Την συναλήθευση τιμών δύο ανισώσεων μπορούμε να την δούμε στις ασκήσεις Α' Ομάδας 2), 3) και Β' Ομάδας 1) της §4.1 του σχολικού.*

   Εδώ η «πρωτοτυπία» του ερωτήματος είναι η συναλήθευση τιμών μιας εξίσωσης και μιας ανίσωσης που δεν βλέπουμε στο σχολικό.

ΑΣΚΗΣΗ 14 (2_7521)

α. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|1-2x|<5$ και

(Μονάδες 9)

ii) $|1-2x| \geq 1$

(Μονάδες 9)

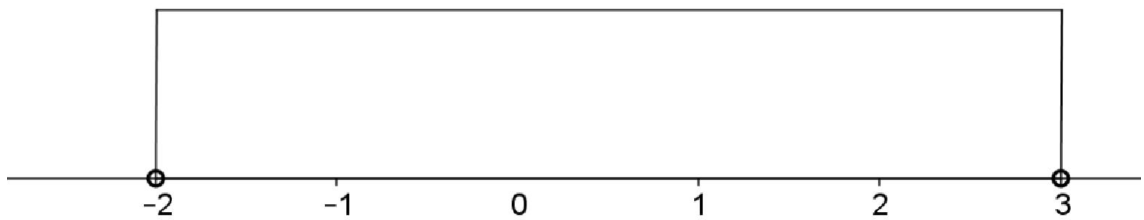
β. Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

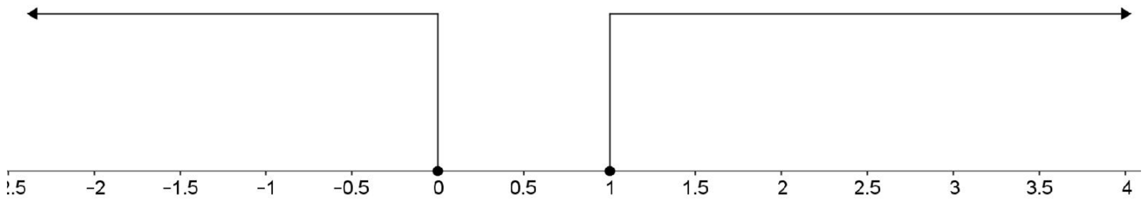
α) Έχουμε,

$$|1-2x|<5 \Leftrightarrow -5<1-2x<5 \Leftrightarrow -5-1<1-1-2x<5-1 \Leftrightarrow$$
$$-6<-2x<4 \Leftrightarrow 3>x>-2 \Leftrightarrow -2<x<3$$



β) Έχουμε,

$$|1-2x| \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x \geq 1 \\ \text{ή} \\ 1-2x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x \geq 0 \\ \text{ή} \\ -2x \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ \text{ή} \\ x \geq 1 \end{cases}$$



Άσκηση 15 (4_2081)

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2+2(\lambda-1)x+\lambda-2=0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση όταν $\lambda=0$.

Μονάδες 5

β) Έστω $\lambda \neq 0$.

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, τις οποίες στη συνέχεια να βρείτε.

Μονάδες 10

ii) Αν $x_1=-1$ και $x_2=-1+\dfrac{2}{\lambda}$ είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1), να προσδιορίσετε τις τιμές του λ, για τις οποίες ισχύει: $|x_1-x_2|>1$.

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Για $\lambda=0$ η εξίσωση (1) γίνεται:

$$0\cdot x^2+2(0-1)x+0-2=0\Leftrightarrow -2x-2=0\Leftrightarrow x=-1$$

β) i) Το τριώνυμο $\lambda x^2+2(\lambda-1)x+\lambda-2=0$ έχει: $\alpha=\lambda$, $\beta=2(\lambda-1)$ και $\gamma=\lambda-2$.
Η διακρίνουσα είναι,
$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\left(2(\lambda-1)\right)^2-4\cdot\lambda\cdot(\lambda-2)=4(\lambda-1)^2-4\lambda^2+8\lambda=4\lambda^2-8\lambda+4-4\lambda^2+8\lambda=4$
οπότε: $\Delta=4>0$

Άρα η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες, τις:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-2(\lambda-1)\pm 2}{2\lambda}=\frac{-2\lambda+2\pm2}{2\lambda}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{-2\lambda+2+2}{2\lambda}=\dfrac{-2(\lambda-2)}{2\lambda}=\dfrac{2-\lambda}{\lambda}\\[2ex] x_2=\dfrac{-2\lambda+2-2}{2\lambda}=\dfrac{-2\lambda}{2\lambda}=-1\end{cases}$$

ii) Με ρίζες τις $x_1=-1$ και $x_2=-1+\dfrac{2}{\lambda}$ έχουμε:

$$|x_1-x_2|>1\Leftrightarrow\left|\frac{2-\lambda}{\lambda}-(-1)\right|>1\Leftrightarrow\left|\frac{2-\lambda}{\lambda}+1\right|>1\Leftrightarrow\left|\frac{2-\lambda}{\lambda}+\frac{\lambda}{\lambda}\right|>1\Leftrightarrow$$

$$\left|\frac{2-\lambda+\lambda}{\lambda}\right|>1\Leftrightarrow\left|\frac{2}{\lambda}\right|>1\Leftrightarrow\frac{2}{|\lambda|}>1\overset{|\lambda|>0}{\Leftrightarrow}2<|\lambda|\Leftrightarrow|\lambda|<2\Leftrightarrow-2<\lambda<2$$

Επειδή επιπλέον $\lambda\neq0$, τελικά ισχύει $|x_1-x_2|>1$ όταν: $\lambda\in(-2,0)\cup(0,2)$

ΑΣΚΗΣΗ 16 (4_2238)
Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\lambda x+\lambda^2-1=0$ (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.
α) Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δυο άνισες ρίζες.
Μονάδες 6
β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.
Μονάδες 6
γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ, οι δυο άνισες ρίζες της εξίσωσης ανήκουν στο διάστημα (-2,4).
Μονάδες 13

ΛΥΣΗ
α) Η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-2\lambda)^2-4\cdot1\cdot(\lambda^2-1)=4\lambda^2-4\lambda^2+4=4>0$$

Άρα η (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Οι ρίζες της (1) θα είναι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-2\lambda)\pm\sqrt{4}}{2\cdot 1}=\frac{2\lambda\pm 2}{2}=\frac{2(\lambda\pm 1)}{2}=\lambda\pm 1$$

Δηλαδή λ+1 και λ-1 οι άνισες ρίζες της (1).

γ) Αν οι δύο άνισες ρίζες της (1) ανήκουν στο διάστημα (-2,4) αυτό σημαίνει ότι:

$$(\lambda+1)\in(-2,4) \quad \text{και} \quad (\lambda-1)\in(-2,4)\Leftrightarrow$$

$$-2<\lambda+1<4 \quad \text{και} \quad -2<\lambda-1<4\Leftrightarrow$$

$$-2-1<\lambda+1-1<4-1 \quad \text{και} \quad -2+1<\lambda-1+1<4+1\Leftrightarrow$$

$$-3<\lambda<3 \quad \text{και} \quad -1<\lambda<5$$

Άρα $\lambda\in(-1,3)$ οι ζητούμενες τιμές του λ.

ΑΣΚΗΣΗ 17 (4_4659)

Δίνεται η εξίσωση: $\alpha x^2-5x+\alpha=0$, με παράμετρο $\alpha\neq 0$

1. Να αποδείξετε ότι αν $|\alpha|\leq\frac{5}{2}$ τότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς, που είναι αντίστροφοι μεταξύ τους.

(Μονάδες 10)

2. Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης, όταν $\alpha=2$

(Μονάδες 5)

3. Να λύσετε την εξίσωση: $2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$

(Μονάδες 10)

Λύση

1. Για την εξίσωση $\alpha x^2-5x+\alpha=0$ με παράμετρο $\alpha\neq 0$ έχω :

$a=\alpha$

$b=-5$

$c=\alpha$

άρα έχει διακρίνουσα

$$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\alpha\cdot\alpha=25-4\alpha^2$$

Για να έχει λοιπόν ρίζες πραγματικούς αριθμούς πρέπει :

$$\Delta\geq 0\Leftrightarrow 25-4\alpha^2\geq 0\Leftrightarrow 25\geq 4\alpha^2\Leftrightarrow\frac{25}{4}\geq\alpha^2\Leftrightarrow\frac{5^2}{2^2}\geq|\alpha|^2\Leftrightarrow\frac{5}{2}\geq|\alpha|$$

η οποία ισχύει άρα θα ισχύει και η αρχική .

Άρα αποδείξαμε ότι η εξίσωση θα έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς με γινόμενο ριζών

$$P=x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=\frac{\alpha}{\alpha}=1 \quad \text{δηλαδή } x_1\cdot x_2=1$$

οπότε οι ρίζες θα είναι αντίστροφοι πραγματικοί αριθμοί τους αφού έχουν γινόμενο την μονάδα .

2. Αν $\alpha=2$ η εξίσωση $\alpha x^2-5x+\alpha=0$ γίνεται $2x^2-5x+2=0$

Με $\alpha=2$ $\beta=-5$ και $\gamma=2$ άρα έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\cdot\gamma = (-5)^2 - 4\cdot 2\cdot 2 = 25 - 16 = 9 > 0$$

άρα έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες τις

$$x_{1,2} = \frac{-(-5)\pm\sqrt{9}}{2\cdot 2} = \begin{cases} \dfrac{5+3}{4} = 2 \\ \text{ή} \\ \dfrac{5-3}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{άρα } x = 2 \text{ ή } x = \frac{1}{2}$$

3. Για $x \neq 0$ έχουμε:

$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 5\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right) + 2 = 0 \quad \overset{\left(x+\frac{1}{x}\right)=\omega}{\Leftrightarrow} \quad 2\omega^2 - 5\omega + 2 = 0$$

Άρα $\alpha = 2$ $\beta = -5$ και $\gamma = 2$ άρα έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\cdot\gamma = (-5)^2 - 4\cdot 2\cdot 2 = 25 - 16 = 9 > 0$$

άρα έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες τις

$$\omega_{1,2} = \frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\cdot\alpha} \Longleftrightarrow \omega_{1,2} = \frac{-(-5)\pm\sqrt{9}}{2\cdot 2} = \begin{cases} \dfrac{5+3}{4} = 2 \\ \text{ή} \\ \dfrac{5-3}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

άρα

$\omega = 2$ ή	$\omega = \frac{1}{2}$
$x + \frac{1}{x} = 2 \quad (x \neq 0)$ $x\cdot x + x\cdot\frac{1}{x} = x\cdot 2$ $x^2 + 1 = 2x$ $x^2 - 2x + 1 = 0$ $(x-1)^2 = 0$ $x - 1 = 0$ $x = 1$	$x + \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \quad (x \neq 0)$ $2x\cdot x + 2x\cdot\frac{1}{x} = 2x\cdot\frac{1}{2}$ $2x^2 + 2 = x$ $2x^2 - x + 2 = 0$ $\alpha = 2$ $\beta = -1$ και $\gamma = 2$ άρα έχει διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\cdot\gamma = (-1)^2 - 4\cdot 2\cdot 2 = 1 - 16 = 9 < 0$ άρα το τριώνυμο δεν έχει ρίζες

άρα μοναδική ρίζα της εξίσωσης $x = 1$.

ΑΣΚΗΣΗ 18 (4_7577)

Δίνεται η ανίσωση: $|x+1|<4$ (1)

α) Να λύσετε την ανίσωση και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 7

β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1).

Μονάδες 3

γ) Να κατασκευάσετε ένα τριώνυμο της μορφής:

$$x^2+\beta x+\gamma$$

το οποίο να έχει ρίζες δύο από τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) και να έχει θετική τιμή, για κάθε $x \le 0$.

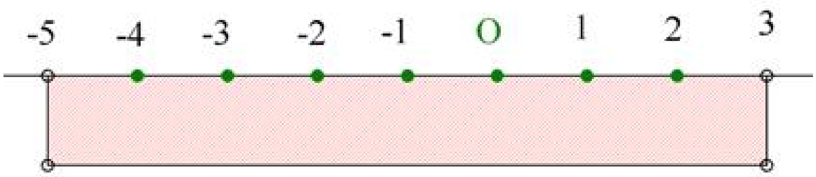
Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε ότι αν $\theta > 0$, $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$ άρα

$$|x+1| < 4 \Leftrightarrow -4 < x+1 < 4$$

και αφαιρώντας από όλα τα μέλη της ανισότητας τη μονάδα παίρνουμε $-5 < x < 3$ που είναι και η λύση της ανίσωσης (1) .



β) Μεταξύ των λύσεων της ανίσωσης (1) βρίσκονται οι ακέραιοι $-4,-3,-2,-1,0,1,2$

γ) Επειδή $\alpha = 1 > 0$ το τριώνυμο είναι θετικό στα διαστήματα που είναι εκτός των ριζών, άρα κάνουμε τις εξής σκέψεις:

Περίπτωση 1η

Έστω ότι η πρώτη ρίζα είναι το x = 0, τότε η δεύτερη ρίζα, είτε θα είναι θετική $+|\rho_2|$ (πινακάκι 1), είτε αρνητική $-|\rho_1|$ (πινακάκι 2) (με $\rho_1 \cdot \rho_2 \ne 0$), πάντως και τις δύο περιπτώσεις τις απορρίπτουμε, αφού μηδενίζουν το τριώνυμο, ενώ η άσκηση το θέλει θετικό.

Δείτε τους παρακάτω πίνακες προσήμων:

x	$-\infty$		0		$+\lvert\rho_2\rvert$		$+\infty$
$x^2+\beta x+\gamma$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(εδώ έχουμε πρόβλημα για x = 0 που μηδενίζεται το τριώνυμο, ενώ από τα δεδομένα της άσκησης θέλουμε να είναι θετικό).

x	$-\infty$		$-\lvert\rho_1\rvert$		0		$+\infty$
$x^2+\beta x+\gamma$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(προφανώς για $x<0$ υπάρχει διάστημα που το τριώνυμο είναι αρνητικό, άρα απορρίπτεται επειδή θέλουμε να ισχύει $x^2+\beta x+\gamma>0$ για κάθε $x\leq 0$. Προφανώς ισχύει και ο ίδιος λόγος που γράψαμε στο προηγούμενο πίνακα προσήμων)

Άρα το μηδέν δεν μπορεί να είναι ρίζα του τριωνύμου, οπότε αναζητούμε ρίζες ρ_1,ρ_2 ,όπου $\rho_1\cdot\rho_2\neq 0$, στις παρακάτω περιπτώσεις.

Περίπτωση 2η

Έστω ότι έχουμε ετερόσημες ρίζες ρ_1,ρ_2, τότε δείτε τον παρακάτω πίνακα προσήμων

x	$-\infty$		$-\lvert\rho_1\rvert$		0		$+\lvert\rho_2\rvert$		$+\infty$
$x^2+\beta x+\gamma$		$+$	0		$-$		0	$+$	

Προφανώς στο διάστημα $(-|\rho_1|,0)$ το τριώνυμο είναι αρνητικό, άρα απορρίπτεται αυτή η περίπτωση αφού θέλουμε το τριώνυμο πάντα θετικό στο διάστημα $(-\infty,0]$.

Περίπτωση 3η

Έστω ότι και οι δύο ρίζες ρ_1,ρ_2 είναι αρνητικές, τότε δείτε τον παρακάτω πίνακα προσήμων

x	$-\infty$		$-\lvert\rho_1\rvert$		$-\lvert\rho_2\rvert$		0	$+\infty$
$x^2+\beta x+\gamma$		$+$	0	$-$	0	$+$		

Ανάμεσα στις ρίζες το τριώνυμο είναι αρνητικό, άρα απορρίπτεται και αυτή η περίπτωση.

Περίπτωση 4η

Έστω ότι και οι δύο ρίζες είναι θετικές, τότε όπως θα δείτε και παρακάτω είναι η δεκτή αυτή η περίπτωση.

x	$-\infty$	0		$+\lvert\rho_1\rvert$		$+\lvert\rho_2\rvert$		$+\infty$
$x^2+\beta x+\gamma$			$+$	0	$-$	0	$+$	

άρα για κάθε $x\leq 0$ έχουμε $x^2+\beta x+\gamma>0$, οπότε είναι η ζητούμενη περίπτωση.

Οπότε έχουμε δύο ρίζες θετικές, άρα τα πιθανά ζεύγη είναι:

$$\rho_1=1\,,\ \rho_2=2\ \text{ ή }\ \rho_1=1\,,\ \rho_2=1\ \text{ ή }\ \rho_1=2\,,\ \rho_2=2$$

Τράπεζα θεμάτων – lisari team

Από τους τύπους του Vieta προκύπτει σε κάθε περίπτωση η εξίσωση:

Α. $S = \rho_1 + \rho_2 \Rightarrow \frac{-\beta}{1} = 1 + 2 \Rightarrow \beta = -3$ και $P = \rho_1 \cdot \rho_2 \Rightarrow \frac{\gamma}{1} = 1 \cdot 2 \Rightarrow \gamma = 2$

δηλαδή $x^2 - 3x + 2 = 0$

Β. $S = \rho_1 + \rho_2 \Rightarrow \frac{-\beta}{1} = 1 + 1 \Rightarrow \beta = -2$ και $P = \rho_1 \cdot \rho_2 \Rightarrow \frac{\gamma}{1} = 1 \cdot 1 \Rightarrow \gamma = 1$

δηλαδή $x^2 - 2x + 1 = 0$

Γ. $S = \rho_1 + \rho_2 \Rightarrow \frac{-\beta}{1} = 2 + 2 \Rightarrow \beta = -4$ και $P = \rho_1 \cdot \rho_2 \Rightarrow \frac{\gamma}{1} = 2 \cdot 2 \Rightarrow \gamma = 4$

δηλαδή $x^2 - 4x + 4 = 0$

4.2: Ανισώσεις 2ου βαθμού

ΑΣΚΗΣΗ 1 (2_478)

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x + (\lambda^2 + \lambda - 1) = 0 \ (1)$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

i. Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ, ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές.

(Μονάδες 12)

ii. Να λύσετε την ανίσωση: $S^2 - P - 2 \geq 0$, όπου S και P είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της (1).

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

i. Για να έχει η (1) πραγματικές λύσεις πρέπει $\Delta \geq 0$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-\lambda)^2 - 4(\lambda^2 + \lambda - 1) = \lambda^2 - 4\lambda^2 - 4\lambda + 4 = -3\lambda^2 - 4\lambda + 4$$

άρα,

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -3\lambda^2 - 4\lambda + 4 \geq 0$$

Το τριώνυμο $-3\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4(-3)4 = 16 + 48 = 64 > 0$$

και ρίζες

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-4) \pm 8}{2(-3)} = \frac{4 \pm 8}{-6} = \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{4+8}{-6} = -2 \\ \lambda_2 = \dfrac{4-8}{-6} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Ο πίνακας προσήμων είναι,

λ	$-\infty$		-2		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$-3\lambda^2 - 4\lambda + 4$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Επομένως,

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \in \left[-2, \frac{2}{3}\right]$$

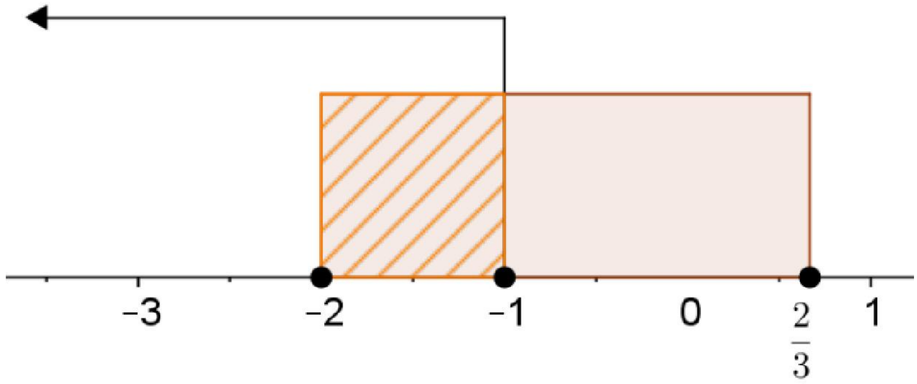
ii. Από τους τύπους Vieta έχουμε:

$$S = -\frac{\beta}{\alpha} = \lambda \ \text{ και } \ P = \frac{\gamma}{\alpha} = \lambda^2 + \lambda - 1$$

Επομένως,

$$S^2 - P - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (\lambda^2 + \lambda - 1) - 2 \geq 0 \Leftrightarrow -\lambda + 1 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq -1.$$

Όμως πρέπει $\lambda \in \left[-2, \frac{2}{3}\right]$ ώστε να έχει η εξίσωση πραγματικές ρίζες , οπότε



$$S^2 - P - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \in [-2, -1]$$

ΑΣΚΗΣΗ 2 (2_484)

i. Να λύσετε τις ανισώσεις $|2x-5| \leq 3$ και $2x^2 - x - 1 \geq 0$

(Μονάδες 16)

ii. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος α).

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

i. Έχουμε,

$$|2x-5| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq 2x-5 \leq 3 \Leftrightarrow -3+5 \leq 2x \leq 3+5 \Leftrightarrow 2 \leq 2x \leq 8 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4$$

Για να λύσουμε την $2x^2 - x - 1 \geq 0$, λύνουμε αρχικά την αντίστοιχη εξίσωση και στη συνέχεια φτιάχνουμε τον πίνακα προσήμου.

Η διακρίνουσα είναι

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1 - 4(-1)2 = 9$$

και οι ρίζες είναι

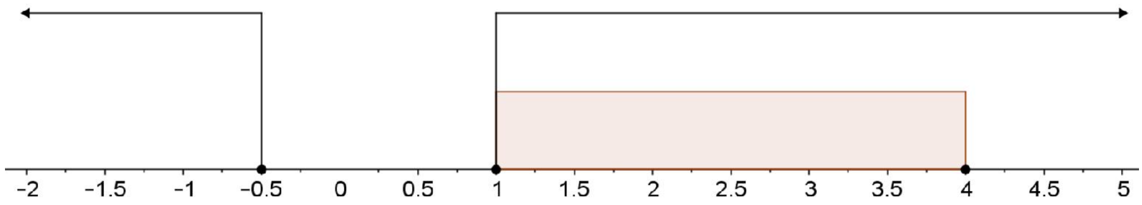
$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{1+3}{4} = 1 \\ x_2 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ο πίνακας προσήμων είναι

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$2x^2 - x - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$2x^2 - x - 1 \geq 0 \text{ για } x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty)$$

Οι κοινές λύσεις των ανισώσεων είναι τα $x \in [1,4]$, όπως φαίνεται και παρακάτω



ΑΣΚΗΣΗ 3 (2_490)

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 1$.

i. Να βρείτε τις ρίζες του

(Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες: $2x^2 - 3x + 1 < 0$

(Μονάδες 5)

iii. Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{1}{\sqrt{2}}$ είναι λύσεις της ανίσωσης:

$$2x^2 - 3x + 1 < 0$$

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

i. Η εξίσωση έχει

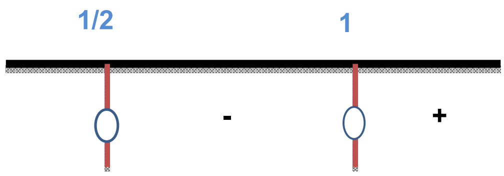
$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 > 0,$$

οπότε το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, τις

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{3+1}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{3-1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

ii. Έχουμε από τον πίνακα προσήμων

$2x^2 - 3x + 1 < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$



iii. Για να ελέγξω εάν $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}$ είναι λύσεις της $2x^2 - 3x + 1 < 0$ αρκεί να ελέγξω εάν ανήκουν στο $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Είναι

$$\sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4} \Rightarrow 1 < \sqrt{3} < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1 \text{ άρα } \frac{\sqrt{3}}{2} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

Έχουμε ότι:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Είναι

$$\sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4} \Rightarrow 1 < \sqrt{2} < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1, \text{ άρα } \frac{1}{\sqrt{2}} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

Οπότε οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ανήκουν στο διάστημα $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ των λύσεων που βρήκαμε στο (β) και συνεπώς είναι λύσεις της ανίσωσης $2x^2 - 3x + 1 < 0$

ΑΣΚΗΣΗ 4 (2_498)

α) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{|x+1|}{3} - \frac{|x+1|+4}{5} = \frac{2}{3}$.

Μονάδες 9

β) Να λύσετε την ανίσωση: $-x^2 + 2x + 3 \le 0$.

Μονάδες 9

γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος.

Μονάδες 7

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) Έχουμε:

$$\frac{|x+1|}{3} - \frac{|x+1|+4}{5} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 5|x+1| - 3(|x+1|+4) = 5 \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow 5|x+1| - 3|x+1| - 12 = 10$$

$$\Leftrightarrow |x+1| = 11 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = -11 \\ x+1 = \ \ 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -12 \\ x = \ \ 10 \end{cases}$$

β) Το τριώνυμο $-x^2 + 2x + 3$ έχει $\Delta = 16$, και ρίζες τις :

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-2+4}{-2} = -1 \\ x_2 = \frac{-2-4}{-2} = 3 \end{cases}$$

Επειδή $\alpha = -1 < 0$ ο πίνακας προσήμου του τριωνύμου είναι:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-x^2 + 2x + 3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

επομένως η ανίσωση αληθεύει αν $x \in (-\infty,-1) \cup (3,+\infty)$

γ) Παρατηρούμε ότι $-12 \in (-\infty, -1]$ και $10 \in [3, +\infty)$ δηλαδή και οι δυο λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος.

ΑΣΚΗΣΗ 5 (2_1277)

Δίνονται οι ανισώσεις $-x^2 + 5x - 6 < 0$ (1) και $x^2 - 16 \le 0$ (2)

α) Να βρεθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2)

Μονάδες 12

β) Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $-x^2+5x-6$ έχει συντελεστές $\alpha=-1$, $\beta=5$ και $\gamma=-6$ με $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=5^2-4\cdot(-1)\cdot(-6)=25-24=1$ και ρίζες τους αριθμούς

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-5\pm\sqrt{1}}{2\cdot(-1)}=\frac{-5\pm1}{-2}=\begin{cases}\dfrac{-5+1}{-2}=\dfrac{-4}{-2}=2\\[2mm] \dfrac{-5-1}{-2}=\dfrac{-6}{-2}=3\end{cases}$$

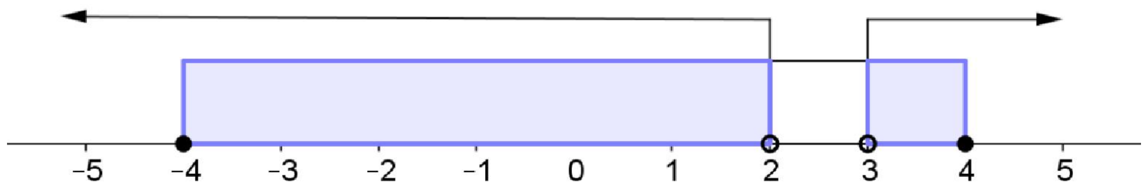
Κάνουμε τον πίνακα προσήμων :

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
$-x^2+5x-6$	$-$	0	$+$	0	$-$

και βρίσκουμε ότι οι λύσεις είναι $x\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$

Για την ανίσωση (2) έχουμε :

$$x^2-16\le0\Leftrightarrow x^2\le16\Leftrightarrow\sqrt{x^2}\le\sqrt{16}\Leftrightarrow|x|\le4\Leftrightarrow-4\le x\le4$$



β) Στο παρακάτω διάγραμμα βλέπουμε ότι οι κοινές λύσεις των ανισώσεων είναι :
$x\in[-4,2)\cup(3,4]$

Παρόμοια Άσκηση

Η παραπάνω άσκηση μοιάζει με την άσκηση 11(Α Ομάδας) της παραγράφου 4.2 του σχολικού βιβλίου.

ΑΣΚΗΣΗ 6 (2_1067)

Δίνεται η παράσταση : $K=\dfrac{x^2-4x+4}{2x^2-3x-2}$

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο : $2x^2-3x-2$.

(Μονάδες 10)

β) Για ποιες τιμές του $x\in R$ ορίζεται η παράσταση Κ; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

(Μονάδες 7)

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση Κ.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου $2x^2 - 3x - 2$ είναι:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4\cdot 2\cdot(-2) = 9 + 16 = 25 > 0$$

και συνεπώς το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2\cdot 2} = \frac{3 \pm 5}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3+5}{4} = 2 \\ x_2 = \dfrac{3-5}{4} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Τότε το τριώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής:

$$2(x - x_1)(x - x_2) = 2(x-2)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x-2)(2x+1)$$

β) Η παράσταση Κ ορίζεται για εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ο παρονομαστής της παραμένει διάφορος του μηδενός. Οι ρίζες του παρονομαστή, είναι οι ρίζες του τριωνύμου του πρώτου ερωτήματος, δηλαδή οι $x_1 = 2$ και $x_2 = -\frac{1}{2}$. Συνεπώς η παράσταση Κ ορίζεται για κάθε $x \neq 2$ και $x \neq -\frac{1}{2}$ ή $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$.

γ) Η παράσταση θα απλοποιηθεί, παραγοντοποιώντας αριθμητή και παρονομαστή. Λόγω και του πρώτου ερωτήματος, έχουμε:

$$K = \frac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 - 3x - 2} = \frac{(x-2)^2}{(x-2)(2x+1)} = \frac{x-2}{2x+1}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7 (2_1097)

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + \lambda x - 5$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Αν μια ρίζα του τριωνύμου είναι ο αριθμός $x_0 = 1$, να προσδιορίσετε την τιμή του λ

Μονάδες 12

β) Για λ = 3, να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Επειδή ο αριθμός $x_0 = 1$ είναι ρίζα του τριωνύμου $2x^2 + \lambda x - 5$ θα την επαληθεύει.

Οπότε έχουμε:

$$2\cdot 1^2 + \lambda\cdot 1 - 5 = 0 \Leftrightarrow 2 + \lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3$$

β) Βάζουμε όπου λ = 3 και έχουμε το τριώνυμο $2x^2 + 3x - 5$ με διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 3^2 - 4\cdot 2\cdot(-5) = 9 + 40 = 49$$

και ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2\cdot 2} = \frac{-3 \pm 7}{4} = \begin{cases} \dfrac{-3+7}{4} = \dfrac{4}{4} = 1 \\ \dfrac{-3-7}{4} = \dfrac{-10}{4} = \dfrac{-5}{2} \end{cases}$$

Άρα

$$2x^2+3x-5=2(x-1)\left(x-\left(-\frac{5}{2}\right)\right)=2(x-1)\left(x+\frac{5}{2}\right)=(x-1)\left(2\cdot x+2\cdot\frac{5}{2}\right)=(x-1)(2x+5)$$

ΑΣΚΗΣΗ 8 (2_1278)

Δίνεται πραγματικός αριθμός x, για τον οποίο ισχύει: $d(x,-2)<1$.

Να δείξετε ότι:

α) $-3<x<-1$

Μονάδες 15

β) $x^2+4x+3<0$

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Η απόσταση των αριθμών α και β, $d(\alpha,\beta)$ δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{d(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|}$$

Οπότε $d(x,-2)=|x-(-2)|=|x+2|$

Άρα ,

$$d(x,-2)<1\Leftrightarrow|x+2|<1$$

Με τη βοήθεια της ιδιότητας $|x|<\rho\Leftrightarrow-\rho<x<\rho$ έχουμε:

$$|x+2|<1\Leftrightarrow-1<x+2<1\Leftrightarrow-1-2<x+2-2<1-2\Leftrightarrow-3<x<-1$$

β) Ισχύει ότι:

$$x<-1\Leftrightarrow x+1<0 \text{ και } -3<x\Leftrightarrow x+3>0$$

Το τριώνυμο x^2+4x+3 έχει

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=16-12=4>0$$

και ρίζες

$$x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-4+2}{2}=-1 \text{ και } x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-4-2}{2}=-3$$

Επομένως:

$$x^2+4x+3=(x+1)\cdot(x+3)<0$$

ως γινόμενο ετερόσημων αριθμών.

ΑΣΚΗΣΗ 9 (2_1281)

Δίνεται το τριώνυμο $-x^2+\left(\sqrt{3}-1\right)x+\sqrt{3}$

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$$\Delta=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$$

Μονάδες12

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{\Delta = \beta^2 - 4\cdot\alpha\cdot\gamma}$$

Οπότε έχουμε,

$$\Delta = \left(\sqrt{3}-1\right)^2 - 4\cdot(-1)\cdot\sqrt{3} = \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{3}+1+4\sqrt{3} = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{3}+1 = \left(\sqrt{3}+1\right)^2$$

β) Η παραγοντοποίηση του τριωνύμου με $\Delta > 0$ γίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)}$$

Το τριώνυμο $-x^2 + \left(\sqrt{3}-1\right)x + \sqrt{3}$ έχει $\Delta = \left(\sqrt{3}+1\right)^2 > 0$ και ρίζες $x_1 = -1$ και $x_2 = \sqrt{3}$.

Επομένως:

$$-x^2 + \left(\sqrt{3}-1\right)x + \sqrt{3} = -(x+1)\cdot\left(x-\sqrt{3}\right)$$

ΑΣΚΗΣΗ 10 (2_1297)

α) Να λύσετε την ανίσωση:

$$3x^2 - 4x + 1 \le 0$$

Μονάδες 12

β) Αν α, β δύο αριθμοί που είναι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\dfrac{3\alpha+6\beta}{9}$ είναι επίσης λύση της ανίσωσης.

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα

$$\Delta = (-4)^2 - 4\cdot 3\cdot 1 = 16 - 12 = 4 > 0$$

και ρίζες

$$x_1 = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad x_2 = 1$$

Το πρόσημό του φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$3x^2-4x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από τον πίνακα φαίνεται ότι η ανίσωση $3x^2 - 4x + 1 \le 0$ έχει λύσεις τα $x \in R$ για τα οποία ισχύει $\frac{1}{3} \le x \le 1$, δηλαδή τα $x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$

β) Επειδή α, β αριθμοί που είναι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης, άρα

$$\frac{1}{3} \le \alpha \le 1 \Leftrightarrow \cancel{3} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} \le 3 \cdot \alpha \le 3 \cdot 1 \Leftrightarrow 1 \le 3\alpha \le 3 \quad ①$$

και

$$\frac{1}{3} \le \beta \le 1 \Leftrightarrow \overset{2}{\cancel{6}} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} \le 6 \cdot \beta \le 6 \cdot 1 \Leftrightarrow 2 \le 6\beta \le 6 \quad ②$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των ①, ② προκύπτει:

$$1+2 \le 3\alpha + 6\beta \le 3+6 \Leftrightarrow 3 \le 3\alpha+6\beta \le 9 \Leftrightarrow \frac{3}{9} \le \frac{3\alpha+6\beta}{9} \le \frac{9}{9} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \le \frac{3\alpha+6\beta}{9} \le 1$$

Επειδή $\frac{3\alpha+6\beta}{9} \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$, άρα και ο αριθμός $\frac{3\alpha+6\beta}{9}$ είναι επίσης λύση της ανίσωσης.

ΑΣΚΗΣΗ 11 (2_1512)

α) Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 - x - 2 = 0$

Μονάδες 8

β) Να λυθεί η ανίσωση: $x^2 - x - 2 > 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 12

γ) Να τοποθετήσετε το $-\frac{4}{3}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι το $-\frac{4}{3}$ λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β); Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Μονάδες 5

Λύση

α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - x - 2$ είναι:

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 > 0$$

Οπότε η εξίσωση $x^2 - x - 2 = 0$ έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες τις:

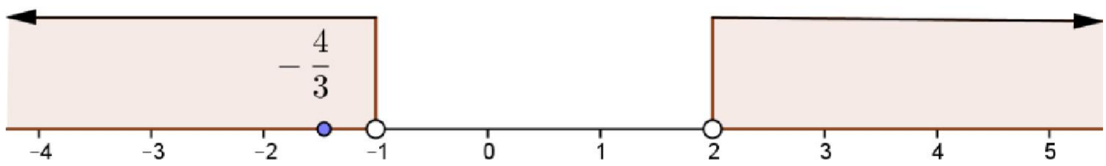
$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

Άρα οι λύσεις της ζητούμενης εξίσωσης είναι οι $x_1 = -1$ ή $x_2 = 2$.

β) Το τριώνυμο $x^2 - x - 2$ έχει $\Delta = 9 > 0$ και λύσεις τις $x_1 = -1$ ή $x_2 = 2$, επομένως ο πίνακας προσήμου του, γίνεται:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x^2 - x - 2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης $x^2 - x - 2 > 0$ είναι: $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ και η παράσταση αυτών στον άξονα των πραγματικών αριθμών γίνεται ως:



γ) Παρατηρούμε ότι $-\frac{4}{3} \in (-\infty, -1)$, επομένως είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β).

ΑΣΚΗΣΗ 12 (2_1544)

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 + 4x + 5 > 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Μονάδες 10

β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση:

$$B = |x^2 + 4x + 5| - |x^2 + 4x + 4|$$

Μονάδες 15

<u>Λύση</u>

α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 + 4x + 5$ είναι

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 4 \cdot 5 = 16 - 20 = -4 < 0$$

το οποίο σημαίνει ότι είναι παντού ομόσημο με τον συντελεστή του x^2, δηλαδή:

$$x^2 + 4x + 5 > 0 \text{ για κάθε } x \in R$$

β) Ισχύει ότι:

$$x^2 + 4x + 5 > 0 \text{ για κάθε } x \in R$$

οπότε

$$|x^2 + 4x + 5| = x^2 + 4x + 5$$

και

$$x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in R,$$

οπότε

$$|x^2 + 4x + 4| = x^2 + 4x + 4$$

Η παράσταση Β γίνεται:

$$B = x^2 + 4x + 5 - (x^2 + 4x + 4) = x^2 + 4x + 5 - x^2 - 4x - 4 = 1$$

Άρα $B = 1$.

ΑΣΚΗΣΗ 13 (2_3380)

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + 9x - 12$, $x \in R$

α. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\le 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 13

β. Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση του ερωτήματος (α). Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α. Η διακρίνουσα του τριωνύμου $3x^2+9x-12$ είναι

$$\Delta=9^2-4\cdot 3\cdot(-12)=81+144=225>0,$$

άρα οι ρίζες του τριωνύμου είναι

$$x_{1,2}=\frac{-9\pm 15}{6} \text{ άρα } x_1=1 \text{ και } x_2=-4$$

Το πρόσημο του τριωνύμου $f(x)=3x^2+9x-12$, φαίνεται στον διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$3x^2+9x-12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Οπότε έχουμε

$$f(x)\le 0 \Leftrightarrow -4\le x\le 1 \Leftrightarrow x\in[-4,1]$$

β. Για να είναι ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ λύση της ανίσωσης $f(x)\le 0$ αρκεί ο $\sqrt[3]{2}$ να ανήκει στο διάστημα $[-4,1]$. Έχουμε $\sqrt[3]{2}>0$, άρα αρκεί $\sqrt[3]{2}\le 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2}^3\le 1^3 \Leftrightarrow 2\le 1$ το οποίο είναι άτοπο. Άρα ο $\sqrt[3]{2}$ δεν είναι λύση της ανίσωσης $f(x)\le 0$

ΑΣΚΗΣΗ 14 (4_1874)

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-2(\lambda-1)x+\lambda+5=0 \quad (1)$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι: $\Delta=4\lambda^2-12\lambda-16$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 10)

γ) Αν η εξίσωση (1) έχει ρίζες τους αριθμούς x_1,x_2 και $d(x_1,x_2)$ είναι η απόσταση των x_1,x_2 στον άξονα των πραγματικών αριθμών, να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει: $d(x_1,x_2)=\sqrt{24}$.

(Μονάδες 8)

Λύση

α) Η εξίσωση (1) είναι στη μορφή $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, με $\alpha=1$, $\beta=-2(\lambda-1)$ και $\gamma=\lambda+5$.

Η διακρίνουσα είναι:

$$\Delta=\left(-2(\lambda-1)\right)^2-4\cdot 1\cdot(\lambda+5)=4(\lambda-1)^2-4=4\lambda^2-8\lambda+4-4\lambda-20=4\lambda^2-12\lambda-16$$

β) Η εξίσωση θα έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν η διακρίνουσά της είναι θετική. Οπότε,

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 12\lambda - 16 > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 > 0 .$$

Το τριώνυμο $\lambda^2 - 3\lambda - 4$ ως προς λ έχει διακρίνουσα $\Delta_1 = 25$ και ρίζες τις $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 4$ και $\alpha = 1 > 0$. Ένα τριώνυμο είναι ομόσημο του α έξω από το διάστημα που ορίζουν οι ρίζες του.

Οπότε:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 > 0 \Leftrightarrow \lambda < -1 \text{ ή } \lambda > 4$$

γ) Εφόσον η εξίσωση έχει δυο ρίζες, έχουμε ότι: $\lambda < -1$ ή $\lambda > 4$. Τότε, επειδή η απόσταση δύο αριθμών πάνω στην ευθεία των πραγματικών ισούται με την απόλυτη τιμή της διαφοράς τους, έχουμε:

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{24} \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = \sqrt{24} \Leftrightarrow$$
$$|x_1 - x_2|^2 = \left(\sqrt{24}\right)^2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 24 \Leftrightarrow$$
$$x_1^2 - 2x_2x_1 + x_2^2 = 24 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_2x_1 - 2x_2x_1 = 24 \Leftrightarrow$$
$$(x_1 + x_2)^2 - 4x_2x_1 = 24 \qquad (2)$$

Από τους τύπους Vieta στην (1) έχουμε:

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-2(\lambda - 1)}{1} = 2(\lambda - 1) \text{ και } x_1x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda + 5}{1} = \lambda + 5$$

Τότε η σχέση (2) γράφεται:

$$(x_1 + x_2)^2 - 4x_2x_1 = 24 \Leftrightarrow$$
$$\left(2(\lambda - 1)\right)^2 - 4(\lambda + 5) = 24 \Leftrightarrow$$
$$4(\lambda - 1)^2 - 4\lambda - 20 - 24 = 0 \Leftrightarrow$$
$$4\left(\lambda^2 - 2\lambda + 1\right) - 4\lambda - 44 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 - \lambda - 11 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta_2 = 49$ και ρίζες

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases},$$

οι οποίες είναι και οι δύο δεκτές, αφού $\lambda_1 = 5 > 4$ και $\lambda_2 = -2 < -1$.

ΑΣΚΗΣΗ 15 (4_2244)

Δίνονται οι ανισώσεις:

$$|x - 2| < 3 \text{ και } x^2 - 2x - 8 \le 0 .$$

α) Να βρείτε τις λύσεις τους.

Μονάδες 10

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (-1,\ 4]$.

Μονάδες 5

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\dfrac{\rho_1+\rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Για θ>0 ισχύει: $\boxed{|x|<\theta \Leftrightarrow -\theta<x<\theta}$

Έχουμε,

$$|x-2|<3 \Leftrightarrow -3<x-2<3 \Leftrightarrow -3+2<x<3+2 \Leftrightarrow -1<x<5$$

Για να λύσουμε την ανίσωση , $x^2-2x-8 \le 0$, πρέπει πρώτα να λύσουμε την εξίσωση $x^2-2x-8=0$. Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι,

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-8)=4+32=36>0$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες

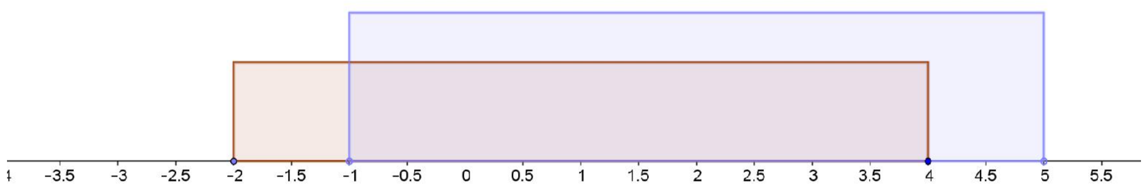
$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{36}}{2\cdot1}=\frac{2\pm6}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{2+6}{2}=\dfrac{8}{2}=4\\ x_2=\dfrac{2-6}{2}=\dfrac{-4}{2}=-2\end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
x^2-2x-8		+	0	-	0	+	

Άρα $x^2-2x-8\le0 \Leftrightarrow -2\le x\le4$, δηλαδή $x\in[-2,4]$

β) Οι λύσεις των ανισώσεων παριστάνονται στον παρακάτω άξονα:



άρα $x\in(-1,4]$ οι κοινές λύσεις.

γ) Έχουμε,

$$\left.\begin{aligned}-1<\rho_1\le4\\-1<\rho_2\le4\end{aligned}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow} -1-1<\rho_1+\rho_2\le4+4 \Leftrightarrow -2<\rho_1+\rho_2\le8 \overset{\div2}{\Leftrightarrow} -1<\frac{\rho_1+\rho_2}{2}\le4$$

Άρα, $\dfrac{\rho_1+\rho_2}{2}\in(-1,4]$

ΑΣΚΗΣΗ 16 (4_2255)

Δίνονται οι ανισώσεις: $2\le|x|\le3$ και $x^2-4x<0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους.

Μονάδες 10

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [2,3]$

Μονάδες 5

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Για $\theta > 0$ ισχύουν

$$\boxed{|x| \le \theta \Leftrightarrow -\theta \le x \le \theta} \text{ και } \boxed{|x| \ge \theta \Leftrightarrow x \le -\theta \text{ ή } x \ge \theta}$$

Έχουμε ,

$$2 \le |x| \le 3 \Leftrightarrow$$
$$|x| \ge 2 \quad \text{και} \quad |x| \le 3 \Leftrightarrow$$
$$\{x \le -2 \text{ ή } x \ge 2\} \quad \text{και} \quad \{-3 \le x \le 3\} \Leftrightarrow$$
$$-3 \le x \le -2 \quad \text{ή} \quad 2 \le x \le 3$$

Δηλαδή, $x \in [-3,-2] \cup [2,3]$

Για να λύσουμε την ανίσωση $x^2 - 4x < 0$, λύνουμε πρώτα την εξίσωση $x^2 - 4x = 0$

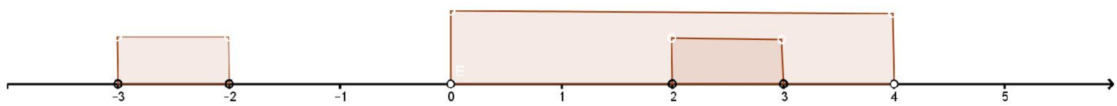
Έχουμε, $x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x-4=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=4$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
x^2-4x		+	0	-	0	+	

Άρα, $x^2 - 4x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 4$, δηλαδή $x \in (0,4)$

β) Οι λύσεις των ανισώσεων παριστάνονται στον παρακάτω άξονα:



Άρα, $x \in [2,3]$ οι κοινές λύσεις των ανισώσεων.

γ) Είναι:

$$\left.\begin{array}{l} 2 \le \rho_1 \le 3 \\ 2 \le \rho_2 \le 3 \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} 2+2 \le \rho_1 + \rho_2 \le 3+3 \Leftrightarrow 4 \le \rho_1 + \rho_2 \le 6 \overset{\div 2}{\Leftrightarrow} 2 \le \frac{\rho_1+\rho_2}{2} \le 3$$

Άρα,

$$\frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \in [2,3]$$

ΑΣΚΗΣΗ 17 (4_2273)

Δίνονται οι ανισώσεις: $|x+1| \le 2$ και $x^2 - x - 2 > 0$.

α) Να λύσετε τις ανισώσεις.

Μονάδες 10

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [-3,-1)$.

Μονάδες 5

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι: $(\rho_1 - \rho_2) \in (-2,2)$

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Για $\theta > 0$ ισχύει:

$$|x| \le \theta \Leftrightarrow -\theta \le x \le \theta .$$

Έχουμε,

$$|x+1| \le 2 \Leftrightarrow -2 \le x+1 \le 2 \Leftrightarrow -2-1 \le x+1-1 \le 2-1 \Leftrightarrow -3 \le x \le 1$$

Επίσης για να λύσουμε την ανίσωση $x^2 - x - 2 > 0$, θα λύσουμε αρχικά την αντίστοιχη εξίσωση, δηλαδή την $x^2 - x - 2 = 0$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι,

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 > 0,$$

οπότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες και άνισες

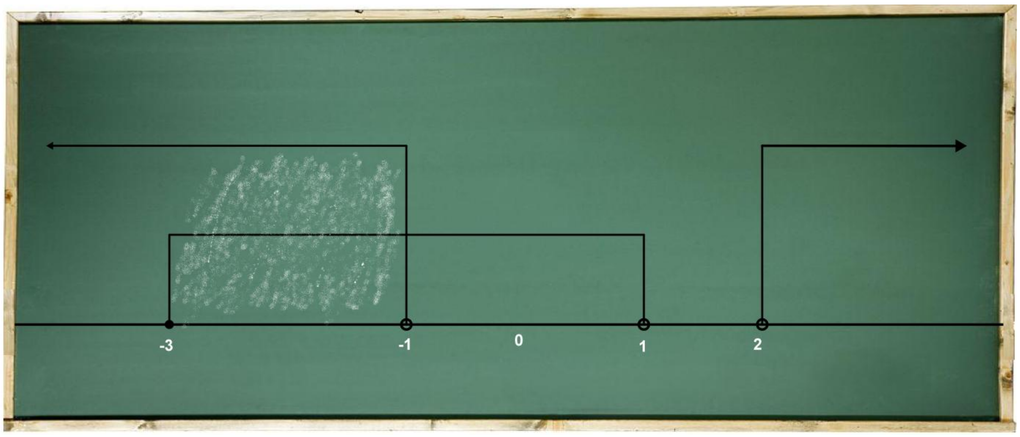
$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1+3}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ x_2 = \dfrac{1-3}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x^2 - x - 2$		+	0	−	0	+	

άρα $x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow \{x < -1 \text{ ή } x > 2\}$, δηλαδή $x \in (-\infty,-1) \cup (2,+\infty)$

β) Οι λύσεις των ανισώσεων παριστάνονται στον παρακάτω άξονα:



Επομένως οι κοινές λύσεις των ανισώσεων ανήκουν στο κλειστό διάστημα $[-3,-1)$

γ) Έχουμε,

$-3 \le \rho_2 < -1 \Rightarrow 1 < -\rho_2 \le 3$ (1) και $-3 \le \rho_1 < -1$ (2)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2):

$$-3+1 < \rho_1 - \rho_2 < -1+3 \Rightarrow -2 < \rho_1 - \rho_2 < 2$$

άρα $\rho_1 - \rho_2 \in (-2,2)$

ΑΣΚΗΣΗ 18 (4_2336)

1. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 5x + 6$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

2. Δίνεται η εξίσωση $\frac{1}{4}x^2 + (2-\lambda)x + \lambda - 2 = 0$ (1) με παράμετρο λ.

i) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in (-\infty,2) \cup (3,+\infty)$, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

(Μονάδες 10)

ii) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι ρίζες της (1) είναι ομόσημοι αριθμοί.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

1. Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα του τριωνύμου ώστε να ελέγξουμε αν έχει πραγματικές ρίζες,

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1 > 0$$

άρα έχει δύο πραγματικές άνισες ρίζες:

$$x_1 = \frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2} = 2 \text{ και } x_2 = \frac{-(-5)+\sqrt{1}}{2} = 3$$

Έτσι έχουμε,

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6		+	0	−	0	+	

Άρα είναι, $x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$ και $x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow x \in (2, 3)$

2. i) Η εξίσωση θα έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες αν,

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)^2 - 4\frac{1}{4}(\lambda - 2) > 0 \Leftrightarrow 4 - 4\lambda + \lambda^2 - \lambda + 2 > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 > 0$$

οπότε θεωρώντας το τριώνυμο του 1. ως τριώνυμο του λ, πρέπει $\lambda \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

ii) Αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ οι ρίζες της εξίσωσης (1) και είναι ομόσημοι τότε πρέπει

$$P = x_1 x_2 > 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda - 2}{\frac{1}{4}} > 0 \Leftrightarrow \lambda - 2 > 0 \Leftrightarrow \lambda > 2 \quad (2)$$

και επιπλέον η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty) \quad (3)$$

επομένως από τις (2) και (3) πρέπει $\lambda \in [3, +\infty)$

ΑΣΚΗΣΗ 19 (4_4542)

1. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 < x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

(Μονάδες 8)

2. Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $0 < \alpha < 1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς: 0 , 1, α , α^2 , $\sqrt{\alpha}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος 1.

(Μονάδες 10)

ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα: $\sqrt{1+\alpha} < 1 + \sqrt{\alpha}$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

1. Έχουμε

$$x^2 < x \Leftrightarrow x^2 - x < 0$$

ενώ η εξίσωση

$$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1$$

Οπότε για την ανίσωση $2^{ου}$ βαθμού έχουμε

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
x^2-x	+	0	–	0	+	

Άρα $x^2 - x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

2.i) Από το ερωτ.**1.** θεωρώντας όπου α το x έχουμε $0 < \alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha^2 < \alpha$

Σύμφωνα με εφαρμογή του βιβλίου

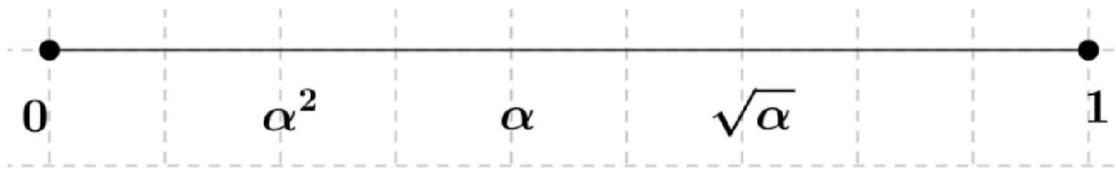
$0 < \alpha^2 < \alpha \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2} < \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow |\alpha| < \sqrt{\alpha} \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \alpha < \sqrt{\alpha}$

Ακόμη,

$$0 < \alpha < 1 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} < \sqrt{1} \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} < 1$$

Άρα είναι

$$0 < \alpha^2 < \alpha < \sqrt{\alpha} < 1$$



ii) Αφού $\sqrt{1+\alpha} > 0$, και $1+\sqrt{\alpha} > 0$ έχουμε:

$$\sqrt{1+\alpha} < 1+\sqrt{\alpha} \Leftrightarrow \left(\sqrt{1+\alpha}\right)^2 < \left(1+\sqrt{\alpha}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+\alpha < 1+2\cdot 1\cdot\sqrt{\alpha}+\left(\sqrt{\alpha}\right)^2 \Leftrightarrow 0 < 2\sqrt{\alpha}$$

που είναι αληθής για κάθε $\alpha > 0$

Παρόμοια με την άσκηση 4_4607 της Τράπεζας θεμάτων

ΑΣΚΗΣΗ 20 (4_4548)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - x + \left(\lambda - \lambda^2\right) = 0$ (1), με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

1. Να βρείτε την διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

2. Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες ίσες;

Μονάδες 6

3. Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = \dfrac{1}{\sqrt{S-P}}$, όπου S, P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1) αντίστοιχα, έχει νόημα πραγματικού αριθμού για κάθε πραγματικό αριθμό λ.

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

1. Η διακρίνουσα είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$, οπότε έχουμε

$$\Delta = (-1)^2 - 4\left(\lambda - \lambda^2\right) \Leftrightarrow \Delta = 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 \Leftrightarrow \Delta = (1-2\lambda)^2 \text{ , } \lambda \in \mathbb{R}$$

Όμως, $\Delta = (1-2\lambda)^2 \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, άρα η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

2. Η εξίσωση (1), θα έχει δύο ίσες πραγματικές ρίζες, αν Δ=0

Έχουμε

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (1-2\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

3. Από τύπους VIETA για την εξίσωση (1) έχουμε,

$$S = x_1 + x_2 \Leftrightarrow S = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow S = -\frac{-1}{1} \Leftrightarrow S = 1 \text{ και}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 \Leftrightarrow P = \frac{\gamma}{\alpha} \Rightarrow P = \frac{\lambda - \lambda^2}{1} \Leftrightarrow P = \lambda - \lambda^2$$

Η παράσταση $A = \frac{1}{\sqrt{S-P}}$ έχει νόημα στο $\mathbb{R}$, για κάθε πραγματικό αριθμό λ αν ισχύει $S - P \geq 0$ και $\sqrt{S-P} \neq 0$ δηλαδή ισοδύναμα, $S - P > 0$

Οπότε έχουμε,

$$S - P > 0 \Leftrightarrow 1 - \left(\lambda - \lambda^2\right) > 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda + \lambda^2 > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda + 1 > 0$$

Είναι

$$\Delta' = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0,$$

άρα το τριώνυμο $\lambda^2 - \lambda + 1$ ως προς λ είναι ομόσημο του $\alpha = 1 > 0$ που ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό λ, άρα ισχύει $\lambda^2 - \lambda + 1 > 0$ για κάθε $\lambda \in R$

ΑΣΚΗΣΗ 21 (4_4551)

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

1. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

(Μονάδες 8)

2. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

(Μονάδες 5)

3. Αν λ<0, τότε:

i) το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

ii) να αποδείξετε ότι $\left|x_1 + x_2\right| \geq 2x_1 \cdot x_2$, όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

1. Η διακρίνουσα είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$, οπότε έχουμε

$$\Delta = \left[-\left(\lambda^2 + 1\right)\right]^2 - 4\lambda^2 = \left(\lambda^2 + 1 - 2\lambda\right)\left(\lambda^2 + 1 + 2\lambda\right) = \left(\lambda^2 + 1 - 2\lambda\right)\left(\lambda^2 + 1 + 2\lambda\right)$$

$$= \left(\lambda - 1\right)^2 \left(\lambda + 1\right)^2 = [(\lambda - 1)(\lambda + 1)]^2 = \left(\lambda^2 - 1\right)^2$$

Όμως $\left(\lambda^2-1\right)^2 \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, άρα $\Delta \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$, δηλαδή το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$

2. Από τύπους VIETA για τη δοσμένη εξίσωση έχουμε

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-\beta}{\alpha} \Rightarrow S = -\frac{-(\lambda^2+1)}{\lambda} \Leftrightarrow S = \frac{\lambda^2+1}{\lambda} \text{ και } P = x_1x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \Rightarrow P = \frac{\lambda}{\lambda} \Leftrightarrow P = 1$$

3.i) Είναι $P = x_1 \cdot x_2 = 1 > 0$, άρα οι ρίζες x_1, x_2 είναι ομόσημοι πραγματικοί αριθμοί.

Ακόμη $\lambda^2+1>0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και αφού λ<0, έχουμε ότι $S = x_1 + x_2 = \dfrac{\lambda^2+1}{\lambda} < 0$

Οπότε οι ρίζες x_1, x_2 είναι αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί.

ii) Είναι,

$$|x_1+x_2| \geq 2x_1x_2 \overset{\text{ερωτ.2}}{\Leftrightarrow} \left|\frac{\lambda^2+1}{\lambda}\right| \geq 2 \Leftrightarrow \frac{\lambda^2+1}{|\lambda|} \geq 2 \overset{|\lambda|>0}{\Leftrightarrow} \lambda^2+1 \geq 2|\lambda| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\lambda|^2+1-2|\lambda| \geq 0 \Leftrightarrow \left(|\lambda|-1\right)^2 \geq 0$$

που αληθεύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$

ΑΣΚΗΣΗ 22 (4_4558)

Δίνεται το τριώνυμο: $f(x) = \lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda$ με $\lambda > 0$.

1. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες θετικές για κάθε λ>0.

(Μονάδες 10)

2. Αν οι ρίζες του τριωνύμου είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε:

i) να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου.

(Μονάδες 4)

ii) να βρείτε την περίμετρο Π του ορθογωνίου ως συνάρτηση του λ και να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 4$ για κάθε λ>0.

(Μονάδες 8)

iii) για την τιμή του λ που η περίμετρος γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 4, τι συμπεραίνετε για το ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 3)

ΛΥΣΗ

1. Η διακρίνουσα είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$, και το $A_f = \mathbb{R}$ οπότε έχουμε

$\Delta = \left[-\left(\lambda^2+1\right)\right]^2 - 4\lambda^2 = \left(\lambda^2+1-2\lambda\right)\left(\lambda^2+1+2\lambda\right) = \left(\lambda^2+1-2\lambda\right)\left(\lambda^2+1+2\lambda\right)$

$= \left(\lambda-1\right)^2\left(\lambda+1\right)^2 = \left[(\lambda-1)(\lambda+1)\right]^2 = \left(\lambda^2-1\right)^2$

Όμως $\left(\lambda^2-1\right)^2 \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, άρα $\Delta \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, δηλαδή το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

2.i) Οι ρίζες είναι

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Rightarrow x = \frac{-[-(\lambda^2+1)] \pm \sqrt{(\lambda^2-1)^2}}{2\lambda} \Leftrightarrow x = \frac{(\lambda^2+1) \pm (\lambda^2-1)}{2\lambda}$$

άρα

$$x_1 = \frac{\lambda^2+1+\lambda^2-1}{2\lambda} = \frac{2\lambda^2}{2\lambda} \Leftrightarrow x_1 = \lambda \text{ και } x_2 = \frac{\lambda^2+1-\lambda^2+1}{2\lambda} = \frac{2}{2\lambda} \Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{\lambda}$$

και αφού λ>0 είναι $x_1 = \lambda > 0$ και $x_2 = \frac{1}{\lambda} > 0$

Οπότε, το εμβαδό του ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι,

$$E = x_1 x_2 \Leftrightarrow E = \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow E = 1$$

ii) Η περίμετρος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι,

$\Pi = 2x_1 + 2x_2 \Leftrightarrow \Pi = 2\lambda + \frac{2}{\lambda}$ με για λ>0 .

Ακόμη για λ>0 έχουμε,

$$\Pi \geq 0 \Leftrightarrow 2\lambda + \frac{2}{\lambda} \geq 4 \Leftrightarrow 2\lambda^2 + 2 \geq 4\lambda \overset{\div 2>0}{\Leftrightarrow} \lambda^2 - 2\lambda + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 \geq 0$$

που ισχύει για κάθε $\lambda > 0$

iii) Έχουμε,

$$\Pi = 4 \Leftrightarrow 2\lambda + \frac{2}{\lambda} = 4 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Τότε από ερωτ. **2.i)** έχουμε $x_1 = x_2 = 1$ και συμπεραίνουμε ότι το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

ΑΣΚΗΣΗ 23 (4_4575)

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2 - 4x + \alpha$ και $g(x) = \alpha x - 5$ με $\alpha \in \mathbb{R}$

1. Αν ισχύει $f(2) = g(2)$, να βρείτε την τιμή του α.

(Μονάδες 7)

2. Για $\alpha = 1$

i) να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = g(x)$

(Μονάδες 8)

ii) να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq g(x)$ και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$.

(Μονάδες 5+5=10)

ΛΥΣΗ

1. Οι συναρτήσεις f, g είναι ορίζονται στο $A_f = A_g = \mathbb{R}$ και έχουμε $f(2) = g(2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^2 - 4 \cdot 2 + \alpha = 2\alpha - 5 \Leftrightarrow 4 - 8 + \alpha = 2\alpha - 5 \Leftrightarrow \alpha = 1$

2.i) Για $\alpha = 1$ οι συναρτήσεις ισοδύναμα γράφονται

$$f(x) = x^2 - 4x + 1 \text{ και } g(x) = x - 5 \text{ οπότε για } x \in \mathbb{R} \text{ είναι,}$$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = 3$

αφού για το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$ έχουμε $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1 > 0$ άρα

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 3 \text{ ή } x_2 = 2$$

ii) Για $x \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 \geq x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 \geq 0 \ ,$$

όμως,

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$		+	0	−	0	+	

άρα, $x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$

Ακόμη για $x \in \mathbb{R}$, είναι $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$ (1)

<u>Α΄ τρόπος</u>

Αν $f(x) - g(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < g(x)$ τότε η (1) είναι αδύνατη.

Άρα πρέπει

$$f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \overset{\text{ερωτ.2i)}}{\Leftrightarrow} x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$$

επομένως οι λύσεις της ζητούμενης είναι $x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$

<u>Β΄ τρόπος</u>

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι

$$|f(x) - g(x)| \geq f(x) - g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - g(x) \leq -[f(x) - g(x)] & (1) \\ \text{ή} \\ f(x) - g(x) \geq f(x) - g(x) & (2) \end{cases}$$

Η σχέση (1) γίνεται,

$$2f(x) \leq 2g(x) \overset{\div 2 > 0}{\Leftrightarrow} f(x) \leq g(x) \overset{\text{ερωτ.2i)}}{\Leftrightarrow} x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$$

και η (2) αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως οι λύσεις της ζητούμενης είναι $x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$

ΑΣΚΗΣΗ 24 (4_4607)

1. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 > x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

(Μονάδες 8)

2. Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $\alpha > 1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς: 0 , 1 , α , α^2 , $\sqrt{\alpha}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α).

(Μονάδες 10)

ii) Να κάνετε το ίδιο για τους αριθμούς: α , α^2 , $\frac{\alpha+\alpha^2}{2}$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

1. Έχουμε

$$x^2 > x \Leftrightarrow x^2 - x > 0$$

ενώ η εξίσωση

$$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1$$

Οπότε για την ανίσωση $2^{ου}$ βαθμού έχουμε

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^2-x		+	0	−	0	+	

Άρα $x^2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 0$ ή $x > 1$

2.i) Είναι, $0 < 1 < \alpha$ και $\alpha > 1 \overset{\text{ερωτ.α)}}{\Leftrightarrow} \alpha^2 > \alpha$ ακόμη

$$\sqrt{\alpha} > 1 \underset{\text{όπου α το } \sqrt{\alpha}}{\overset{\text{ερωτ.α)}}{\Leftrightarrow}} \sqrt{\alpha}^2 > \sqrt{\alpha} \Rightarrow \alpha > \sqrt{\alpha}$$

Επομένως είναι

$$0 < 1 < \sqrt{\alpha} < \alpha < \alpha^2$$

και στον πραγματικό άξονα είναι,

ii) Ο αριθμός $\frac{\alpha+\alpha^2}{2}$ είναι ο αριθμητικός μέσος των α , α^2 και από το ερωτ. **2.i)** είναι

$\alpha < \alpha^2$, άρα είναι $\alpha < \frac{\alpha+\alpha^2}{2} < \alpha^2$

ΑΣΚΗΣΗ 25 (4_4853)

Δίνεται το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με ρίζες τους αριθμούς 1 και 2

α) Χρησιμοποιώντας τους τύπους για το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών του τριωνύμου, να αποδείξετε ότι: $\gamma = 2\alpha$ και $\beta = -3\alpha$

(Μονάδες 9)

β) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο παίρνει θετικές τιμές για κάθε $x \in (1,2)$, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha < 0$

(Μονάδες 9)

ii) Να λύσετε την ανίσωση $\gamma x^2 + \beta x + \alpha < 0$

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Χρησιμοποιώντας τους τύπους Vieta για το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών ενός τριωνύμου , έχουμε:

$S = x_1 + x_2$, άρα $-\dfrac{\beta}{\alpha} = 1 + 2 \Leftrightarrow -\dfrac{\beta}{\alpha} = 3 \Leftrightarrow \beta = -3\alpha$ και

$P = x_1 \cdot x_2$, άρα $P = x_1 \cdot x_2 \Leftrightarrow \dfrac{\gamma}{\alpha} = 1 \cdot 2 \Leftrightarrow \gamma = 2\alpha$

β) i) Οι αριθμοί $1, 2$ είναι ρίζες του τριωνύμου. Επιπλέον γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο είναι ετερόσημο του α (συντελεστής του x^2) για κάθε x που βρίσκεται μεταξύ των ριζών του.

Αφού δίνεται ότι παίρνει θετικές τιμές για κάθε $x \in (1,2)$, προκύπτει άμεσα ότι: $\alpha < 0$

ii) Χρησιμοποιώντας ότι $\gamma = 2\alpha$ και $\beta = -3\alpha$ που αποδείξαμε στο α) ερώτημα έχουμε:

$$\gamma x^2 + \beta x + \alpha < 0 \Leftrightarrow 2\alpha x^2 - 3\alpha x + \alpha < 0 \quad (1)$$

Στο ερώτημα β)i) δείξαμε ότι $\alpha < 0$ οπότε διαιρώντας και τα δύο μέλη της (1) με τον αρνητικό αριθμό α θα έχουμε την ισοδύναμη ανίσωση: $2x^2 - 3x + 1 > 0$

Εύκολα βρίσκουμε ότι οι ρίζες του τριωνύμου $2x^2 - 3x + 1$ είναι οι αριθμοί 1 και $\dfrac{1}{2}$ και στη συνέχεια κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2 - 3x + 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Οπότε, $2x^2 - 3x + 1 > 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{2}$ ή $x > 1$

ΑΣΚΗΣΗ 26 (4_4859)

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + \kappa x - 4$, με παράμετρο $\kappa \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του κ, το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 10)

β) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

γ) Αν x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου και α , β δύο πραγματικοί ώστε να ισχύει

$$\alpha < x_1 < x_2 < \beta,$$

να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\alpha \cdot f(\alpha) \cdot \beta \cdot f(\beta)$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Ένα τριώνυμο έχει πραγματικές και άνισες ρίζες , αν και μόνο αν ισχύει $\Delta > 0$

Για το τριώνυμο $f(x)$ έχουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \kappa^2 - 4 \cdot 3(-4) = \kappa^2 + 48 > 0 \text{ για κάθε } \kappa \in \mathbb{R} \text{ , οπότε ισχύει.}$$

β) Το γινόμενο των ριζών του τριωνύμου , με εφαρμογή των τύπων Vieta , είναι:

$P = \frac{\gamma}{\alpha} = -\frac{4}{3} < 0$

Αφού το γινόμενο είναι αρνητικό οι ρίζες του θα είναι ετερόσημες.

γ) Οι ρίζες x_1 , x_2 του τριωνύμου είναι ετερόσημες και επειδή $x_1 < x_2$, η ρίζα x_1 θα είναι αρνητικός , ενώ η ρίζα x_2 θα είναι θετικός αριθμός.

Επιπλέον από τη θεωρία που μας δίνει το πρόσημο τριωνύμου μπορούμε να κατασκευάσουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$ α x_1 0 x_2 β $+\infty$
f(x)	+ 0 - 0 +

Έτσι παρατηρούμε ότι:

$\alpha \in (-\infty, x_1)$, οπότε $\alpha < 0$ και $f(\alpha) > 0$

$\beta \in (x_2, +\infty)$, οπότε $\beta > 0$ και $f(\beta) > 0$

άρα, $\alpha \cdot f(\alpha) \cdot \beta \cdot f(\beta) < 0$

Μέθοδος: *Με τη βοήθεια των τύπων Vieta μπορούμε να βρούμε αν οι ρίζες ενός τριωνύμου που έχει διακρίνουσα $\Delta > 0$ είναι ομόσημες ή ετερόσημες , θετικές ή αρνητικές. Συγκεκριμένα:*

$P > 0 \Leftrightarrow x_1, x_2$ ομόσημες

$P < 0 \Leftrightarrow x_1, x_2$ ετερόσημες

$P > 0$ και $S > 0 \Leftrightarrow x_1, x_2$ θετικές

$P > 0$ και $S < 0 \Leftrightarrow x_1, x_2$ αρνητικές

ΑΣΚΗΣΗ 27 (4_4952)

α) Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + 2x + 3 = \alpha$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του α η εξίσωση $x^2 + 2x + 3 = \alpha$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 6)

ii) Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 6)

β) Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2+2x+3$, $x\in\mathbb{R}$

i) Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

(Μονάδες 7)

ii) Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{f(x)-2}\leq 2$

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση $x^2+2x+3=\alpha$ είναι ισοδύναμη με την $x^2+2x+3-\alpha=0\,(1)$

Μια δευτεροβάθμια εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες , αν και μόνο αν ισχύει $\Delta>0$.

Για την εξίσωση (1) θα έχουμε:

$$\Delta>0\Leftrightarrow 4-4(3-\alpha)>0\Leftrightarrow 4-12+4\alpha>0\Leftrightarrow 4\alpha>8\Leftrightarrow \alpha>2$$

β) Μια δευτεροβάθμια εξίσωση έχει διπλή ρίζα , αν και μόνο αν ισχύει $\Delta=0$

Για την εξίσωση (1) θα έχουμε:

$$\Delta=0\Leftrightarrow 4-4(3-\alpha)=0\Leftrightarrow 4-12+4\alpha=0\Leftrightarrow 4\alpha=8\Leftrightarrow \alpha=2$$

Για $\alpha=2$ η (1) γίνεται:

$$x^2+2x+3-2=0\Leftrightarrow x^2+2x+1=0\Leftrightarrow (x+1)^2=0\Leftrightarrow x+1=0\Leftrightarrow x=-1\ ,$$

που αποτελεί τη διπλή ρίζα της εξίσωσης

γ) i) Έχουμε,

$f(x)\geq 2\Leftrightarrow x^2+2x+3\geq 2\Leftrightarrow x^2+2x+1\geq 0\Leftrightarrow (x+1)^2\geq 0$, που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii) Αφού $f(x)\geq 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η ανίσωση $\sqrt{f(x)-2}\leq 2$ δεν έχει περιορισμούς.

Οπότε ,

$$\sqrt{f(x)-2}\leq 2\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+3-2}\leq 2\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+1}\leq 2\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2}\leq 2\Leftrightarrow$$

$$|x+1|\leq 2\Leftrightarrow -2\leq x+1\leq 2\Leftrightarrow -2-1\leq x\leq 2-1\Leftrightarrow -3\leq x\leq 1$$

ΑΣΚΗΣΗ 28 (4_5285)

Δίνονται οι εξισώσεις $x^2-3x+2=0$ (1) και $x^4-3x^2+2=0\,(2)$.

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (1).

Μονάδες 5

β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (2).

Μονάδες 10

γ) Να βρείτε τριώνυμο της μορφής $x^2+\beta x+\gamma$ που οι ρίζες του να είναι κάποιες από τις ρίζες της εξίσωσης (2) και επιπλέον, για κάθε αρνητικό αριθμό x, να έχει θετική τιμή.

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση $x^2-3x+2=0$

έχει διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=9-8=1$$

Και ρίζες

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{3\pm1}{2}$$

άρα $x_1=\frac{3+1}{2}=2$ και $x_2=\frac{3-1}{2}=1$

β) Θέτουμε $x^2=\omega\geq0$,τότε η εξίσωση $x^4-3x^2+2=0$ **,**γίνεται $\omega^2-3\omega+2=0$ με ρίζες $\omega_1=2$ και $\omega_2=1$.Συνεπώς

$$x^2=2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2} \text{ ή } x^2=1\Leftrightarrow x=\pm1$$

Άρα οι ρίζες της εξίσωσης $x^4-3x^2+2=0$ είναι οι $-\sqrt{2}<-1<1<\sqrt{2}$

γ) Αφού θέλουμε για κάθε αρνητικό αριθμό x το τριώνυμο της μορφής $x^2+\beta x+\gamma$ να έχει θετική τιμή δεν μπορεί να έχει ρίζες τις $-\sqrt{2},-1$ (αφού στις ρίζες μηδενίζεται)

- Αν έχει διπλή ρίζα το 1 τότε το τριώνυμο είναι θετικό εκατέρωθεν του 1 (αφού $\alpha=1>0$), συνεπώς για κάθε x αρνητικό έχει θετική τιμή, τότε

$$S=1+1=2 \text{ και } P=1\cdot1=1$$

συνεπώς το τριώνυμο παίρνει τη μορφή x^2-2x+1

- Ανάλογα αν έχει διπλή ρίζα το $\sqrt{2}$ το τριώνυμο για κάθε x αρνητικό έχει θετική τιμή, τότε

$$S=\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2} \text{ και } P=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$$

συνεπώς το τριώνυμο παίρνει τη μορφή $x^2-2\sqrt{2}x+2$

- Αν έχει ρίζες τις 1 και $\sqrt{2}$ τότε το τριώνυμο είναι θετικό εκτός των ριζών (αφού $\alpha=1>0$), συνεπώς για κάθε x αρνητικό έχει θετική τιμή, τότε

$$S=1+\sqrt{2} \text{ και } P=1\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}$$

συνεπώς το τριώνυμο παίρνει τη μορφή $x^2-(1+\sqrt{2})x+\sqrt{2}$

ΑΣΚΗΣΗ 29 (4_5316)

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2+\beta x+\beta^2$ όπου $\beta\in\mathbb{R}$

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.

Μονάδες 4

β) i) Αν $\beta\neq0$ τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο του τριωνύμου;

Μονάδες 7

ii) Πώς αλλάζει η απάντησή σας στο ερώτημα (i), όταν $\beta=0$

Μονάδες 6

γ) Με τη βοήθεια της απάντησης στο ερώτημα (β), να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2>0$ για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α,β που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα μηδέν.

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2+\beta x+\beta^2$ είναι

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\beta^2-4\beta^2=-3\beta^2$$

β) i) Αν $\beta\neq 0$ ισχύει $\beta^2>0\Leftrightarrow -3\beta^2<0\Leftrightarrow \Delta<0$

τότε το τριώνυμο είναι θετικό για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (ομόσημο του $\alpha=1>0$)

ii) Αν $\beta=0$ ισχύει $\Delta=0$, τότε το τριώνυμο έχει διπλή ρίζα το 0 όπου μηδενίζεται σ' αυτήν και είναι θετικό για κάθε $x\neq 0$ (ομόσημο του $\alpha=1>0$)

γ) Η παράσταση $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$ είναι τριώνυμο ως προς α

- Αν $\beta\neq 0$ σύμφωνα με το ερώτημα (βi) ισχύει $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2>0$
- Αν $\beta=0$ τότε είναι $\alpha\neq 0$ τότε σύμφωνα με το ερώτημα (βii) ισχύει $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2>0$

Άρα για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α,β που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα 0 ισχύει $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2>0$

ΑΣΚΗΣΗ 30 (4_5322)

Δίνεται το τριώνυμο: x^2-2x-8

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x

Μονάδες 10

β) Αν $\kappa=-\dfrac{8889}{4444}$ είναι η τιμή της παράστασης: $\kappa^2-2\kappa-8$ μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

γ) Αν ισχύει $-4<\mu<4$ τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο της τιμής της παράστασης:

$$\mu^2-2|\mu|-8$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο x^2-2x-8 έχει διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=4+32=36$$

Και ρίζες

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{2\pm 6}{2}$$

άρα

$$x_1 = \frac{2+6}{2} = 4 \text{ και } x_2 = \frac{2-6}{2} = -2$$

Το πρόσημο του $x^2 - 2x - 8$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$x^2 - 2x - 8$		$+$	0	$-$	0	$+$	

από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι:

- Για κάθε $x \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$ είναι $x^2 - 2x - 8 > 0$
- Για κάθε $x \in (-2, 4)$ είναι $x^2 - 2x - 8 < 0$
- Για $x = -2$ ή $x = 4$ είναι $x^2 - 2x - 8 = 0$

β) Είναι

$$\kappa = -\frac{8889}{4444} < -\frac{8888}{4444} = -2$$

τότε σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα ισχύει $\kappa^2 - 2\kappa - 8 > 0$

γ) Είναι

$$-4 < \mu < 4 \Leftrightarrow 0 \le |\mu| < 4 \Leftrightarrow |\mu| \in [0, 4) \subseteq (-2, 4)$$

τότε σύμφωνα με το (α) ερώτημα ισχύει

$$\mu^2 - 2|\mu| - 8 = |\mu|^2 - 2|\mu| - 8 < 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 31 (4_5884)

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 6x + \lambda - 3$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.

Μονάδες 5

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 7

γ) Αν $3 < \lambda < 12$ τότε:

i) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες.

Μονάδες 6

ii) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ, μ είναι δύο αριθμοί με $\kappa < 0$ και $x_1 < \mu < x_2$ να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu)$ Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) Το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 6x + \lambda - 3$, έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 36 - 4(\lambda - 3) = 36 - 4\lambda + 12 = 48 - 4\lambda$$

β) Το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν $\Delta > 0$
Έχουμε,

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 48 - 4\lambda > 0 \Leftrightarrow -4\lambda > -48 \Leftrightarrow \lambda < 12$$

γ) i) Είναι $3 < \lambda < 12$
Τότε $\lambda < 12$ συνεπώς σύμφωνα με το (β) ερώτημα το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες. Για το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών ισχύει

$$S = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-6}{1} = 6 > 0 \text{ και } P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda - 3}{1} = \lambda - 3 > 0 \text{ (αφού } \lambda > 3\text{)}$$

Αφού το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες και ισχύουν $S > 0$ και $P > 0$ οι ρίζες είναι θετικές.

ii) Το πρόσημο του $f(x) = x^2 - 6x + \lambda - 3$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι

- Για κάθε $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ είναι $f(x) > 0$
- Για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ είναι $f(x) < 0$
- Για $x = x_1$ ή $x = x_2$ είναι $f(x) = 0$

Αφού $\kappa < 0$ ισχύει $f(\kappa) > 0$
Αφού $x_1 < \mu < x_2$ ισχύει $\mu > 0$ και $f(\mu) < 0$, τότε $\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu) > 0$

ΑΣΚΗΣΗ 32 (4_5885)

α) i) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου: $x^2 + 9x + 18$

Μονάδες 4

ii)Να λύσετε την εξίσωση: $|x+3| + |x^2 + 9x + 18| = 0$

Μονάδες 7

β) i) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x

Μονάδες 7

ii) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει: $|x^2 + 9x + 18| = -x^2 - 9x - 18$

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

α) i) Το τριώνυμο $x^2 + 9x + 18$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 81 - 72 = 9$$

Και ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-9 \pm 3}{2}$$

άρα $x_1 = \dfrac{-9+3}{2} = -3$ και $x_2 = \dfrac{-9-3}{2} = -6$

ii) Είναι

$$|x+3| + |x^2+9x+18| = 0 \Leftrightarrow x+3=0 \text{ και } x^2+9x+18=0 \Leftrightarrow$$

άρα $x=-3$ και $x=-3$ ή $x=-6$, οπότε η κοινή λύση είναι η $x=-3$

β) i) Το πρόσημο του $x^2+9x+18$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		-6		-3		$+\infty$
$x^2+9x+18$		$+$	0	$-$	0	$+$	

από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι

- Για κάθε $x \in (-\infty,-6) \cup (-3,+\infty)$ είναι $x^2+9x+18 > 0$
- Για κάθε $x \in (-6,-3)$ είναι $x^2+9x+18 < 0$
- Για $x=-6$ ή $x=-3$ είναι $x^2+9x+18=0$

ii) Είναι

$$|x^2+9x+18| = -x^2-9x-18 \Leftrightarrow x^2+9x+18 \le 0 \Leftrightarrow x \in [-6,-3]$$

ΑΣΚΗΣΗ 33 (4_6227)

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2-5x-6<0$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $K = \left(-\dfrac{46}{47}\right)^2 + 5\cdot\dfrac{46}{47} - 6$ και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

(Μονάδες 7)

γ) Αν $\alpha \in (-6,6)$ να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda = \alpha^2 - 5|\alpha| - 6$. Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Λύνουμε αρχικά την αντίστοιχη εξίσωση ώστε να βρούμε τις ρίζες της.

$x^2-5x-6=0$, με $\alpha=1$, $\beta=-5$ και $\gamma=-6$.

Η διακρίνουσα είναι,

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 25+24 = 49$$

και οι ρίζες,

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{5\pm 7}{2}.$$

Άρα $x_1 = 6$ και $x_2 = -1$

x	$-\infty$	-1		6	$+\infty$
x^2-5x-6	+	0	-	0	+

Επομένως η ανίσωση ισχύει όταν: $x \in (-1, 6)$

β) Είναι

$$K = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 + 5 \cdot \frac{46}{47} - 6 = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 - 5 \cdot \left(-\frac{46}{47}\right) - 6 < 0$$

διότι ο αριθμός K προκύπτει αν στο τριώνυμο του α΄ ερωτήματος, αν αντικαταστήσουμε στη θέση του x τον αριθμό $-\frac{46}{47}$, και το τριώνυμο γίνεται αρνητικό όταν $x \in (-1, 6)$ οπότε εφόσον $-1 < -\frac{46}{47} < 6$, το πρόσημο του αριθμού K είναι αρνητικό.

γ) Είναι

$$\alpha \in (-6, 6) \Leftrightarrow -6 < \alpha < 6 \Leftrightarrow 0 \le |\alpha| < 6 \Rightarrow |\alpha| \in [0,6) \subseteq (-1,6),$$

επομένως θέτοντας όπου x το $|\alpha|$ στο τριώνυμο του α΄ ερωτήματος, προκύπτει ότι:

$$|\alpha|^2 - 5|\alpha| - 6 < 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 5|\alpha| - 6 < 0 \Leftrightarrow \Lambda < 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 34 (4_7263)

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 6x + \lambda - 7$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

α)Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 7)

β) i) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να βρείτε την τιμή του αθροίσματος $S = x_1 + x_2$ των ριζών και να εκφράσετε συναρτήσει του λ το γινόμενο $P = x_1 x_2$ των ριζών.

(Μονάδες 2)

ii) Να δείξετε ότι, για κάθε λ με $7 < \lambda < 16$, το τριώνυμο έχει δύο άνισες ομόσημες ρίζες. Ποιο είναι τότε το πρόσημο των ριζών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

γ) i) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση $x^2 - 6|x| + \lambda = 7 \quad (1)$ έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 8)

ii) Έχει η εξίσωση (1) για $\lambda = 3\sqrt{10}$ τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $x^2-6x+\lambda-7$, $\lambda\in\mathbb{R}$, θα έχει πραγματικές ρίζες αν και μόνο $\Delta\geq 0$.
Έχουμε:
$\Delta\geq 0\Leftrightarrow \beta^2-4\alpha\gamma\geq 0\Leftrightarrow 36-4\cdot(\lambda-7)\geq 0\Leftrightarrow 36-4\lambda+28\geq 0\Leftrightarrow 4\lambda\leq 64\Leftrightarrow \boxed{\lambda\leq 16}$

β)i) Με τη βοήθεια των τύπων Vieta έχουμε:

$$S=-\frac{\beta}{\alpha}=\frac{6}{1}=6,\ \text{και}\ P=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\lambda-7}{1}=\lambda-7$$

ii) Από το α΄ερώτημα δείξαμε ότι αν $\lambda<16\Leftrightarrow\Delta>0$ οπότε το τριώνυμο έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

Για να έχουμε δυο ρίζες ομόσημες θα πρέπει το γινόμενο τους να είναι θετικό, άρα για $P>0\Leftrightarrow\lambda-7>0\Leftrightarrow\lambda>7$ το τριώνυμο έχει ρίζες ομόσημες.

Επομένως για κάθε λ με $7<\lambda<16$, το τριώνυμο έχει δύο άνισες ομόσημες ρίζες.

Έχουμε όμως $S=6>0$ δηλαδή το άθροισμα τους είναι θετικός, άρα οι ρίζες του τριωνύμου τότε είναι θετικές.

γ) i) $x^2-6|x|+\lambda=7\Leftrightarrow|x|^2-6|x|+\lambda-7=0\ (1)$
Θέτουμε $\omega=|x|$ και η (1) γίνεται: $\omega^2-6\omega+\lambda-7=0\ (2)$

Για να έχει η εξίσωση (1) τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες θα πρέπει η (2) να έχει 2 θετικές και άνισες ρίζες. Δηλαδή θα πρέπει (σύμφωνα και με τα προηγούμενα ερωτήματα) να ισχύει: $7<\lambda<16$.

Άρα αν $7<\lambda<16$ τότε η (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

ii) Για να έχει η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες θα πρέπει:

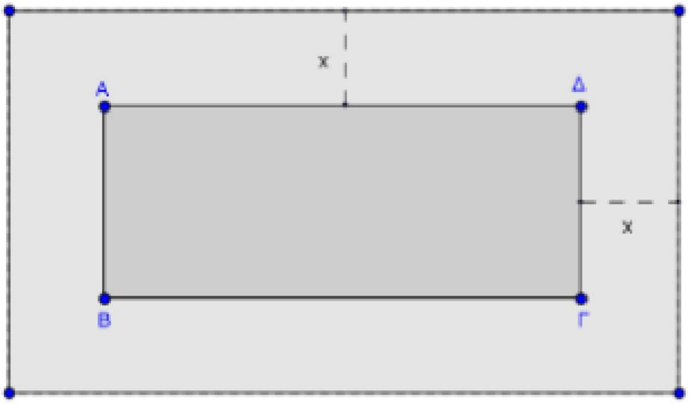
$$7<3\sqrt{10}<16$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο και έχουμε:

$$7^2<\left(3\sqrt{10}\right)^2<16^2\Leftrightarrow 49<90<256\ \text{που ισχύει},$$

επομένως η (1) έχει 4 διαφορετικές ρίζες.

ΑΣΚΗΣΗ 35 (4_7511)
Ένα δημοτικό κολυμβητήριο έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με διαστάσεις 15m και 25m. Ο δήμος, για λόγους ασφαλείας, θέλει να κατασκευάσει γύρω από το κολυμβητήριο μια πλακοστρωμένη ζώνη με σταθερό πλάτος x m (x > 0), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της ζώνης δίνεται από τη σχέση:

$$E(x) = 4x^2+80x,\ x>0$$

Μονάδες 9

β) Να βρεθεί το πλάτος της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδό $E = 500\ m^2$

Μονάδες 7

γ) Ποιο μπορεί να είναι το πλάτος της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν μικρότερο από 500 m^2. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) Το εξωτερικό ορθογώνιο θα έχει διαστάσεις $(15+2x)m$ και $(25+2x)m$ με x>0 άρα το εμβαδό του εξωτερικού ορθογωνίου είναι $(15+2x)\cdot(25+2x)\ m^2$. Επομένως η ζώνη θα έχει εμβαδό:

$$E(x)=(15+2x)\cdot(25+2x)-(ΑΒΓΔ)=(15+2x)\cdot(25+2x)-15\cdot 25=$$

$$\cancel{15\cdot 25}+15\cdot 2x+2x\cdot 25+(2x)^2\cancel{-15\cdot 25}=30x+50x+4x^2\Rightarrow$$

$$E(x)=4x^2+80x\ ,\ \ x>0$$

β) Έχουμε λόγω υπόθεσης ότι:

$$E=500m^2 \Leftrightarrow 4x^2+80x=500 \Leftrightarrow 4x^2+80x-500=0 \Leftrightarrow x^2+20x-125=0$$

Η εξίσωση αυτή είναι δευτέρου βαθμού ως προς x με διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=20^2-4\cdot 1\cdot(-125)=400+500=900>0$$

και ρίζες: $x_{1,2}=\dfrac{-20\pm\sqrt{900}}{2\cdot 1}=\dfrac{-20\pm 30}{2}$

Άρα $x_1=\dfrac{-20+30}{2}=\dfrac{10}{2}=5$ και $x_1=\dfrac{-20-30}{2}=\dfrac{-50}{2}=-25$, που απορρίπτεται, αφού πρέπει $x>0$.

Επομένως $x=5$, δηλαδή για να έχει η ζώνη εμβαδό $500m^2$ πρέπει να έχει πλάτος $5\ m$.

γ) Η ζώνη έχει πλάτος μικρότερο από $500m^2$ όταν ισχύει

$E<500m^2 \Leftrightarrow 4x^2+80x<500 \Leftrightarrow 4x^2+80x-500<0 \Leftrightarrow x^2+20x-125<0\ (1)$ με $x>0$.

Για το τριώνυμο $x^2+20x-125$ έχει τον ακόλουθο πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$		-25		5		$+\infty$
$x^2+20x-125$		+	0	$-$	0	+	

Η ανίσωση (1) λοιπόν επαληθεύεται όταν το x βρίσκεται μεταξύ των ριζών του παραπάνω τριωνύμου, δηλαδή όταν $x\in(-25,5)$. Όμως έχουμε τον περιορισμό $x>0$, τελικά πρέπει $x\in(0,5)$, δηλαδή το πλάτος της ζώνης να είναι μεταξύ $0\ \text{m}$ και $5\ \text{m}$.

ΑΣΚΗΣΗ 36 (4_7512)

Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο Π = 40cm. Αν x cm είναι το μήκος του παραλληλογράμμου, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $0 < x < 20$

Μονάδες 4

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε(x) του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση:

$$E(x)=20x-x^2$$

Μονάδες 8

γ) Να αποδείξετε ότι ισχύει $E(x) \le 100$, για κάθε $x\in(0,20)$

Μονάδες 6

δ) Να αποδείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 40 cm, εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς 10cm.

Μονάδες 7

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) Έστω x το μήκος και y το πλάτος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Τότε προφανώς πρέπει να ισχύουν $x,y>0$ (μήκη γεωμετρικών τμημάτων) και

$$\Pi=2x+2y=40 \Leftrightarrow 2(x+y)=40 \Leftrightarrow x+y=20 \Leftrightarrow y=20-x.$$

Όμως ισχύει ότι $y>0 \Leftrightarrow 20-x>0 \Leftrightarrow x<20$, οπότε τελικά $0<x<20$.

β) Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι ίσο με:

$$E=x\cdot y \text{ ή } E(x)=x\cdot(20-x) \Rightarrow E(x)=20x-x^2.$$

γ) Για $x\in(0,20)$ έχουμε:

$$E(x)\le 100 \Leftrightarrow 20x-x^2\le 100 \Leftrightarrow -x^2+20x-100\le 0 \Leftrightarrow x^2-20x+100\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-10)^2\ge 0 \text{ που ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό.}$$

Άρα ισχύει και η σχέση $E(x)\le 100$ για κάθε $x\in(0,20)$.

δ) Έχουμε αποδείξει στα προηγούμενα ερωτήματα, ότι το ορθογώνιο με Π = 40 cm έχει εμβαδόν $E(x)=20x-x^2$, με $x\in(0,20)$ και $E\le 100$, για κάθε $x\in(0,20)$.

Επομένως, το εμβαδόν παίρνει τη μέγιστη τιμή του, όταν

$$E=100 \Leftrightarrow 20x-x^2=100 \Leftrightarrow x^2-20x+100=0 \Leftrightarrow (x-10)^2=0 \Leftrightarrow x = 10$$

Επειδή $y = 20-x \Rightarrow y = 20-10 = 10$

Οπότε από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 40 cm εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς 10 cm.

ΑΣΚΗΣΗ 37 (4_7745)

Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=-x^2+2x+3$

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $f(x)$ για τις διάφορες τιμές του x.

Μονάδες 10

β) Να προσδιορίσετε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου:

$$f(2{,}999)\cdot f(-1{,}002)$$

Μονάδες 7

γ) Αν $-3<\alpha<3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού:

$$-\alpha^2+2|\alpha|+3$$

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=4+12=16$ και ρίζες:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{-2}=\frac{-2\pm4}{-2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{-2+4}{-2}\\[2ex] x_2=\dfrac{-2-4}{-2}\end{cases}=\begin{cases}x_1=-1\\[2ex] x_2=3\end{cases}$$

Το πρόσημο τριωνύμου $-x^2+2x+3$ φαίνεται στο παρακάτω πίνακα προσήμων

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)=-x^2+2x+3$		-	0	+	0	-	

Συνεπώς ,

- $f(x)>0$ για $x\in(-1,3)$
- $f(x)<0$ για $x\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$

β) Επειδή $2{,}999\in(-1,3)$, οπότε $f(2{,}999)>0$

επίσης $-1{,}002\in(-\infty,-1)$, οπότε $f(-1{,}002)<0$

Συνεπώς, $f(2{,}999)\cdot f(-1{,}002)<0$, αφού οι παράγοντες είναι ετερόσημοι αριθμοί.

γ) Έχουμε,

$$-\alpha^2+2|\alpha|+3=-|\alpha|^2+2|\alpha|+3=f(|\alpha|)>0$$

γιατί, $-3<\alpha<3 \Leftrightarrow |\alpha|<3$, όμως $|\alpha|\geq 0$ άρα $|\alpha|\in[0,3)\subseteq(-1,3)$, άρα $f(|\alpha|)>0$

ΑΣΚΗΣΗ 38 (4_7958)

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2+1\geq\frac{5}{2}x \ (1)$

Μονάδες 10

β) Δίνονται δύο αριθμοί κ , λ οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ικανοποιούν επιπλέον τη σχέση: $(\lambda-1)(\kappa-1)<0$.

i. Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των κ , λ.

Μονάδες 8

ii. Να δείξετε ότι: $|\kappa-\lambda|\geq\frac{3}{2}$

Μονάδες 7

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) Η σχέση (1) γίνεται με απαλοιφή παρονομαστών

$$2x^2+2\geq 5x \Leftrightarrow 2x^2-5x+2\geq 0 \ (1)$$

Η διακρίνουσα είναι,

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5)^2-4\cdot 2\cdot 2=9>0$$

Επομένως το τριώνυμο έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{9}}{4}=\frac{5\pm 3}{4}\Rightarrow\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=\frac{1}{2}\end{cases}$$

Το πρόσημο τριωνύμου φαίνεται στο ακόλουθο πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x^2-5x+2$		+	0	−	0	+	

άρα οι λύσεις της ανίσωσης (1) είναι $x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[2,+\infty)$

β) i) Επειδή $(\lambda-1)(\kappa-1)<0$ οι παράγοντές είναι ετερόσημοι αριθμοί, επομένως

$$(\lambda-1)(\kappa-1)<0\Leftrightarrow\begin{cases}\kappa-1>0 \ \text{ και } \ \lambda-1<0\\ \text{ή}\\ \kappa-1<0 \ \text{ και } \ \lambda-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\kappa>1 \text{ και } \lambda<1\\ \text{ή}\\ \kappa<1 \text{ και } \lambda>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda<1<\kappa\\ \text{ή}\\ \kappa<1<\lambda\end{cases}$$

Σε κάθε περίπτωση το 1 βρίσκεται ανάμεσα στους δύο αριθμούς κ και λ.

ii) Επειδή οι αριθμοί κ,λ είναι λύσεις της ανίσωσης (1) οπότε,

$$\left\{\kappa \le \frac{1}{2} \text{ ή } 2 \le \kappa\right\} \text{ και } \left\{\lambda \le \frac{1}{2} \text{ ή } 2 \le \lambda\right\}$$

όμως ο αριθμός 1 βρίσκεται ανάμεσα τους από το υποερώτημα α, οπότε τα κ, λ θα βρίσκονται σε διαφορετικά υποδιαστήματα της ένωσης!

- Έστω ότι $\kappa \ge 2$ τότε $\lambda \le \frac{1}{2}$ άρα

$$\left.\begin{array}{l}\kappa \ge 2\\ \lambda \le \frac{1}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\kappa \ge 2\\ -\lambda \ge -\frac{1}{2}\end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} \kappa-\lambda \ge 2-\frac{1}{2} \overset{\kappa-\lambda\ge 0}{\Rightarrow} |\kappa-\lambda| \ge \frac{3}{2}$$

- Ομοίως, αν $\kappa \le \frac{1}{2}$ τότε $\lambda \ge 2$, άρα $\lambda-\kappa \ge \frac{3}{2} \overset{\lambda-\kappa\ge 0}{\Leftrightarrow} |\kappa-\lambda| \ge \frac{3}{2}$

ΑΣΚΗΣΗ 39 (4_7974)

Δίνεται πραγματικός αριθμός α, που ικανοποιεί τη σχέση: $|\alpha-2|<1$

α) Να γράψετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του α.

Μονάδες 8

β) Θεωρούμε στη συνέχεια το τριώνυμο: $x^2-(\alpha-2)x+\frac{1}{4}$

i. Να βρείτε τη διακρίνουσα του τριωνύμου και να προσδιορίσετε το πρόσημό της.

Μονάδες 10

ii. Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $x^2-(\alpha-2)x+\frac{1}{4}>0$

Μονάδες 7

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) Έχουμε,

$$|\alpha-2|<1 \Leftrightarrow -1<\alpha-2<1 \overset{+2}{\Leftrightarrow} 1<\alpha<3 \Leftrightarrow \alpha \in (1,3)$$

β) Έχουμε,

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(\alpha-2)^2-4\cdot 1\cdot\frac{1}{4}=(\alpha-2)^2-1=(\alpha-2-1)(\alpha-2+1)=(\alpha-3)(\alpha-2)<0$$

γιατί $1<\alpha<3$ άρα $\alpha-3<0$ και $\alpha-1>0$

γ) Επειδή, $\Delta<0$ το τριώνυμο $x^2-(\alpha-2)x+\frac{1}{4}$ παίρνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το πρόσημο του συντελεστή του x^2, δηλαδή το $1>0$, άρα $x^2-(\alpha-2)x+\frac{1}{4}>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ΑΣΚΗΣΗ 40 (4_8217)

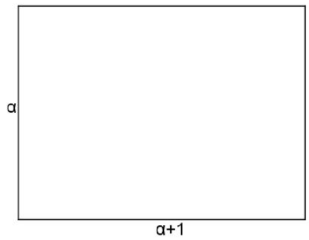
α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2+x-6<0$.

Μονάδες 8

β) Να λύσετε την ανίσωση $\left|x-\frac{1}{2}\right|>1$.

Μονάδες 5

γ) Δίνεται το παρακάτω παραλληλόγραμμο με πλευρές α και $\alpha+1$



όπου ο αριθμός α ικανοποιεί τη σχέση $\left|\alpha-\frac{1}{2}\right|>1$. Αν για το εμβαδόν E του ορθογωνίου ισχύει $E<6$, τότε:

i) Να δείξετε ότι: $\frac{3}{2}<\alpha<2$.

Μονάδες 7

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών κυμαίνεται η περίμετρος του ορθογωνίου.

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο x^2+x-6 έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1^2-4\cdot1\cdot(-6)=1+24=25>0$$

Επομένως έχει δύο πραγματικές, άνισες ρίζες,

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{-1\pm5}{2}=\begin{cases}x_1=2\\x_2=-3\end{cases}$$

Το πρόσημο τιμών του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
x^2+x-6		$+$	○	$-$	○	$+$	

Για να λύσουμε την ανίσωση $x^2+x-6<0$, αναζητούμε τις τιμές του x για τις οποίες το τριώνυμο x^2+x-6 είναι αρνητικό, δηλαδή το διάστημα που είναι ετερόσημο του $\alpha=1>0$.

Επομένως, $x\in(-3,2)$

β) Έχουμε,

$$\left|x-\frac{1}{2}\right|>1\Leftrightarrow\left\{x-\frac{1}{2}<-1 \text{ ή } x-\frac{1}{2}>1\right\}\Leftrightarrow\left\{x<\frac{1}{2}-1 \text{ ή } x>\frac{1}{2}+1\right\}\Leftrightarrow\left\{x<-\frac{1}{2} \text{ ή } x>\frac{3}{2}\right\}$$

άρα $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$

γ) i) Από το υποερώτημα (β), έχουμε

$$\left|\alpha-\frac{1}{2}\right|>1\Leftrightarrow\left\{\alpha<-\frac{1}{2}\ \text{ή}\ \alpha>\frac{3}{2}\right\}$$

Όμως το α είναι θετικός αριθμός, ως πλευρά του ορθογωνίου. Επομένως δεχόμαστε μόνο τις τιμές $\alpha\in\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$ (1)

Συγχρόνως ισχύει ότι $E<6\Leftrightarrow\alpha(\alpha+1)<6\Leftrightarrow\alpha^2+\alpha-6<0\overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}\alpha\in(-3,2)$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι: $\frac{3}{2}<\alpha<2$

ii) Η περίμετρος Π του παραλληλογράμμου είναι,

$$\Pi=2\alpha+2(\alpha+1)=4\alpha+2$$

Έχουμε,

$$\frac{3}{2}<\alpha<2\overset{\cdot(4)}{\Leftrightarrow}4\cdot\frac{3}{2}<4\alpha<4\cdot2\Leftrightarrow6<4\alpha<8\overset{+(-2)}{\Leftrightarrow}2<4\alpha-2<6\Leftrightarrow2<\Pi<6$$

άρα η περίμετρος του ορθογωνίου κυμαίνεται στο διάστημα $(2,6)$

Σημείωση: Δείτε τον προβληματισμό στην άσκηση 2_506.

ΑΣΚΗΣΗ 41 (4_8445)

α) Δίνεται το τριώνυμο x^2-3x+2 , $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου.

Μονάδες 10

β) Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς α,β διαφορετικούς από το 0 με $\alpha<\beta$ για τους οποίους ισχύει

$$(\alpha^2-3\alpha+2)(\beta^2-3\beta+2)<0$$

Να αποδείξετε ότι ισχύει

$$|(\alpha-1)(\beta-2)|=(\alpha-1)(\beta-2)$$

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο x^2-3x+2 έχει διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-3)^2-4\cdot1\cdot2=9-8=1$$

και ρίζες

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{3\pm1}{2}\Rightarrow\{x_1=1\ \text{ή}\ x_2=2\}$$

Το πρόσημό του παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

άρα $x^2-3x+2>0$ για $x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ και $x^2-3x+2<0$ για $x\in(1,2)$

β) Επειδή το γινόμενο $(\alpha^2-3\alpha+2)(\beta^2-3\beta+2)$ είναι αρνητικό, σημαίνει ότι οι παράγοντες είναι ετερόσημοι, άρα $\alpha^2-3\alpha+2<0$ και $\beta^2-3\beta+2>0$ ή αντίστροφα. Επομένως,

$$\alpha\in(1,2) \text{ και } \beta\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty) \text{ ή αντίστροφα.}$$

- Αν $\alpha\in(1,2)$ και επειδή $\alpha<\beta$ θα είναι $\beta\in(2,+\infty)$. Επομένως, $\alpha-1>0$ και $\beta-2>0$, άρα $(\alpha-1)(\beta-2)>0$, οπότε

$$|(\alpha-1)(\beta-2)|=(\alpha-1)(\beta-2)$$

- Αν $\alpha\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ και $\beta\in(1,2)$, όμως $\alpha<\beta$ τότε $\alpha\in(-\infty,1)$.Επομένως $\alpha-1<0$ και $\beta-2<0$ άρα $(\alpha-1)(\beta-2)>0$, οπότε

$|(\alpha-1)(\beta-2)|=(\alpha-1)(\beta-2)$

ΑΣΚΗΣΗ 42 (4_13086)

Δίνεται το τριώνυμο : $\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda$, $\lambda\in R-\{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in R-\{0\}$.

Μονάδες 9

β) Για ποιες τιμές του λ το παραπάνω τριώνυμο έχει 2 ρίζες ίσες;

Μονάδες 6

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε $\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda\le 0$ για κάθε $x\in R$.

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε,

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\left[-(\lambda^2+1)\right]^2-4\cdot\lambda\cdot\lambda=\lambda^4+2\lambda^2+1-4\lambda^2=\lambda^4-2\lambda^2+1=(\lambda^2-1)^2\ge 0$

Άρα για κάθε $\lambda\in R-\{0\}$ το τριώνυμο θα έχει ρίζες πραγματικές

β) Για να έχει δύο ρίζες ίσες πρέπει καταρχήν $\lambda\in R-\{0\}$ για να έχει νόημα το τριώνυμο και επιπλέον

$$\Delta=0\Leftrightarrow(\lambda^2-1)^2=0\Leftrightarrow\lambda^2-1=0\Leftrightarrow\lambda=\pm1$$

γ) Για να είναι $\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda\le 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ πρέπει

- $\Delta\le 0\Leftrightarrow(\lambda^2-1)^2\le 0\Leftrightarrow\lambda^2-1=0\Leftrightarrow\lambda=\pm1$

και

- ο συντελεστής του x^2, δηλαδή το λ, να είναι αρνητικό

Τελικά $\lambda = -1$.

ΑΣΚΗΣΗ 43 (4_13107)

Δίνεται το τριώνυμο: $f(x) = \lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

(Μονάδες 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

(Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda > 0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

(Μονάδες 6)

δ) Αν $0 < \lambda \neq 1$ και x_1, x_2, με $x_1 < x_2$, είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $f(0) \cdot f(\kappa) \cdot f(\mu)$, όπου κ, μ αριθμοί τέτοιοι ώστε $x_1 < \kappa < x_2 < \mu$

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Από τον τύπο της διακρίνουσας, προκύπτει:

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (\lambda^2 + 1)^2 - 4 \cdot \lambda \cdot \lambda = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)^2 \geq 0$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, οπότε το τριώνυμο $f(x)$ έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \neq 0$

β) Εφαρμόζοντας τους τύπους Vieta για το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών ενός τριωνύμου, για $\lambda \neq 0$ έχουμε:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-\beta}{\alpha} \Rightarrow S = \frac{-\left[-(\lambda^2 + 1)\right]}{\lambda} \Rightarrow S = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda},$$

και

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \Rightarrow P = \frac{\lambda}{\lambda} \Rightarrow P = 1$$

γ) Αφού το γινόμενο των ριζών x_1, x_2 του τριωνύμου είναι $P = 1 > 0$ οι ρίζες του θα είναι ομόσημες. Αν είναι θετικές ή αρνητικές, εξαρτάται από το άθροισμά τους S.

Όμως $\lambda^2 + 1 > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\lambda > 0$, άρα $S = \dfrac{\lambda^2 + 1}{\lambda} > 0$, που σημαίνει ότι οι ρίζες του τριωνύμου $f(x)$ είναι θετικές.

δ) Επειδή $0 < \lambda \neq 1$ ισχύουν τα εξής:

● Η διακρίνουσα του τριωνύμου θα είναι $\Delta = (\lambda^2 - 1)^2 > 0$, επειδή $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -1$ $(\lambda > 0)$

Αυτό σημαίνει ότι το τριώνυμο $f(x)$ θα έχει δύο ρίζες x_1, x_2 πραγματικές , θετικές (από ερώτημα γ)) και άνισες με $0 < x_1 < x_2$

● Το πρόσημο του τριωνύμου $f(x)$, όπως γνωρίζουμε από θεωρία , θα είναι ετερόσημο του συντελεστή του x^2 (που είναι $\lambda > 0$) , δηλαδή αρνητικό , για κάθε x που βρίσκεται μεταξύ των ριζών του.

Με αυτά τα δεδομένα και εφόσον $0 < x_1 < \kappa < x_2 < \mu$, κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$	0	x_1	κ	x_2	μ	$+\infty$
$f(x)$		$+$		$-$		$+$	

Έτσι παρατηρούμε ότι:

$0 \in (-\infty, x_1)$, οπότε $f(0) > 0$

$\kappa \in (x_1, x_2)$, οπότε $f(\kappa) < 0$

$\mu \in (x_2, +\infty)$, οπότε $f(\mu) > 0$

Άρα $f(0) \cdot f(\kappa) \cdot f(\mu) < 0$

Μέθοδος: *Με τη βοήθεια των τύπων Vieta μπορούμε να βρούμε αν οι ρίζες x_1, x_2 ενός τριωνύμου που έχει διακρίνουσα $\Delta > 0$ είναι ομόσημες ή ετερόσημες , θετικές ή αρνητικές.*

Συγκεκριμένα:

$P > 0 \Leftrightarrow x_1, x_2$ ομόσημες

$P < 0 \Leftrightarrow x_1, x_2$ ετερόσημες

$P > 0$ και $S > 0 \Leftrightarrow x_1, x_2$ θετικές

$P > 0$ και $S < 0 \Leftrightarrow x_1, x_2$ αρνητικές

ΑΣΚΗΣΗ 44 (4_20330) ***(νέα: 30-11-2014)***

Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος y (σε m) στο οποίο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή t (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από τη σχέση:

$$y = 60t - 5t^2$$

α) Μετά από πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος;

Μονάδες 8

β) Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί σε ύψος $y = 175$ m;

Μονάδες 8

γ) Να βρεθεί το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100 m.

Μονάδες 9

Λύση

α) Όταν η μεταλλική σφαίρα επανέλθει στο έδαφος θα είναι y = 0 m, άρα λύνουμε την εξίσωση,

$$60t-5t^2=0 \Leftrightarrow 5t(12-t)=0 \overset{t\neq 0}{\Leftrightarrow} 12-t=0 \Leftrightarrow t=12\sec$$

Άρα, η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος μετά από 12 δευτερόλεπτα.

β) Για y = 175, λύνουμε την εξίσωση,

$$175=60t-5t^2 \Leftrightarrow 5t^2-60t+175=0 \Leftrightarrow t^2-12t+35=0$$

Είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού με α = 1, β = –12 και γ = 35, με διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-12)^2-4\cdot 1\cdot 35=144-140=4$$

άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις πραγματικές άνισες που είναι,

$$t_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-12)\pm\sqrt{4}}{2\cdot 1}=\frac{12\pm 2}{2}\Rightarrow\begin{cases} t_1=\dfrac{12+2}{2}=\dfrac{14}{2}=7 \\ t_2=\dfrac{12-2}{2}=\dfrac{10}{2}=5\end{cases}$$

Άρα, η σφαίρα θα βρεθεί σε ύψος y = 175 m για t_1 = 5sec και t_2 = 7sec

γ) Η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100 m όταν

$$y>100 \Leftrightarrow 60t-5t^2>100 \Leftrightarrow 5t^2-60t+100<0 \Leftrightarrow t^2-12t+20<0$$

Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα του τριωνύμου $t^2-12t+20$ με α = 1, β = –12 και γ = 20

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-12)^2-4\cdot 1\cdot 20=144-80=64>0$$

Άρα το τριώνυμο έχει δύο λύσεις πραγματικές άνισες που υπολογίζονται από τον τύπο

$$t_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\Rightarrow t_{1,2}=\frac{-(-12)\pm\sqrt{64}}{2\cdot 1}\Rightarrow t_{1,2}=\frac{12\pm 8}{2}\Rightarrow\begin{cases} t_1=\dfrac{12+8}{2}=\dfrac{20}{2}=10 \\ t_2=\dfrac{12-8}{2}=\dfrac{4}{2}=2\end{cases}$$

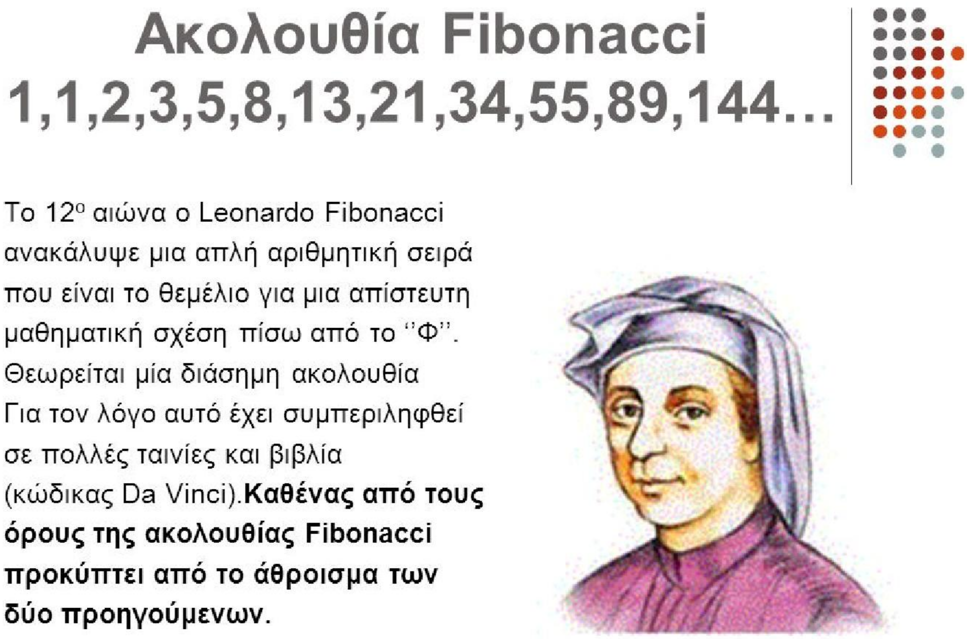
Το πρόσημό του φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

t	0	2		10		$+\infty$
$t^2-12t+20$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Από τον πίνακα φαίνεται ότι η ανίσωση $t^2-12t+20<0$ έχει λύσεις τα $t\in[0,+\infty)$ για τα οποία ισχύει $2<t<10$, δηλαδή η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100m για $t\in(2,10)$

Άλγεβρα Α΄ Λυκείου

Κεφάλαιο 5^{ο} : Πρόοδοι



5.2: Αριθμητική Πρόοδος

ΑΣΚΗΣΗ 1 (2_474)

Θεωρούμε την ακολουθία (α_ν) των θετικών περιττών αριθμών: $1,3,5,7,...$

i. Να αιτιολογήσετε γιατί η (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος και να βρείτε τον εκατοστό όρο της.

(Μονάδες 15)

ii. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των *ν* πρώτων περιττών θετικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο του πλήθους τους.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

i. Έχουμε ,

$$\omega = \alpha_2 - \alpha_1 = 3 - 1 = 2$$

Γνωρίζουμε ότι οι διαδοχικοί όροι διαφέρουν κατά ω άρα $\omega = 2$

Ο ν-οστός όρος της αριθμητικής προόδου δίνεται από τον τύπο: $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\cdot\omega$.

Άρα,

$$\alpha_{100} = \alpha_1 + (100-1)\cdot\omega = 1 + 99\cdot 2 = 1 + 198 = 199$$

ii. Η αριθμητική πρόοδος (α_ν) έχει όρους του θετικούς περιττούς αριθμούς, το άθροισμα των ν πρώτων όρων της είναι:

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2 + (\nu-1)2\right] = \frac{\nu}{2}(2 + 2\nu - 2) = \frac{\nu}{2}2\nu = \nu^2$$

ΑΣΚΗΣΗ 2 (2_480)

Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε σειρά έχει κ καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η 7^η σειρά έχει 36 καθίσματα και το πλήθος των καθισμάτων του σταδίου είναι 300.

α) Αποτελούν τα καθίσματα του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

(Μονάδες 12)

β) Πόσα καθίσματα έχει η κάθε σειρά;

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Το πλήθος καθισμάτων της κάθε σειράς διαφέρει από το πλήθος των καθισμάτων της προηγούμενης κατά τον σταθερό αριθμό κ. Επομένως, ο αριθμός των καθισμάτων κάθε σειράς είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega = \kappa$ και πρώτο όρο α_1 το πλήθος καθισμάτων της πρώτης σειράς.

β) Γνωρίζουμε ότι ο ν-οστός όρος μιας αριθμητικής προόδου δίνεται από τον τύπο

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega$$

όπου ω η διαφορά της προόδου.

Επιπλέον, η 7η σειρά έχει 36 καθίσματα, άρα $\alpha_7 = 36$. Οπότε ο παραπάνω τύπος για $\nu = 7$ γίνεται:

$$\alpha_7 = \alpha_1 + (7-1)\omega \Leftrightarrow 36 = \alpha_1 + 6\kappa \Leftrightarrow \alpha_1 = 36 - 6\kappa \quad (1)$$

Το πλήθος των καθισμάτων του σταδίου είναι 300, δηλαδή το άθροισμα των καθισμάτων των 10 σειρών είναι 360, άρα και το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου είναι 360.

Αυτό σημαίνει ότι στον τύπο: $S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega\right]$ για $\nu = 10$ έχουμε:

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2\alpha_1 + 9\kappa) \Leftrightarrow 300 = 5(2\alpha_1 + 9\kappa) \Leftrightarrow 2\alpha_1 + 9\kappa = 60 \quad (2)$$

Τότε:

$$\begin{cases}\alpha_1 = 36 - 6\kappa \\ 2\alpha_1 + 9\kappa = 60\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1 = 36 - 6\kappa \\ 2(36 - 6\kappa) + 9\kappa = 60\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1 = 36 - 6\kappa \\ 72 - 12\kappa + 9\kappa = 60\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha_1 = 36 - 6\kappa \\ -3\kappa = -12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1 = 36 - 6\kappa \\ \kappa = 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1 = 12 \\ \kappa = 4\end{cases}$$

Ο αριθμός των καθισμάτων στις δέκα σειρές είναι:
12 , 16 , 20 , 24 , 28 , 32 , 36 , 40 , 44 , 48

Σχόλια:
1) Η άσκηση υπήρχε στην Τράπεζα και είχε βγει. Το μόνο που άλλαξε στην εκφώνηση είναι μια μεταβλητή από α έγινε κ!
2) Το α) ερώτημα αντιστοιχεί στην άσκηση Β' Ομάδας 9) της §5.2 (είναι προσαρμογή).
3) Το β) ερώτημα (εφόσον δηλαδή έχουμε μια αριθμητική πρόοδο της οποίας βρήκαμε πρώτο όρο και σταθερή διαφορά ω) αντιστοιχεί στην άσκηση Α' Ομάδας 2) της §5.2.

ΑΣΚΗΣΗ 3 (2_508)

α) Να βρείτε το άθροισμα των ν πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων $1, 2, 3, \ldots, \nu$

Μονάδες 12

β) Να βρείτε πόσους από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε άθροισμα τον αριθμό 45.

Μονάδες 13

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) Πρόκειται για αριθμητική πρόοδο με γενικό όρο α_ν, πρώτο όρο $\alpha_1 = 1$ και διαφορά $\omega = 1$. Το άθροισμα βρίσκεται από τον τύπο:

$$1 + 2 + \ldots + \nu = S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega\right] = \frac{\nu}{2}\left[2 + \nu - 1\right] = \frac{\nu}{2}(\nu+1)$$

β) Έστω ότι πρέπει να πάρουμε ν το πλήθος πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους. Ο ν είναι λύση της εξίσωσης $S_\nu = 45$ (1)

Έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}(\nu+1)=45 \Leftrightarrow \nu(\nu+1)=90 \Leftrightarrow \nu^2+\nu-90=0 \Leftrightarrow \nu=\frac{-1\pm\sqrt{361}}{2}$$

$\Leftrightarrow \nu=\dfrac{-1\pm 19}{2}\begin{cases}\nu=-10\\ \nu=9\end{cases}$ και επειδή ν θετικός ακέραιος είναι: $\nu=9$

ΑΣΚΗΣΗ 4 (2_1015)

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με όρους $\alpha_2=0,\ \alpha_4=4$.

α. Να αποδείξετε ότι $\omega=2$ και $\alpha_1=-2$, όπου ω είναι η διαφορά της προόδου και α_1 ο πρώτος όρος της.

Μονάδες 10

β. Να αποδείξετε ότι ο $\nu-$οστός όρος της προόδου είναι ίσος με $\alpha_\nu=2\nu-4,\ \nu\in\mathbb{N}^*$ και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98.

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α. Ο γενικός τύπος της αριθμητικής (α_ν) προόδου με διαφορά ω και πρώτο όρο τον α_1 είναι: $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\cdot\omega\ (1)$

Αντικαθιστώντας στον παραπάνω τύπο όπου ν το 2 και 4 παίρνουμε:

$$\begin{cases}\alpha_2=\alpha_1+\omega\\ \alpha_4=\alpha_1+3\omega\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0=\alpha_1+\omega\\ 4=\alpha_1+3\omega\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1=-\omega\\ \alpha_1+3\omega=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1=-\omega\\ -\omega+3\omega=4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1=-\omega\\ 2\omega=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1=-\omega\\ \omega=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1=-2\\ \omega=2\end{cases}$$

β. Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) τα $\omega,\ \alpha_1$ με 2 και -2 αντίστοιχα παίρνουμε:

$$\alpha_\nu=-2+(\nu-1)2=-2+2\nu-2=2\nu-4.$$

Για να βρούμε ποιος όρος της αριθμητικής προόδου ισούται με 98 αρκεί να βρούμε το ν ώστε $\alpha_\nu=98$.

Οπότε:

$$\alpha_\nu=98\Leftrightarrow 2\nu-4=98\Leftrightarrow 2\nu=98+4\Leftrightarrow 2\nu=102\Leftrightarrow \nu=51$$

Άρα, ο ζητούμενος όρος είναι ο α_{51}.

ΑΣΚΗΣΗ 5 (2_1050)

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί : $x+2,\ (x+1)^2,\ 3x+2$ με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου, όταν :

i) $x=1$

ii) $x=-1$

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Οι αριθμοί $x+2,\ (x+1)^2,\ 3x+2$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν:

$$(x+1)^2 = \frac{x+2+3x+2}{2} \Leftrightarrow x^2 + 2\cdot x\cdot 1 + 1^2 = \frac{2(2x+2)}{2} \Leftrightarrow$$
$$x^2+2x+1 = 2x+2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = 1,\quad x_2 = -1$$

β) i) Για $x=1$ οι αριθμοί είναι: $3,\ 4,\ 5$, οπότε $\omega = 5-4 = 4-3 = 1$

ii) Για $x=-1$ οι αριθμοί είναι: $1,\ 0,\ -1$, οπότε $\omega = -1-0 = 0-1 = -1$.

Παρόμοια άσκηση βιβλίου : α) 6 ii /Α΄ Ομάδας/σελ. 130

ΑΣΚΗΣΗ 6 (2_1057)

Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη της.

α) Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της ν-οστής σειράς.

(Μονάδες 9)

β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά;

(Μονάδες 8)

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο;

(Μονάδες 9)

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) Από την υπόθεση προκύπτει ότι το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αποτελεί αριθμητική πρόοδο με : $\alpha_1 = 120$ και $\omega = 20$

Έτσι ο ν-οστός όρος, δηλαδή το πλήθος των καθισμάτων της ν-οστής σειράς, είναι:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 120 + (\nu-1)20 = 20\nu + 100$$

β) Η τελευταία σειρά είναι η 10^{η} οπότε ο α_{10} εκφράζει το ζητούμενο πλήθος καθισμάτων: $\alpha_{10} = 20\cdot 10 + 100 = 200 + 100 = 300$

γ) Το σύνολο των καθισμάτων του γυμναστήριου είναι το άθροισμα του πλήθους των καθισμάτων όλων των σειρών, δηλαδή το S_{10}.

$$S_{10} = \frac{\alpha_1 + \alpha_{10}}{2}\cdot \nu = \frac{120+300}{2}\cdot 10 = 210\cdot 10 = 2100$$

Παρόμοια άσκηση βιβλίου:
α) 1/Α΄ Ομάδας/σελ. 129, β) 2/Α΄ Ομάδας/σελ. 129, γ) 10/Α΄ Ομάδα/σελ. 130

ΑΣΚΗΣΗ 7 (2_1064)

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει ότι :

$$\alpha_1 = 19 \text{ και } \alpha_{10} - \alpha_6 = 24 .$$

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 6$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τον α_{20}.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Εφαρμόζουμε τον τύπο του νιοστού όρου $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ διαδοχικά για $\nu = 10$ και $\nu = 6$.

- Για $\nu = 10$ παίρνουμε: $\alpha_{10} = \alpha_1 + (10-1)\omega \Leftrightarrow \alpha_{10} = 19 + 9\omega$
- Για $\nu = 6$ παίρνουμε: $\alpha_6 = \alpha_1 + (6-1)\omega \Leftrightarrow \alpha_6 = 19 + 5\omega$

Οπότε η σχέση $\alpha_{10} - \alpha_6 = 24$ γράφεται:

$$\alpha_{10} - \alpha_6 = 24 \Leftrightarrow (19+9\omega) - (19+5\omega) = 24 \Leftrightarrow 19 + 9\omega - 19 - 5\omega = 24 \Leftrightarrow \omega = 6$$

β) Ο τύπος του νιοστού όρου για $\alpha_1 = 19$ και $\omega = 6$ γίνεται:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega \Leftrightarrow \alpha_\nu = 19 + (\nu - 1)6 .$$

Συνεπώς για $\nu = 20$ έχουμε:

$$\alpha_{20} = 19 + (20-1)6 = 19 + 19 \cdot 6 = 19(1+6) = 19 \cdot 7 \Leftrightarrow \alpha_{20} = 133 .$$

γ) Στον τύπο $S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu)$ για $\nu = 20$ έχουμε:

$$S_{20} = \frac{20}{2}[19 + 133] = 10 \cdot 152 = 1520 \Leftrightarrow S_{20} = 1520$$

Παρόμοια άσκηση βιβλίου: α) 4 i/Α΄ Ομάδας/σελ. 129, β) 4 ii/Α΄ Ομάδας/σελ. 129, γ) 10/Α΄ Ομάδα/σελ. 130

ΑΣΚΗΣΗ 8 (2_1086)

Οι αριθμοί $A = 1$, $B = x + 4$, $\Gamma = x + 8$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_ν).

α) Να βρείτε την τιμή του x.

(Μονάδες 10)

β) Αν $x = 1$ και ο αριθμός Α είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου (α_ν),

i) να υπολογίσετε τη διαφορά ω.

(Μονάδες 7)

ii) να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Οι αριθμοί $Α, Β, Γ$ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και συνεπώς ο $Β$ είναι ο αριθμητικός μέσος των $Α$ και $Γ$.
Ισχύει,

$$Β = \frac{Α+Γ}{2} \Leftrightarrow 2Β = Α+Γ \Leftrightarrow 2(x+4) = 1+x+8 \Leftrightarrow 2x+8 = x+9 \Leftrightarrow x = 1$$

β) Για $x=1$ οι τρεις αριθμοί είναι οι $Α=1$, $Β=5$ και $Γ=9$.

i) Η διαφορά της προόδου είναι $ω = Β - Α = 5-1 = 9-5 = 4$.

ii) Με $α_1 = Α = 1$ και $ω = 4$, ο ν-οστός όρος δίνεται από τον τύπο

$$α_ν = α_1 + (ν-1)ω = 1 + (ν-1)4 = 1 + 4ν - 4 \Leftrightarrow α_ν = 4ν - 3.$$

Οπότε για $ν = 20$ έχουμε ότι: $α_{20} = 4\cdot 20 - 3 = 77$.

Παρόμοια άσκηση βιβλίου : α) 6ii/Α΄ Ομάδας/σελ. 130, β) 2/Α΄ Ομάδας/σελ. 129

ΑΣΚΗΣΗ 9 (2_1301)

Δίνεται αριθμητική πρόοδος $(α_ν)$ για την οποία ισχύει: $α_4 - α_2 = 10$

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι ω = 5.

Μονάδες 12

β) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι 33, να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου.

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Ο ν-οστός όρος μιας αριθμητικής προόδου δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{α_ν = α_1 + (ν-1)\cdot ω}$$

όπου $α_1$: ο πρώτος όρος της προόδου

ω: η διαφορά της προόδου

Για $ν=4$ έχουμε, $α_4 = α_1 + (4-1)\cdot ω = α_1 + 3ω$

Για $ν=2$ έχουμε, $α_2 = α_1 + (2-1)\cdot ω = α_1 + ω$

Άρα, $α_4 - α_2 = 10 \underset{α_2=α_1+ω}{\overset{α_4=α_1+3ω}{\Leftrightarrow}} (α_1+3ω) - (α_1+ω) = 10 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cancel{α_1} + 3ω - \cancel{α_1} - ω = 10 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2ω = 10 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \boxed{ω = 5}$$

β) Το άθροισμα των ν – πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{S_ν = \frac{ν\cdot\left[2\cdot α_1 + (ν-1)\cdot ω\right]}{2}}$$

Οπότε είναι,

$$S_3 = 33 \overset{\nu=3}{\underset{\omega=5}{\Leftrightarrow}} \frac{3\cdot\left[2\cdot\alpha_1+(3-1)\cdot 5\right]}{2} = 33 \Leftrightarrow 3\cdot\left[2\cdot\alpha_1+(3-1)\cdot 5\right] = 33\cdot 2$$

$$\Leftrightarrow 3\cdot(2\alpha_1+2\cdot 5) = 66 \Leftrightarrow 6\alpha_1+30 = 66 \Leftrightarrow 6\alpha_1 = 36 \Leftrightarrow \alpha_1 = 6$$

ΑΣΚΗΣΗ 10 (2_1513)

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_3 = 9$.

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.

Μονάδες 12

β) Να βρείτε τον μικρότερο θετικό ακέραιο ν, ώστε να ισχύει $\alpha_\nu > 30$.

Μονάδες 13

Λύση

α) Ο $\nu^{o\varsigma}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω δίνεται από την σχέση:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\cdot\omega$$

Επομένως αφού $\alpha_3 = 9 \Leftrightarrow \alpha_1 + (3-1)\cdot\omega = 9 \Leftrightarrow 1+2\omega = 9 \Leftrightarrow 2\omega = 9-1 \Leftrightarrow$

$$2\omega = 8 \Leftrightarrow \omega = 4$$

Άρα η διαφορά ω της αριθμητικής προόδου α_ν είναι 4.

β) Αρκεί να λύσουμε την ανίσωση $\alpha_\nu > 30$, όποτε:

$$\alpha_\nu > 30 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\cdot\omega > 30 \Leftrightarrow 1+(\nu-1)\cdot 4 > 30 \Leftrightarrow 1+4\nu-4 > 30 \Leftrightarrow$$

$$4\nu > 30-1+4 \Longleftrightarrow 4\nu > 33 \Longleftrightarrow \nu > \frac{33}{4} = 8{,}25$$

Άρα ο μικρότερος θετικός ακέραιος που ικανοποιεί την ζητούμενη ανίσωση είναι το 9.

ΑΣΚΗΣΗ 11 (2_4300)

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύουν: $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39$.

α. Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$.

(Μονάδες 12)

β. Να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 152.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Γνωρίζουμε ότι ο ν-οστός όρος μιας αριθμητικής προόδου δίνεται από τον τύπο

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega$$

όπου ω η διαφορά της προόδου, οπότε για $\nu = 25$ έχουμε

$$\alpha_{25} = \alpha_1 + 24\omega \ \ (1),$$

ενώ για $\nu = 12$ έχουμε

$$\alpha_{12} = \alpha_1 + 11\omega \ \ (2)$$

Άρα λόγω των (1),(2) η σχέση $\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39$ γίνεται:

$\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39 \Leftrightarrow \alpha_1 + 24\omega = \alpha_1 + 11\omega + 39 \Leftrightarrow 24\omega - 11\omega = 39 \Leftrightarrow 13\omega = 39 \Leftrightarrow \omega = 3$

β. Για να βρούμε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 152 αρκεί να βρούμε τον θετικό ακέραιο ν ώστε $\alpha_\nu = 152$.

Οπότε έχουμε:

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \Leftrightarrow 152 = 2 + 3(\nu - 1) \Leftrightarrow 3(\nu - 1) = 150 \Leftrightarrow \nu - 1 = 50 \Leftrightarrow \nu = 51$

Άρα η τάξη του όρου 152, είναι 51, δηλαδή $\alpha_{51} = 152$.

Σχόλια:

1) *Το α) ερώτημα δεν αντιστοιχεί πλήρως με καμία άσκηση της §5.2, όμως μοιάζει με το παράδειγμα 3 και την άσκηση Α' Ομάδας 3)*
Ο μαθητής καλείται να χρησιμοποιήσει τις 2 δοσμένες σχέσεις και, χρησιμοποιώντας γνωστούς τύπους, να καταλήξει σε μια σχέση με μοναδικό άγνωστο την διαφορά ω της προόδου
2) *Το β) ερώτημα αντιστοιχεί στην άσκηση Α' Ομάδας 2) της §5.2*

ΑΣΚΗΣΗ 12 (2_4301)

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω.

α. Να δείξετε ότι: $\dfrac{\alpha_{15} - \alpha_9}{\alpha_{10} - \alpha_7} = 2$.

(Μονάδες 13)

β. Αν $\alpha_{15} - \alpha_9 = 18$, να βρείτε την διαφορά ω της προόδου.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α. Γνωρίζουμε ότι ο ν-οστός όρος μιας αριθμητικής προόδου δίνεται από τον τύπο

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$$

όπου ω η διαφορά της προόδου.

Οπότε για $\nu = 15$ έχουμε $\alpha_{15} = \alpha_1 + 14\omega$ (1),

για $\nu = 9$ έχουμε $\alpha_9 = \alpha_1 + 8\omega$ (2),

για $\nu = 10$ έχουμε $\alpha_{10} = \alpha_1 + 9\omega$ (3),

ενώ για $\nu = 7$ έχουμε $\alpha_7 = \alpha_1 + 6\omega$ (4).

Συνεπώς, έχουμε

$$\frac{\alpha_{15} - \alpha_9}{\alpha_{10} - \alpha_7} \underset{(3),(4)}{\overset{(1),(2)}{=}} \frac{(\alpha_1 + 14\omega) - (\alpha_1 + 8\omega)}{(\alpha_1 + 9\omega) - (\alpha_1 + 6\omega)} = \frac{\cancel{\alpha_1} + 14\omega - \cancel{\alpha_1} - 8\omega}{\cancel{\alpha_1} + 9\omega - \cancel{\alpha_1} - 6\omega} = \frac{6\omega}{3\omega} = 2$$

β. Αν $\alpha_{15} - \alpha_9 = 18$, τότε

$\alpha_{15} - \alpha_9 = 18 \overset{(1),(2)}{\Rightarrow} (\alpha_1 + 14\omega) - (\alpha_1 + 8\omega) = 18 \Rightarrow \cancel{\alpha_1} + 14\omega - \cancel{\alpha_1} - 8\omega = 18 \Rightarrow$
$6\omega = 18 \Rightarrow \omega = 3$.

Σχόλια:

1) *Το α) ερώτημα δεν αντιστοιχεί πλήρως με καμία άσκηση της §5.2, όμως μοιάζει με το παράδειγμα 3 και την άσκηση Α' Ομάδας 3)*
   Ο μαθητής καλείται να αποδείξει (ευθεία απόδειξη) μία ισότητα.
   Όποιον τρόπο και αν επιλέξει («ξεκινάω από το 1ο μέλος και καταλήγω στο 2ο» ή «μετατρέπω την προς απόδειξη σχέση σε μια ισοδύναμή της που όμως είμαστε σίγουροι ότι πάντα ισχύει» κλπ), πρέπει να χρησιμοποιήσει την σχέση/τύπο του νιοστού όρου μιας αριθμητικής προόδου.
2) *Το β) ερώτημα δεν αντιστοιχεί πλήρως με καμία άσκηση της §5.2, όμως μοιάζει με το παράδειγμα 3 και την άσκηση Α' Ομάδας 3)*
   Ο μαθητής καλείται να χρησιμοποιήσει την σχέση/τύπο του νιοστού όρου μιας αριθμητικής προόδου και να καταλήξει σε μια σχέση με μοναδικό άγνωστο την διαφορά ω της προόδου.

ΑΣΚΗΣΗ 13 (2_4303)

Σε αριθμητική πρόοδος (α_ν) ισχύουν: $\alpha_4 - \alpha_9 = 15$ και $\alpha_1 = 41$.

α. Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με -3.

(Μονάδες 12)

β. Να βρείτε τον θετικό ακέραιο ν, ώστε $\alpha_\nu = \nu$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Γνωρίζουμε ότι ο ν-οστός όρος μιας αριθμητικής προόδου δίνεται από τον τύπο

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$$

όπου ω η διαφορά της προόδου, οπότε για $\nu = 4$ έχουμε

$$\alpha_4 = \alpha_1 + 3\omega \ (1),$$

ενώ για $\nu = 9$ έχουμε

$$\alpha_9 = \alpha_1 + 8\omega \ (2).$$

Έτσι η δοσμένη σχέση γίνεται:

$$\alpha_4 - \alpha_9 = 15 \Rightarrow (\alpha_1 + 3\omega) - (\alpha_1 + 8\omega) = 15 \Rightarrow$$

$$\cancel{\alpha_1} + 3\omega - \cancel{\alpha_1} - 8\omega = 15 \Rightarrow -5\omega = 15 \Rightarrow \omega = -3$$

β. Είναι

$$\alpha_\nu = \nu \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = \nu \overset{\alpha)}{\Leftrightarrow} 41 + (\nu - 1)\cdot(-3) = \nu$$

$$\Leftrightarrow 41 - 3\nu + 3 = \nu \Leftrightarrow 4\nu = 44 \Leftrightarrow \nu = 11$$

Επομένως, για $\nu = 11$ ισχύει $\alpha_\nu = \nu$.

Σχόλια:

1) *Το α) ερώτημα δεν αντιστοιχεί πλήρως με καμία άσκηση της §5.2, όμως μοιάζει με το παράδειγμα 3 και την άσκηση Α' Ομάδας 3)*
   Ο μαθητής καλείται να χρησιμοποιήσει τις 2 δοσμένες σχέσεις και, χρησιμοποιώντας γνωστούς τύπους, να καταλήξει σε μια σχέση με μοναδικό άγνωστο την διαφορά ω της προόδου

2) Το β) ερώτημα αντιστοιχεί στην άσκηση Α' Ομάδας 5) της §5.2.
3) Είναι ίδια με την 2_4304

ΑΣΚΗΣΗ 14 (2_4304)

Σε αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά $\omega = 4$, ισχύει : $\alpha_6 + \alpha_{11} = 40$.

α. Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 της προόδου.

(Μονάδες 12)

β. Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το μηδέν; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Γνωρίζουμε ότι ο ν-οστός όρος μιας αριθμητικής προόδου δίνεται από τον τύπο

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$$

όπου ω η διαφορά της προόδου.
Οπότε για $\nu = 6$ έχουμε

$$\alpha_6 = \alpha_1 + 5\omega \quad (1)$$

ενώ για $\nu = 11$ έχουμε

$$\alpha_{11} = \alpha_1 + 10\omega \quad (2)$$

Έτσι η δοσμένη σχέση γίνεται:

$$\alpha_6 + \alpha_{11} = 40 \Rightarrow (\alpha_1 + 5\omega) + (\alpha_1 + 10\omega) = 40 \Rightarrow$$

$$\alpha_1 + 5\omega + \alpha_1 + 10\omega = 40 \overset{\omega=4}{\Rightarrow} 2\alpha_1 + 15 \cdot 4 = 40 \Rightarrow 2\alpha_1 + 60 = 40 \Rightarrow 2\alpha_1 = -20 \Rightarrow$$

$$\alpha_1 = -10$$

β. Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου δίνεται από τον τύπο

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) \Leftrightarrow S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega\right].$$

Για να βρούμε πόσους πρώτους όρους πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμα να είναι ίσο με μηδέν αρκεί να βρούμε το ν ώστε $S_\nu = 0$.

Είναι,

$$\begin{aligned} S_\nu = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\nu}{2}\left[2 \cdot (-10) + 4(\nu - 1)\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\nu}{2}(-20 + 4\nu - 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (\nu = 0 \text{ ή } -24 + 4\nu = 0) \\ &\Leftrightarrow \quad (\nu = 0 \text{ ή } \nu = 6) \end{aligned}$$

Όμως $\nu = 0$ απορρίπτεται αφού $\nu \in \mathbb{N}^*$, άρα $\nu = 6$.

Σχόλια:

1) *Το α) ερώτημα δεν αντιστοιχεί πλήρως με καμία άσκηση της §5.2, όμως μοιάζει με το παράδειγμα 3 και την άσκηση Α' Ομάδας 3)*
   Ο μαθητής καλείται να χρησιμοποιήσει τις 2 δοσμένες σχέσεις και, χρησιμοποιώντας γνωστούς τύπους, να καταλήξει σε μια σχέση με μοναδικό άγνωστο τον πρώτο όρο α_1 *της προόδου.*
2) *Το β) ερώτημα αντιστοιχεί στην άσκηση Α' Ομάδας 11) της §5.2.*
3) *Είναι ίδια με την 2_4303*

ΑΣΚΗΣΗ 15 (2_4312)

Οι αριθμοί $x+6,\ 5x+2,\ 11x-6$ είναι, με την σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο a_1 και διαφορά ω.

α. Να βρείτε την τιμή του x και να αποδείξετε ότι $\omega = 4$.

(Μονάδες 12)

β. Αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 0$, να υπολογίσετε το άθροισμα S_8 των 8 πρώτων όρων.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Για να είναι οι αριθμοί $x+6,\ 5x+2,\ 11x-6$ είναι, με την σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου πρέπει να ισχύει:

$$5x+2=\frac{(x+6)+(11x-6)}{2} \Leftrightarrow 2\cdot(5x+2)=2\cdot\frac{12x}{2} \Leftrightarrow 10x+4=12x \Leftrightarrow$$
$$12x-10x=4 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=2$$

Οπότε οι τρεις αριθμοί είναι οι εξής:

$$\begin{cases} x+6=2+6=8 \\ 5x+2=5\cdot 2+2=12 \\ 11x-6=11\cdot 2-6=16 \end{cases}$$

Για το ω αρκεί να βρούμε τη διαφορά δυο διαδοχικών όρων της προόδου, άρα:

$$\omega=12-8=4$$

β) Το άθροισμα ν – όρων αριθμητικής προόδου δίνεται από τον τύπο:

$$S_\nu=\frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1+(\nu-1)\omega\right]$$

Για το άθροισμα των 8 πρώτων όρων έχουμε:

$$S_8=\frac{8}{2}\left[2\cdot 0+(8-1)\cdot 4\right]=4\cdot 28 \Leftrightarrow S_8=112$$

ΑΣΚΗΣΗ 16 (2_4319)

Σε αριθμητική πρόοδο (a_ν) είναι $\alpha_1=2$ και $\alpha_5=14$

α. Να αποδείξετε ότι $\omega=3$.

(Μονάδες 12)

β. Να βρείτε πόσους αρχικούς (πρώτους) όρους πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77 .

(Μονάδες 13)

(Δίνεται $\sqrt{1849}=43$)

ΛΥΣΗ

α) Ο ν - οστός μιας αριθμητικής προόδου ισούται με $a_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega$, οπότε:

$$\alpha_5=\alpha_1+4\omega \Leftrightarrow 14=2+4\omega \Leftrightarrow 4\omega=12 \Leftrightarrow \omega=3$$

β) Το άθροισμα των ν πρώτων όρων μια αριθμητικής προόδου ισούται με:

$$S_\nu=\frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1+(\nu-1)\omega\right]$$

Οπότε $S_\nu=77 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}\left[2\cdot 2+(\nu-1)\cdot 3\right]=77 \Leftrightarrow \nu(4+3\nu-3)=154 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \nu(1+3\nu)=154 \Leftrightarrow \nu+3\nu^2=154 \Leftrightarrow 3\nu^2+\nu-154=0$$

Η διακρίνουσα της τελευταίας εξίσωσης είναι:

$$\Delta=1-4\cdot 3\cdot(-154)=1+1848=1849.$$

Άρα έχει δυο λύσεις τις:

$$\nu_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1849}}{6}=\begin{cases}\dfrac{-1+43}{6}=\dfrac{42}{6}=7 & \text{,δεκτή}\\[2ex] \dfrac{-1-43}{6}=-\dfrac{44}{6} & \text{,απορρίπτεται γιατί } \nu\in\mathbb{N}\end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ 17 (4_2047)

Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει 20 κυψέλες σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αποθήκη του Α. Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 μέτρο από την αποθήκη Α, η δεύτερη 4 μέτρα από το Α, η τρίτη 7 μέτρα από το Α και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α, 3 επιπλέον μέτρα, σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη.

α. Να δείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε το ν-όρο αυτής της προόδου. Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι η διαφορά της;

(Μονάδες 6)

β. Σε πόση απόσταση από την αποθήκη Α είναι η 20^{η} κυψέλη;

(Μονάδες 6)

γ. Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη Α συλλέγει το μέλι, από μία κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει πάλι πίσω στην αποθήκη Α.

i) Ποια είναι απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την 3η κυψέλη;

(Μονάδες 6)

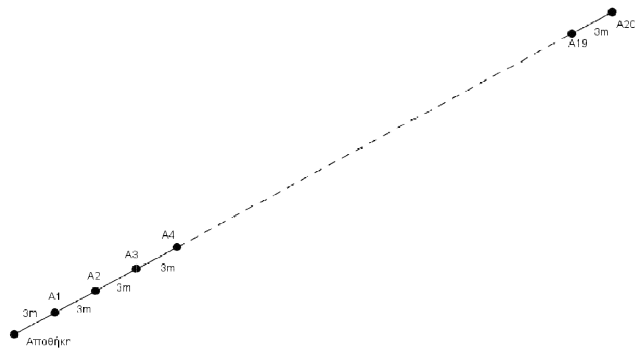
ii) Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες;

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α. Αφού κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α τρία μέτρα, σύμφωνα με

τον ορισμό της αριθμητικής προόδου οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου (α_ν) με πρώτο όρο $\alpha_1 = 1$ και διαφορά $\omega = 3$.
Ο πρώτος όρος εκφράζει πόσο απέχει η πρώτη κυψέλη από την αποθήκη Α, ενώ η διαφορά ω, την απόσταση που απέχει κάθε επόμενη κυψέλη από την προηγούμενη.



Ακόμη ο ν-όρος της αριθμητικής προόδου (α_ν) είναι,

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\cdot\omega \Rightarrow \alpha_\nu = 1 + (\nu-1)\cdot 3 \Rightarrow \alpha_\nu = 3\nu - 2 \ \text{ με } \ \nu \in \mathbb{N}^*$$

β. Η 20^{η} κυψέλη θα απέχει α_{20} m. Είναι

$$\alpha_{20} = 3\cdot 20 - 2 = 58\,\text{m}$$

γ.i) Αφού ο μελισσοκόμος επιστρέφει στην αποθήκη μετά από τη συλλογή του μελιού από κάθε κυψέλη, πηγαίνοντας στη πρώτη κυψέλη διανύει 1 m και γυρνάει στην αποθήκη διανύοντας ακόμα 1 m, δηλαδή $2\alpha_1$ m. Ομοίως κάνει $2\alpha_2$ m για να πάει και να έρθει από τη δεύτερη κυψέλη στην αποθήκη και $2\alpha_3$ m για να πάει και να έρθει από την τρίτη κυψέλη στην αποθήκη.
Άρα συνολικά διανύει

$$S = 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 2(1+4+7) = 24\,\text{m}$$

ii) Αφού για κάθε κυψέλη πάει και επιστρέφει στην αποθήκη, διανύει για κάθε κυψέλη $2\alpha_\nu$ m.
Επομένως, ο μελισσοκόμος θα διανύσει για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες, απόσταση

$$S_{o\lambda} = 2\cdot S_{20} \Rightarrow S_{o\lambda} = 2\frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_{20}) = 20(1+58) = 1180\ \text{m}$$

ΑΣΚΗΣΗ 18 (4_2083)

Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμιά από τις επόμενες σειρές έχει δυο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.

α) Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά.

Μονάδες 10

β) Να υπολογίσετε την χωρητικότητα του σταδίου.

Μονάδες 5

γ) Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την 7η μέχρι και την 14η σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου.

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς του σταδίου προκύπτει αν στο πλήθος των καθισμάτων της προηγούμενης σειράς προστεθούν 2 καθίσματα.

Συνεπώς, το πλήθος των καθισμάτων ανά σειρά είναι όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = 12$ και διαφορά $\omega = 2$.

Η μεσαία σειρά είναι η 13^{η} και η τελευταία σειρά είναι η 25^{η}, άρα ζητούνται οι όροι α_{13} και α_{25}.

Ο $\nu^{o\varsigma}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου δίνεται από τον τύπο

$$\boxed{\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega}$$

Για ν = 13 έχουμε:

$$\alpha_{13} = \alpha_1 + (13-1)\cdot\omega = 12 + 12\cdot 2 = 12 + 24 = 36$$

Για ν = 25 έχουμε:

$$\alpha_{25} = \alpha_1 + (25-1)\cdot\omega = 12 + 24\cdot 2 = 12 + 48 = 60$$

Δηλαδή η μεσαία σειρά έχει 36 καθίσματα και η τελευταία 60.

β) Το άθροισμα των καθισμάτων των 25 σειρών του σταδίου είναι το S_{25}.

Το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου δίνεται από τους τύπους

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu)\ (1) \text{ ή } S_\nu = \frac{\nu}{2}\cdot\left[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega\right]\ (2)$$

Για ν = 25 η σχέση (1) γίνεται:

$$S_{25} = \frac{25}{2}(\alpha_1 + \alpha_{25}) \overset{(\alpha)}{=} \frac{25}{2}(12+60) = \frac{25}{2}\cdot 72 = 25\cdot 36 = 900$$

Δηλαδή, το στάδιο χωράει 900 καθήμενα άτομα.

γ) Το πλήθος των μαθητών του Λυκείου θα ισούται με την διαφορά του συνόλου των καθισμάτων των 14 πρώτων σειρών του σταδίου μείον το σύνολο των καθισμάτων των 6 πρώτων σειρών.

Για ν = 14 η σχέση (2) γίνεται:

$$S_{14} = \frac{14}{2}[2\alpha_1 + (14-1)\cdot\omega] = 7\cdot(2\cdot 12 + 13\cdot 2) = 7\cdot(24+26) = 7\cdot 50 = 350$$

Για ν=6 η σχέση (2) γίνεται:

$$S_6 = \frac{6}{2}[2\alpha_1 + (6-1)\cdot\omega] = 3\cdot(2\cdot 12 + 5\cdot 2) = 3\cdot(24+10) = 3\cdot 34 = 102$$

Άρα, $S_{14} - S_6 = 350 - 102 = 248$ το πλήθος των μαθητών του Λυκείου.

ΑΣΚΗΣΗ 19 (4_2323)

Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς 3, 7, 11, 15,... και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4. Σταματάει όταν έχει γράψει τους 40 πρώτους από τους

αριθμούς αυτούς.
α) Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

β) Να βρείτε το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών.

Μονάδες 7

γ) Είναι ο αριθμός 120 ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

δ) Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου, από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι να εμφανιστεί ο αριθμός 235. Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος.

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

α) Οι αριθμοί 3,7,11,15,… είναι όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = 3$ και διαφορά ω = 4, αφού καθένας προκύπτει από τον προηγούμενο του με πρόσθεση πάντα του 4.

β) Το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου δίνεται από τους τύπους

$$\boxed{S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu)} \;(1) \text{ και } \boxed{S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega\right]} \;(2)$$

Για ν = 40 η σχέση (2) γίνεται:

$$S_{40} = \frac{40}{2}\cdot\left[2\alpha_1 + (40-1)\cdot\omega\right] = 20\cdot(2\cdot 3 + 39\cdot 4) = 20\cdot(6+156) = 20\cdot 162 = 3240$$

Δηλαδή το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών είναι 3240.

γ) Έστω ότι ο 120 είναι κάποιος όρος από τους 40, δηλαδή $\alpha_\nu = 120$ για κάποιο ν θετικό ακέραιο, τότε

$$\alpha_\nu = 120 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 120 \Leftrightarrow 3 + (\nu-1)\cdot 4 = 120 \Leftrightarrow 3 + 4\nu - 4 = 120 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + 4\nu = 120 \Leftrightarrow 4\nu = 121 \Leftrightarrow \nu = \frac{121}{4} = 3{,}25 \notin \mathbb{N}$$

Άρα ο 120 **δεν** είναι όρος της αριθμητικής προόδου.

δ) Ο $\nu^{ος}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου δίνεται από τον τύπο

$$\boxed{\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega}$$

Για ν = 41 έχουμε:

$$\alpha_{41} = \alpha_1 + (41-1)\cdot\omega = 3 + 40\cdot 4 = 3 + 160 = 163$$

και

$$\alpha_\nu = 235 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\cdot\omega = 235 \Leftrightarrow 3 + (\nu-1)\cdot 4 = 235 \Leftrightarrow 3 + 4\nu - 4 = 235 \Leftrightarrow 4\nu - 1 = 235$$

$$\Leftrightarrow 4\nu = 236 \Leftrightarrow \nu = \frac{236}{4} \Leftrightarrow \nu = 59$$

δηλαδή, ο αριθμός 235 μέχρι τον οποίο ο Γιώργος μέτρησε, είναι ο $59^{ος}$ όρος της αριθμητικής προόδου.

Για $\nu = 59$ η σχέση (1) γίνεται:

$$S_{59} = \frac{59}{2}\cdot(\alpha_1 + \alpha_{59}) = \frac{59}{2}\cdot(3+235) = \frac{59}{2}\cdot 238 = 59\cdot 119 = 7021$$

άρα

$$S_{59} - S_{40} = 7021 - 3240 = 3781$$

το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος.

ΑΣΚΗΣΗ 20 (4_4671)

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω.

1. Να αποδείξετε ότι $\alpha_{20} - \alpha_{10} = 10\omega$.

(Μονάδες 6)

2. Αν $\alpha_{20} - \alpha_{10} = 30$ και $\alpha_1 = 1$ να αποδείξετε ότι $\alpha_\nu = 3\nu - 2$.

(Μονάδες 6)

3. Ποιος είναι ο πρώτος όρος της προόδου που ξεπερνάει το 30;

(Μονάδες 7)

4. Πόσοι όροι της παραπάνω προόδου είναι μικρότεροι του 60;

(Μονάδες 6)

Λύση

1. Αφού η $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$ είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω, έχουμε ότι:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega, \nu \in \mathbb{N}^*.$$

Συνεπώς:

$$\alpha_{20} - \alpha_{10} = (\alpha_1 + 19\omega) - (\alpha_1 + 9\omega) = \alpha_1 + 19\omega - \alpha_1 - 9\omega = 10\omega$$

2. Αφού $\alpha_{20} - \alpha_{10} = 30$, από το (α) ερώτημα έχουμε: $10\omega = 30 \Leftrightarrow \omega = 3$.

Επιπλέον $\alpha_1 = 1$, οπότε $\alpha_\nu = 1 + (\nu - 1)\cdot 3 = 3\nu - 2, \nu \in \mathbb{N}^*$.

3. Αναζητούμε τον μικρότερο $\nu \in \mathbb{N}^*$ έτσι ώστε $\alpha_\nu > 30$.

Συνεπώς:

$$3\nu - 2 > 30 \Leftrightarrow 3\nu > 32 \Leftrightarrow \nu > \frac{32}{3} \Leftrightarrow \nu > 10 + \frac{2}{3},$$

άρα $\nu > 10,667$ άρα ο $11^{ος}$ όρος ξεπερνά το 30.

4. Αναζητούμε τον μεγαλύτερο $\nu \in \mathbb{N}^*$ έτσι ώστε $\alpha_\nu < 60$.

Συνεπώς:

$$3\nu - 2 < 60 \Leftrightarrow 3\nu < 62 \Leftrightarrow \nu < \frac{62}{3} \Leftrightarrow \nu < 20 + \frac{2}{3},$$

άρα $\nu < 20,667$ οι 20 πρώτοι όροι είναι μικρότεροι του 60.

ΑΣΚΗΣΗ 21 (4_4858)

Μια περιβαλλοντική οργάνωση ξεκινά να καταγράφει τον πληθυσμό των ελαφιών σε μια δασική περιοχή από το 2000 όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Έτος	2000	2001	2002	2003	2004
Αριθμός ελαφιών	1300	1360	1420	1480	1540

Αν ο αριθμός των ελαφιών συνεχίσει να αυξάνεται με τον ίδιο σταθερό ρυθμό και μετά το 2004:

α) Να βρείτε μια σχέση που να επιτρέπει τον υπολογισμό του πληθυσμού των ελαφιών στο τέλος κάθε έτους από το 2000 και μετά.

(Μονάδες 6)

β) Με τη βοήθεια της σχέσης αυτής:

i) Να προσδιορίσετε τον πληθυσμό των ελαφιών στο τέλος του 2012.

(Μονάδες 6)

ii) Να προβλέψετε το έτος στο τέλος του οποίου ο αρχικός πληθυσμός των 1300 ελαφιών θα αυξηθεί κατά 60%.

(Μονάδες 6)

iii) Να προβλέψετε το έτος που ο πληθυσμός των ελαφιών δε θα υπερβεί τα 2600 ελάφια.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Με τη βοήθεια του πίνακα που καταγράφει τον πληθυσμό των ελαφιών ανά έτος βρίσκουμε: $1360-1300=60$, $1420-1360=60$, $1480-1420=60$ και $1540-1480=60$

Παρατηρούμε ότι από έτος σε έτος έχουμε σταθερή αύξηση 60 ελαφιών. Αυτό σημαίνει ότι οι αριθμοί που μας δίνουν τον πληθυσμό των ελαφιών σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο (α_ν) με διαφορά $\omega=60$ και όρους:

$\alpha_1=1300$ που μας δίνει το πλήθος των ελαφιών στο τέλος του 2000

$\alpha_2=1360$ που μας δίνει το πλήθος των ελαφιών στο τέλος του 2001

$\alpha_3=1420$ που μας δίνει το πλήθος των ελαφιών στο τέλος του 2002

.

.

$\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega=1300+(\nu-1)60 \Leftrightarrow \alpha_\nu=1240+60\nu$ που μας δίνει το πλήθος των ελαφιών στο τέλος του έτους $1999+\nu$

β) i) Για να βρούμε τον πληθυσμό των ελαφιών στο τέλος του 2012 έχουμε $1999+\nu=2012 \Leftrightarrow \nu=13$, οπότε αρκεί στον προηγούμενο τύπο του ν-οστού όρου να βάλουμε $\nu=13$

Τότε: $\alpha_{13}=60\cdot12+1300=2020$ ελάφια.

ii) Θέλουμε να βρούμε το έτος στο τέλος του οποίου ο πληθυσμός των ελαφιών θα είναι ίσος με $1300+\frac{60}{100}1300=1300+780=2080$

Επομένως, αρκεί να βρούμε το φυσικό αριθμό ν για τον οποίο ισχύει $\alpha_\nu=2080 \Leftrightarrow$ $1240+60\nu=2080 \Leftrightarrow 60\nu=840 \Leftrightarrow \nu=14$

Οπότε στο τέλος του $1999+14=2013$ ο πληθυσμός των ελαφιών θα έχει αυξηθεί κατά 60% του αρχικού.

iii) Αρκεί $\alpha_\nu \le 2600 \Leftrightarrow 1240+60\nu \le 2600 \Leftrightarrow 60\nu \le 1360 \Leftrightarrow \nu \le 22{,}66$

Επειδή ο ν είναι φυσικός αριθμός θα είναι $\nu = 22$

Άρα στο τέλος του $1999+22=2021$ ο πληθυσμός των ελαφιών δε θα υπερβεί τα 2600 ελάφια.

ΑΣΚΗΣΗ 22 (4_4925)

Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_2=\kappa^2$ και $\alpha_3=(\kappa+1)^2$, κ ακέραιος με $\kappa>1$

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι αριθμός περιττός.

Μονάδες 8

β) Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι $\alpha_1=2$, τότε:

i) Να βρείτε τον αριθμό κ και να αποδείξετε ότι $\omega=7$

Μονάδες 8

ii) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1017 είναι όρος της προόδου.

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) Η διαφορά ω μιας αριθμητικής προόδου προκύπτει αν από ένα τυχαίο όρο της αφαιρέσουμε τον προηγούμενό του.

Έτσι

$$\omega=\alpha_3-\alpha_2=(\kappa+1)^2-\kappa^2=\kappa^2+2\kappa+1-\kappa^2=2\kappa+1\ ,$$

δηλαδή περιττός αριθμός.

β) i) Χρησιμοποιώντας τον τύπο $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega$ που μας δίνει το ν-οστό όρο αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω, προκύπτει ότι:

$$\alpha_2=\alpha_1+\omega \Leftrightarrow \kappa^2=2+2\kappa+1 \Leftrightarrow \kappa^2-2\kappa-3=0$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=16>0$$

και ρίζες

$$\kappa_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}\kappa_1=\dfrac{2+4}{2}=3\\ \quad\text{ή}\\ \kappa_2=\dfrac{2-4}{2}=-1\end{cases}$$

Η τιμή -1 απορρίπτεται , αφού από υπόθεση $\kappa>1$, άρα $\kappa=3$

Τότε

$$\omega=2\cdot3+1=7$$

ii) Αρκεί να υπάρχει φυσικός αριθμός ν τέτοιος, ώστε:

$\alpha_\nu=1017 \Leftrightarrow \alpha_1+(\nu-1)\omega=1017 \Leftrightarrow 2+(\nu-1)\cdot7=1017 \Leftrightarrow 2+7\nu-7=1017 \Leftrightarrow$

$7\nu = 1022 \Leftrightarrow \nu = 146$

Άρα υπάρχει όρος της προόδου που είναι ίσος με 1017 και είναι ο α_{146}

ΑΣΚΗΣΗ 23 (4_6143)

Στην Α' τάξη ενός Λυκείου της Καρδίτσας η σύμβουλος των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιήσει μια δραστηριότητα. Επειδή όμως δεν γνωρίζει το πλήθος των μαθητών της τάξης, συμβουλεύεται το Γυμναστή του σχολείου, που στοιχίζει τους μαθητές για τις παρελάσεις και εκείνος της απαντά με ένα πρόβλημα:

«Μπορώ να τοποθετήσω όλους τους μαθητές σε x σειρές με $x-1$ μαθητές σε κάθε σειρά. Αν όμως θελήσω να τους τοποθετήσω σε $x+3$ σειρές με $x-3$ μαθητές σε κάθε σειρά, θα μου λείπει ένας μαθητής».

α) Να βρείτε την τιμή του x.

Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε η Α΄ τάξη έχει 90 μαθητές.

Μονάδες 6

γ) Η σύμβουλος σκοπεύει να μοιράσει τους παραπάνω 90 μαθητές σε ν ομάδες εργασίας, ώστε στην πρώτη ομάδα να πάνε 2 μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα να πηγαίνουν 2 παραπάνω κάθε φορά. Να βρείτε την τιμή του ν δηλαδή πόσες ομάδες εργασίας θα δημιουργηθούν.

Μονάδες 13

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) Όταν ο γυμναστής τοποθετεί τους μαθητές σε x σειρές με $x-1$ μαθητές, τότε οι μαθητές είναι $x(x-1)$.

Όταν ο γυμναστής τοποθετεί τους μαθητές σε $x+3$ σειρές με $x-3$ μαθητές του λείπει ένας, τότε οι μαθητές είναι $(x+3)(x-3)-1$

Άρα

$$x(x-1) = (x+3)(x-3)-1 \Leftrightarrow x^2 - x = x^2 - 9 - 1 \Leftrightarrow x = 10$$

β) Τότε οι μαθητές της Α΄ τάξης είναι

$$10(10-1) = 90$$

γ) Αφού στην πρώτη ομάδα να πάνε 2 μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα να πηγαίνουν 2 παραπάνω κάθε φορά, ο αριθμός των μαθητών κάθε ομάδας είναι όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = 2$ και διαφορά $\omega = 2$

Αφού οι μαθητές είναι 90 ισχύει

$$S_\nu = 90 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega] = 90 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}[2\cdot 2 + (\nu-1)\cdot 2] = 90 \Leftrightarrow \nu(2+\nu-1) = 90 \Leftrightarrow$$

$$\nu(\nu+1) = 90 \Leftrightarrow \nu^2 + \nu - 90 = 0$$

Η εξίσωση

$$\nu^2 + \nu - 90 = 0$$

έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1 + 360 = 361$$

Και ρίζες

$$\nu_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-1\pm19}{2}$$

άρα $\nu_1=\frac{-1+19}{2}=9$ και $\nu_2=\frac{-1-19}{2}=-10$ απορρίπτεται (αφού $\nu>0$)

Άρα θα δημιουργηθούν 9 ομάδες εργασίας.

ΑΣΚΗΣΗ 24 (4_7503)

Οι αριθμοί: x^2+5 , x^2+x , $2x+4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του αριθμού x.

(Μονάδες 6)

β) Αν $x=3$ και ο αριθμός x^2+5 είναι ο $4^{ος}$ όρος της προόδου, να βρείτε:

i) Τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 5)

ii) Τον πρώτο όρο της προόδου.

(Μονάδες 6)

iii) Το άθροισμα $S=\alpha_{15}+\alpha_{16}+\alpha_{17}+\ldots+\alpha_{24}$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α)Αφού οι αριθμοί x^2+5 , x^2+x , $2x+4$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, ισχύει σύμφωνα με το τύπο του αριθμητικού μέσου:

$$x^2+x=\frac{x^2+5+2x+4}{2}\Leftrightarrow 2x^2+2x=x^2+2x+9\Leftrightarrow x^2=9\Leftrightarrow \boxed{x=\pm3}$$

β) Έχουμε $x=3$ επομένως

$$\alpha_4=3^2+5\Leftrightarrow \boxed{\alpha_4=14}$$

παρατηρούμε ότι ο α_4 ισούται με τον πρώτο από τους τρεις όρους που μας δόθηκαν, επομένως ο επόμενος θα είναι ο α_5, άρα έχουμε:

$$\alpha_5=x^2+x\Leftrightarrow \alpha_5=3^2+3\Leftrightarrow \boxed{\alpha_5=12}$$

i) $\omega=\alpha_5-\alpha_4=12-14\Leftrightarrow \boxed{\omega=-2}$

ii) $\alpha_4=14\Leftrightarrow \alpha_1+3\omega=14\Leftrightarrow \alpha_1-3\cdot2=14\Leftrightarrow \alpha_1=14+6\Leftrightarrow \boxed{\alpha_1=20}$

iii) Έχουμε:

$$S=\alpha_{15}+\alpha_{16}+\alpha_{17}+\ldots+\alpha_{24}\Rightarrow S=(\alpha_1+\ldots+\alpha_{24})-(\alpha_1+\ldots+\alpha_{14})\Rightarrow$$

$$S=S_{24}-S_{14}=\frac{24\cdot(2\alpha_1+23\cdot\omega)}{2}-\frac{14\cdot(2\alpha_1+13\cdot\omega)}{2}=12\cdot(2\cdot20-23\cdot2)-7\cdot(2\cdot20-13\cdot2)=$$

$$=12\cdot(40-46)-7\cdot(40-26)=12\cdot(-6)-7\cdot14=-72-98=-170$$

ΑΣΚΗΣΗ 25 (4_7504)

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν), ο 3ος όρος είναι $\alpha_3 = 8$ και ο 8ος όρος είναι $\alpha_8 = 23$

α) Να αποδείξετε ότι ο 1^{ος} όρος της αριθμητικής προόδου είναι $\alpha_1=2$ και η διαφορά της $\omega=3$.

Μονάδες 9

β) Να υπολογίσετε τον 31^{ο} όρο της.

Μονάδες 6

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$S=(\alpha_1+1)+(\alpha_2+2)+...+(\alpha_{31}+31)$$

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε ότι ο ν-οστός όρος μιας αριθμητικής προόδου δίνεται από τον τύπο $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega$.

Επομένως για $\nu = 3$ έχουμε:

$$\alpha_3=8 \Rightarrow \alpha_1+2\omega=8 \quad (1)$$

$$\alpha_8=23 \Rightarrow \alpha_1+7\omega=23 \quad (2)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) έχουμε: $5\omega=15 \Rightarrow \omega=3$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) έχουμε: $\alpha_1+2\cdot3=8 \Rightarrow \alpha_1=8-6 \Rightarrow \alpha_1=2$

β) Από την ίδια σχέση $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega$ για $\nu=31$ παίρνουμε:

$$\alpha_{31}=\alpha_1+30\omega=2+30\cdot3=92$$

γ) Το δοθέν άθροισμα γράφεται

$$S=(\alpha_1+1)+(\alpha_2+2)+...+(\alpha_{31}+31)=(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_{31})+(1+2+3+...+31) \quad (3)$$

Παρατηρούμε ότι, η πρώτη παρένθεση είναι άθροισμα των 31 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου (α_ν) δηλαδή $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_{31}=S_{31}$ και σύμφωνα με τον τύπο $S_\nu=\frac{\nu}{2}(\alpha_1+\alpha_\nu)$ έχουμε:

$$S_{31}=\frac{31\cdot(\alpha_1+\alpha_{31})}{2}=\frac{31\cdot(2+92)}{2}=\frac{31\cdot94}{2}=31\cdot47=1457$$

η δεύτερη παρένθεση είναι άθροισμα των 31 όρων της αριθμητικής προόδου (β_ν) με $\beta_1=1$ και $\omega=1$.

Τότε: $1+2+3+...+31=S_{31}$ και χρησιμοποιώντας τον τύπο $S_\nu=\frac{\nu}{2}(\beta_1+\beta_\nu)$ για $\nu=31$

$$S_{31}=\frac{31\cdot(\beta_1+\beta_{31})}{2}=\frac{31\cdot(1+31)}{2}=\frac{31\cdot32}{2}=31\cdot16=496.$$

Επομένως από την σχέση έχουμε, $S=1457+496=1953$

ΑΣΚΗΣΗ 26 (4_10775)

Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων. Η 1^{η} σειρά έχει 16 καθίσματα και η 7^{η} σειρά έχει 28 καθίσματα.

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο της και τη διαφορά αυτής της προόδου.

Μονάδες 5

β) Να βρείτε το γενικό όρο της προόδου.

Μονάδες 4

γ) Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο;

Μονάδες 5

δ) Αν στην 1^{η} σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη 2^{η} υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην 3^{η} υπάρχουν 12 κενά καθίσματα και γενικά, τα κενά καθίσματα κάθε σειράς, από τη 2^{η} και μετά, είναι κατά 3 περισσότερα από αυτά της προηγούμενης, τότε:

i) Να βρείτε από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα.

Μονάδες 5

ii) Να βρείτε πόσοι είναι οι θεατές.

Μονάδες 6

ΛΥΣΗ

α) Ο αριθμός των καθισμάτων κάθε σειράς είναι αυξημένος από τον αριθμό καθισμάτων της προηγούμενης κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων, συνεπώς οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Η πρώτη σειρά έχει 16 καθίσματα άρα $\alpha_1 = 16$, ενώ η έβδομη σειρά έχει 28 καθίσματα άρα

$$\alpha_7 = 28 \Rightarrow \alpha_1 + 6\omega = 28 \Rightarrow 16 + 6\omega = 28 \Rightarrow 6\omega = 28 - 16 = 12 \Rightarrow \omega = 2,$$

άρα η αριθμητική πρόοδος έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = 16$ και διαφορά $\omega = 2$.

β) Ο γενικός όρος της προόδου είναι

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \underset{\omega=2}{\overset{\alpha_1=16}{\Rightarrow}} \alpha_\nu = 16 + (\nu - 1)\cdot 2 \Rightarrow \alpha_\nu = 16 + 2\nu - 2 \Rightarrow \alpha_\nu = 2\nu + 14$$

γ) Το σύνολο των καθισμάτων όλου του θεάτρου (που έχει συνολικά 20 σειρές καθισμάτων) δίνεται από τον τύπο $S_\nu = \frac{\nu}{2}\cdot\left[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega\right]$, άρα

$$S_{20} = \frac{20}{2}\left[2\cdot 16 + (20 - 1)\cdot 2\right] = 10\cdot(32 + 19\cdot 2) = 10\cdot(32 + 38) = 10\cdot 70 = 700,$$

δηλαδή το θέατρο έχει συνολικά 700 καθίσματα.

δ) Η πρώτη σειρά θα έχει $16 - 6 = 10$ κατειλημμένα καθίσματα και κάθε επόμενη σειρά θα έχει μεν δύο παραπάνω καθίσματα αλλά ταυτόχρονα και 3 περισσότερα ελεύθερα από την προηγούμενη, άρα θα έχει 1 κατειλημμένο κάθισμα λιγότερο. Συνεπώς ο αριθμός των κατειλημμένων καθισμάτων κάθε σειράς θα ακολουθεί αριθμητική πρόοδο

(β_ν) με πρώτο όρο $\beta_1 = 10$ και διαφορά $\omega = -1$ (άρα και φθίνοντες όρους) μέχρι φυσικά να μηδενιστούν τα κατειλημμένα καθίσματα.

i) Επομένως σε κάθε σειρά από αυτήν και πέρα θα έχουμε μόνο άδεια καθίσματα. Ισχύει

$$\beta_\nu > 0 \Rightarrow \beta_1 + (\nu-1)\omega > 0 \Rightarrow 10 + (\nu-1)\cdot(-1) > 0 \Rightarrow 10 - \nu + 1 > 0 \Rightarrow \nu < 11$$

άρα κατειλημμένα καθίσματα έχουν οι πρώτες 10 σειρές, οπότε από την ενδέκατη και πάνω οι σειρές είναι άδειες.

ii) Το πλήθος των θεατών ισούται προφανώς με το πλήθος των κατειλημμένων καθισμάτων που είναι ίσο με το άθροισμα των πρώτων 10 όρων της αριθμητικής προόδου (β_ν), δηλαδή:

$$S_{10} = \frac{10}{2}\cdot\left[2\cdot 10 + (10-1)\cdot(-1)\right] = 5\cdot(20 - 9\cdot 1) = 55,$$

άρα οι θεατές είναι 55.

<u>Ένας διαφορετικός τρόπος επίλυσης για το (δ) ερώτημα</u>

Έχουμε μια νέα αριθμητική πρόοδο (γ_ν) τέτοια ώστε,

$$\gamma_1 = \alpha_1 - \beta_1 = 16 - 6 = 10$$
$$\gamma_2 = \alpha_2 - \beta_2 = 18 - 9 = 9$$
$$\gamma_3 = \alpha_3 - \beta_3 = 20 - 12 = 8$$

με $\gamma_1 = 10$ *και* $\omega'' = -1$.

Επομένως,

i. Έστω ν η σειρά που θα έχουμε κενά καθίσματα άρα

$$\gamma_\nu = 0 \Rightarrow \gamma_1 + (\nu-1)\omega'' = 0 \Rightarrow 10 + (\nu-1)(-1) = 0 \Rightarrow \nu = 11$$

δηλαδή από την 11^η σειρά και μετά έχουμε κενά καθίσματα.

ii. Οι θεατές κάθονται μέχρι την 10^η σειρά, αφού μετά υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα, οπότε για να βρούμε πόσοι είναι όλοι οι θεατές που παρακολουθούν την θεατρική παράσταση, αρκεί να υπολογίσουμε

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\gamma_1 + (\nu-1)\omega''\right] \Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2}\left[2\cdot 10 + (10-1)(-1)\right] = 55$$

ΑΣΚΗΣΗ 27 (4_13093)

Ο ιδιοκτήτης ενός ταξιδιωτικού γραφείου εκτιμά ότι, όταν για μια συγκεκριμένη διαδρομή διαθέτει τα εισιτήρια στην κανονική τιμή των 21 € ανά εισιτήριο, τότε πουλά κατά μέσο όρο 30 μόνο εισιτήρια, ενώ το λεωφορείο έχει 51 θέσεις. Θέλοντας να αυξήσει τη πελατεία του, κάνει την ακόλουθη προσφορά: Ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει 3€ και κάθε επόμενος επιβάτης θα πληρώνει 0,5€ περισσότερο από τον προηγούμενο.

α) Να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος επιβάτης.

(Μονάδες 4)

β) Αν, για κάθε $\nu \le 51$ ο αριθμός α_ν εκφράζει το ποσό που θα πληρώσει ο ν-οστός επιβάτης, να δείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{51}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τη διαφορά ω αυτής της προόδου.

(Μονάδες 6)

γ) Αν το λεωφορείο γεμίσει, να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο $51^{ος}$ επιβάτης.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε πόσα τουλάχιστον εισιτήρια θα πρέπει να πουληθούν ώστε η είσπραξη του γραφείου με αυτή την προσφορά να ξεπερνά την είσπραξη που θα έκανε αν πουλούσε 30 εισιτήρια στην τιμή των 21 € ανά εισιτήριο. (Δίνεται ότι: $\sqrt{10201} = 101$)

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Αν ο πρώτος επιβάτης πληρώσει 3€ και κάθε επόμενος πληρώσει 0,5€ περισσότερο τότε έχουμε,

$1^{ος}$ επιβάτης θα πληρώσει 3€

$2^{ος}$ επιβάτης θα πληρώσει $(3+0,5)€ = 3,5€$

$3^{ος}$ επιβάτης θα πληρώσει $(3,5+0,5)€ = 4€$ και

$4^{ος}$ επιβάτης θα πληρώσει $(4+0,5)€ = 4,5€$

β) Από τα δεδομένα προκύπτει ότι η τιμή του κάθε εισιτηρίου προκύπτει από την τιμή του προηγούμενου εισιτηρίου με πρόσθεση του ίδιου πάντα αριθμού 0,5. Άρα οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{51}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, με διαφορά

$\omega = 0,5 = \frac{1}{2}$ και πρώτο όρο $\alpha_1 = 3$

Ακόμη ο ν-οστός όρος της ακολουθίας είναι

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \Rightarrow \alpha_\nu = 3 + (\nu - 1)\frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha_\nu = \frac{5+\nu}{2}, \ \nu \in \mathbb{N}^*$$

γ) Αν γεμίσει το λεωφορείο τότε ο $51^{ος}$ επιβάτης θα πληρώσει το ποσό που αντιστοιχεί στον $51^{ο}$ όρο της ακολουθίας,

$$\alpha_{51} = \frac{5+51}{2} \Leftrightarrow \alpha_{51} = 28 \text{ δηλαδή } 28€ .$$

δ) Αν πουλούσε 30 εισιτήρια προς 21€ το ένα, θα είχε εισπράξει $30 \cdot 21 = 630€$

Έστω S_ν το άθροισμα των ν-πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου (α_ν) του ερωτ.β) για το οποίο η είσπραξη του γραφείου με αυτή την προσφορά να ξεπερνά την είσπραξη που θα έκανε αν πουλούσε 30 εισιτήρια στην τιμή των 21 € ανά εισιτήριο, δηλαδή

$S_\nu > 630$

Όμως,

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}(2\alpha_1 + (\nu-1)\omega) \Rightarrow S_\nu = \frac{\nu}{2}\left(2\cdot 3 + (\nu-1)\frac{1}{2}\right) \Rightarrow S_\nu = 3\nu + \frac{\nu(\nu-1)}{4}$$

$$\Rightarrow S_\nu = \frac{\nu^2 - 11\nu}{4},\ \ \nu \in \mathbb{N}^*$$

Έτσι έχουμε,

$$S_\nu > 630 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\nu^2 - \frac{11}{4}\nu - 630 > 0$$

και για το τριώνυμο $\frac{1}{4}\nu^2 - \frac{11}{4}\nu - 630$

έχουμε,

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \Rightarrow \Delta = \left(\frac{11}{4}\right)^2 - 4\cdot\frac{1}{4}\cdot(-630) = \frac{10201}{16} > 0$$

άρα

$$\nu = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Rightarrow \nu = \frac{-\frac{11}{4} \pm \sqrt{\frac{10201}{16}}}{2\frac{1}{4}} \Leftrightarrow \nu = \frac{-11 \pm 101}{2} \overset{\nu>0}{\Rightarrow} \nu = 45$$

Άρα πρέπει να πουλήσει τουλάχιστον 45 εισιτήρια.

ΑΣΚΗΣΗ 28 (4_13156)

Δίνεται μία αριθμητική πρόοδος (α_ν) όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Αν οι τρεις πρώτοι όροι της προόδου είναι:

$$\alpha_1 = x,\qquad \alpha_2 = 2x^2 - 3x - 4,\qquad \alpha_3 = x^2 - 2,\qquad \text{όπου}\quad x \in \mathbb{Z}$$

τότε:

α) Να αποδειχθεί ότι $x = 3$

Μονάδες 10

β) Να βρεθεί ο ν–οστός όρος της προόδου και να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 2014

Μονάδες 8

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \ldots + \alpha_{15}$$

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

α) Τρεις αριθμοί: α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνον αν ισχύει:

$$\boxed{\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}}$$

Οπότε: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, άρα:

$$2x^2 - 3x - 4 = \frac{x + x^2 - 2}{2} \Leftrightarrow 2\cdot\left(2x^2 - 3x - 4\right) = x^2 + x - 2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 6x - 8 = x^2 + x - 2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 7x - 6 = 0$$

Είναι:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-7)^2 - 4\cdot 3\cdot(-6) = 49 + 72 = 121$$

με ρίζες,

$$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{121}}{2\cdot 3}=\frac{7\pm 11}{6}\begin{cases}=\dfrac{7+11}{6}=\dfrac{18}{6}=3\\[2mm]=\dfrac{7-11}{6}=\dfrac{-4}{6}=-\dfrac{2}{3}\notin\mathbb{Z},\text{ άρα απορρίπτεται}\end{cases}$$

Άρα, x = 3.

β) Για x = 3, είναι: $\alpha_1=3$,

$\alpha_2=2\cdot 3^2-3\cdot 3-4=2\cdot 9-9-4=18-9-4=5$

$\alpha_3=3^2-2==9-2==7$

Η διαφορά της προόδου δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{\omega=\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu}$$

για $\nu=1$ έχουμε,

$$\omega=\alpha_2-\alpha_1=5-3=2$$

Ο ν-οστός όρος της αριθμητικής προόδου δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\cdot\omega}$$

άρα είναι,

$$\alpha_\nu=3+(\nu-1)\cdot 2=3+2\nu-2=2\nu+1$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει όρος της προόδου, ώστε

$$\alpha_\nu=2014\Leftrightarrow 2\nu+1=2014\Leftrightarrow 2\nu=2013\Leftrightarrow \nu=\frac{2013}{2}\notin\mathbb{N}\ \text{ΑΤΟΠΟ}$$

Άρα δεν υπάρχει όρος της προόδου ώστε $\alpha_\nu=2014$

γ) Ορίζουμε μια νέα αριθμητική πρόοδο (β_ν) που έχει όρους πρώτο όρο:

$$\beta_1=\alpha_1=3\ \text{ και }\ \beta_2=\alpha_3=\alpha_1+(3-1)\cdot\omega=3+2\cdot 2=7$$

Οπότε $\omega_1=\beta_2-\beta_1=7-3=4$, με τελευταίο όρο:

$$\beta_\nu=\alpha_{15}=\alpha_1+(15-1)\cdot\omega=3+14\cdot 2=3+28=31$$

αλλά,

$$\beta_\nu=31\Leftrightarrow 3+(\nu-1)\cdot 4=31\Leftrightarrow 3+4\nu-4=31\Leftrightarrow 4\nu=32\Leftrightarrow \nu=8$$

Το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{S_\nu=\frac{\nu}{2}\cdot\left[2\alpha_1+(\nu-1)\cdot\omega\right]}$$

άρα,

$$S_8=\frac{8}{2}\cdot[2\cdot 3+(8-1)\cdot 4]=4\cdot(6+7\cdot 4)=4\cdot(6+28)=4\cdot 34=136$$

5.3: Γεωμετρική Πρόοδος

ΑΣΚΗΣΗ 1 (2_495)

Σε γεωμετρική πρόοδο (α_ν) με θετικό λόγο λ, ισχύει: $\alpha_3 = 1$ και $\alpha_5 = 4$

α) Να βρείτε το λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της.

Μονάδες 13

β) Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι: $\alpha_\nu = 2^{\nu-3}$

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε δυο αγνώστους, τους λ (λόγο) και τον α_1 (πρώτο όρο), οπότε πρέπει να βρω δυο εξισώσεις.

Από τη θεωρία γνωρίζω ότι : $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$ οπότε έχουμε:

$$\alpha_3 = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \lambda^2 = 1 \ (1)$$
$$\alpha_5 = 4 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \lambda^4 = 4 \ (2)$$

Διαιρούμε τις δυο εξισώσεις κατά μέλη για να διώξω τον ένα άγνωστο (α_1). Πιο βολικό είναι να έχουμε τον άγνωστο με τη μεγαλύτερη δύναμη στον αριθμητή δηλαδή,

$$\frac{(2)}{(1)}: \ \frac{\cancel{\alpha_1} \cdot \lambda^4}{\cancel{\alpha_1} \cdot \lambda^2} = \frac{4}{1} \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow \lambda = \pm 2$$

και επειδή $\lambda > 0$ θα είναι $\lambda = 2$

και από την (1):

$$\alpha_1 \cdot \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot 2^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot 4 = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{1}{4}$$

β) Έχουμε,

$$\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1} = \frac{1}{4} \cdot 2^{\nu-1} = \frac{2^{\nu-1}}{4} = \frac{2^{\nu-1}}{2^2} = 2^{\nu-1-2} = 2^{\nu-3}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2 (2_1032)

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί : x, $2x+1$, $5x+4$ με την σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το λόγο λ της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, όταν:

i) $x = 1$

ii) $x = -1$

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Αφού οι αριθμοί: x, $2x+1$, $5x+4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου ισχύει:

$$(2x+1)^2 = x(5x+4) \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 5x^2 + 4x \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x = 1 \ \text{ή} \ x = -1$$

β) i) Για $x=1$ έχουμε τους όρους $1,\ 3, 9$ οπότε έχουμε λόγο $\lambda=\frac{3}{1}=3$.

ii) Για $x=-1$ έχουμε τους όρους $-1,\ -1, -1$ οπότε έχουμε λόγο $\lambda=\frac{-1}{-1}=1$

Παρόμοια άσκηση βιβλίου : 2/Β΄ Ομάδας/σελ. 138

ΑΣΚΗΣΗ 3 (2_1088)

α) Αν οι αριθμοί 4 – x, x, 2 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x.

Μονάδες 9

β) Αν οι αριθμοί 4 – x, x, 2 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x.

Μονάδες 9

γ) Να βρεθεί ο αριθμός x ώστε οι αριθμοί 4 – x, x, 2 να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου

Μονάδες 7

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) Επειδή οι αριθμοί 4 – x, x, 2 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, ο x θα είναι ο αριθμητικός μέσος των 4 – x και 2.

Οπότε έχουμε :

$$x=\frac{4-x+2}{2}\Leftrightarrow 2x=4-x+2\Leftrightarrow 2x+x=4+2\Leftrightarrow 3x=6\Leftrightarrow x=2$$

β) Επειδή οι αριθμοί 4 – x, x, 2 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, ο x θα είναι ο γεωμετρικός μέσος των 4 – x και 2.

Οπότε έχουμε :

$$x^2=(4-x)2\Leftrightarrow x^2=8-2x\Leftrightarrow x^2+2x-8=0$$

Το τριώνυμο x^2+2x-8 με α = 1, β = 2 και γ = – 8 έχει διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=2^2-4\cdot1\cdot(-8)=36>0\ ,$$

οπότε

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-2\pm\sqrt{36}}{2\cdot1}=\frac{-2\pm6}{2}=\begin{cases}x_1=\frac{-2+6}{2}=2\\ x_2=\frac{-2-6}{2}=-4\end{cases}$$

γ) Από α) ερώτημα έχουμε ότι αν x = 2 η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος.
Από β) ερώτημα έχουμε ότι αν x = 2 και x = – 4 η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος.
Άρα αν x = 2 η ακολουθία μας είναι αριθμητική και γεωμετρική πρόοδος.
Επαλήθευση : Για x = 2 η ακολουθία γίνεται 2, 2, 2 με $\omega=\alpha_2-\alpha_1=2-2=0$ και $\lambda=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}=\frac{2}{2}=1$, δηλαδή είναι αριθμητική και γεωμετρική πρόοδος.

<u>Παρόμοιες Ασκήσεις</u>
Το α ερώτημα μοιάζει με την άσκηση 6.ii (Α΄ Ομάδας) της παραγράφου 5.2 του σχολικού βιβλίου.
Το β ερώτημα μοιάζει με την άσκηση 8.ii (Α΄ Ομάδας) της παραγράφου 5.3 του σχολικού βιβλίου.
Το γ ερώτημα είναι συνδυασμός των δύο πρώτων ερωτημάτων.

ΑΣΚΗΣΗ 4 (2_1100)
Δίνεται η εξίσωση : $2x^2 - 5\beta x + 2\beta^2 = 0$ (1), με παράμετρο $\beta > 0$.
α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις : $x_1 = 2\beta$ και $x_2 = \dfrac{\beta}{2}$

Μονάδες 12

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας

Μονάδες 13

<u>ΛΥΣΗ</u>
α) Το τριώνυμο $2x^2 - 5\beta x + 2\beta^2$ της εξίσωσης (1) έχει συντελεστές α = 2, β = – 5β και γ = 2β².
Έχουμε λοιπόν :

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5\beta)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (2\beta^2) = 25\beta^2 - 16\beta^2 = 9\beta^2 > 0 \text{ διότι } \beta > 0$$

Οπότε έχουμε δύο άνισες ρίζες :

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5\beta) \pm \sqrt{9\beta^2}}{2 \cdot 2} = \frac{5\beta \pm 3\beta}{4} = \begin{cases} \dfrac{5\beta + 3\beta}{4} = \dfrac{8\beta}{4} = 2\beta \\ \dfrac{5\beta - 3\beta}{4} = \dfrac{2\beta}{4} = \dfrac{\beta}{2} \end{cases}$$

Άρα $x_1 = 2\beta$ και $x_2 = \dfrac{\beta}{2}$

β) Από την θεωρία ξέρουμε ότι οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$.
Οπότε για να είναι οι x_1, β, x_2 διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου πρέπει

$$\beta^2 = x_1 \cdot x_2 \Leftrightarrow \beta^2 = 2\beta \cdot \frac{\beta}{2} \Leftrightarrow \beta^2 = \frac{2\beta^2}{2} \Leftrightarrow \beta^2 = \beta^2, \text{ το οποίο ισχύει.}$$

<u>Παρόμοια Άσκηση :</u>
Το α ερώτημα μοιάζει με την άσκηση 1 (Β Ομάδας) της παραγράφου 3.3 του σχολικού βιβλίου.

ΑΣΚΗΣΗ 5 (2_1101)
Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - 2\beta x + (\beta^2 - 4) = 0$ (1) με παράμετρο $\beta \in \mathbb{R}$
α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις : $x_1 = \beta - 2$ και $x_2 = \beta + 2$

Μονάδες 12

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2 με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $x^2 - 2\beta x + (\beta^2 - 4) = 0$ της εξίσωσης (1) έχει συντελεστές $\alpha = 1$, $\beta = -2\beta$ και $\gamma = \beta^2 - 4$.

Έχουμε λοιπόν :

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2\beta)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\beta^2 - 4) = 4\beta^2 - 4\beta^2 + 16 = 16 > 0$$

Οπότε έχουμε δύο άνισες ρίζες :

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-2\beta) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2\beta \pm 4}{2} = \begin{cases} \dfrac{2\beta + 4}{2} = \beta + 2 \\ \dfrac{2\beta - 4}{2} = \beta - 2 \end{cases}$$

Άρα $x_1 = \beta + 2$ και $x_2 = \beta - 2$

β) Οπότε για να είναι οι x_1, β, x_2 διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου πρέπει

$$\beta = \frac{x_1 + x_2}{2} \Leftrightarrow \beta = \frac{\beta - 2 + \beta + 2}{2} \Leftrightarrow \beta = \frac{2\beta}{2} \Leftrightarrow \beta = \beta \text{ , το οποίο ισχύει.}$$

Παρόμοια Άσκηση

Το α ερώτημα μοιάζει με την άσκηση 1 (Β Ομάδας) της παραγράφου 3.3 του σχολικού βιβλίου.

ΑΣΚΗΣΗ 6 (2_3828)

Οι αριθμοί $\kappa - 2$, 2κ και $7\kappa + 4$, $\kappa \in \mathbb{N}$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν)

α. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 4$ και να βρείτε το λόγο λ της προόδου.

Μονάδες 12

β. i. Να εκφράσετε το 2^o όρο, τον 5^o και τον 4^o όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του α_1

Μονάδες 6

ii. Να αποδείξετε ότι $\alpha_2 + \alpha_5 = 4(\alpha_1 + \alpha_4)$

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

α. Εφόσον οι αριθμοί $\kappa - 2$, 2κ , $7\kappa + 4$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε ισχύει $(2\kappa)^2 = (\kappa - 2)(7\kappa + 4) \Leftrightarrow 4\kappa^2 = 7\kappa^2 + 4\kappa - 14\kappa - 8 \Leftrightarrow 3\kappa^2 - 10\kappa - 8 = 0$

Έχουμε $\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-8) = 100 + 96 = 196 > 0$, άρα $\kappa_{1,2} = \dfrac{10 \pm 14}{6}$ οπότε $\kappa_1 = 4$ και $\kappa_2 = -\dfrac{2}{3} \notin \mathbb{N}$ απορρίπτεται.

Συνεπώς $\kappa = 4$.

Τότε για $\kappa = 4$ οι όροι που δίνονται είναι 2 , 8 , 32 , άρα $\lambda = \frac{8}{2} = 4$

β. Έχουμε $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1} = \alpha_1 \cdot 4^{\nu-1}$.

Οπότε

$\alpha_2 = \alpha_1 \cdot 4^{2-1} = \alpha_1 \cdot 4 = 4\alpha_1$

$\alpha_5 = \alpha_1 \cdot 4^{5-1} = \alpha_1 \cdot 4^4 = 256\alpha_1$, $\alpha_4 = \alpha_1 \cdot 4^{4-1} = \alpha_1 \cdot 4^3 = 64\alpha_1$

ii. Έχουμε $\alpha_2 + \alpha_5 = 4(\alpha_1 + \alpha_4) \Leftrightarrow \alpha_2 + \alpha_5 = 4\alpha_1 + 4\alpha_4 \Leftrightarrow$

$4\alpha_1 + 256\alpha_1 = 4\alpha_1 + 4 \cdot 64\alpha_1$ που ισχύει.

ΑΣΚΗΣΗ 7 (2_4288)

α. Να βρείτε, για ποιες τιμές του x, οι αριθμοί $x+4$, $2-x$, $6-x$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 13)

β. Αν $x = 5$ και ο $6-x$ είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, να βρείτε:

i) το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 6)

ii) τον πρώτο όρο α_1 της προόδου.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α. Γνωρίζουμε ότι οι αριθμοί α, β, γ, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$.

Οπότε οι αριθμοί $x+4$, $2-x$, $6-x$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν:

$$(2-x)^2 = (x+4)\cdot(6-x) \Leftrightarrow$$

$$4 \cancel{-4x} + x^2 = 6x - x^2 + 24 \cancel{-4x} \Leftrightarrow$$

$$4 + x^2 - 6x + x^2 - 24 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x^2 - 6x - 20 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0 .$$

Η εξίσωση αυτή είναι δευτέρου βαθμού ως προς x με διακρίνουσα

$$\Delta = (-3)^2 - 4\cdot 1\cdot(-10) = 9 + 40 = 49 > 0,$$

άρα έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, τις:

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{49}}{2\cdot 1} = \frac{3 \pm 7}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3+7}{2} = 5 \\ x_2 = \frac{3-7}{2} = -2 \end{cases}.$$

Άρα τελικά $x = 5$ ή $x = -2$.

β. Αφού $x=5$ και ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρικής προόδου είναι ο $6-x$ θα ισχύει: $\alpha_4=6-x=6-5=1$. Επίσης, από το (α), ο τρίτος όρος της γεωμετρικής προόδου είναι ο $\alpha_3=2-x=2-5=-3$ και ο δεύτερος όρος της είναι ο $\alpha_2=x+4=5+4=9$.

i) Ο λόγος λ της γεωμετρικής προόδου είναι ίσος με $\lambda=\dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$, οπότε:

$$\lambda=\frac{\alpha_4}{\alpha_3}=\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}.$$

ii) <u>1ος τρόπος</u>: Γνωρίζουμε ότι $\lambda=\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\Rightarrow \alpha_1=\dfrac{\alpha_2}{\lambda}\Rightarrow \alpha_1=\dfrac{9}{-\frac{1}{3}}=-27$.

<u>2ος τρόπος</u>: Από τη σχέση $\alpha_\nu=\alpha_1\cdot\lambda^{\nu-1}$ για $\nu=4$ έχουμε

$$\alpha_4=\alpha_1\cdot\lambda^3\Rightarrow 1=\alpha_1\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^3\Rightarrow 1=\alpha_1\cdot\left(-\frac{1}{27}\right)\Rightarrow \alpha_1=\frac{1}{-\frac{1}{27}}=-27.$$

(όμοια θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το α_1 και με τη βοήθεια του α_3 ή του α_2 εφαρμόζοντας και πάλι τον τύπο του ν-οστού όρου για $\nu=3$ ή $\nu=2$ αντίστοιχα).

<u>Σχόλια:</u>

1) *Το α) ερώτημα αντιστοιχεί στην άσκηση Α' Ομάδας 8ii) της §5.3*
2) *Το βi) ερώτημα αντιστοιχεί στην άσκηση Α' Ομάδας 1i) της §5.3, όπου για να βρει ο μαθητής τον ω-οστό όρο της αντίστοιχης γ.π. πρέπει πρώτα να βρει και τον λόγο της λ.*
3) *Το βii) ερώτημα αντιστοιχεί στην άσκηση Α' Ομάδας 3i) της §5.3*

ΑΣΚΗΣΗ 8 (2_4315)

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν), για την οποία ισχύει $\dfrac{\alpha_5}{\alpha_2}=27$.

α. Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda=3$

(Μονάδες 10)

β. Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Ο ν - οστός μιας γεωμετρικής προόδου ισούται με $\alpha_\nu=\alpha_1\cdot\lambda^{\nu-1}$, άρα:

$\alpha_5=\alpha_1\cdot\lambda^4$ και $\alpha_2=\alpha_1\cdot\lambda$, επομένως:

$$\frac{\alpha_5}{\alpha_2}=27\Leftrightarrow\frac{\alpha_1\lambda^4}{\alpha_1\lambda}=27\Leftrightarrow\lambda^3=27\Leftrightarrow\lambda=3$$

β) Είναι $S_\nu=\alpha_1\dfrac{\lambda^\nu-1}{\lambda-1}$, άρα:

$$S_4 = 200 \Leftrightarrow a_1 \frac{3^4 - 1}{3 - 1} = 200 \Leftrightarrow a_1 \frac{81 - 1}{2} = 200 \Leftrightarrow 40a_1 = 200 \Leftrightarrow a_1 = 5$$

ΑΣΚΗΣΗ 9 (4_2340)

Μια οικογένεια, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει μεταξύ δυο προγραμμάτων που της προτείνονται:

Για το πρόγραμμα Α πρέπει να καταθέσει τον $1^{\text{ο}}$ μήνα 1 ευρώ, το $2^{\text{ο}}$ μήνα 2 ευρώ, τον $3^{\text{ο}}$ μήνα 4 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό διπλάσιο από αυτό που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

Για το πρόγραμμα Β πρέπει να καταθέσει τον $1^{\text{ο}}$ μήνα 100 ευρώ, τον $2^{\text{ο}}$ μήνα 110 ευρώ , τον τρίτο μήνα 120 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει να καταθέτει ποσό κατά 10 ευρώ μεγαλύτερο από εκείνο που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

1. i) Να βρείτε το ποσό α_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το $\nu^{\text{ο}}$ μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Α.

(Μονάδες 4)

ii) Να βρείτε το ποσό β_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το $\nu^{\text{ο}}$ μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Β.

(Μονάδες 4)

iii) Να βρείτε το ποσό A_ν που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Α.

(Μονάδες 5)

iv) Να βρείτε το ποσό B_ν που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Β.

(Μονάδες 5)

2. i) Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά τους πρώτους 6 μήνες, σύμφωνα με κάθε πρόγραμμα;

(Μονάδες 3)

ii) Αν κάθε πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε 12 μήνες, με ποιο από τα δυο προγράμματα το συνολικό ποσό που θα συγκεντρωθεί θα είναι μεγαλύτερο;

(Μονάδες 4)

ΛΥΣΗ

1.i) Τα ποσά κατάθεσης του κάθε μήνα του προγράμματος Α είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου (α_ν) με πρώτο όρο $\alpha_1 = 1$ και λόγο $\lambda = 2$.

Άρα το ποσό που θα πρέπει να καταθέσει τον $\nu^{\text{ο}}$ μήνα θα είναι

$$\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1} \Rightarrow \alpha_\nu = 1 \cdot 2^{\nu-1} \Leftrightarrow \alpha_\nu = 2^{\nu-1}$$

ii) Τα ποσά κατάθεσης του κάθε μήνα του προγράμματος Β είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (β_ν) με πρώτο όρο $\beta_1 = 100$ και διαφορά $\omega = 10$.

Άρα το ποσό που θα πρέπει να καταθέσει τον $\nu^{\text{ο}}$ μήνα θα είναι

$$\beta_\nu = \beta_1 + (\nu - 1)\omega \Rightarrow \beta_\nu = 100 + 10(\nu - 1) \Leftrightarrow \beta_\nu = 10\nu + 90$$

iii) Το συνολικό ποσό που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά ν μήνες θα είναι

$$S_{\alpha_\nu} = \alpha_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1} \Rightarrow S_{\alpha_\nu} = \frac{2^\nu - 1}{2-1} \Leftrightarrow S_{\alpha_\nu} = 2^\nu - 1$$

iv) Το συνολικό ποσό που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά ν μήνες θα είναι

$$S_{\beta_\nu} = \frac{\nu}{2}\left[2\beta_1 + (\nu-1)\omega\right] \Rightarrow S_{\beta_\nu} = \frac{\nu}{2}\left[2\cdot 100 + (\nu-1)10\right] = \frac{\nu}{2}\left[10\nu + 190\right] \Leftrightarrow S_{\beta_\nu} = 5\nu^2 + 95\nu$$

2.i) Για το πρόγραμμα Α μετά από 6 μήνες και από το ερώτ.**1ii)** για ν=6 έχουμε, $S_{\alpha_6} = 2^6 - 1 = 63$ ευρώ και αντίστοιχα για το πρόγραμμα Β και από το ερωτ.1.iv) για ν=6 θα είναι $S_{\beta_6} = 5\cdot 6^2 + 95\cdot 6 = 750$ ευρώ.

ii) Για το πρόγραμμα Α για ν=12 και από το ερώτ.1ii) έχουμε $S_{\alpha_{12}} = 2^{12} - 1 = 4095$ ευρώ και για το πρόγραμμα Β για ν=12 και από το ερωτ.1.iv) είναι

$$S_{\beta_{12}} = 5\cdot 12^2 + 95\cdot 12 = 1860 \text{ ευρώ.}$$

Άρα μεγαλύτερο ποσό θα συγκεντρωθεί με το πρόγραμμα Α.

ΑΣΚΗΣΗ 10 (4_4629)

Ένα μυρμήγκι περπατάει πάνω σε ένα ευθύγραμμο κλαδί μήκους 1 m, με τον ακόλουθο τρόπο: Ξεκινάει από το ένα άκρο του κλαδιού και το 1ο λεπτό προχωράει 1 cm, το 2ο λεπτό προχωράει 3 cm και γενικά, κάθε λεπτό διανύει απόσταση κατά 2 cm μεγαλύτερη από αυτήν που διήνυσε το προηγούμενο λεπτό.

1. Να δείξετε ότι οι αποστάσεις που διανύει το μυρμήγκι κάθε λεπτό της κίνησής του, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τον ν-οστό όρο α_ν αυτής της προόδου.

(Μονάδες 5)

2. Να βρείτε τη συνολική απόσταση που κάλυψε το μυρμήγκι τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του.

(Μονάδες 4)

3. Να βρείτε σε πόσα λεπτά το μυρμήγκι θα φτάσει στο άλλο άκρο του κλαδιού.

(Μονάδες 4)

4. Υποθέτουμε τώρα ότι, την ίδια στιγμή που το μυρμήγκι ξεκινάει την πορεία του, από το άλλο άκρο του κλαδιού μία αράχνη ξεκινάει και αυτή προς την αντίθετη κατεύθυνση και με τον ακόλουθο τρόπο: Το 1ο λεπτό προχωράει 1 cm, το 2ο λεπτό προχωράει 2 cm, το 3ο λεπτό προχωράει 4 cm και, γενικά, κάθε λεπτό διανύει απόσταση διπλάσια από αυτήν που διήνυσε το προηγούμενο λεπτό.

i) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις που διανύει η αράχνη κάθε λεπτό της κίνησής της, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να βρείτε τον ν-οστό όρο β_ν αυτής της προόδου.

(Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε σε πόσα λεπτά το μυρμήγκι και η αράχνη θα βρεθούν αντιμέτωπα σε απόσταση 1 cm.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

1. Αφού το μυρμήγκι κάθε λεπτό διανύει απόσταση κατά 2 cm μεγαλύτερη, οι αποστάσεις που διανύει κάθε λεπτό το μυρμήγκι είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου $(\alpha_\nu), \nu \in \mathbb{N}^*$ με πρώτο όρο $\alpha_1 = 1$ και διαφορά $\omega = 2$ και ο ν-οστό όρος

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \Rightarrow \alpha_\nu = 1 + (\nu - 1)\cdot 2 \Leftrightarrow \alpha_\nu = 2\nu - 1, \nu \in \mathbb{N}^*$

2. Αν $S_\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$ είναι η συνολική απόσταση που διένυσε το μυρμήγκι τα πρώτα ν λεπτά θα είναι, $S_\nu = \frac{\nu}{2}\cdot\left(2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega\right) \Rightarrow S_\nu = \frac{\nu}{2}\cdot\left(2\cdot 1 + (\nu - 1)\cdot 2\right) \Leftrightarrow S_\nu = \nu^2, \nu \in \mathbb{N}^*$

Άρα τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του διένυσε $S_5 = 5^2 = 25\text{ cm}$

3. Αν $\nu \in \mathbb{N}^*$ τα λεπτά που χρειάζεται το μυρμήγκι για να φτάσει στο άλλο άκρο του κλαδιού μήκους 1m=100cm, είναι $S_\nu = 100 \Leftrightarrow \nu^2 = 100 \overset{\nu>0}{\Leftrightarrow} \nu = 10$ λεπτά.

4.i) Αφού η αράχνη κάθε λεπτό διανύει διπλάσια απόσταση από την απόσταση που διήνυσε το προηγούμενο λεπτό, οι αποστάσεις που διανύει κάθε λεπτό είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου $(\beta_\nu), \nu \in \mathbb{N}^*$ με λόγο $\lambda = 2$ και πρώτο όρο $\beta_1 = 1$ και ο ν-οστός όρος είναι $\beta_\nu = \beta_1 \cdot \lambda^{\nu-1} \Rightarrow \beta_\nu = 2^{\nu-1}, \nu \in \mathbb{N}^*$

ii) Αν $S'_\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$ είναι η συνολική απόσταση που διένυσε η αράχνη τα πρώτα ν λεπτά θα είναι, $S'_\nu = \beta_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1} \Rightarrow S'_\nu = 2^\nu - 1, \nu \in \mathbb{N}^*$

Το μυρμήγκι και η αράχνη θα βρεθούν σε απόσταση 1 cm, όταν το άθροισμα των αποστάσεων που θα έχουν διανύσει και τα δυο θα είναι 99cm , δηλαδή

$S_\nu + S'_\nu = 99 \Leftrightarrow \nu^2 + 2^\nu - 1 = 99 \Leftrightarrow \nu^2 + 2^\nu = 100, \nu \in \mathbb{N}^*$ που με δοκιμές ν=1, ν=2, κλπ βρίσκουμε ότι αληθεύει για ν=6 , $(36 + 64 = 100)$

Άρα το μυρμήγκι θα συναντήσει την αράχνη σε απόσταση 1 cm σε 6 λεπτά.

Σχόλιο: Θα μπορούσαμε να εξαιρέσουμε τις περιττές τιμές για το ν τις μεγαλύτερες του 6 (διότι τότε το ν^2 περιττός ενώ το 100-2^ν είναι άρτιος), και ($2^\nu - 1 \leq 100$)

ΑΣΚΗΣΗ 11 (4_6678)

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών α, β και εμβαδόν Ε, τέτοια ώστε οι αριθμοί α, Ε, β, με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

α) Να αποδείξετε ότι $E = 1$.

(Μονάδες 10)

β) Αν $\alpha + \beta = 10$ τότε:

i) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με ρίζες τα μήκη α, β.

(Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τα μήκη α, β.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Το E είναι εμβαδόν ορθογωνίου παραλληλογράμμου με μήκη πλευρών α,β, θα ισχύει:

$$E=\alpha\cdot\beta \text{ με } \alpha>0 \ \& \ \beta>0 \ (1)$$

Οι αριθμοί α , E , β με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου επομένως θα ισχύει η ιδιότητα του γεωμετρικού μέσου, δηλ.: $E^2=\alpha\cdot\beta \ (2)$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι εφόσον τα δεύτερα μέλη είναι ίσα, θα είναι και τα πρώτα μέλη ίσα, άρα:

$$E^2=E \Leftrightarrow E^2-E=0 \Leftrightarrow E(E-1)=0 \Leftrightarrow \boxed{E=0} \text{ ή } \boxed{E=1}$$

Επειδή όμως το Ε εκφράζει εμβαδόν προφανώς είναι $E>0$, άρα καταλήγουμε ότι:

$$E=1$$

β) i) Ψάχνουμε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τα α, β .

Πρέπει:

$$S=\alpha+\beta=10 \text{ και } P=\alpha\cdot\beta=E^2=1 \text{ (Τύποι Vieta)}$$

Άρα εξίσωση δευτέρου βαθμού θα είναι η : $x^2-S\cdot x+P=0 \Leftrightarrow x^2-10\cdot x+1=0$

ii) Για να βρούμε τις ρίζες υπολογίζουμε τη διακρίνουσα που είναι

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=100-4=96>0$$

τότε οι δυο λύσεις θα είναι :

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{10\pm4\sqrt{6}}{2}=\frac{2\cdot\left(5\pm2\sqrt{6}\right)}{2}=5\pm2\sqrt{6}$$

οπότε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι:

$$\alpha=5+2\sqrt{6} \text{ και } \beta=5-2\sqrt{6} \quad \text{ή } \alpha=5-2\sqrt{6} \text{ και } \beta=5+2\sqrt{6}$$

ΑΣΚΗΣΗ 12 (4_6859)

Δίνονται οι αριθμοί 2 , x , 8 με $x>0$.

α) Να βρείτε την τιμή του x ώστε οι αριθμοί 2 , x , 8, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της προόδου;

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τώρα την τιμή του x ώστε οι αριθμοί 2 , x , 8, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος λ αυτής της προόδου;

(Μονάδες 5)

γ) Αν (α_ν) είναι η αριθμητική πρόοδος $2,5,8,11,\ldots$ και (β_ν) είναι η γεωμετρική πρόοδος 2 , 4 , 8 , 16 , ... τότε:

i) Να βρείτε το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν).

(Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε την τιμή του ν ώστε, για το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν) να ισχύει: $2(S_\nu + 24) = \beta_7$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Αφού οι αριθμοί 2 , x , 8 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου έχουμε:

$$x = \frac{2+8}{2} = 5 \text{ (αριθμητικός μέσος)}$$

$$\text{και } \omega = x - 2 = 5 - 2 \Leftrightarrow \boxed{\omega = 3}.$$

β) Αφού οι αριθμοί 2 , x , 8 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου έχουμε:

$$x^2 = 2\cdot 8 \Rightarrow x^2 = 16 \overset{x>0}{\Rightarrow} x = \sqrt{16} \Rightarrow \boxed{x = 4} \text{ (γεωμετρικός μέσος)}$$

και

$$\lambda = \frac{x}{2} = \frac{4}{2} \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 2}$$

γ) i) Ο τύπος που δίνει το άθροισμα των ν πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου (α_ν) :2 , 5 , 8 , ... είναι:

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega\right]$$

άρα

$$S_\nu = \frac{\nu\cdot\left[2\cdot 2 + (\nu-1)\cdot 3\right]}{2} = \frac{\nu\cdot(4+3\nu-3)}{2} = \frac{\nu\cdot(1+3\nu)}{2} \Rightarrow \boxed{S_\nu = \frac{3\nu^2+\nu}{2}}$$

ii) Η γεωμετρική πρόοδος (β_ν) :2 , 5 , 8 , ... έχει γενικό όρο $\beta_\nu = \beta_1\lambda^{\nu-1}$ για ν=7 έχουμε: $\beta_7 = \beta_1\lambda^6$ επομένως η δοθείσα σχέση γίνεται

$$2(S_\nu + 24) = \beta_7 \Leftrightarrow 2\left(\frac{\nu+3\nu^2}{2} + 24\right) = \beta_1\cdot\lambda^6$$

$$\Leftrightarrow \nu + 3\nu^2 + 48 = 2\cdot 2^6 \Leftrightarrow \nu + 3\nu^2 + 48 = 128 \Leftrightarrow 3\nu^2 + \nu - 80 = 0$$

Με τη βοήθεια της διακρίνουσας έχουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1 + 960 = 961$$

και ρίζες,

$$\nu_{1,2} = \frac{-\beta \pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1\pm 31}{6} \text{ άρα } \boxed{\nu_1 = 5} \text{ ή } \nu_2 = -\frac{16}{3} \notin N$$

Άρα $\nu = 5$

ΑΣΚΗΣΗ 13 (4_7514)

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με α_3=10 και α_{20}=61.

α) Να βρεθεί ο πρώτος όρος και η διαφορά της προόδου

Μονάδες 8

β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 333 είναι όρος της προόδου.

Μονάδες 8

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί όροι x και y της παραπάνω προόδου (α_ν), τέτοιοι ώστε να ισχύει: $\frac{x}{2}=\frac{y}{2}$.

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε ότι ο ν-οστός όρος μιας αριθμητικής προόδου δίνεται από τον τύπο $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega$. Επομένως:

$$\begin{cases}\alpha_{20}=61\\ \alpha_3=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1+19\omega=61\\ \alpha_1+2\omega=10\end{cases},$$

οπότε αφαιρώντας κατά μέλη βρίσκουμε ότι:

$(\alpha_1+19\omega)-(\alpha_1+2\omega)=61-10\Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_1+19\omega-\alpha_1-2\omega=51$

$\Rightarrow 17\omega=51$

$\Rightarrow \omega=\frac{51}{17}$

$\Rightarrow \omega=3$

Αντικαθιστώντας στην $\alpha_1+2\omega=10$ βρίσκουμε

$$\alpha_1+2\cdot 3=10\Rightarrow \alpha_1=10-6\Rightarrow \alpha_1=4$$

Άρα τελικά $\alpha_1=4$ και $\omega=3$.

β) Αναζητούμε αν υπάρχει $\nu\in\mathbb{N}$ με $\alpha_\nu=333\Leftrightarrow \alpha_1+(\nu-1)\omega=333$.

Από το (α) βρήκαμε $\alpha_1=4$ και $\omega=3$ οπότε έχουμε:

$4+(\nu-1)\cdot 3=333\Leftrightarrow 4+3\nu-3=333\Leftrightarrow 3\nu=333-4+3\Leftrightarrow 3\nu=332\Leftrightarrow \nu=\frac{332}{3}$,

άτοπο αφού ν θετικός ακέραιος.

Άρα δεν υπάρχει όρος της προόδου ίσος με 333.

γ) Αν υπάρχουν όροι διαδοχικοί της αριθμητικής προόδου (α_ν) ώστε να ισχύει $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}$

τότε $y=\frac{3}{2}x$ (1) και αφού $\alpha_1=4$ και $\omega=3$ έχουμε:

$$\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\,\omega=3\nu+1>0$$

δηλαδή όλοι οι όροι θετικοί άρα θα είναι και y, x > 0 και y > x λόγω (1) άρα

$$y=x+3\ (2)$$

Από (1), (2) έχουμε

$$\frac{3}{2}x=x+3\Leftrightarrow \frac{3}{2}x-x=3\Leftrightarrow \frac{1}{2}x=3\Leftrightarrow x=6 \text{ επομένως } y=6+3\Leftrightarrow y=9$$

όμως είναι $\alpha_\nu=3\nu+1$ και αν υπάρχει όρος 6 θα πρέπει να ισχύει ότι

$3\nu+1=6\Leftrightarrow \nu=\frac{5}{3}$ που είναι άτοπο, αφού ο ν είναι θετικός ακέραιος.

Οπότε δεν υπάρχουν διαδοχικοί όροι x , y της αριθμητικής προόδου, με τη σειρά που δίνονται, που να ικανοποιούν τη δεδομένη σχέση.

ΑΣΚΗΣΗ 14 (4_8170)

Δίνεται γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με λόγο λ για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\alpha_3 = 4 \text{ , } \alpha_5 = 16 \text{ και } \lambda > 0$$

α) Να βρεθούν ο πρώτος όρος α_1 και ο λόγος λ της προόδου.

Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_ν) με $\beta_\nu = \dfrac{1}{\alpha_\nu}$ αποτελεί επίσης γεωμετρική πρόοδο με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_ν).

Μονάδες 9

γ) Αν S_{10} , S'_{10} είναι τα αθροίσματα των 10 πρώτων όρων των προόδων (α_ν) και (β_ν) αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$S'_{10} = \frac{1}{2^9} S^{10}$$

Μονάδες 8

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) Από τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1}$ παίρνουμε:

$$\alpha_3 = \alpha_1 \lambda^2 = 4 \ (1) \quad \text{και} \quad \alpha_5 = \alpha_1 \lambda^4 = 16 \ (2) \quad .$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) έχουμε,

$$\frac{\alpha_1 \lambda^4}{\alpha_1 \lambda^2} = \frac{16}{4} \Rightarrow \lambda^2 = 4 \overset{\lambda>0}{\Rightarrow} \lambda = 2$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) έχουμε $\alpha_1 = 1$, άρα η πρόοδος είναι 1, 2, 4, 8 , 16, ….

β) Έχουμε την ακολουθία,

$$\beta_1 = \frac{1}{1} = 1,\ \beta_2 = \frac{1}{\alpha_2} = \frac{1}{2},\ \beta_3 = \frac{1}{\alpha_3} = \frac{1}{4}, \ldots, \beta_\nu = \frac{1}{\alpha_\nu} = \frac{1}{2^{\nu-1}}$$

Θα δείξουμε ότι η (β_ν)είναι γεωμετρική πρόοδος.

Έχουμε, $\dfrac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu} = \dfrac{\dfrac{1}{\alpha_{\nu+1}}}{\dfrac{1}{\alpha_\nu}} = \dfrac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} = \dfrac{\alpha_\nu}{\lambda \cdot \alpha_\nu} = \dfrac{1}{\lambda}$, άρα η ακολουθία (β_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda' = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{2}$ και $\beta_1 = \dfrac{1}{\alpha_1} = \dfrac{1}{1} = 1$.

γ) Από τον τύπο $S_\nu = \alpha_1 \cdot \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$ παίρνουμε, $S_{10} = \alpha_1 \cdot \dfrac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 2^{10} - 1$.

Παίρνουμε το α΄ μέλος της ζητούμενης σχέση και έχουμε διαδοχικά,

$$S_{10}' = \beta_1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{2^{10}} - 1}{-\frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{2^{10}}}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2^{10}} = \frac{2^{10} - 1}{2^9} = \frac{S_{10}}{2^9} = \frac{1}{2^9} \cdot S_{10}$$

ΑΣΚΗΣΗ 15 (4_13088)

Εξαιτίας ενός ατυχήματος σε διυλιστήριο πετρελαίου, διαρρέει στην θάλασσα πετρέλαιο που στο τέλος της $1^{ης}$ ημέρας καλύπτει 3 τετραγωνικά μίλια (τ.μ.), στο τέλος της $2^{ης}$ ημέρας καλύπτει 6 τ.μ., στο τέλος της $3^{ης}$ ημέρας καλύπτει 12 τ.μ. και γενικά εξαπλώνεται έτσι, ώστε στο τέλος κάθε ημέρας να καλύπτει επιφάνεια διπλάσια από αυτήν που κάλυπτε την προηγούμενη.

α) Να βρείτε την επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος της $5^{ης}$ ημέρας μετά το ατύχημα.

(Μονάδες 7)

β) Πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο θα καλύπτει 768τ.μ ;

(Μονάδες 9)

γ) Στο τέλος της $9^{ης}$ ημέρας επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός και αυτομάτως σταματάει η εξάπλωση του πετρελαίου. Στο τέλος της επόμενης ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο έχει μειωθεί κατά 6 τ.μ. και συνεχίζει να μειώνεται κατά 6 τ.μ. την ημέρα. Να βρείτε πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

Τα δεδομένα της άσκησης μας δείχνουν γεωμετρική πρόοδο με $\alpha_1 = 3$ και $\lambda = 2$

α) Γνωρίζουμε $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$, άρα $\alpha_5 = \alpha_1 \cdot \lambda^{5-1} = 3 \cdot 2^4 = 48$ τ.μ

β) Θέλουμε να βρούμε το ν ώστε $\alpha_\nu = 768$ τ.μ άρα

$$768 = 3 \cdot 2^{\nu-1} \Leftrightarrow 2^{\nu-1} = 256 \Leftrightarrow 2^{\nu-1} = 2^8 \Leftrightarrow \nu - 1 = 8 \Leftrightarrow \nu = 9 .$$

Άρα μετά από 9 μέρες το πετρέλαιο θα

$$\alpha_1 + (\nu-1)\cdot\omega = 12 \Leftrightarrow 768 + (\nu-1)\cdot(-6) = 12 \Leftrightarrow 768 - 6\nu + 6 = 12 \Leftrightarrow$$
$$768 + 6 - 12 = 6\nu \Leftrightarrow 762 = 6\nu \Leftrightarrow \nu = 127$$

καλύπτει 768 τ.μ

γ) Από την $9^{η}$ ημέρα και μετά όπου υπάρχει μια σταθερή μείωση κατά 6 τ.μ/ημέρα αλλάζει η πρόοδος και γίνεται αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1' = \alpha_9 = 768$ και $\omega = -6$.

Θέλω να βρω το ν ώστε $\alpha_\nu = 12$ τ.μ. , όμως $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$, άρα

$$12 = 768 + (\nu-1)(-6) \Leftrightarrow 12 = 768 - 6\nu + 6 \Leftrightarrow 6\nu = 762 \Leftrightarrow \nu = 127$$

Οπότε μετά από 127 ημέρες από την ημέρα που επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός θα έχει περιοριστεί σε 12 τ.μ.

ΑΣΚΗΣΗ 16 (4_13092)

Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες 51200 βακτήρια, και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μια ώρα.

α) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες;

(Μονάδες 6)

β) Τη χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 3200, ο οργανισμός παρουσίασε ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες. Συμβολίζουμε με β_ν το πλήθος των βακτηρίων ν ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης ($\nu \le 5$)

i) Να δείξετε ότι η ακολουθία (β_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος, και να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της.

(Μονάδες 6)

ii) Να εκφράσετε το πλήθος β_ν των βακτηρίων συναρτήσει του ν

(Μονάδες 6)

iii) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης;

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Ο αριθμός των βακτηριδίων υποδιπλασιάζεται κάθε μία ώρα, άρα ο αριθμός τους κάθε μία ώρα είναι όρος μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν) , $\nu \in \mathbb{N}^*$ με πρώτο όρο $\alpha_1 = 102400$ (βακτήρια) και λόγο $\lambda = \frac{1}{2}$.

Ο ν-οστός όρος της γεωμετρικής προόδου είναι,

$$\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1} \Rightarrow \alpha_\nu = 102400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1} \Leftrightarrow \alpha_\nu = 102400 \cdot \frac{2}{2^\nu} \Leftrightarrow \alpha_\nu = \frac{204800}{2^\nu},\ \nu \in \mathbb{N}^*$$

Άρα μετά από 6 ώρες θα υπάρχουν $\alpha_6 = \frac{204800}{2^6} = \frac{204800}{64} = 3200$ βακτήρια.

β) i) Κάθε μία ώρα ο αριθμός των βακτηριδίων προκύπτει από πολλαπλασιασμό με τον ίδιο πάντα αριθμό, άρα η ακολουθία (β_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο, $\beta_1 = 3200 \cdot 3 = 9600$ (βακτήρια) και λόγο $\lambda = 3$

ii) Ο ν-οστός όρος της γεωμετρικής προόδου (β_ν) είναι

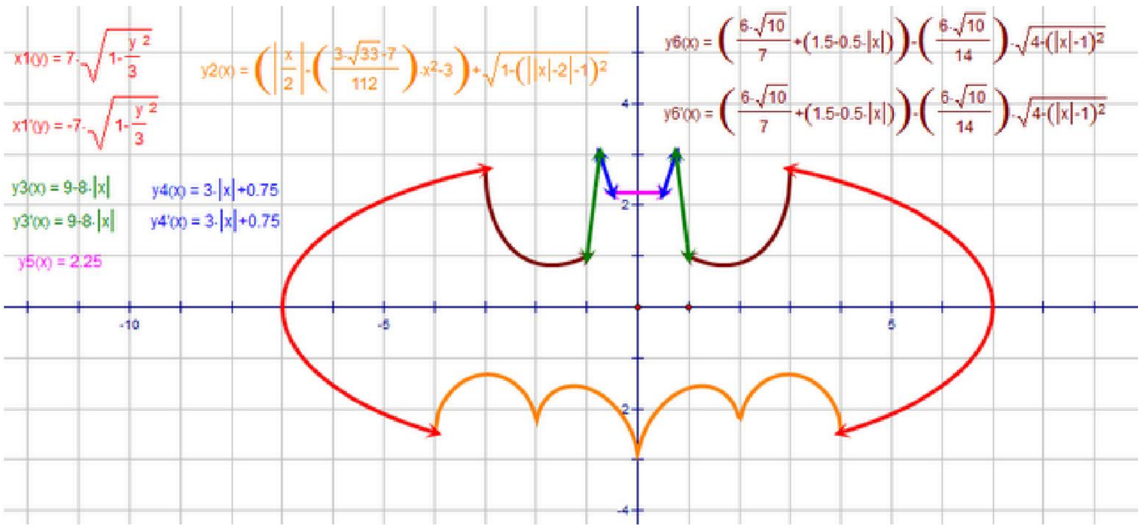
$$\beta_\nu = \beta_1 \cdot \lambda^{\nu-1} \Rightarrow \beta_\nu = 9600 \cdot (3)^{\nu-1} \Leftrightarrow \beta_\nu = 9600 \cdot \frac{3^\nu}{3} \Leftrightarrow \beta_\nu = 3200 \cdot 3^\nu \text{ με } \nu = 1,2,3,4,5$$

iii) Μετά από 3 ώρες από τη στιγμή της επιδείνωσης στον οργανισμό θα υπάρχουν

$$\beta_3 = 3200 \cdot 3^3 = 86400 \text{ βακτήρια.}$$

Άλγεβρα Α΄ Λυκείου

Κεφάλαιο 6^o : Βασικές Έννοιες των Συναρτήσεων



6.1: Η Έννοια της Συνάρτησης

ΑΣΚΗΣΗ 1 (2_488)

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-1}$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A.

(Μονάδες 5)

ii. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-5x+3$

(Μονάδες 10)

iii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει: $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

i. Αφού έχουμε κλάσμα $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-1}$ πρέπει: $x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq 1 \Leftrightarrow x\neq \pm 1$.

Επομένως το σύνολο ορισμού της συνάρτησης f είναι το

$$A_f=R-\{-1,1\} \text{ ή } A_f=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$$

ii. Το τριώνυμο $2x^2-5x+3$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5)^2-4\cdot 2\cdot 3=1>0\ ,$$

οπότε έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, τις

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 2}=\frac{5\pm 1}{4}=\begin{cases} x_1=\dfrac{5+1}{4}=\dfrac{3}{2} \\ x_2=\dfrac{5-1}{4}=1 \end{cases}$$

Άρα $2x^2-5x+3=2(x-1)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$.

ii. Για κάθε $x\in A_f$ όπου $A_f=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$ ισχύει:

$$f(x)=\frac{2x^2-5x+3}{x^2-1}=\frac{2(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)}{(x-1)(x+1)}=\frac{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}{x+1}=\frac{2x-3}{x+1}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2 (2_510)

Δίνεται η συνάρτηση f, με: $f(x)=\begin{cases} 2x-5, & x\leq 3 \\ x^2, & 3<x<10 \end{cases}$

α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f σε μορφή διαστήματος.

Μονάδες 8

β) Να υπολογίσετε τις τιμές: $f(-1), f(3)$ και $f(5)$.

Μονάδες 8

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x)=25$

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) Το πεδίο ορισμού ισούται με την ένωση των διαστημάτων που ορίζουν οι κλάδοι της συνάρτησης, έτσι έχουμε: $(-\infty,3]\cup(3,10)=(-\infty,10)$.

Άρα $A=(-\infty,10)$

β) Επειδή $-1<3$ είναι: $f(-1)=2(-1)-5=-2-5=-7$

Επειδή $3=3$ είναι: $f(3)=2\cdot 3-5=6-5=1$

Επειδή $3<5$ είναι: $f(5)=5^2=25$

γ) Έχουμε,

$f(x)=25$ με $x\leq 3$

$2x-5=25$

$2x=30$

$x=15$ (απορρίπτεται αφού $x\leq 3$)

και

$f(x)=25$ με $3<x<10$

$x^2=25$

$x=\pm 5$

$x=-5$ (απορ.) ή $x=5$ (Δεκτή)

Άρα $f(x)=25$ όταν $x=5$.

ΑΣΚΗΣΗ 3 (2_999)

α. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο x^2-5x+6

Μονάδες 12

β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης.

Μονάδες 5

2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$.

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

α. Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι

$$\Delta=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6=1>0,$$

οπότε έχει δύο πραγματικές ρίζες:

$$x_{1,2}=\begin{cases}\dfrac{-(-5)+\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\dfrac{5+1}{2}=3\\[2ex]\dfrac{-(-5)-\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\dfrac{5-1}{2}=2\end{cases}$$

Άρα:

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

β. 1. Η συνάρτηση ορίζεται για εκείνα τα x για τα οποία ισχύει:

$$(x-2)(x-3)\neq 0 \Leftrightarrow x-2\neq 0 \text{ και } x-3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2 \text{ και } x\neq 3$$

Οπότε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης είναι:

$$A=\mathbb{R}-\{2,3\}$$

2. Για κάθε $x\in A$ ισχύει:

$$f(x)=\frac{x-2}{x^2-5x+6}=\frac{x-2}{(x-2)(x-3)}=\frac{1}{x-3}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4 (2_1042)

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases}2x+4, & x<0\\ x-1, & x\geq 0\end{cases}$

α) Να δείξετε ότι : $f(-1)=f(3)$

(Μονάδες 13)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x\in R$, ώστε : $f(x)=0$

(Μονάδες 12)

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) Είναι $f(3)=3-1=2$ και $f(-1)=2(-1)+4=2$. Οπότε είναι:

$$f(-1)=f(3)=2.$$

β) Αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f(x)=0$. Είναι:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}2x+4=0, & x<0\\ \text{ή} & \\ x-1=0, & x\geq 0\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}x=-2, & x<0\\ \text{ή} & \\ x=1, & x\geq 0\end{matrix}\right\}$$, δεκτές και οι δύο.

Παρόμοια άσκηση βιβλίου : α) 3/Α΄ Ομάδας/σελ. 151, β) 1 ii/Β΄ Ομάδας/σελ. 166

ΑΣΚΗΣΗ 5 (2_1082)

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-x-6}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 15)

β) Να δείξετε ότι : $f(2)+f(4)=0$

(Μονάδες 10)

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f αποτελείται από εκείνα τα $x\in\mathbb{R}$ **x ∈ ℝ** για τα οποία το $\dfrac{x+2}{x^2-x-6}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν ο παρονομαστής είναι διάφορος του μηδενός. Βρίσκουμε για ποια $x\in\mathbb{R}$ μηδενίζεται ο παρονομαστής.

Η εξίσωση $x^2 - x - 6 = 0$ έχει :

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 > 0$$

άρα έχουμε δύο άνισες πραγματικές ρίζες, τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1+5}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{1-5}{2} = -2 \end{cases}$$

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$.

β) Για $x \neq -2, 3$ έχουμε ότι:

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2 - x - 6} = \frac{x+2}{(x-3)(x+2)} = \frac{1}{x-3}.$$

Οπότε:

$$f(2) + f(4) = \frac{1}{2-3} + \frac{1}{4-3} = -1 + 1 = 0..$$

Παρόμοια άσκηση βιβλίου: α) 1/Α΄ Ομάδας/σελ. 150, β) 3/Α΄ Ομάδας/σελ. 151,

ΑΣΚΗΣΗ 6 (2_1302)

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x) = \begin{cases} 8 - x, & \text{αν } x < 0 \\ 2x + 5, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$

α) Να δείξετε ότι: $f(-5) = f(4)$

Μονάδες 13

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in R$, ώστε $f(x) = 9$

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Επειδή $-5 < 0$ άρα αντικαθιστούμε στον πάνω τύπο της συνάρτησης, άρα

$$f(-5) = 8 - (-5) = 8 + 5 = 13$$

Επειδή $4 > 0$ άρα αντικαθιστούμε στον κάτω τύπο της συνάρτησης, άρα

$$f(4) = 2 \cdot 4 + 5 = 8 + 5 = 13$$

Επομένως,

$$f(-5) = f(4)$$

β) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i) Αν $x < 0$, είναι: $f(x) = 9 \Leftrightarrow 8 - x = 9 \Leftrightarrow x = -1$ (δεκτή)

ii) Αν $x \geq 0$, είναι: $f(x) = 9 \Leftrightarrow 2x + 5 = 9 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$ (δεκτή)

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι $\boxed{x = -1}$ και $\boxed{x = 2}$

ΑΣΚΗΣΗ 7 (2_1532)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^3-16x}{x-4}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι, για τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει $f(x)=x^2+4x$.

Μονάδες 15

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x)=32$.

Μονάδες 10

<u>Λύση</u>

α) Η συνάρτηση $f(x)$ ορίζεται όταν: $x-4\neq 0 \Longleftrightarrow x\neq 4$.

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο $D_f=(-\infty,4)\cup(4,+\infty)$.

$$f(x)=\frac{x^3-16x}{x-4}=\frac{x(x^2-16)}{x-4}=\frac{x(x^2-4^2)}{x-4}=\frac{x(x-4)(x+4)}{x-4}=x(x+4)=x^2+4x$$

β) Αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f(x)=32$.

$$f(x)=32 \Longleftrightarrow x^2+4x=32 \Longleftrightarrow x^2+4x-32=0,$$

το τριώνυμο $x^2+4x-32$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta=4^2-4\cdot 1\cdot(-32)=16+128=144>0.$$

Επομένως η εξίσωση $x^2+4x-32=0$ έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες τις:

$$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{144}}{2\cdot 1}=\frac{-4\pm 12}{2}=\begin{cases}\dfrac{-4+12}{2}=\dfrac{8}{2}=4\notin D_f,\text{απορρίπτεται}\\[2mm] \dfrac{-4-12}{2}=\dfrac{-16}{2}=-8\in D_f,\text{δεκτή}\end{cases}$$

Άρα η τιμή του x για την οποία ισχύει $f(x)=32$ είναι η $x=-8$.

ΑΣΚΗΣΗ 8 (2_1537)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\dfrac{1}{x}, x\neq 0$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A=f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)-f(2)$$

Μονάδες 10

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\dfrac{5}{2}$.

Μονάδες 15

<u>Λύση</u>

α) Υπολογίζουμε τις αριθμητικές τιμές που εμφανίζονται στην παράσταση Α, οπότε:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}+\frac{2}{1}=\frac{1}{2}+\frac{4}{2}=\frac{5}{2}$$

$$f(1)=1+\frac{1}{1}=1+1=2$$

$$f(2)=2+\frac{1}{2}=\frac{2}{1}+\frac{1}{2}=\frac{4}{2}+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

Άρα

$$A=\frac{5}{2}+2-\frac{5}{2}=2$$

β) Έχουμε,

$$f(x)=\frac{5}{2}\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}\overset{\cdot 2x}{\Leftrightarrow}2x\cdot x+2x\frac{1}{x}=2x\frac{5}{2}\Leftrightarrow 2x^2+2=5x\Leftrightarrow 2x^2-5x+2=0$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $2x^2-5x+2$ είναι

$$\Delta=(-5)^2-4\cdot 2\cdot 2=25-16=9>0$$

Επομένως η εξίσωση $2x^2-5x+2=0$ έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες τις:

$$x_{1,2}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{9}}{2\cdot 2}=\frac{5\pm 3}{4}=\begin{cases}\dfrac{5+3}{4}=\dfrac{8}{4}=2\\[2mm] \dfrac{5-3}{4}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}\end{cases}\quad \text{δεκτές}$$

ΑΣΚΗΣΗ 9 (4_2220)

Μια μπάλα που εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω, αφού διαγράψει μια τροχιά, μετά από κάποιο χρόνο θα πέσει στο έδαφος. Το ύψος h (σε m) από το έδαφος, στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή t (σε sec) κατά την κίνησή της, προσδιορίζεται από τη συνάρτηση:

$$h(t)=-5t^2+10t+1{,}05$$

α) Να βρείτε τις τιμές h(0), h(1) και h(2), και να εξηγήσετε τι παριστάνουν στο πλαίσιο του προβλήματος.

Μονάδες 6

β) Να βρείτε μετά από πόσο χρόνο η μπάλα θα φτάσει στο έδαφος.

Μονάδες 8

γ) Να δείξετε ότι το ύψος στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή t μπορεί να προσδιοριστεί και από τον τύπο:

$$h(t)=5\left[1{,}21-(t-1)^2\right]$$

Μονάδες 5

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει χρονική στιγμή t_1 (σε sec) που το ύψος h της μπάλας από το έδαφος θα είναι πάνω από 6,05 m.

Μονάδες 6

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$h(0) = -5 \cdot 0^2 + 10 \cdot 0 + 1,05 = 1,05$

$h(1) = -5 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 + 1,05 = -5 + 10 + 1,05 = 6,05$

$h(2) = -5 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 + 1,05 = -20 + 20 + 1,05 = 1,05$

Δηλαδή, τις χρονικές στιγμές 0 sec και 2 sec η μπάλα βρίσκεται σε απόσταση 1,05 m από το έδαφος και την χρονική στιγμή 1 sec βρίσκεται σε απόσταση 6,05 m από το έδαφος.

β) Η μπάλα θα φτάσει στο έδαφος όταν η απόσταση της από αυτό είναι 0.
Δηλαδή όταν $h(t) = 0$.

Είναι $h(t) = 0 \Leftrightarrow -5t^2 + 10t + 1,05 = 0$

Η διακρίνουσα του τριώνυμου είναι

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \Rightarrow \Delta = 10^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 1,05 = 100 + 21 = 121 > 0$$

Άρα η εξίσωση θα έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες

$$t_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{121}}{2 \cdot (-5)} = \frac{-10 \pm 11}{-10} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{-10+11}{-10} = \dfrac{1}{-10} = -0,1 \\ t_2 = \dfrac{-10-11}{-10} = \dfrac{-21}{-10} = 2,1 \end{cases}$$

Όμως ο χρόνος είναι μη αρνητικός αριθμός ($t \geq 0$), συνεπώς η ρίζα $t_1 = -0,1$ απορρίπτεται.

Άρα η μπάλα θα φτάσει στο έδαφος μετά από 2,1 δευτερόλεπτα.

γ) Με μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} h(t) &= -5t^2 + 10t + 1,05 = \\ & 5\left(-t^2 + 2t + \frac{1,05}{5}\right) = \\ & 5\left[-\left(t^2 - 2t\right) + 0,21\right] = \\ & 5\left[-\left(t^2 - 2t + 1 - 1\right) + 0,21\right] = \\ & 5\left[-\left(t^2 - 2t + 1\right) + 1 + 0,21\right] = \\ & 5\left[-\left(t-1\right)^2 + 1,21\right] = \\ & 5\left[1,21 - \left(t-1\right)^2\right] \end{aligned}$$

δ) Αρκεί να εξετάσουμε αν η ανίσωση $h(t) > 6,05$ έχει λύση.

Έχουμε:

$$h(t) > 6,05 \overset{(\gamma)}{\Leftrightarrow} 5\left[1,21 - (t-1)^2\right] > 6,05 \overset{\div 5}{\Leftrightarrow} 1,21 - (t-1)^2 > 1,21 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -(t-1)^2 > 0 \Leftrightarrow (t-1)^2 < 0$$

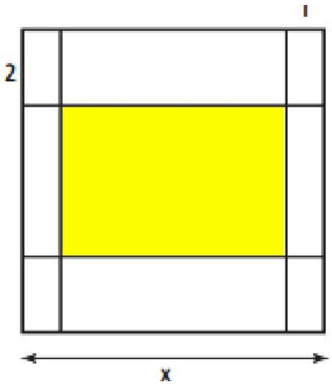
που είναι αδύνατο!

Άρα, δεν υπάρχει χρονική στιγμή που το ύψος h της μπάλας από το έδαφος θα είναι πάνω από 6,05 m.

Τράπεζα θεμάτων – [lisari team]

ΑΣΚΗΣΗ 10 (4_2226)

Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm $(5 \le x \le 10)$ στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).



α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν Ε της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:

$$E(x)=(x-2)(x-4)$$

Μονάδες 8

β) Να βρεθεί η τιμή του x ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι 35 cm^2.

Μονάδες 7

γ) Να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου, αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον 24 cm^2.

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Η περιοχή τύπωσης είναι ορθογώνιο με

$$\text{μήκος } x-2\cdot 1=x-2$$

και

$$\text{πλάτος } x-2\cdot 2=x-4$$

Άρα το εμβαδόν του θα είναι $E=(x-2)\cdot(x-4)$ ή $E(x)=(x-2)\cdot(x-4)$

β) Έχουμε:

$$E(x)=35 \Leftrightarrow x^2-6x+8=35 \Leftrightarrow x^2-6x-27=0$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι,

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-6)^2-4\cdot 1\cdot(-27)=36+108=144>0$$

Οπότε η εξίσωση θα έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες,

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{144}}{2\cdot 1}=\frac{6\pm 12}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{6+12}{2}=\dfrac{18}{2}=9 \\ x_2=\dfrac{6-12}{2}=\dfrac{-6}{2}=-3 \end{cases}$$

Όμως το x είναι μήκος με $5 \le x \le 10$ και συνεπώς δεχόμαστε x = 9 cm.

Δηλαδή, το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης είναι 35 cm^2 όταν x=9 cm.

γ) Το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης είναι τουλάχιστον $24\,\text{cm}^2$ όταν $E(x)\geq 24$.

Έχουμε $E(x)\geq 24 \Leftrightarrow x^2-6x+8\geq 24 \Leftrightarrow x^2-6x-16\geq 0$

Λύνουμε αρχικά την εξίσωση $x^2-6x-16=0$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι ,

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma \Rightarrow \Delta=(-6)^2-4\cdot 1\cdot(-16)=36+64=100>0$$

Συνεπώς η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες,

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{100}}{2\cdot 1}=\frac{6\pm 10}{2}\Rightarrow\begin{cases} x_1=\dfrac{6+10}{2}=\dfrac{16}{2}=8 \\ x_2=\dfrac{6-10}{2}=\dfrac{-4}{2}=-2\end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

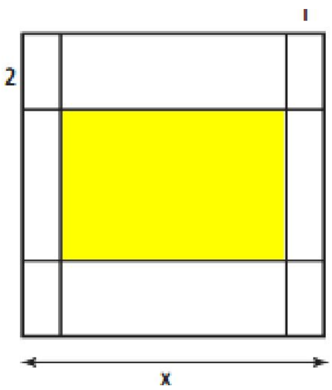
x	$-\infty$		-2		5		8		10		$+\infty$
$x^2-6x-16$		+	0	-		-	0	+		+	

Άρα $x^2-6x-16\geq 0 \Leftrightarrow \{x\leq -2 \text{ ή } x\geq 8\}$, δηλαδή, $x\in(-\infty,-2]\cup[8,+\infty)$

Όμως $x\in[5,10]$ από υπόθεση και τελικά $x\in[8,10]$.

ΑΣΚΗΣΗ 11 (4_2229)

Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς *x cm* $(5\leq x\leq 10)$, στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια *2 cm* στο πάνω και στο κάτω μέρος της και *1 cm* δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).



α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν *E* της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:

$$E(x)=x^2-6x+8$$

Μονάδες 8

β) Να βρεθεί η τιμή του *x* ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι *24* cm^2.

Μονάδες 7

γ) Αν το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων είναι το πολύ *35* cm^2, να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά *x* του τετραγώνου.

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Η περιοχή εκτύπωσης είναι ορθογώνιο με

μήκος $x-2\cdot 1=x-2$ και

πλάτος $x-2\cdot 2=x-4$

άρα,

$$E=(x-2)\cdot(x-4)=x^2-4x-2x+8=x^2-6x+8 \text{ ή } E(x)=x^2-6x+8$$

β) Έχουμε,

$$E(x)=24\Leftrightarrow x^2-6x+8=24\Leftrightarrow x^2-6x-16=0$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι,

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma\Rightarrow\Delta=(-6)^2-4\cdot1\cdot(-16)=36+64=100>0$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{100}}{2\cdot1}=\frac{6\pm10}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{6+10}{2}=\dfrac{16}{2}=8\\ x_2=\dfrac{6-10}{2}=\dfrac{-4}{2}=-2\end{cases}$$

Όμως το x είναι μήκος με $5\le x\le 10$,άρα το -2 απορρίπτεται και δεχόμαστε το 8.
Δηλαδή το εμβαδόν της περιοχής εκτύπωσης είναι 24 cm^2 όταν x=8 cm.

γ) Το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων είναι το πολύ *35* cm^2 όταν $E(x)\le 35$.

Έχουμε

$$E(x)\le 35\Leftrightarrow x^2-6x+8\le 35\Leftrightarrow x^2-6x-27\le 0$$

Λύνουμε πρώτα την εξίσωση $x^2-6x-27=0$.

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι,

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma\Rightarrow\Delta=(-6)^2-4\cdot1\cdot(-27)=36+108=144>0$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{144}}{2\cdot1}=\frac{6\pm12}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{6+12}{2}=\dfrac{18}{2}=9\\ x_2=\dfrac{6-12}{2}=\dfrac{-6}{2}=-3\end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-3	5	9	10	$+\infty$
$x^2-6x-27$	+	0 -		- 0	+	+

Άρα $x^2-6x-27\le 0\Leftrightarrow -3\le x\le 9$, δηλαδή $x\in[-3,9]$

Όμως $x\in[5,10]$ από υπόθεση και συναληθεύοντας έχουμε $x\in[5,9]$

Σημείωση: Ίδια άσκηση με την 4_ 2226

ΑΣΚΗΣΗ 12 (4_2234)

Για τη μέτρηση θερμοκρασιών χρησιμοποιούνται οι κλίμακες βαθμών Κελσίου (Celsius), Φαρενάιτ (Fahrenheit) και Κέλβιν (Kelvin). Οι μετατροπές της θερμοκρασίας από Κελσίου σε Φαρενάιτ και από Κελσίου σε Κέλβιν, περιγράφονται από τις προτάσεις Π_1 και Π_2:

Π_1: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου (^0C) σε βαθμούς Φαρενάιτ (^0F), πολλαπλασιάζουμε τους βαθμούς Κελσίου με 1,8 και προσθέτουμε 32.

Π_2: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου (^0C) σε βαθμούς Κέλβιν (^0K), προσθέτουμε στους βαθμούς Κελσίου (^0C) το 273.

α) Να εκφράσετε συμβολικά τη σχέση που περιγράφει η κάθε πρόταση.

Μονάδες 8

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας σε βαθμούς Κέλβιν *(^0K)* και της θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ *(^0F)* είναι η:

$$K = \frac{F-32}{1,8} + 273$$

Μονάδες 7

γ) Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από *278 ^0K* μέχρι *283 ^0K*. Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε ^0F.

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Αν F οι βαθμοί Φαρενάϊτ , C οι βαθμοί Κελσίου και K οι βαθμοί Κέλβιν, τότε η σχέση που εκφράζει η πρόταση Π_1 είναι :

$$\boxed{F = 1,8 \cdot C + 32} \quad (1)$$

ενώ η σχέση που εκφράζει η πρόταση Π_2 είναι:

$$\boxed{K = C + 273} \quad (2)$$

β) Λύνουμε την σχέση (2) ως προς C, έχουμε, $C = K - 273$. Αντικαθιστούμε στην (1) και στην συνέχεια λύνουμε ως προς K:

$$F = 1,8 \cdot (K - 273) + 32 \Leftrightarrow F - 32 = 1,8 \cdot (K - 273) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{F-32}{1,8} = K - 273 \Leftrightarrow K = \frac{F-32}{1,8} + 273$$

γ) Από υπόθεση έχουμε ότι $278 \le K \le 283$

Από (β) έχουμε,

$$K = \frac{F-32}{1,8} + 273 \Leftrightarrow 1,8 \cdot K = F - 32 + 1,8 \cdot 273 \Leftrightarrow F = 1,8K - 459,4$$

Οπότε:

$$278 \le K \le 283 \Leftrightarrow 1,8 \cdot 278 \le 1,8 \cdot K \le 1,8 \cdot 283 \Leftrightarrow 500,4 \le 1,8K \le 509,4$$

$$\Leftrightarrow 500,4 - 459,4 \le 1,8K - 459,4 \le 509,4 - 459,4 \Leftrightarrow 41 \le F \le 50$$

Δηλαδή η θερμοκρασία της πόλης στην διάρκεια εκείνης της νύχτας κυμάνθηκε από 41 ^{0}F έως 50 ^{0}F.

Τράπεζα θεμάτων – [lisari team]()

ΑΣΚΗΣΗ 13 (4_4682)

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$ με παράμετρο $\lambda \in R$ (1)

1. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in R$

(Μονάδες 10)

2. Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

(Μονάδες 6)

3. Να βρείτε το λ, ώστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x^2 - x + \lambda - \lambda^2}$ να είναι το σύνολο R .

(Μονάδες 9)

Λύση

1. Η εξίσωση $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$ με $\alpha = 1$, $\beta = -1$ και $\gamma = \lambda - \lambda^2$ με διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(\lambda - \lambda^2) = 1 - 4(\lambda - \lambda^2) = 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = (2\lambda - 1)^2 \geq 0$$

Επομένως αφού $\Delta \geq 0$ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in R$

2. Για να έχει η εξίσωση (1) δύο ρίζες ίσες πρέπει

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (2\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

3. Θα πρέπει $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 \geq 0$ για κάθε $x \in R$, επομένως θα πρέπει $\Delta \leq 0$.

Όμως

$$\Delta = 1 - 4(\lambda - \lambda^2) = (2\lambda - 1)^2 \geq 0$$

και συνεπώς:

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow (2\lambda - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow 2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 14 (4_6228)

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A = 90^o$) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x, y τέτοια, ώστε: $x + y = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο: $E(x) = \frac{1}{2}(-x^2 + 10x)$, $x \in (0, 10)$.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $E(x) \leq \frac{25}{2}$ για κάθε $x \in (0, 10)$.

(Μονάδες 8)

γ) Για ποια τιμή του $x \in (0, 10)$ το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$;

Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο ΑΒΓ ;

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε,

$$x+y=10 \Leftrightarrow \boxed{y=10-x}$$

Αφού x,y μήκη πλευρών θα πρέπει $x,y>0$ έχουμε:

$$\boxed{x>0} \text{ και } y>0 \Leftrightarrow 10-x>0 \Leftrightarrow \boxed{x<10}.$$

Το εμβαδόν τριγώνου δίνεται από τον τύπο:

$$E_{τριγ.}=\frac{1}{2}(βάση)\cdot(ύψος)=\frac{1}{2}x\cdot y=\frac{1}{2}x\cdot(10-x)=\frac{1}{2}(10x-x^2)=\frac{1}{2}(-x^2+10x)$$

με $x\in(0,10)$

β) Έχουμε ισοδύναμα:

$$E(x)\le\frac{25}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}(-x^2+10x)-\frac{25}{2}\le 0\Leftrightarrow\frac{-x^2+10x-25}{2}\le 0\Leftrightarrow-\frac{x^2-10x+25}{2}\le 0\Leftrightarrow$$

$E(x)=-\dfrac{(x-5)^2}{2}\le 0$ που ισχύει για κάθε $x\in(0,10)$.

γ) Έχουμε

$$E(x)=\frac{25}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}(10x-x^2)=\frac{25}{2}\Leftrightarrow 10x-x^2=25\Leftrightarrow x^2-10x+25=0$$

$$\Leftrightarrow(x-5)^2=0\Leftrightarrow\boxed{x=5}$$

Άρα το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο όταν $x=5$ και αντίστοιχα $y=10-5=5$, οπότε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι και ισοσκελές αφού οι κάθετες πλευρές του είναι ίσες.

ΑΣΚΗΣΗ 15 (4_13084)

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+κx+λ}$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{-2,1\}$

α) Να βρείτε τις τιμές των κ και λ

Μονάδες 9

β) Για $κ=1$ και $λ=-2$

i) να απλοποιήσετε τον τύπο της g

Μονάδες 9

ii) να δείξετε ότι $g(α+3)>g(α)$ όταν $α\in(-1,1)\cup(1,2)$

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

α) Αφού η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+κx+λ}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{-2,1\}$ οι αριθμοί $-2,1$ μηδενίζουν τον παρονομαστή.

Συνεπώς οι αριθμοί $-2,1$ είναι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2+\kappa x+\lambda=0$$

Αν x_1,x_2 ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ ισχύει

$$x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha} \text{ και } x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}$$

Άρα

$$-2+1=-\frac{\kappa}{1}\Leftrightarrow \kappa=1 \text{ και } -2\cdot 1=\frac{\lambda}{1}\Leftrightarrow \lambda=-2$$

β) i) Αν x_1,x_2 ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ ισχύει

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$$

Τότε

$$g(x)=\frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-1)}=(x+1)(x-2)$$

ii) Το πρόσημο του $(x+1)(x-2)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$(x+1)(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι

- Για κάθε $x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ είναι $(x+1)(x-2)>0$
- Για κάθε $x\in(-1,2)$ είναι $(x+1)(x-2)<0$
- Για $x=-1$ ή $x=2$ είναι $(x+1)(x-2)=0$

Συνεπώς όταν $\alpha\in(-1,1)\cup(1,2)$ ισχύει

$$(\alpha+1)(\alpha-2)<0\Leftrightarrow g(\alpha)<0$$

Όταν $\alpha\in(-1,1)\cup(1,2)\Leftrightarrow(\alpha+3)\in(2,3)\cup(3,5)$ ισχύει

$$(\alpha+3+1)(\alpha+3-2)>0\Leftrightarrow g(\alpha+3)>0$$

Άρα ισχύει $g(\alpha+3)>g(\alpha)$ όταν $\alpha\in(-1,1)\cup(1,2)$

ΑΣΚΗΣΗ 16 (4_13085)

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+\kappa x+\lambda}$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{-2,1\}$

α) Να βρείτε τις τιμές των κ και λ

Μονάδες 9

β) Για $\kappa=1$ και $\lambda=-2$

i) να απλοποιήσετε τον τύπο της g

Μονάδες 9

ii) να δείξετε ότι $g(\alpha)g(\beta)>0$ όταν $\alpha,\beta\in(-1,1)\cup(1,2)$

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

α) Αφού η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+\kappa x+\lambda}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{-2,1\}$ οι αριθμοί $-2,1$ μηδενίζουν τον παρονομαστή.

Συνεπώς οι αριθμοί $-2,1$ είναι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2+\kappa x+\lambda=0$$

Αν x_1,x_2 ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ ισχύει

$$x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha} \text{ και } x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}$$

Άρα

$$-2+1=-\frac{\kappa}{1}\Leftrightarrow \kappa=1 \text{ και } -2\cdot 1=\frac{\lambda}{1}\Leftrightarrow \lambda=-2$$

β) i) Αν x_1,x_2 ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ ισχύει

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$$

τότε

$$g(x)=\frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-1)}=(x+1)(x-2)$$

ii) Το πρόσημο του $(x+1)(x-2)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$(x+1)(x-2)$		+	0	−	0	+	

από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι

- Για κάθε $x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ είναι $(x+1)(x-2)>0$
- Για κάθε $x\in(-1,2)$ είναι $(x+1)(x-2)<0$
- Για $x=-1$ ή $x=2$ είναι $(x+1)(x-2)=0$

Συνεπώς όταν $\alpha,\beta\in(-1,1)\cup(1,2)$ ισχύει

$$(\alpha+1)(\alpha-2)<0\Leftrightarrow g(\alpha)<0 \text{ και } (\beta+1)(\beta-2)<0\Leftrightarrow g(\beta)<0$$

Άρα ισχύει $g(\alpha)g(\beta)>0$ όταν $\alpha,\beta\in(-1,1)\cup(1,2)$

6.2: Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

ΑΣΚΗΣΗ 1 (2_477)

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 7)

ii. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης $\alpha,\beta \in R-\{0\}$.

(Μονάδες 9)

iii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

i. Πρέπει $x-3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 3$.

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $A_f=R-\{3\}$ ή $A_f=(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$

.

ii. Το τριώνυμο x^2-5x+6 έχει διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6=1$$

άρα

$$x_{1,2}=\frac{-(-5)\pm 1}{2}=\frac{5\pm 1}{2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{5+1}{2}=3 \\ x_2=\dfrac{5-1}{2}=2 \end{cases}.$$

Οπότε,

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

Επομένως για κάθε $x\in A_f$ όπου $A_f=(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$ ισχύει

$$f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-3}=\frac{(x-2)(x-3)}{x-3}=x-2$$

iii. Για να βρω που τέμνει η γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ βάζω όπου $y=0$ ή $f(x)=0$, δηλαδή

$$f(x)=0\Leftrightarrow x-2=0\Leftrightarrow x=2.$$

Άρα τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $A(2,0)$.

Για να βρω που τέμνει η γραφική παράσταση της f τον άξονα $y'y$ βάζω όπου $x=0$, δηλαδή

$$f(0)=0-2=-2.$$

Άρα τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $B(0,-2)$.

Τράπεζα θεμάτων – lisari team

ΑΣΚΗΣΗ 2 (2_492)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x - 15$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Να υπολογίσετε το άθροισμα $f(-1) + f(0) + f(1)$.

(Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης της f με τους άξονες.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

i. Έχουμε,

$f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) - 15 = 1 - 2 - 15 = -16$

$f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 - 15 = -15$

$f(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 - 15 = 1 + 2 - 15 = -12$

άρα

$$f(-1) + f(0) + f(1) = -16 - 15 - 12 = -43$$

ii. Για να βρούμε το κοινό σημείο της γραφικής της παράστασης της f με τον άξονα $y'y$ θέτουμε όπου $x = 0$ και παίρνουμε:

$$f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 - 15 = -15$$

Επομένως το κοινό σημείο είναι το $A(0, -15)$

Για να βρούμε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ θέτουμε όπου $y = 0$ ή $f(x) = 0$ άρα: $x^2 + 2x - 15 = 0$,

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 64$$

και οι ρίζες είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 8}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-2+8}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{-2-8}{2} = -5 \end{cases},$$

Επομένως τα κοινά σημεία είναι τα $B(3, 0)$ και $\Gamma(-5, 0)$.

ΑΣΚΗΣΗ 3 (2_1090)

Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

Μονάδες 13

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε το σημείο $M\left(\alpha, \frac{1}{8}\right)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει $x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq 1 \Leftrightarrow x\neq 1$ και $x\neq -1$. Άρα $A_f=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

β) Το σημείο $M\left(\alpha,\dfrac{1}{8}\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f οπότε :

$$f(\alpha)=\frac{1}{8}\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha^2-1}=\frac{1}{8}\Leftrightarrow \alpha^2-1=8\Leftrightarrow \alpha^2=8+1\Leftrightarrow \alpha^2=9\Leftrightarrow \alpha=3 \text{ ή } \alpha=-3.$$

Δεχόμαστε και τις δύο τιμές αφού ανήκουν στο πεδίο ορισμού μας.

Παρόμοια Άσκηση

Το α ερώτημα μοιάζει με τα ερωτήματα i, ii της άσκησης 1(Α΄ Ομάδας) της παραγράφου 6.1 του σχολικού βιβλίου.

Το β ερώτημα μοιάζει με την άσκηση 7 (Α΄ Ομάδας) της παραγράφου 6.2 του σχολικού βιβλίου.

ΑΣΚΗΣΗ 4 (2_1542)

α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$$A=x^3-x^2+3x-3$$

Μονάδες 13

β) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\dfrac{3}{x}$ και $g(x)=x^2-x+3$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $A(1,3)$.

Μονάδες 12

Λύση

α) Έχουμε,

$$A=x^3-x^2+3x-3=x^2(x-1)+3(x-1)=(x-1)(x^2+3)$$

άρα

$$A=x^3-x^2+3x-3=(x-1)(x^2+3)$$

β) Οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων f και g προκύπτουν από τις λύσεις τις εξίσωσης $f(x)=g(x)$, οπότε:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow \frac{3}{x}=x^2-x+3 \overset{\cdot x}{\Leftrightarrow} x\frac{3}{x}=x\cdot x^2-x\cdot x+x\cdot 3\Leftrightarrow 3=x^3-x^2+3x\Leftrightarrow$$

$$x^3-x^2+3x-3=0\overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}(x-1)(x^2+3)=0\Longleftrightarrow x-1=0 \text{ ή } x^2+3=0\Longleftrightarrow$$

$x=1$ ή $x^2=-3$, αδύνατη

Ακόμα $f(1)=g(1)=3$.

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το $A(1,3)$.

Τράπεζα θεμάτων – [lisari team]

ΑΣΚΗΣΗ 5 (2_1553)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^3$ και $g(x)=x, x\in\mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g τέμνονται σε τρία σημεία τα οποία και να βρείτε.

Μονάδες 13

β) Αν Α, Ο, Β είναι τα σημεία τομής των παραπάνω γραφικών παραστάσεων, όπου $O(0,0)$, να αποδείξετε ότι Α, Β είναι συμμετρικά ως προς το Ο.

Μονάδες 12

<u>Λύση</u>

α) Οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων f και g προκύπτουν από τις λύσεις τις εξίσωσης $f(x)=g(x)$, οπότε:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^3=x\Leftrightarrow x^3-x=0\Leftrightarrow x\left(x^2-1\right)=0\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x^2-1=0\Leftrightarrow$$

$$x=0 \text{ ή } x^2=1\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=\pm 1$$

$$f(0)=g(0)=0,\ f(1)=g(1)=1,\ f(-1)=g(-1)=-1$$

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται στα σημεία $(0,0)$, $(1,1)$ και $(-1,-1)$.

β) Έστω $A(1,1), O(0,0)$ και $B(-1,-1)$. Το συμμετρικό του $A(1,1)$ ως προς το Ο είναι το $(-1,-1)$ δηλαδή το Β. Άρα τα Α, Β είναι συμμετρικά ως προς το Ο.

ΑΣΚΗΣΗ 6 (2_3378)

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f.

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Μονάδες 6

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-2	-1		1	2	
y			-1			-3

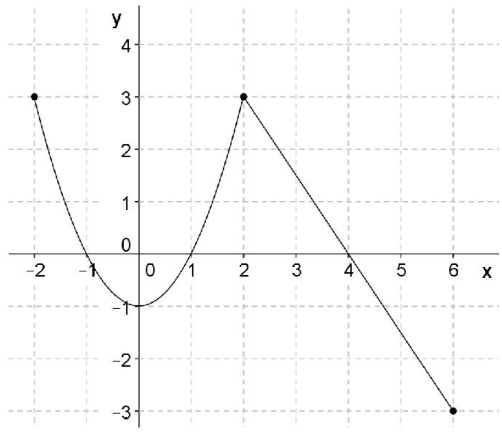
Μονάδες 6

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες.

Μονάδες 6

δ) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα του πεδίου ορισμού στα οποία η συνάρτηση παίρνει αρνητικές τιμές.

Μονάδες 7



Λύση

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο των τετμημένων των σημείων της γραφικής της παράστασης οπότε:

$$D_f = [-2, 6]$$

β) Από την γραφική παράσταση της f προκύπτει ότι:

x	-2	-1	0	**1**	**2**	6
y	3	0	-1	0	3	-3

γ) Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία με τεταγμένη 0 δηλαδή στα σημεία $A(-1,0), B(1,0), \Gamma(4,0)$ και τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τετμημένη 0 δηλαδή στο σημείο $\Delta(0,-1)$.

δ) Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f παίρνει αρνητικές τιμές είναι εκείνα στα οποία η γραφική παράσταση της βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.
Επομένως τα ζητούμενα διαστήματα είναι: $(-1,1) \cup (4,6]$

ΑΣΚΗΣΗ 7 (2_3379)

Στο παραπάνω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f.

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Μονάδες 6

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-3	-1	**0**	**3**		
y					-2	-4

Μονάδες 6

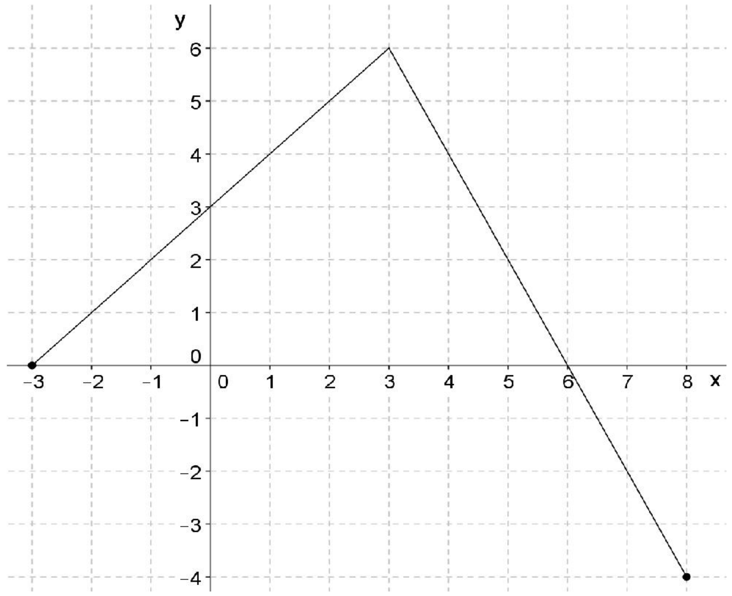
γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες.

Μονάδες 6

δ) Να προσδιορίσετε το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές.

Μονάδες 7

Λύση



α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο των τετμημένων των σημείων της γραφικής της παράστασης οπότε: $D_f = [-3,8]$

β) Από την γραφική παράσταση της f προκύπτει ότι:

x	-3	-1	**0**	**3**	7	8
y	0	2	3	6	-2	-4

γ) Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία με τεταγμένη 0 δηλαδή στα σημεία $A(-3,0), B(6,0)$ και τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τετμημένη 0 δηλαδή στο σημείο $\Gamma(0,3)$.

δ) Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f παίρνει θετικές τιμές είναι εκείνα στα οποία η γραφική παράσταση της βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. Επομένως το ζητούμενο διαστήματα είναι: $(-3,6)$

ΑΣΚΗΣΗ 8 (2_3381)

Δίνεται η συνάρτηση g , με $g(x) = \dfrac{2x^2 - 4x + \mu}{x+1}$. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης g διέρχεται από το σημείο $A(1,-4)$

α. να δείξετε ότι $\mu = -6$

Μονάδες 9

β. να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Μονάδες 9

γ. για $\mu = -6$, να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης.

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

α. Εφόσον $A(1,-4)\in C_g \Leftrightarrow g(1)=-4 \Leftrightarrow \dfrac{2-4+\mu}{2}=-4 \Leftrightarrow -2+\mu=-8 \Leftrightarrow$ $\mu=-6$

β. Για να ορίζεται η συνάρτηση g θα πρέπει $x+1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1$ άρα $A_g=R-\{-1\}$

γ. Για $\mu=-6$ είναι

$$g(x)=\frac{2x^2-4x-6}{x+1}=\frac{2\left(x^2-2x-3\right)}{x+1}=\frac{2(x+1)(x-3)}{x+1}=2(x-3)\ \ x\in R-\{-1\}$$

ΑΣΚΗΣΗ 9 (4_1963)

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=x^2$ και $g(x)=\lambda x+(1-\lambda)$, $x\in\mathbb{R}$ και λ παράμετρος με $\lambda\neq 0$.

α. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

(Μονάδες 8)

β. Για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f και C_g έχουν ένα κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό;

(Μονάδες 8)

γ. Αν $\lambda\neq 2$ και x_1,x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g, να βρεθεί η παράμετρος λ ώστε να ισχύει: $(x_1+x_2)^2=|x_1+x_2|+2$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α. 1. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει μία τουλάχιστον λύση για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$

Έχουμε,

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2=\lambda x+(1-\lambda)\Leftrightarrow x^2-\lambda x-(1-\lambda)=0 \qquad (1)$$

Η (1) έχει διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-\lambda)^2-4\cdot 1\left[-(1-\lambda)\right]=\lambda^2+4(1-\lambda)=\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2\geq 0$$

που ισχύει για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ και το ίσον μόνο για $\lambda=2$

Άρα η (1) έχει τουλάχιστον μία λύση για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$

β. Οι C_f και C_g θα έχουν ένα κοινό σημείο, αν η εξίσωση (1) έχει μία διπλή ρίζα, δηλαδή αν $\Delta=0$.

Είναι,

$$\Delta=0\Leftrightarrow(\lambda-2)^2=0\Leftrightarrow\lambda-2=0\Leftrightarrow\lambda=2\ ,$$

τότε η εξίσωση γίνεται ισοδύναμα,

$$x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ διπλή ρίζα.}$$

Άρα το κοινό σημείο των C_f και C_g είναι το σημείο $M(1,1)$

γ. Αν $\lambda \neq 2$ τότε η (1) έχει δυο άνισες πραγματικές ρίζες, x_1, x_2

Από τους τύπους VIETA έχουμε,

$$S=x_1+x_2=\frac{-\beta}{\alpha} \Rightarrow x_1+x_2=\frac{-(-\lambda)}{1} \Leftrightarrow x_1+x_2=\lambda$$

και τότε

$$(x_1+x_2)^2=|x_1+x_2|+2 \Leftrightarrow (\lambda)^2=|\lambda|+2 \Leftrightarrow |\lambda|^2-|\lambda|-2=0 \quad (2)$$

Θεωρούμε, $\omega=|\lambda|$, με $\omega>0$ αφού $\lambda \neq 0$ οπότε η (2) ισοδύναμα γίνεται,

$\omega^2-\omega-2=0$ με $\Delta=9>0$ άρα

$$\omega=\frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Rightarrow \omega=\frac{-(-1)\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \omega=\frac{1+3}{2}=\frac{4}{2}=2 \text{ δεκτή} \\ \omega=\frac{1-3}{2}=\frac{-2}{2}=-1 \text{ Απορ.} \end{cases}$$

οπότε

$$\omega=2 \Leftrightarrow |\lambda|=2 \Rightarrow \lambda=2 \text{ ή } \lambda=-2, \text{ όμως } \lambda \neq 2 \text{ άρα } \lambda=-2$$

ΑΣΚΗΣΗ 10 (4_2046)

Ένας αθλητής κολυμπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες.

α. Αν ο αθλητής θέλει να κολυμπήσει ύπτιο 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες.

(Μονάδες 5)

β. Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.

i) Αν x είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες είναι: $f(x)=30-\frac{3}{4}x$.

(Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του ερωτήματος β(i), στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος.

(Μονάδες 4)

γ. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος (β), να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α. Αν ο αθλητής κολυμπήσει 32 λεπτά ύπτιο καίγοντας 9 θερμίδες ανά λεπτό θα κάψει συνολικά $9 \cdot 32 = 288$ θερμίδες.
Έστω x τα λεπτά που θα κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες. Καίγοντας 12 θερμίδες το λεπτό αν κολυμπάει πεταλούδα τότε έχουμε την εξίσωση,

$$12 \cdot x + 288 = 360 \Leftrightarrow 12 \cdot x = 360 - 288 \Leftrightarrow x = \frac{72}{12} \Leftrightarrow x = 6$$

Άρα πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα 6 λεπτά.
β.i) Έστω x ο χρόνος σε λεπτά, που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο και y ο χρόνος σε λεπτά, που ο αθλητής κολυμπάει πεταλούδα. Οπότε ανάλογα με τις θερμίδες που καίει κάνοντας ύπτιο και πεταλούδα αντίστοιχα, θα έχουμε

$$9x + 12y = 360 \Leftrightarrow y = \frac{360 - 9x}{12} \Leftrightarrow y = 30 - \frac{3}{4}x$$

Άρα, ορίζουμε συνάρτηση f που εκφράζει το χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες ως $f(x) = 30 - \frac{3}{4}x$

ii) Αφού x ο χρόνος σε λεπτά πρέπει να είναι θετικός ή μηδέν. Ακόμη $y = f(x)$ είναι αριθμός θερμίδων άρα πρέπει να είναι

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 30 - \frac{3}{4}x \geq 0 \Leftrightarrow 30 \geq \frac{3}{4}x \Leftrightarrow \frac{30 \cdot 4}{3} \geq x \Leftrightarrow 40 \geq x$$

Επομένως στα πλαίσια του προβλήματος η συνάρτηση f ορίζεται για

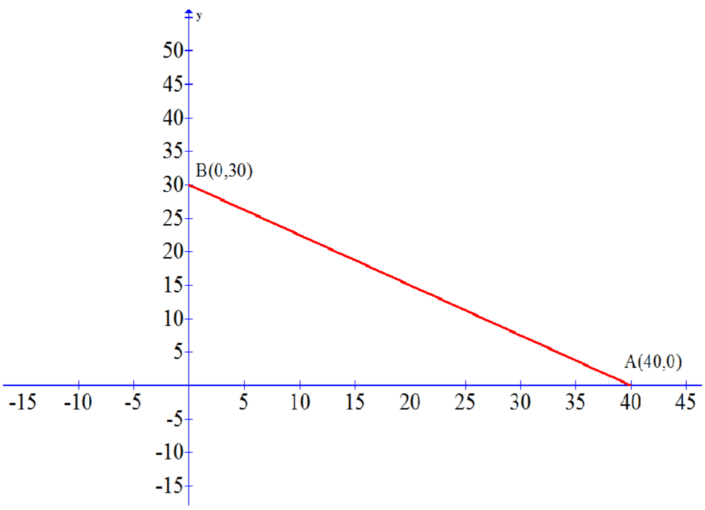
$$0 \leq x \leq 40 \text{ ή } x \in [0, 40]$$

3. Η C_f θα τέμνει τους άξονες,

$x'x$, για $y = 0$ είναι $30 - \frac{3}{4}x = 0 \Leftrightarrow x = 40$, άρα στο σημείο $A(40,0)$

$y'y$, για $x = 0$ είναι $f(0) = 30$, άρα στο σημείο $B(0,30)$

Επομένως συνδέοντας τα σημεία Α και Β με $0 \leq x \leq 40$, η C_f είναι,



Το σημείο Α δείχνει ότι αν ο αθλητής δεν κολυμπήσει καθόλου πεταλούδα, για να κάψει 360 θερμίδες, πρέπει να κολυμπήσει 40 λεπτά ύπτιο. Ενώ το σημείο Β δείχνει ότι όταν ο αθλητής δεν κολυμπήσει ύπτιο, για να κάψει 360 θερμίδες, πρέπει να κολυμπήσει 30 λεπτά πεταλούδα .

ΑΣΚΗΣΗ 11 (4_2338)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha x - \alpha + 2$ και $g(x) = x^2 - \alpha + 3$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1,2)$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α.

(Μονάδες 7)

2. Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, τότε:

i) Να βρείτε την τιμή του α.

(Μονάδες 4)

ii) Για την τιμή του α που βρήκατε υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

3. Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν δύο σημεία τομής.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

1. Αρκεί να δείξουμε ότι οι συντεταγμένες του σημείου $(1,2)$ επαληθεύουν τον τύπο της συνάρτησης για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, δηλ. αρκεί $f(1) = 2$.

Είναι $f(1) = \alpha - \alpha + 2 = 2$

2. i) Αφού C_f και C_g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, είναι $g(1) = f(1) = 2$ οπότε

$$g(1) = 2 \Leftrightarrow 1 - \alpha + 3 = 2 \Leftrightarrow -\alpha = -2 \Leftrightarrow \alpha = 2$$

ii) Για $\alpha = 2$ αντίστοιχα έχουμε,

$$f(x) = 2x - 2 + 2 = 2x \text{ και } g(x) = x^2 - 2 + 3 = x^2 + 1$$

Οι C_f και C_g θα έχουν κοινά σημεία με τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης

$$f(x) = g(x)$$

Έχουμε,

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x = x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

μοναδική λύση.

Άρα οι C_f και C_g έχουν μοναδικό σημείο τομής με συντεταγμένες $(1,2)$

3. Αρκεί η εξίσωση $f(x) = g(x)$ να έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

Είναι,

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \alpha x - \alpha + 2 = x^2 - \alpha + 3 \Leftrightarrow x^2 - \alpha x + 1 = 0$$

επομένως αρκεί η δευτεροβάθμια εξίσωση να έχει $\Delta > 0$

Έχουμε,

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 > 4 \Leftrightarrow |\alpha| > 2 \Leftrightarrow \alpha < -2 \quad \text{ή} \quad \alpha > 2$$

Άρα $\alpha \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$

ΑΣΚΗΣΗ 12 (4_4660)

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g, με $f(x) = x^2 - 2x$ και $g(x) = 3x - 4, x \in R$.

1. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 5)

2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g.

(Μονάδες 10)

3. Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y = \alpha$, $\alpha < -1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 10)

Λύση

1. Οι συναρτήσεις f, g έχουν πεδίο ορισμού $A_f = A_g = \mathbb{R}$.

Για $x \in R$, έχουμε:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 2x = 3x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

αφού το τριώνυμο έχει $\alpha = 1$, $\beta = -5$ και $\gamma = 4$

διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 4 = 25 - 16 = 9 > 0$$

και ρίζες

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \alpha} \quad \text{άρα} \quad x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ \text{ή} \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Συνεπώς τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι τα $A(1, f(1)) = (1,-1)$ και $B(4, f(4)) = (4,8)$,

αφού

$$f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1 \text{ και } g(1) = 3 \cdot 1 - 4 = -1 \text{ άρα } f(1) = g(1) = -1$$

και

$$f(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 = 8 \text{ και } g(4) = 3 \cdot 4 - 4 = 8 \text{ άρα } f(4) = g(4) = 8.$$

2. Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g λύνουμε την ανίσωση

$$f(x) < g(x) \Longleftrightarrow x^2 - 2x < 3x - 4 \Longleftrightarrow x^2 - 2x - 3x - 4 < 0 \Longleftrightarrow x^2 - 5x + 4 < 0$$

αφού το τριώνυμο έχει $\alpha = 1$, $\beta = -5$ και $\gamma = 4$

διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 4 = 25 - 16 = 9 > 0$$

και ρίζες

$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm 3}{2}=\begin{cases}x_1=4\\ \text{ή}\\ x_2=1\end{cases}$$

Άρα κατασκευάζω πίνακα τιμών

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
x^2-5x+4		$+$	0	$-$	0	$+$	

θυμάμαι ότι το τριώνυμο είναι ετερόσημο του $\alpha=1$ εντός του διαστήματος των ριζών δηλαδή αν $x\in(1,4)$ και ομόσημο εκτός δηλαδή $x\in(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$, άρα η ανίσωση ισχύει αν $x\in(1,4)$

3. Για να βρίσκεται κάθε ευθεία της μορφής $y=\alpha$, $\alpha<-1$, κάτω από τη γραφική παράσταση της f αρκεί να ισχύει $f(x)>\alpha$ για κάθε $\alpha<-1$.

Επομένως:

$$x^2-2x>\alpha\Leftrightarrow x^2-2x-\alpha>0,$$

η οποία ισχύει αφού το τριώνυμο $x^2-2x-\alpha$ έχει

$\alpha=1$, $\beta=-2$ και $\gamma=\alpha$ και διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-2)^2-4(-\alpha)=4+4\alpha=4(1+\alpha)<0$$

για κάθε $\alpha<-1\Leftrightarrow\alpha+1<0$

Συνεπώς κάθε ευθεία με εξίσωση $y=\alpha$, $\alpha<-1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

ΑΣΚΗΣΗ 13 (4_5879)

Ο αγώνας δρόμου ανάμεσα στη χελώνα και το λαγό γίνεται σύμφωνα μα τους ακόλουθους κανόνες:

- Η διαδρομή είναι τμήμα ενός ευθυγράμμου τμήματος.
- Ο λαγός ξεκινάει τη χρονική στιγμή $t=0$ από ένα σημείο Ο.
- Το τέρμα βρίσκεται σε σημείο Μ με $OM>600$ μέτρα.
- Η χελώνα ξεκινάει τη στιγμή $t=0$ με προβάδισμα, δηλαδή από ένα σημείο Α που βρίσκεται μεταξύ του Ο και του Μ με $OA=600$ μέτρα.

Υποθέτουμε ότι, για $t\geq 0$ η απόσταση του λαγού από το Ο τη χρονική στιγμή t min δίνεται από τον τύπο $S_\Lambda(t)=10t^2$ μέτρα, ενώ η απόσταση χελώνας από το Ο τη χρονική στιγμή t min δίνεται από τον τύπο $S_X(t)=600+40t$ μέτρα.

α) Να βρείτε σε πόση απόσταση από το Ο θα πρέπει να βρίσκεται το σημείο Μ, ώστε η χελώνα να κερδίσει τον αγώνα.

Μονάδες 10

β) Υποθέτουμε τώρα ότι η απόσταση του τέρματος Μ από το Ο είναι $OM=2250$ μέτρα.

Να βρείτε:

i) Ποια χρονική στιγμή ο λαγός φτάνει τη χελώνα;

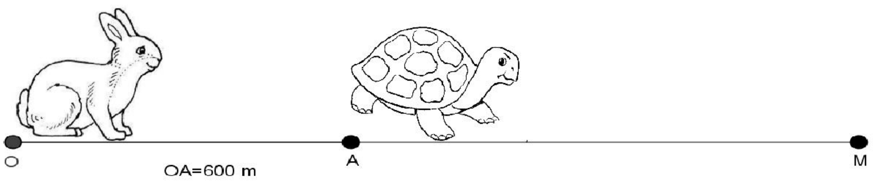
Μονάδες 5

ii) Ποιος τους δύο δρομείς προηγείται τη χρονική στιγμή $t = 12\,\text{min}$ και ποια είναι τότε η μεταξύ τους απόσταση;

Μονάδες 5

iii) Ποια χρονική στιγμή τερματίζει ο νικητής τον αγώνα;

Μονάδες 5



ΛΥΣΗ

α) Για να κερδίσει η χελώνα τον αγώνα θα πρέπει να ισχύει

$$S_X(t) > S_\Lambda(t) \Leftrightarrow 600 + 40t > 10t^2 \Leftrightarrow 10t^2 - 40t - 600 < 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t - 60 < 0$$

Το τριώνυμο $t^2 - 4t - 60$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 16 + 240 = 256$$

Και ρίζες

$$t_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{4 \pm 16}{2}$$

άρα,

$$t_1 = \frac{4+16}{2} = 10 \text{ και } t_2 = \frac{4-16}{2} = -6$$

Τότε έχουμε

$$t^2 - 4t - 60 < 0 \Leftrightarrow (t-10)(t+6) < 0 \Leftrightarrow t - 10 < 0 \Leftrightarrow t < 10 \text{ (αφού } t + 6 > 0\text{)}$$

Είναι

$$0 \le t < 10 \Leftrightarrow 0 \le 40t < 400 \Leftrightarrow 600 \le 600 + 40t < 1000 \Leftrightarrow 600 \le S_X(t) < 1000$$

Άρα το σημείο Μ θα πρέπει να βρίσκεται σε απόσταση μικρότερη των 1000 μέτρων από το Ο για να κερδίσει τον αγώνα η χελώνα.

β) i) Ο λαγός φτάνει την χελώνα όταν

$$S_X(t) = S_\Lambda(t) \Leftrightarrow 600 + 40t = 10t^2 \Leftrightarrow 10t^2 - 40t - 600 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t - 60 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 10$$

και

$$t_2 = -6 \text{ απορρίπτεται}$$

Άρα ο λαγός φτάνει τη χελώνα τη χρονική στιγμή $t = 10\,\text{min}$

ii) Τη χρονική στιγμή $t = 12\,\text{min}$ είναι:

$$S_\Lambda(12) = 10 \cdot 12^2 = 10 \cdot 144 = 1440 \text{ και } S_X(12) = 600 + 40 \cdot 12 = 600 + 480 = 1080$$

Συνεπώς τη χρονική στιγμή $t = 12\,\text{min}$ ο λαγός προηγείται της χελώνας. Η μεταξύ τους απόσταση είναι $S_\Lambda(12) - S_X(12) = 1440 - 1080 = 360$ μέτρα.

iii) Αφού $OM = 2250 > 1000$ νικητής του αγώνα είναι ο λαγός, που τερματίζει όταν

$$S_{\Lambda}(t) = 2250 \Leftrightarrow 10t^2 = 2250 \Leftrightarrow t^2 = 225 \Leftrightarrow t = 15 \,(\text{αφού } t \geq 0)$$

Άρα ο νικητής του αγώνα τερματίζει τη χρονική στιγμή $t = 15\,\text{min}$

ΑΣΚΗΣΗ 14 (4_5882)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (x-1)^2 - 4$ και $g(x) = |x-1| + 2$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$

Μονάδες 9

β) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$

Μονάδες 4

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g

Μονάδες 12

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x, αν και μόνο αν $f(x) > 0$

Έχουμε,

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2 > 4 \Leftrightarrow |x-1| > 2 \Leftrightarrow$$
$$x - 1 > 2 \text{ ή } x - 1 < -2 \Leftrightarrow$$
$$x > 3 \text{ ή } x < -1$$

Συνεπώς η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ όταν $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$|x-1| \geq 0 \Leftrightarrow |x-1| + 2 \geq 2 \Leftrightarrow g(x) \geq 2 \text{ τότε } g(x) > 0$$

Άρα για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$

γ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων των f και g είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$f(x) = g(x)$$

Έχουμε,

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 = |x-1| + 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 - |x-1| - 6 = 0 \Leftrightarrow$$
$$|x-1|^2 - |x-1| - 6 = 0 \;\; (1)$$

Θέτουμε $|x-1| = \omega \geq 0$

Τότε η (1) γίνεται $\omega^2 - \omega - 6 = 0$ με διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1 + 24 = 25$$

Και ρίζες

$$\omega_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{1\pm 5}{2}$$

άρα,

$$\omega_1=\frac{1+5}{2}=3 \text{ και } \omega_2=\frac{1-5}{2}=-2 \text{ απορρίπτεται}$$

τότε

$$|x-1|=3\Leftrightarrow x-1=3 \text{ ή } x-1=-3\Leftrightarrow x=4 \text{ ή } x=-2$$

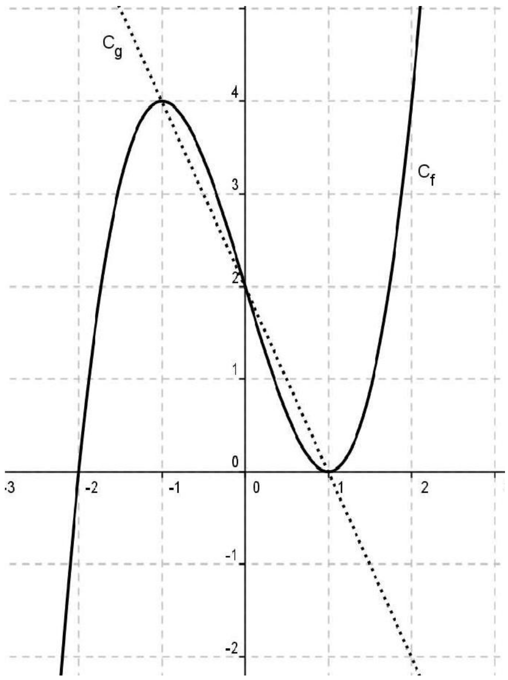
Για $x=4$, $f(4)=(4-1)^2-4=9-4=5$

Για $x=-2$, $f(-2)=(-2-1)^2-4=9-4=5$

Άρα τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι τα $A(-2,5)$ και $B(4,5)$

ΑΣΚΗΣΗ 15 (4_6146)

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και της συνάρτησης $g(x)=-2x+2$



Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε:

α) Τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x)=-2x+2$

Μονάδες 6

β) Τις τιμές $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$

Μονάδες 6

γ) Τις τιμές του x, για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g

Μονάδες 6

δ) Τις τιμές του x, για τις οποίες η παράσταση $A=\sqrt{f(x)+2x-2}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

α) Οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x)=-2x+2$ προκύπτουν από την επίλυση της εξίσωσης $f(x)=g(x)$ δηλαδή είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g οι οποίες είναι

$$x=-1,\ x=0,\ x=1$$

β) Με τη βοήθεια του σχήματος, είναι

$$f(-1)=4,\ f(0)=2,\ f(1)=0$$

γ) Οι τιμές του x, για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g είναι

$$-1<x<0 \text{ ή } x>1$$

δ) Για να έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση $A=\sqrt{f(x)+2x-2}$ πρέπει

$$f(x)+2x-2\geq 0 \Leftrightarrow f(x)\geq -2x+2 \Leftrightarrow f(x)\geq g(x)$$

Δηλαδή είναι οι τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f δεν είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g

Από το σχήμα παρατηρούμε ότι αυτό συμβαίνει όταν $[-1,0]\cup[1,+\infty)$

ΑΣΚΗΣΗ 16 (4_8451)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{4x^2-2(\alpha+3)x+3\alpha}{2x-3}$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

Μονάδες 5

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x)=2x-\alpha$ για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f

Μονάδες 8

γ) Να βρεθεί η τιμή του α αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(-1,1)$

Μονάδες 7

δ) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει :

$$2x-3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \frac{3}{2}, \text{ άρα, } A=R-\left\{\frac{3}{2}\right\}=\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right).$$

β) Έχουμε,

$$4x^2-2(\alpha+3)x+3\alpha=4x^2-6x-2\alpha x+3\alpha=2x(2x-3)-\alpha(2x-3)=(2x-\alpha)(2x-3)$$

Επομένως,

$$f(x)=\frac{4x^2-2(\alpha+3)x+3\alpha}{2x-3}=\frac{(2x-\alpha)(2x-3)}{2x-3}=2x-\alpha \text{, για κάθε } x\in A$$

γ) Είναι

$$f(-1)=1 \Leftrightarrow 2\cdot(-1)-\alpha=1 \Leftrightarrow -\alpha=3 \Leftrightarrow \alpha=-3$$

δ) Για $x=0\in A$ έχουμε,

$$y=2\cdot 0-\alpha \Leftrightarrow y=-\alpha \text{ άρα η } C_f \text{ τέμνει τον } y'y \text{ στο σημείο} (0,-\alpha)$$

Για $y=0$ έχουμε,

$$0=2x-\alpha \Leftrightarrow x=\frac{\alpha}{2}$$

Επίσης πρέπει

$$x\in A \text{ δηλαδή } \frac{\alpha}{2}\neq\frac{3}{2} \Leftrightarrow \alpha\neq 3.$$

Αν $\alpha\neq 3$, τότε η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\left(\frac{\alpha}{2},0\right)$ ενώ αν $\alpha=3$ η C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

<u>**Β΄ τρόπος επίλυσης για το (β) ερώτημα**</u>

Θα παραγοντοποιήσουμε ο τριώνυμο $4x^2-2(\alpha+3)x+3\alpha$, η διακρίνουσα του είναι

$$\begin{aligned}\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma&=4(\alpha+3)^2-4\cdot 4\cdot 3\alpha\\&=4\alpha^2+24\alpha+36-48\alpha\\&=4\alpha^2-24\alpha+36\\&=4(\alpha^2-6\alpha+9)\\&=4(\alpha-3)^2\geq 0\end{aligned}$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{2(\alpha+3)\pm 2(\alpha-3)}{8}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{2\alpha+6+2\alpha-6}{8}\\[2ex] x_2=\dfrac{2\alpha+6-2\alpha+6}{8}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{\alpha}{2}\\[2ex] x_2=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

οπότε το τριώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής:

$$4x^2-2(\alpha+3)x+3\alpha=4\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)=2\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot 2\left(x-\frac{3}{2}\right)=(2x-\alpha)(2x-3)$$

ΑΣΚΗΣΗ 17 (4_13090)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+3x+2$ και $g(x)=x+1$, $x\in\mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο στη συνέχεια να προσδιορίσετε.

Μονάδες 10

β) Δίνεται η συνάρτηση h(x) = x + α. Να δείξετε ότι :

i) αν $\alpha > 1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h έχουν δύο κοινά σημεία.
ii) αν $\alpha < 1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h δεν έχουν κοινά σημεία.

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) Τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι οι λύσεις του συστήματος :

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \quad (1).$$

Από το σύστημα (1) έχουμε :

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 - x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Οπότε για $x = -1$ σε μία από τις δύο εξισώσεις του συστήματος (1) έχουμε $y = g(-1) = -1 + 1 = 0$.
Άρα το κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι το Α $(-1, 0)$

β) Τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι οι λύσεις του συστήματος : $\begin{cases} y = f(x) \\ y = h(x) \end{cases}$ (2).

Από το σύστημα (2) έχουμε :

$$f(x) = h(x) \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = x + \alpha \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 - x - \alpha = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 - \alpha = 0 \quad (3).$$

Το τριώνυμο $x^2 + 2x + 2 - \alpha$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2 - \alpha) = 4 - 8 + 4\alpha = -4 + 4\alpha = 4(\alpha - 1)$$

i) Αν $\alpha > 1$ τότε $\Delta > 0$, δηλαδή η εξίσωση (3) έχει δύο λύσεις, οπότε και το σύστημα (2) θα έχει δύο λύσεις, άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g θα έχουν δύο κοινά σημεία .

ii) Αν $\alpha < 1$ τότε $\Delta < 0$, δηλαδή η εξίσωση (3) είναι αδύνατη, οπότε το σύστημα (2) δε θα έχει λύσεις άρα η γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g δε θα έχουν κοινά σημεία .

<u>Μεθοδολογία :</u>
Τα κοινά σημεία δύο γραφικών παραστάσεων C_f και C_g προκύπτουν από την επίλυση της εξίσωσης f(x) = g(x). Οι ρίζες αυτής της εξίσωσης είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

<u>Παρόμοια Άσκηση :</u>
Η παραπάνω άσκηση μοιάζει με την άσκηση 10.i της παραγράφου 6.2 του σχολικού βιβλίου .

6.3: Η Συνάρτηση f(x) = αx + β

ΑΣΚΗΣΗ 1 (2_1024)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

α. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1,6)$, $B(-1,4)$ να βρείτε τις τιμές των α και β.

Μονάδες 13

β. Αν $\alpha=1$ και $\beta=5$, να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α. Γνωρίζουμε ότι ένα σημείο $M(\kappa,\lambda)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f αν και μόνο αν $f(\kappa)=\lambda$. Οπότε, αφού η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1,6),B(-1,4)$ τότε:

$$\begin{cases} f(1)=6 \\ f(-1)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\cdot 1+\beta=6 \\ \alpha\cdot(-1)+\beta=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\beta=6 \\ -\alpha+\beta=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=6-\alpha \\ -\alpha+\beta=4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \beta=6-\alpha \\ -\alpha+6-\alpha=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=6-\alpha \\ -2\alpha=4-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=6-\alpha \\ -2\alpha=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=6-1 \\ \alpha=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=5 \\ \alpha=1 \end{cases}$$

β. Για $\alpha=1$ και $\beta=5$ ο τύπος της συνάρτησης παίρνει την μορφή:

$$f(x)=x+5 \ .$$

Για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x'x θα λύσουμε την εξίσωση $f(x)=0$.

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x+5=0 \Leftrightarrow x=-5 \ .$$

Άρα, το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x'x είναι το $(-5,0)$. Τέλος, το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα y'y είναι το $(0,f(0))$ δηλαδή το $(0,5)$ αφού $f(0)=0+5=5$.

ΑΣΚΗΣΗ 2 (2_1096)

Η απόσταση y (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μία πόλη Α, μετά από x λεπτά δίνεται από τη σχέση : y = 35 + 0,8x

α) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη Α μετά από 25 λεπτά;

Μονάδες 12

β) Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη Α ;

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Για x = 25 έχουμε y = 35 + 0,8 · 25 = 35 + 20 = 55 χιλιόμετρα. Άρα η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη Α μετά από 25 λεπτά θα είναι 55 χιλιόμετρα.

β) Για y = 75 έχουμε :

$75 = 35 + 0,8 \cdot x \Leftrightarrow 75 - 35 = 0,8 \cdot x \Leftrightarrow 40 = 0,8x \Leftrightarrow x = \frac{40}{0,8} = 50$ λεπτά.

Άρα το αυτοκίνητο μετά από 50 λεπτά θα απέχει 70 χιλιόμετρα από την πόλη Α.

ΑΣΚΗΣΗ 3 (2_1529)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(0) = 5 \text{ και } f(1) = 3$$

α) Να δείξετε ότι $\alpha = -2$ και $\beta = 5$.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Μονάδες 7

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

Μονάδες 8

Λύση

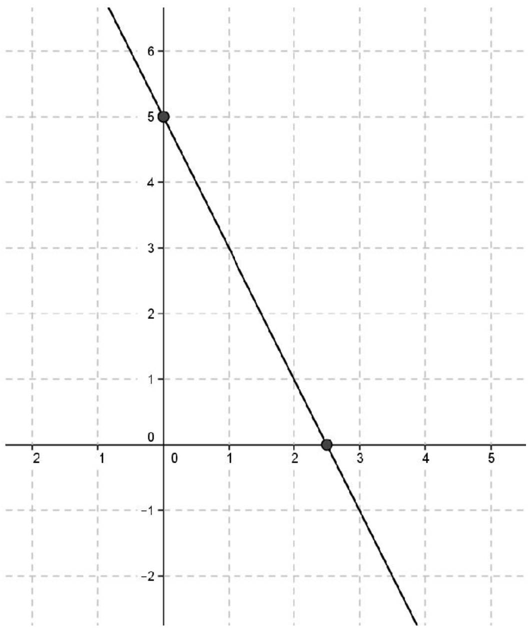
α) Γνωρίζουμε ότι $f(0) = 5$ και $f(1) = 3$, οπότε:

$$f(0) = 5 \Leftrightarrow \alpha \cdot 0 + \beta = 5 \Leftrightarrow 0 + \beta = 5 \Leftrightarrow \beta = 5$$

και η συνάρτηση f γίνεται: $f(x) = \alpha x + 5$.

$$f(1) = 3 \Leftrightarrow \alpha \cdot 1 + 5 = 3 \Leftrightarrow \alpha + 5 = 3 \Leftrightarrow \alpha = 3 - 5 \Leftrightarrow \alpha = -2$$

Άρα $\alpha = -2$ και $\beta = 5$.



β) Για $\alpha = -2$ και $\beta = 5$ η συνάρτηση f γίνεται $f(x) = -2x + 5$.

Η γραφική παράσταση της f σχηματίζεται από τα σημεία της μορφής $(x, f(x))$ για κάθε x του πεδίου ορισμού της.

Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(\kappa, 0)$ όπου κ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 5 = 0 \Leftrightarrow -2x = -5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, f(0))$.

Όμως $f(0)=5$.

Άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\left(\frac{5}{2},0\right)$ και τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,5)$.

γ) Αν βρούμε σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες και τα ενώσουμε, μπορουμε να σχεδιάσουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, όπως φαίνεται και στο σχήμα.

ΑΣΚΗΣΗ 4 (2_2212)

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{2x^2-6|x|}{2|x|-6}$

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.

Μονάδες 10

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=|x|$, για κάθε $x\in A$

Μονάδες 10

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x>0$.

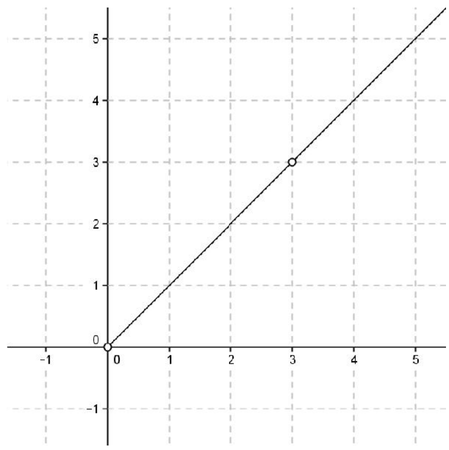
Μονάδες 5

Λύση

α) Η $f(x)$ ορίζεται όταν:

$$2|x|-6\neq 0 \Longleftrightarrow 2|x|\neq 6 \Longleftrightarrow |x|\neq 3 \Longleftrightarrow x\neq \pm 3$$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A=(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,+\infty)$.



β) Ισχύει ότι:

$$f(x)=\frac{2x^2-6|x|}{2|x|-6}=\frac{2|x|^2-6|x|}{2|x|-6}=\frac{2|x|(|x|-3)}{2(|x|-3)}=|x|$$

Άρα $f(x)=|x|$ για κάθε $x\in A$.

γ) Αν $x>0$, τότε $|x|=x$ η συνάρτηση f γίνεται $f(x)=x$ για κάθε $x\in(0,3)\cup(3,+\infty)$ και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

ΑΣΚΗΣΗ 5 (4_1880)

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

(Μονάδες 7)

γ) Αν A, B είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα A και B.

(Μονάδες 8)

Λύση

α) Το πεδίο ορισμού της f αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η υπόριζη ποσότητα είναι μη αρνητική και ο παρονομαστής είναι διάφορος του μηδενός.

Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{cases} 9 - x^2 \geq 0 \\ \text{και} \\ \sqrt{9 - x^2} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow 9 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 9 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{9} \Leftrightarrow |x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$$

επομένως είναι το πεδίο ορισμού της f είναι το $A_f = (-3, 3)$.

β) Το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ έχει τετμημένη μηδέν.

Οπότε για $x = 0$ στον τύπο της f έχουμε:

$$f(0) = \frac{0+2}{\sqrt{9-0}} = \frac{2}{3}\text{, επομένως η } C_f \text{ τέμνει τον άξονα } y'y \text{ στο σημείο } B\left(0, \frac{2}{3}\right).$$

Το σημείο (ή τα σημεία) στο οποίο η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ έχει τεταγμένη μηδέν.

Οπότε για $y = 0$ στον τύπο της f έχουμε: $0 = \dfrac{x+2}{\sqrt{9-x^2}} \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$,

επομένως η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(-2, 0)$.

γ) Έστω $y = \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από τα σημεία $A(-2, 0)$ και $B\left(0, \dfrac{2}{3}\right)$. Οι συντεταγμένες των A και B ικανοποιούν την εξίσωση της ευθείας.

Οπότε έχουμε:

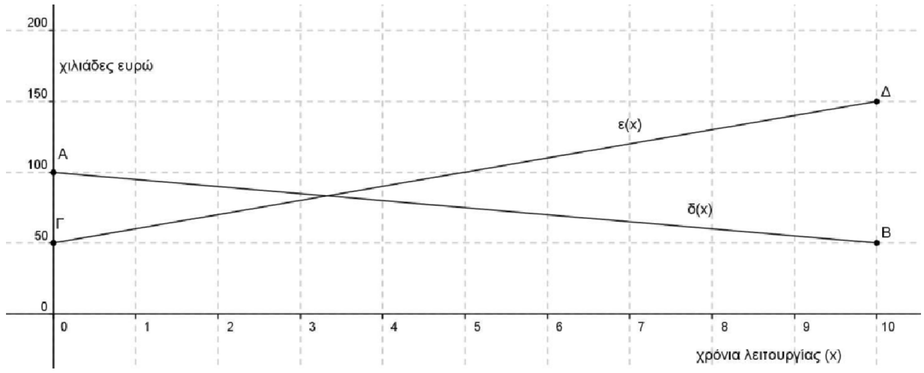
$$\begin{cases} y_A = \alpha x_A + \beta \\ y_B = \alpha x_B + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \alpha(-2) + \beta \\ \dfrac{2}{3} = \alpha \cdot 0 + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = \beta \\ \beta = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{3} \\ \beta = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Συνεπώς η ευθεία η οποία διέρχεται από τα σημεία A και B έχει εξίσωση

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

ΑΣΚΗΣΗ 6 (4_2339)

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων το ευθύγραμμο τμήμα AB με $A(0,100)$ και $B(10,50)$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\delta(x)$ των ετήσιων δαπανών μιας εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της.
Το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$ με $\Gamma(0,50)$ και $\Delta(10,150)$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης των ετήσιων εσόδων $\varepsilon(x)$ της εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της. Οι γραφικές παραστάσεις αναφέρονται στα δέκα πρώτα χρόνια λειτουργίας της εταιρείας.



1. Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να εκτιμήσετε τα έσοδα και τα έξοδα τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας της εταιρείας.

(Μονάδες 4)

2 i) Να προσδιορίσετε τους τύπους των συναρτήσεων $\delta(x)$, $\varepsilon(x)$ και να ελέγξετε αν οι εκτιμήσεις σας στο α) ερώτημα ήταν σωστές

(Μονάδες 15)

ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των τμημάτων AB και $\Gamma\Delta$ και να τις ερμηνεύσετε στο πλαίσιο του προβλήματος.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

1. Φέρνουμε κάθετη ευθεία στο σημείο 5 του οριζόντιου άξονα και στη συνέχεια από τα σημεία που αυτή τέμνει τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\varepsilon(x)$ και $\delta(x)$ κάθετη στον κατακόρυφο άξονα και εκτιμούμε ότι:

$$\varepsilon(x) \cong 100 \quad , \quad \delta(x) \cong 75$$

2.(i) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\varepsilon(x)$ και $\delta(x)$ είναι της μορφής

$$f(x) = \alpha x + \beta$$

Έστω $\delta(x) = \alpha x + \beta$ και διέρχεται από τα σημεία $A(0,100)$ και $B(10,50)$ οπότε έχουμε

$$\delta(x) = \alpha x + \beta \Rightarrow \begin{cases} \delta(0) = 100 \\ \delta(10) = 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 100 \\ 10\alpha + 100 = 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 100 \\ \alpha = -5 \end{cases}$$

Άρα $\delta(x) = -5x + 100$

Αντίστοιχα θεωρούμε $\varepsilon(x) = \alpha x + \beta$ που διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(0,50)$ και $\Delta(10,150)$ έτσι είναι

$$\varepsilon(x) = \alpha x + \beta \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon(0) = 50 \\ \varepsilon(10) = 150 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 50 \\ 10\alpha + 50 = 150 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 50 \\ \alpha = 10 \end{cases}$$

Άρα $\varepsilon(x) = 10x + 50$

Για να ελέγξουμε τις εκτιμήσεις του ερωτήματος **1.** Υπολογίζουμε τις τιμές $\delta(5)$ και $\varepsilon(5)$ για τις συναρτήσεις που βρήκαμε, είναι

$$\delta(5) = -5\cdot 5 + 100 = -25 + 100 = 75 \text{ και } \varepsilon(5) = 10\cdot 5 + 50 = 50 + 50 = 100$$

Επομένως είναι σωστές οι εκτιμήσεις μας.

ii) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\delta(x), \varepsilon(x)$ θα τέμνονται σε σημείο με τετμημένη, λύση της εξίσωσης $\varepsilon(x) = \delta(x)$

Είναι

$$\varepsilon(x) = \delta(x) \Leftrightarrow 10x + 50 = -5x + 100 \Leftrightarrow 15x = 50 \Leftrightarrow x = \frac{50}{15} = \frac{10}{3}$$

Από τη λύση εξίσωσης καταλαβαίνουμε ότι η επιχείρηση στα $\frac{10}{3} \cong 3,3$ πρώτα χρόνια λειτουργίας της είχε έσοδα ίσα με τις δαπάνες της.

ΑΣΚΗΣΗ 7 (4_4657)

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x) = \begin{cases} -x + 2, & \text{αν } x < 0 \\ x + 2, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$

1. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f με τον άξονα y΄y.

(Μονάδες 3)

2. i) Να χαράξετε τη C_f και την ευθεία y = 3, και στη συνέχεια να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους.

(Μονάδες 5)

ii) Να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

3) i) Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α, η ευθεία $y = \alpha$ τέμνει τη C_f σε δυο σημεία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

ii) Για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα (3i), να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = \alpha$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος (2ii), αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας.

(Μονάδες 8)

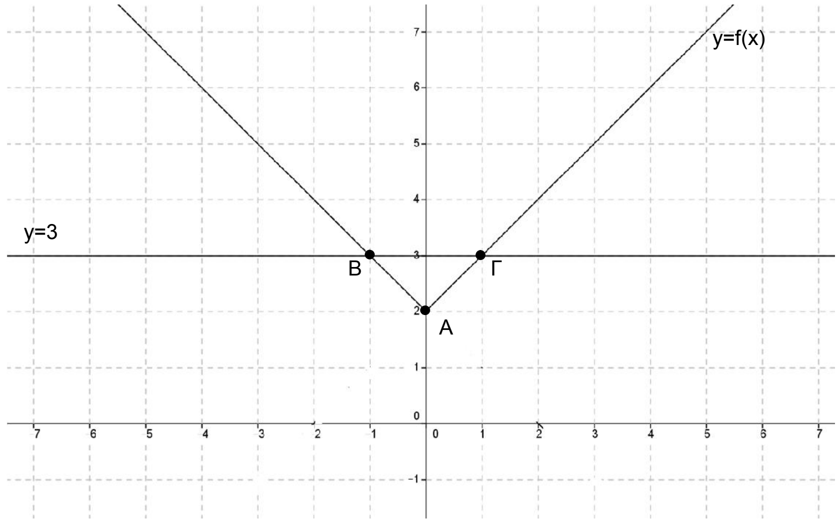
Λύση

1. Για βρούμε την τομή με τον άξονα $y'y$, θέτουμε $x=0$ άρα $f(0)=0+2=2$ άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$, στο σημείο $A(0,2)$.

2. i) Για $x>0$ έχουμε ότι η γραφική παράσταση της f είναι ημιευθεία ΑΒ χωρίς την αρχή της Α, όπου $A(0,2)$ και $B(-1,3)$

αφού για $x=0$ έχω $f(0)=0+2=2$

και για $x=-1$ έχω $f(-1)=-(-1)+2=3$



Για $x\geq 0$ έχουμε ότι η γραφική παράσταση της f είναι η f είναι ημιευθεία ΑΓ με την αρχή της Α, όπου $A(0,2)$ και $\Gamma(1,3)$ αφού για $x=0$ έχω $f(0)=0+2=2$

και για $x=1$ έχω $f(1)=1+2=3$

Η ευθεία με εξίσωση $y=3$ είναι παράλληλη με τον άξονα x΄x και διέρχεται από το σημείο (0,3) ενώ τέμνει την C_f στα σημεία $B(-1,3)$ και $\Gamma(1,3)$

ii) Τα σημεία $B(-1,3)$ και $\Gamma(1,3)$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$, αφού έχουν αντίθετες τετμημένες και ίσες τεταγμένες

3. i) Από το σχήμα παρατηρούμε ότι είναι $f(x)\ =\ y\geq 2$ για κάθε $x\in R$ άρα για να τέμνει η C_f την ευθεία $y=\alpha$ πρέπει $\alpha>2$ (αφού αν $\alpha=2$ την τέμνει σε ένα μόνο σημείο το $A(0,2)$, ενώ αν $\alpha<2$ τότε δεν έχουν κανένα σημείο τομής)

ii) Για την ευθεία $y=\alpha$ έχω ότι :

- αν $\alpha<2$ τότε η ευθεία $y=\alpha$ δεν τέμνει την C_f σε κανένα σημείο
- αν $\alpha=2$ τότε η ευθεία $y=\alpha=2$ τέμνει την C_f σε ένα σημείο $A(0,2)$
- αν $\alpha>2$ τότε η ευθεία $y=\alpha$ τέμνει την C_f σε δύο σημεία

για να βρω τα σημεία τομής λύνω την εξίσωση $f(x) = \alpha$

αν $x<0$ τότε $f(x)=\alpha \Longleftrightarrow -x+2=\alpha \Longleftrightarrow x=2-\alpha$ άρα σημείο τομής το Κ $(2-\alpha,\alpha)$

αν $x \geq 0$ τότε $f(x)=\alpha \Longleftrightarrow x+2=\alpha \Longleftrightarrow x=\alpha-2$ άρα σημείο τομής το Κ΄ $(\alpha-2,\alpha)$

Τα σημεία $K(2-\alpha,\alpha)$ και $K'(\alpha-2,\alpha)$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y'y , αφού έχουν αντίθετες τετμημένες ($2-\alpha$ και $\alpha-2$) και ίσες τεταγμένες ($\alpha=\alpha$).

ΑΣΚΗΣΗ 8 (4_4862)

Αν ένας κάτοικος μιας πόλης Α καταναλώσει x κυβικά νερού σε ένα χρόνο, το ποσό που θα πρέπει να πληρώσει δίνεται (σε ευρώ) από τη συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}12+0,5x & \text{αν } 0\leq x\leq 30\\ 0,7x+6 & \text{αν } x>30\end{cases}$$

α) Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει όποιος:

i) έλειπε από το σπίτι του και δεν είχε καταναλώσει νερό.

(Μονάδες 2)

ii) έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερού.

(Μονάδες 3)

iii) έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερού.

(Μονάδες 5)

β) Σε μια άλλη πόλη Β το ποσό (σε ευρώ) που αντιστοιχεί σε κατανάλωση x κυβικών μέτρων δίνεται από τον τύπο

$$g(x)=12+0,6x \text{, για } x\geq 0.$$

Ένας κάτοικος της πόλης Α και ένας κάτοικος της πόλης Β κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά νερού για το 2013. Αν ο κάτοικος της πόλης Α πλήρωσε μεγαλύτερο λογαριασμό από τον κάτοικο της πόλης Β, να αποδείξετε ότι ο κάθε ένας από τους δυο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) i) Αφού ο κάτοικος δεν έχει καταναλώσει νερό θα πρέπει να υπολογίσουμε την τιμή f(0). Βάζουμε x = 0 στον πρώτο κλάδο της συνάρτησης και έχουμε:

$f(0)=12+0,5\cdot 0=12$, δηλαδή θα πληρώσει 12 ευρώ.

ii) Ομοίως θα πρέπει να υπολογίσουμε την τιμή f(10). Βάζουμε x=10 πάλι στον πρώτο κλάδο και έχουμε:

$f(10)=12+0,5\cdot 10=12+5=17$, δηλαδή θα πληρώσει 17 ευρώ.

iii) Θα πρέπει να υπολογίσουμε την τιμή f(50). Σε αυτή την περίπτωση βάζουμε x=50 στο δεύτερο κλάδο της συνάρτησης και έχουμε:

$f(50)=0,7\cdot 50+6=35+6=41$, δηλαδή θα πληρώσει 41 ευρώ.

β) Έστω x ο ίδιος αριθμός των κυβικών μέτρων νερού που κατανάλωσαν ένας κάτοικος της πόλης Α και ένα κάτοικος της πόλης Β για το έτος 2013. Αφού ο κάτοικος της πόλης Α πλήρωσε μεγαλύτερο λογαριασμό από τον κάτοικο της πόλης Β θα ισχύει: f(x)>g(x).

Θα πρέπει , λόγω του τύπου της f , να διακρίνουμε περιπτώσεις.

● Αν $0 \le x \le 30$, τότε:

$$f(x)>g(x) \Leftrightarrow 12+0,5x>12+0,6x \Leftrightarrow 0,5x>0,6x \Leftrightarrow 0,1x<0 \Leftrightarrow x<0 \text{ , αδύνατο}$$

● Αν $x > 30$, τότε:

$$f(x)>g(x) \Leftrightarrow 0,7x+6>12+0,6x \Leftrightarrow 0,1x>6 \Leftrightarrow x>60$$

Επομένως ο καθένας από τους δύο κατοίκους κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού.

ΑΣΚΗΣΗ 9 (4_5275)

Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μία ημέρα, η εταιρεία **Α** χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τον τύπο:

$$y = 60 + 0,20x$$

όπου x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ.

α) Τι ποσό θα πληρώσει ένας πελάτης της εταιρείας Α, ο οποίος σε μία ημέρα ταξίδεψε 400 Km;

Μονάδες 5

β) Πόσα χιλιόμετρα οδήγησε ένας πελάτης ο οποίος, για μία ημέρα, πλήρωσε 150 ευρώ;

Μονάδες 5

γ) Μία άλλη εταιρεία, η Β, χρεώνει τους πελάτες της ανά ημέρα σύμφωνα με τον τύπο

$$y = 80 + 0,10x$$

όπου, όπως προηγουμένως, x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ. Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες μας συμφέρει να επιλέξουμε, ανάλογα με την απόσταση που σκοπεύουμε να διανύσουμε.

Μονάδες 10

δ) Αν $f(x) = 60 + 0,20x$ και $g(x) = 80 + 0,10x$ είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των εταιρειών Α και Β αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g και να εξηγήσετε τι εκφράζει η τιμή καθεμιάς από αυτές τις συντεταγμένες σε σχέση με το πρόβλημα του ερωτήματος (γ).

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ

α) Για $x = 400$ είναι

$$y = 60 + 0,20 \cdot 400 = 60 + 80 = 140$$

Συνεπώς ένας πελάτης της εταιρείας Α, ο οποίος σε μια ημέρα ταξίδεψε 400 Km θα πληρώσει 140 ευρώ.

β) Για $y = 150$ είναι

$$150 = 60 + 0,20x \Leftrightarrow 90 = 0,20x \Leftrightarrow x = 450$$

Συνεπώς ένας πελάτης ο οποίος για μια ημέρα πλήρωσε 150 ευρώ οδήγησε 450 Km

γ) Είναι

$$y_A = y_B \Leftrightarrow 60 + 0,20x = 80 + 0,10x \Leftrightarrow 0,10x = 20 \Leftrightarrow x = 200$$

$$y_A < y_B \Leftrightarrow 60 + 0,20x < 80 + 0,10x \Leftrightarrow 0,10x < 20 \Leftrightarrow x < 200$$

$$y_A > y_B \Leftrightarrow 60 + 0,20x > 80 + 0,10x \Leftrightarrow 0,10x > 20 \Leftrightarrow x > 200$$

Συνεπώς αν διανύσουμε 200 Km πληρώνουμε τα ίδια χρήματα και στις δύο εταιρείες, αν διανύσουμε απόσταση μικρότερη των 200 Km μας συμφέρει η εταιρεία Α, ενώ αν διανύσουμε απόσταση μεγαλύτερη των 200 Km μας συμφέρει η εταιρεία Β.

δ) Η τετμημένη του σημείου τομής των f και g είναι η ρίζα της εξίσωσης

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 60 + 0,20x = 80 + 0,10x \Leftrightarrow 0,10x = 20 \Leftrightarrow x = 200$$

Τότε $f(200) = 60 + 0,20 \cdot 200 = 60 + 40 = 100$

Συνεπώς το σημείο τομής των f και g είναι το $(200,100)$

Δηλαδή αν διανύσουμε 200 Km θα πληρώσουμε 100 ευρώ είτε επιλέξουμε την εταιρεία Α είτε επιλέξουμε την εταιρεία Β.

ΑΣΚΗΣΗ 10 (4_6229)

Σε μια πόλη της Ευρώπης μια εταιρεία TAXI με το όνομα RED χρεώνει 1 ευρώ με την είσοδο στο TAXI και 0,6 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης.

Μια άλλη εταιρεία TAXI με το όνομα YELLOW χρεώνει 2 ευρώ με την είσοδο στο TAXI και 0,4 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης.

Οι παραπάνω τιμές ισχύουν για αποστάσεις μικρότερες από 15 χιλιόμετρα.

α) i) Αν $f(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία RED για μια διαδρομή x χιλιομέτρων, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

x (km)	0	2	8
f(x) (ευρώ)			

(Μονάδες 3)

i) Αν $g(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία YELLOW για μια διαδρομή x χιλιομέτρων να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

X (km)			
g(x) (ευρώ)	2	3,2	4,8

(Μονάδες 3)

β) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f, g και τους τύπους τους $f(x), g(x)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και να βρείτε για ποιες αποστάσεις η επιλογή της εταιρείας RED είναι πιο οικονομική, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

δ) Αν δυο πελάτες Α και Α μετακινηθούν με την εταιρεία RED και ο πελάτης Α διανύσει 3 χιλιόμετρα παραπάνω από τον Β, να βρείτε πόσο παραπάνω θα πληρώσει ο Α σε σχέση με τον Β.

(Μονάδες 3)

ΛΥΣΗ

α) i) Αφού το ταξί έκανε 0 χιλ. τότε ο πελάτης πληρώνει μόνο την είσοδο 1 ευρώ.

Αφού το ταξί έκανε 2 χιλ. τότε ο πελάτης πληρώνει $2 \cdot 0,6 = 1,2$ ευρώ και την είσοδο 1 ευρώ, άρα σύνολο $2,2$ ευρώ.

Αφού το ταξί έκανε 8 χιλ. τότε ο πελάτης πληρώνει $8 \cdot 0,6 = 4,8$ ευρώ και για την είσοδο 1 ευρώ, άρα σύνολο $5,8$ ευρώ.

X (km)	0	2	8
f(x) (ευρώ)	1	2,2	5,8

ii) Αφού ο πελάτης πλήρωσε 2 ευρώ και η εταιρεία χρεώνει 2 ευρώ την είσοδο τότε το ταξί δεν έκανε καθόλου χιλ.

Αφού ο πελάτης πλήρωσε $3,2$ ευρώ και η εταιρεία χρεώνει 2 ευρώ την είσοδο τότε ο πελάτης πλήρωσε $1,2$ ευρώ για τα χιλ. που έκανε. Δεδομένου ότι το κάθε χιλ. αντιστοιχεί σε $0,4$ ευρώ, το ταξί έκανε $1,2 : 0,4 = 3$ χιλ.

Αφού ο πελάτης πλήρωσε $4,8$ ευρώ και η εταιρεία χρεώνει 2 ευρώ την είσοδο, ο πελάτης πλήρωσε 2,8 ευρώ για τα χιλ. που έκανε. Δεδομένου ότι το κάθε χιλ. αντιστοιχεί σε 0,4 ευρώ, το ταξί έκανε $2,8 : 0,4 = 7$ χιλ.

x (km)	0	3	7
g(x) (ευρώ)	2	3,2	4,8

β) Αφού οι παραπάνω τιμές των χιλ. (x) ισχύουν για αποστάσεις μικρότερες από 15 χιλιόμετρα , επομένως έχουμε: $A_f = A_g = [0,15)$

Θα βρούμε τον τύπο της συνάρτησης f.

Αφού για κάθε χιλ ο πελάτης πληρώνει 0,6 ευρώ το χιλ, στα (x) χιλ. θα πληρώσει $0,6x$ ευρώ. Ο πελάτης όμως πληρώνει και 1 ευρώ με την είσοδο στο ταξί, άρα συνολικά πληρώνει $0,6x+1$ ευρώ. Άρα $f(x) = 0,6x+1$.

Θα βρούμε τον τύπο της συνάρτησης g.

Αφού για κάθε χιλ ο πελάτης πληρώνει ο,4 ευρώ το χιλ, στα (x) χιλ. θα πληρώσει $0,4x$ ευρώ. Ο πελάτης όμως πληρώνει και 2 ευρώ με την είσοδο στο ταξί, άρα συνολικά πληρώνει $0,4x+2$ ευρώ. Άρα $g(x) = 0,4x+2$.

γ) Οι συναρτήσεις f, g έχουν τύπους της μορφής $y = \alpha x + \beta$, άρα οι γραφικές τους παραστάσεις βρίσκονται πάνω σε ευθείες γραμμές.

Για να βρούμε τις γραφικές παραστάσεις των f, g θα φτιάξουμε για την κάθε μία τον πίνακα τιμών.

Για τη συνάρτηση f έχουμε:

x	0	15
y	1	10

Για $x = 15$ έχουμε $y = 0,6 + 1 = 9 + 1 = 10$.

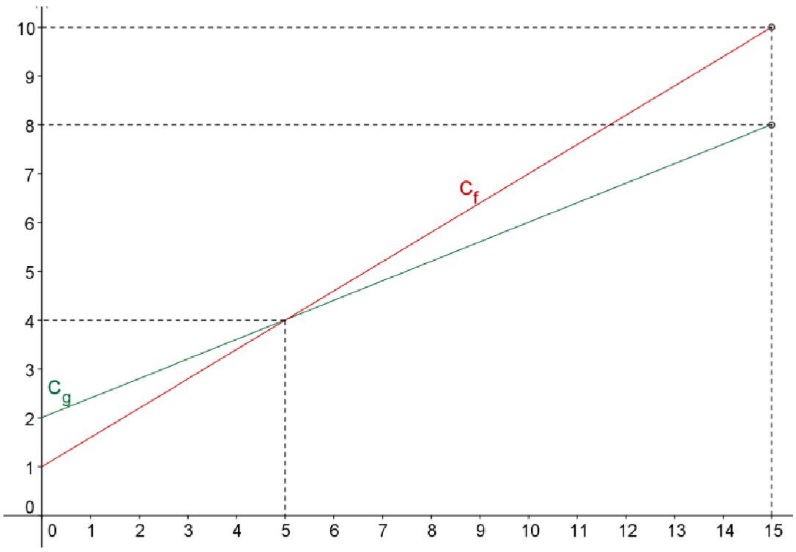
Προσοχή! Στην (οριακή) τιμή $x = 15$ η συνάρτηση δεν μπορεί να την πάρει, οπότε στη γραφική παράσταση θα βάλουμε ανοικτό κυκλάκι αντί για κουκίδα.

Για τη συνάρτηση g έχουμε:

x	0	15
y	1	8

Για $x = 15$ έχουμε $y = 0,4 + 2 = 6 + 2 = 8$.

Προσοχή! Στην (οριακή) τιμή $x = 15$ η συνάρτηση δεν μπορεί να την πάρει, οπότε στη γραφική παράσταση θα βάλουμε ανοικτό κυκλάκι αντί για κουκίδα.



Από τις γραφικές παραστάσεις των δυο συναρτήσεων παρατηρούμε ότι η εταιρεία RED που αντιστοιχεί η γραφική παράσταση της $(f(x))$ είναι οικονομικότερη για διαδρομές μικρότερες των 5 km διότι, για $0 \le x < 5$ ισχύει ότι $f(x) < g(x)$.

(η C_f είναι κάτω από τη C_g)

δ) ***Σχόλιο***

Για να λυθεί αυτό το ερώτημα θεωρούμε ότι οι διαδρομές των δυο πελατών είναι μικρότερες των 15 χιλιομέτρων , ώστε να ισχύουν τα δεδομένα της άσκησης.

Αν ο πελάτης Β μετακινηθεί α km (με $0 \le \alpha < 12$) τότε θα πληρώσει $f(a) = 1 + 0,6\alpha$ €

Ο πελάτης Α θα μετακινηθεί προφανώς $(\alpha + 3)$km οπότε το ποσό που θα πληρώσει είναι $f(\alpha + 3) = 1 + 0,6\,(\alpha + 3) = 1 + 0,6\alpha + 1,8 = (1 + 0,6\alpha) + 1,8 = f(\alpha) + 1,8$ €

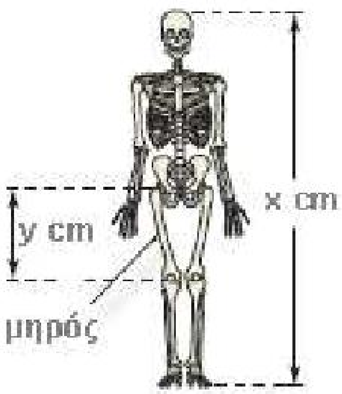
Συνεπώς ο πελάτης Α θα πληρώσει $1,8$ € περισσότερα από τον πελάτη Β.

Β΄ τρόπος
Αφού οι δυο πελάτες χρησιμοποιούν την ίδια εταιρεία τότε η διαφορά των χρημάτων που θα πληρώσει ο α είναι: 0,4 επί τα επιπλέον χιλιόμετρα που θα διανύσει, δηλ. $0,6\cdot 3=1,8$

ΑΣΚΗΣΗ 11 (4_7502)
Οι ανθρωπολόγοι για να προσεγγίσουν το ύψος ενός ενήλικα, χρησιμοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις που παριστάνουν τη σχέση μεταξύ του μήκους y (σε cm) οστού του μηρού και του ύψους x (σε cm) του ενήλικα ανάλογα με το φύλο του:

Γυναίκα: $y=0,43x-26$

Άνδρας: $y=0,45x-31$



α) Ένας ανθρωπολόγος ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους $38,5$ cm που ανήκει σε γυναίκα. Να υπολογίσετε το ύψος της γυναίκας.

(Μονάδες 8)

β) Ο ανθρωπολόγος βρίσκει μεμονωμένα οστά χεριού, τα οποία εκτιμά ότι ανήκουν σε άντρα ύψους περίπου 164 cm. Λίγα μέτρα πιο κάτω, ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους $42,8$ cm που ανήκει σε άντρα. Είναι πιθανόν το μηριαίο οστό και τα οστά χεριού να προέρχονται από το ίδιο άτομο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν μπορεί ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ
α) Επειδή μιλάμε για μήκη θα πρέπει x > 0 και y > 0, επομένως θα πρέπει:

$$y=0,43x-26>0 \Leftrightarrow x>\frac{2600}{43} \text{ για τις γυναίκες}$$

$$y=0,45x-31>0 \Leftrightarrow x>\frac{3100}{45} \text{ για τους άντρες}$$

Τώρα στο τύπο που δίνει το ύψος της γυναίκας όπου $y = 38,5$ cm έχουμε

$38,5 = 0,43 \cdot x - 26 \Leftrightarrow 0,43 \cdot x = 64,5 \Leftrightarrow \boxed{x = 150}$,

άρα το ύψος της γυναίκας είναι 150 cm

β) Αν το μηριαίο οστό των $42,8$ cm ανήκει σε άντρα ύψους 164 cm, θα πρέπει αντικαθιστώντας τις τιμές στον τύπο της συνάρτησης που αναφέρεται στους άντρες, η συνάρτηση να επαληθεύεται.

Έχουμε λοιπόν:

$$y = 0.45x - 31 \overset{\substack{y=42,8\text{ cm} \\ x=164\text{ cm}}}{\Rightarrow} 42,8 = 0,45 \cdot 164 - 31 \Leftrightarrow 42,8 = 73,8 - 31 \Leftrightarrow 42,8 = 42,8$$

(που ισχύει).

Επομένως το μηριαίο οστό και τα οστά χεριού προέρχονται από το ίδιο άτομο.

γ) Αν ένας άντρας και μια γυναίκα ίσου ύψους είχαν ίσα μηριαία οστά, τότε θα έπρεπε:

$$0,43x - 26 = 0,45x - 31 \Leftrightarrow 0,02x = 5 \Leftrightarrow x = 250$$

Αν λοιπόν, ένας άντρας και μια γυναίκα ίσου ύψους είχαν ίσα μηριαία οστά, τότε θα έπρεπε να είχαν ύψος 250 cm, πράγμα το οποίο δεν είναι δυνατόν να συμβεί στην πραγματικότητα!

Άρα δεν μπορεί ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους.

ΑΣΚΗΣΗ 12 (4_7517)

Δυο φίλοι αποφασίζουν να συνεταιριστούν και ανοίγουν μια επιχείρηση που γεμίζει τόνερ (toner) για φωτοτυπικά μηχανήματα. Τα πάγια μηνιαία έξοδα της εταιρείας ανέρχονται στο ποσό των 6.500 ευρώ (για ενοίκιο, παροχές, μισθούς, φόρους κ.α). Το κόστος γεμίσματος ενός τόνερ είναι 15 ευρώ, η δε τιμή πώλησης του ενός τόνερ καθορίζεται σε 25 ευρώ.

α) Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει το μηνιαίο κόστος Κ(ν) της επιχείρησης, αν γεμίζει ν τόνερ το μήνα.

Μονάδες 5

β) Να γράψετε μια σχέση που να εκφράζει τα μηνιαία έσοδα Ε(ν) της επιχείρησης από την πώληση ν αριθμού τόνερ το μήνα.

Μονάδες 5

γ) Να βρείτε πόσα τόνερ πρέπει να πωλούνται κάθε μήνα ώστε η επιχείρηση:

i) να μην έχει ζημιά.

Μονάδες 7

ii) να έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ.

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

α) Το μηνιαίο κόστος Κ(ν) της επιχείρησης, αν γεμίζει ν τόνερ τον μήνα, προκύπτει ως εξής:

μηνιαίο κόστος = (σταθερό κόστος) + (μεταβλητό κόστος)

• Το σταθερό κόστος είναι τα πάγια μηνιαία έξοδα της εταιρείας που ανέρχονται στο ποσό των 6.500 ευρώ.

• Το μεταβλητό κόστος της εταιρείας είναι το κόστος γεμίσματος ενός τόνερ επί το πλήθος των τόνερ που γεμίζει το μήνα, οπότε το μεταβλητό κόστος είναι 15ν ευρώ το μήνα.

Επομένως, το μηνιαίο κόστος είναι: Κ(ν)=6500+15ν ευρώ τον μήνα

β) Τα μηνιαία έσοδα Ε(ν) της επιχείρησης από την πώληση ν αριθμού τόνερ τον μήνα είναι η τιμή πώλησης ενός τόνερ επί το πλήθος πώλησης των τόνερ τον μήνα, δηλαδή Ε(ν)=25ν ευρώ τον μήνα.

γ) i) Για να μην έχει ζημιά η επιχείρηση, πρέπει τα μηνιαία έσοδά της να είναι μεγαλύτερα ή ίσα με τα μηνιαία έξοδά της, δηλαδή πρέπει:

$K(\nu) \geq E(\nu) \Leftrightarrow 6500+15\nu \geq 25\nu \Leftrightarrow 10\nu \geq 6500 \Leftrightarrow \nu \geq 650$ τόνερ τον μήνα.

Επομένως, πρέπει να πωλούνται τουλάχιστον 650 τόνερ κάθε μήνα.

ii) Το κέρδος της επιχείρησης P(ν) από την πώληση ν τόνερ τον μήνα, προκύπτει ως εξής:

P(ν) = (μηνιαία έσοδα) − (μηνιαία έξοδα)

$= E(\nu)-K(\nu) = 25\nu - 15\nu - 6500$

$= 10\nu-6500$ ευρώ ανά μήνα

Το μηνιαίο κέρδος είναι τουλάχιστον 500 ευρώ τον μήνα όταν

$P(\nu)\geq 500 \Leftrightarrow 10\nu-6500\geq 500 \Leftrightarrow 10\nu\geq 7000 \Leftrightarrow \nu\geq 700$ τόνερ τον μήνα.

Επομένως, η επιχείρηση πρέπει να πωλήσει τουλάχιστον 700 τόνερ τον μήνα, ώστε τα μηνιαία κέρδη της επιχείρησης να είναι τουλάχιστον 500 ευρώ τον μήνα.

ΑΣΚΗΣΗ 13 (4_8448)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{|2-x|}$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

Μονάδες 5

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x)=\begin{cases} x-3 & , x>2 \\ -x+3, & x<2 \end{cases}$

Μονάδες 7

γ) Να γίνει η γραφική παράσταση της f και να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Μονάδες 8

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\leq 0$

Μονάδες 5

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) Πρέπει: $|2-x|\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$, άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το

$$A=\mathbb{R}-\{2\}=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$$

β) Το τριώνυμο x^2-5x+6 έχει άθροισμα $-\dfrac{\beta}{\alpha}=5$ και γινόμενο $\dfrac{\gamma}{\alpha}=6$, άρα οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι αριθμοί 2 και 3.

Επομένως,

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

- Για $x>2$ τότε, $2-x<0$ άρα $|2-x|=-(2-x)$, οπότε

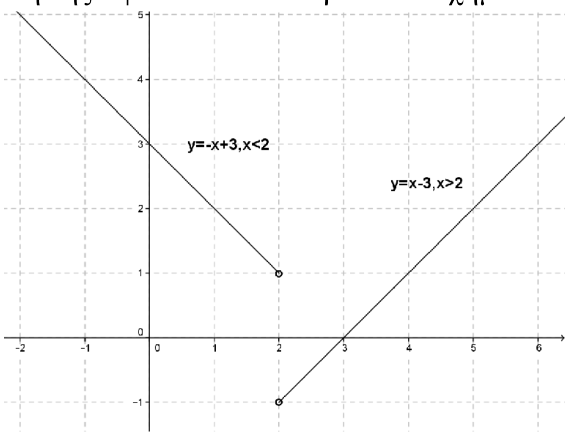
$$f(x)=\frac{x^2-5x+6}{-(2-x)}=\frac{(x-2)(x-3)}{x-2}=x-3$$

- Για $x<2$ τότε, $2-x>0$ άρα $|2-x|=2-x$, οπότε

$$f(x)=\frac{x^2-5x+6}{2-x}=\frac{(x-2)(x-3)}{-(x-2)}=-(x-3)=-x+3$$

δηλαδή $f(x)=\begin{cases} x-3 & , \ x>2 \\ -x+3, & x<2 \end{cases}$

γ) Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Η C_f τέμνει τον άξονα y΄y για x = 0, $f(0)=-0+3=3$, άρα σημείο τομής με τον άξονα $y'y$ είναι το $(0,3)$.

Η C_f τέμνει τον άξονα x΄x για y = 0,

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x+6}{|2-x|}=0 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow \{x=2 \ \text{ή} \ x=3\}.$$

Προφανώς θα απορρίψουμε τη λύση $x=2$, άρα το μοναδικό σημείο τομής με τον άξονα $x'x$ είναι το $(3,0)$.

δ) Έχουμε,

$$f(x)\le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x+6}{|2-x|}\le 0 \Leftrightarrow \left\{\left(x^2-5x+6\right)\le 0 \text{ αφού } |2-x|>0 \text{ για } x\in R-\{2\}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{(x-2)(x-3)\le 0 \;\; \text{για } x\in R-\{2\}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{(x-2)(x-3)\le 0 \;\; \text{για } x\in R-\{2\}\right\} \Leftrightarrow x\in[2,3]$$

ΑΣΚΗΣΗ 14 (4_10774)

Μια μικρή εταιρεία πουλάει βιολογικό ελαιόλαδο στο διαδίκτυο. Στο παρακάτω σχήμα, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης που περιγράφει τα έξοδα $K(x)$ και τα έσοδα $E(x)$ από την πώληση x λίτρων λαδιού σε ένα μήνα.

α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών και να ερμηνεύσετε τη σημασία του.

Μονάδες 6

β) Ποια είναι τα αρχικά (πάγια) έξοδα της εταιρείας;

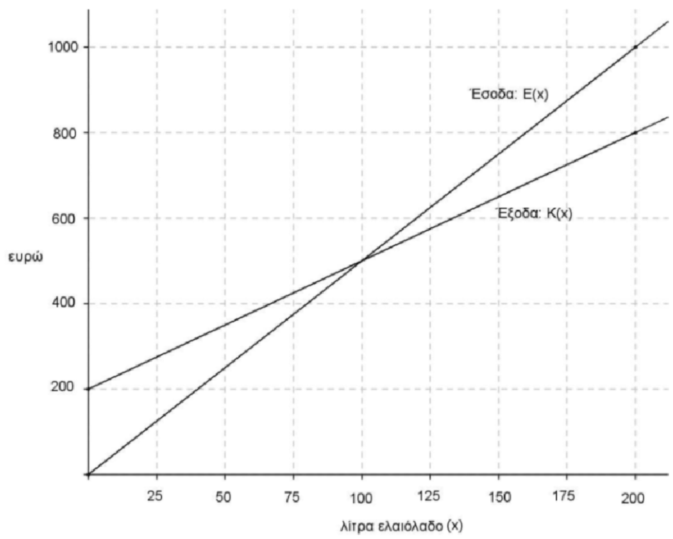
Μονάδες 5

γ) Πόσα λίτρα ελαιόλαδο πρέπει να πουλήσει η εταιρεία για να μην έχει ζημιά;

Μονάδες 6

δ) Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων $K(x)$ και $E(x)$ και να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος (γ).

Μονάδες 8



ΛΥΣΗ

α) Από το σχήμα βλέπουμε ότι οι δύο ευθείες τέμνονται στο σημείο $(100,500)$, δηλαδή αν η εταιρεία πουλήσει 100 λίτρα ελαιόλαδο, τότε έσοδα και έξοδα είναι ίσα με 500 ευρώ, δηλαδή η εταιρεία έχει κέρδος μηδέν.

β) Η ευθεία που απεικονίζει τα έξοδα της εταιρείας τέμνει τον κατακόρυφο άξονα στο σημείο με τεταγμένη 200, πράγμα που σημαίνει ότι τα πάγια έξοδα της εταιρείας (αυτά δηλαδή που αντιστοιχούν σε πώληση $x=0$ λίτρων ελαιολάδου) είναι 200 ευρώ.

γ) Από το σχήμα διαπιστώνουμε ότι η ευθεία των εσόδων βρίσκεται πάνω από την ευθεία των εξόδων (και άρα τα έσοδα της εταιρείας είναι περισσότερα από τα έξοδά της) για όλα τα σημεία από το σημείο τομής των δύο ευθειών και προς τα δεξιά, πράγμα που σημαίνει ότι για να μην έχει η εταιρεία ζημιά θα πρέπει οι πωλήσεις της να είναι τουλάχιστον 100 λίτρα ελαιόλαδο.

δ) Η ευθεία των εσόδων διέρχεται από την αρχή των αξόνων, άρα είναι της μορφής $y=\lambda x$. Επιπλέον διέρχεται και από το σημείο $(100,500)$, άρα πρέπει να ισχύει: $500=\lambda\cdot 100 \Leftrightarrow \lambda=5$, άρα η εξίσωση της ευθείας είναι η $y=5x$, και είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $E(x)=5x$ που υπολογίζει τα έσοδα της εταιρείας από την πώληση x λίτρων ελαιολάδου.

Η ευθεία των εξόδων διέρχεται από τα σημεία $(0,200)$ και $(100,500)$ άρα θα είναι της μορφής $y=\alpha x+\beta$ και θα ισχύουν:

$$\begin{cases}200=\alpha\cdot 0+\beta\\ 500=\alpha\cdot 100+\beta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta=200\\ 500=\alpha\cdot 100+200\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta=200\\ 100\alpha=300\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=3\\ \beta=200\end{cases}$$

άρα η ευθεία των εξόδων έχει εξίσωση $y=3x+200$ και είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $K(x)=3x+200$ που υπολογίζει τα έξοδα της εταιρείας από την πώληση x λίτρων ελαιολάδου.

Για να μην έχει η εταιρεία ζημιά πρέπει:

$$E(x)\geq K(x) \Leftrightarrow 5x\geq 3x+200 \Leftrightarrow 5x-3x\geq 200 \Leftrightarrow 2x\geq 200 \Leftrightarrow x\geq 100,$$

συνεπώς επαληθεύουμε και αλγεβρικά το εύρημα του ερωτήματος (γ), όπου είχαμε βρει ότι για να μην έχει η εταιρεία ζημιά θα πρέπει οι πωλήσεις της να είναι τουλάχιστον 100 λίτρα ελαιολάδου.

ΑΣΚΗΣΗ 15 (4_13155)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=4x+2$ και $g(x)=x^2-9$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης *g* με τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 6

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία $(3,0)$ και $(-3,0)$

Μονάδες 4

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω σε κάποιον από τους άξονες.

Μονάδες 8

δ) Να βρείτε συνάρτηση h της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία, διέρχεται από το $A(0,3)$ και τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημείο του ημιάξονα Ox.

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

α) Για να τέμνει η γραφική παράσταση της g τον άξονα x΄x θα πρέπει: $g(x)=0$ δηλ.

θα πρέπει: $x^2-9=0 \Leftrightarrow (x-3)\cdot(x+3)=0$ απ' όπου έχουμε : $\boxed{x=-3}$ ή $\boxed{x=3}$

Επομένως τα σημεία τομής με τον άξονα x΄x είναι: $(3,0)$ και $(-3,0)$

β) Εξετάζουμε αν ισχύουν οι σχέσεις: $f(-3)=0$ ή $f(3)=0$

$f(-3)=4(-3)+2=-10\neq 0$, άρα δε διέρχεται η f από το σημείο $(-3,0)$

$f(3)=4\cdot 3+2=14\neq 0$, άρα δε διέρχεται η f από το σημείο $(3,0)$

γ) Αν είχαν κοινό σημείο πάνω στον άξονα y'y θα έπρεπε να ισχύει: $f(0)=g(0)$

$4\cdot 0+2=0^2-9 \Leftrightarrow 2=-9$ αδύνατο , άρα δεν τέμνονται πάνω στον y'y.

Αν είχαν κοινό σημείο πάνω στον άξονα x΄x θα έπρεπε να ισχύει: $f(x)=g(x)=0$

Από τα ερωτήματα α) και β) έχουμε ήδη δείξει πως τα σημεία που η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα x'x δεν είναι σημεία της γραφικής παράστασης της f.

δ) Αφού η γραφική παράσταση της h είναι ευθεία, ψάχνουμε εξίσωση της μορφής :

$h(x)=\alpha\cdot x+\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$, αφού διέρχεται από το σημείο $A(0,3)$ θα ισχύει η σχέση:

$h(0)=3\Rightarrow \alpha\cdot 0+\beta=3\Rightarrow \boxed{\beta=3}$ και αφού τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημείο του ημιάξονα Ox , αυτό θα είναι το σημείο $(3,0)$.

Επομένως θα πρέπει να ισχύει:

$$h(3)=0\Rightarrow \alpha\cdot 3+3=0\Rightarrow 3\alpha=-3\Rightarrow \boxed{\alpha=-1}$$

Άρα $h(x)=-x+3$ η συνάρτηση που ψάχναμε.

Σχόλιο για το β ερώτημα: Η σωστή διατύπωση είναι: «Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x σε κάποιο από τα σημεία $(3,0)$ και $(-3,0)$ *»*

ΑΣΚΗΣΗ 16 (4_13158)

Δύο φίλοι αποφάσισαν να κάνουν το χόμπι τους δουλειά. Τους άρεσε να ζωγραφίζουν μπλουζάκια και έστησαν μια μικρή επιχείρηση για να πουλήσουν μέσω διαδικτύου.
Σε διάστημα ενός μηνός τα έξοδα κατασκευής (σε ευρώ) για x μπλουζάκια δινόταν

από τη συνάρτηση: $K(x) = 12,5x + 120$ και τα έσοδα από την πώλησή τους (σε ευρώ), από τη συνάρτηση: $E(x) = 15,5x$

α) Αν η επιχείρηση κάποιο μήνα δεν κατασκευάσει μπλουζάκια, έχει έξοδα;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 6

β) Τι εκφράζει ο αριθμός 12,5 και τι ο αριθμός 15,5 στο πλαίσιο του προβλήματος;

Μονάδες 4

γ) Να βρείτε πόσα μπλουζάκια πρέπει να πουλήσουν ώστε να έχουν έσοδα όσα και τα έξοδα (δηλαδή να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση)

Μονάδες 6

δ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια θα έχουν κέρδος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) Αν η επιχείρηση κάποιο μήνα δεν κατασκευάσει μπλουζάκια, η τιμή της μεταβλητής x μπλουζάκια θα είναι 0.
Οπότε, $K(0) = 12,5 \cdot 0 + 120 = 120$ ευρώ, τα έξοδα, αν η επιχείρηση κάποιο μήνα δεν κατασκευάσει μπλουζάκια.

β) Ο αριθμός 12,5 εκφράζει την τιμή κόστους καθεμιάς μπλούζας.
Ο αριθμός 15,5 εκφράζει την τιμή πώλησης καθεμιάς μπλούζας.

γ) Θα πρέπει να είναι το ποσό των εσόδων να είναι ίσο με το ποσό των εξόδων, οπότε:

$$K(x) = E(x) \Leftrightarrow 12,5x + 120 = 15,5x \Leftrightarrow 12,5x - 15,5x = -120 \Leftrightarrow -3x = -120 \Leftrightarrow x = 40$$

Άρα, η επιχείρηση θα πρέπει να πωλήσει 40 μπλουζάκια.

δ) Για x = 60 μπλουζάκια, είναι:

Έξοδα:

$$K(60) = 12,5 \cdot 60 + 120 = 12,5 \cdot 60 + 120 = 750 + 120 = 870 \text{ ευρώ}$$

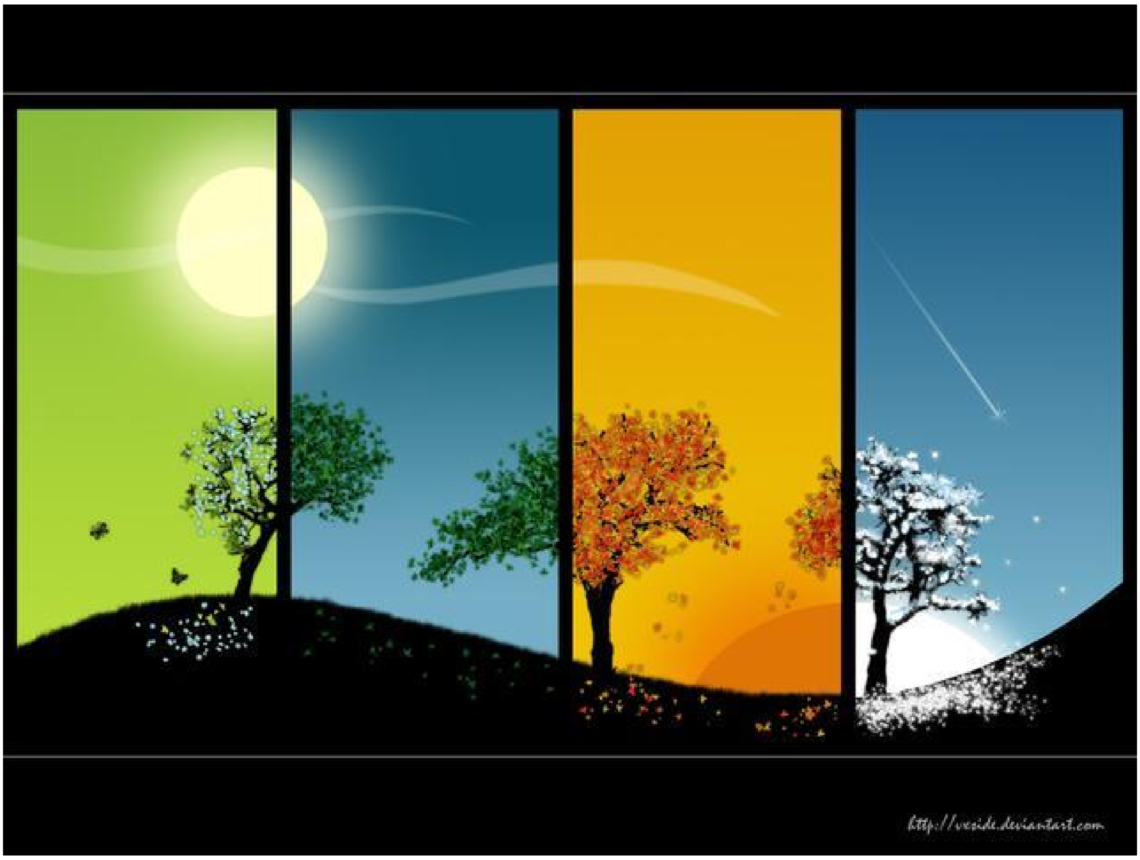
Έσοδα:

$$E(60) = 15,5 \cdot 60 = 930 \text{ ευρώ}$$

Επειδή το κέρδος είναι, αν αφαιρέσουμε από τα έσοδα, τα έξοδα, άρα το κέρδος είναι: 930 – 870 = 60 ευρώ

Άλγεβρα Α΄ Λυκείου

Επαναληπτικές Ασκήσεις



Συνδυαστικές ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 1 (2_1282)

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $3x^2-2x-1$

Μονάδες 8

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες έχει νόημα η παράσταση:

$$A(x)=\frac{x-1}{3x^2-2x-1}$$

και στη συνέχεια να την απλοποιήσετε.

Μονάδες 9

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $|A(x)|=1$

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

α) Η παραγοντοποίηση του τριωνύμου με $\Delta>0$ γίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)}$$

Το τριώνυμο $3x^2-2x-1$ έχει

$$\Delta=(-2)^2-4\cdot3\cdot(-1)=16>0$$

και ρίζες

$$x_1=1 \text{ και } x_2=-\frac{1}{3}.$$

Επομένως:

$$3x^2-2x-1=3\cdot(x-1)\cdot\left(x-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)=(x-1)\cdot(3x+1)$$

β) Για να ορίζεται ένα κλάσμα θα πρέπει ο παρονομαστής να είναι διάφορος του 0.

Οπότε πρέπει: $3x^2-2x-1\neq0$ άρα από το (α) ερώτημα $x\neq1$ και $x\neq-\frac{1}{3}$

Είναι:

$$A(x)=\frac{x-1}{3x^2-2x-1}=\frac{x-1}{(x-1)\cdot(3x+1)}=\frac{\overset{1}{\cancel{x-1}}}{\cancel{(x-1)}\cdot(3x+1)}=\frac{1}{3x+1}$$

γ) Είναι:

$$|A(x)|=1\Leftrightarrow\left|\frac{1}{3x+1}\right|=1\overset{\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|}}{\Leftrightarrow}\frac{1}{|3x+1|}=1\Leftrightarrow|3x+1|=1 \quad ①$$

Με τη βοήθεια της ιδιότητας $|x|=\rho\Leftrightarrow x=-\rho$ ή $x=\rho$ έχουμε:

$$|3x+1|=1\Leftrightarrow 3x+1=-1 \text{ ή } 3x+1=1 \Leftrightarrow 3x=-2 \text{ ή } 3x=0 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{3} \text{ ή } x=0$$

ΑΣΚΗΣΗ 2 (2_1283)

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο x^2+2x-3

Μονάδες 8

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x-1}$$

και στη συνέχεια να απλοποιήσετε τον τύπο της.

Μονάδες 9

γ) Να παραστήσετε γραφικά την παραπάνω συνάρτηση

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

α) Η παραγοντοποίηση του τριωνύμου με $\Delta>0$ γίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)}$$

Το τριώνυμο x^2+2x-3 έχει

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=2^2-4\cdot1\cdot(-3)=16>0$$

και ρίζες

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\Rightarrow x_1=1 \text{ και } x_2=-3$$

Επομένως:

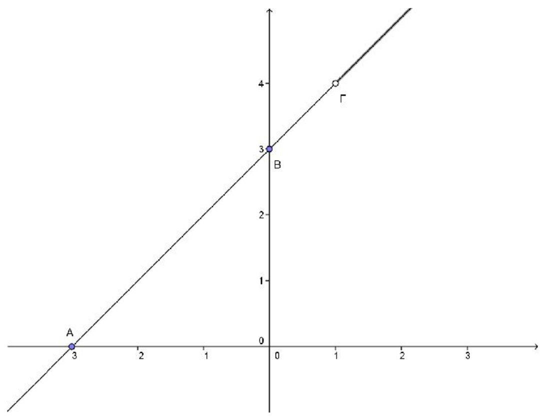
$$x^2+2x-3=1\cdot(x-1)\cdot\left(x-(-3)\right)=(x-1)\cdot\left(x+3\right)$$

β) Για να ορίζεται ένα κλάσμα θα πρέπει ο παρονομαστής να είναι διάφορος του 0.
Οπότε πρέπει: $x-1\neq0$ άρα $x\neq1$, άρα το πεδίο ορισμού είναι $\boxed{A=R-\{1\}}$

Είναι:

$$f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\frac{(x-1)\cdot(x+3)}{x-1}=\frac{\cancel{(x-1)}\cdot(x+3)}{\underset{1}{\cancel{x-1}}}=x+3$$

γ) Η γραφική παράσταση της $f(x)=x+3$ είναι ευθεία γραμμή με εξίσωση $y=x+3$ εκτός το σημείο Γ(1, 4), που έχει εξαιρεθεί, από το πεδίο ορισμού της. Η ευθεία αυτή τέμνει: τον άξονα x΄x στο σημείο $A(-3,0)$, αφού για y = 0 βρίσκουμε x = –3 και τον άξονα y΄y στο σημείο $B(0,3)$, αφού για x = 0 βρίσκουμε y = 3.



ΑΣΚΗΣΗ 3 (2_1288)

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 10x + 21 < 0$

Μονάδες 12

β) Δίνεται η παράσταση: $A = |x-3| + |x^2 - 10x + 21|$

i) Για $3 < x < 7$, να δείξετε ότι: $A = -x^2 + 11x - 24$

Μονάδες 8

ii) Να βρείτε τις τιμές του $x \in (3, 7)$, για τις οποίες ισχύει $A = 6$.

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 21 = 100 - 84 = 16 > 0$$

και ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Rightarrow x_1 = 3 \quad \text{και} \quad x_2 = 7$$

Το πρόσημό του φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		3		7		$+\infty$
$x^2 - 10x + 21$		+	0	−	0	+	

Από τον πίνακα φαίνεται ότι η ανίσωση $x^2 - 10x + 21 < 0$ έχει λύσεις τα $x \in R$ για τα οποία ισχύει $3 < x < 7$, δηλαδή τα $x \in (3, 7)$

β) i) Για $3 < x \Leftrightarrow x - 3 > 0$ οπότε είναι:

$$|x-3| = x - 3$$

Για $3 < x < 7$ από το (α) ερώτημα είναι $x^2 - 10x + 21 < 0$, οπότε είναι:

$$|x^2 - 10x + 21| = -(x^2 - 10x + 21)$$

Άρα,

$$A = |x-3| + |x^2 - 10x + 21| = (x-3) + \left[-\left(x^2 - 10x + 21\right)\right] = -x^2 + 11x - 24$$

Οπότε,

$$\boxed{A = -x^2 + 11x - 24}$$

ii) Είναι:

$$A = 6 \Leftrightarrow -x^2 + 11x - 24 = 6 \Leftrightarrow -x^2 + 11x - 30 = 0$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 11^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-30) = 121 - 120 = 1 > 0$$

και ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Rightarrow x_1 = 5 \quad \text{και} \quad x_2 = 6$$

ΑΣΚΗΣΗ 4 (4_4545)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3}$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.

(Μονάδες 6)

2. Να αποδείξετε ότι για κάθε x ψA ισχύει: $f(x) = |x| - 2$

(Μονάδες 9)

3. Για x ψA , να λύσετε την εξίσωση: $(f(x)+2)^2 - 4f(x) - 5 = 0$

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

1. Για να ορίζεται η f πρέπει ο παρονομαστής να είναι διάφορος του 0, δηλ. πρέπει

$$|x| - 3 \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq 3 \Leftrightarrow x \neq \pm 3$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το

$$A = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty) \text{ ή } A = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$$

2. Η συνάρτηση f ισοδύναμα γράφεται $f(x) = \dfrac{|x|^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3}$, $x \in A$

Αν $|x| = \omega \geq 0$ τότε

$$|x|^2 - 5|x| + 6 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 - 5\omega + 6 = 0$$

με

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1 > 0$$

και έχει ρίζες

$$\omega = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow \omega = 3 \text{ ή } \omega = 2$$

Έτσι,

$$\omega^2 - 5\omega + 6 = (\omega - 3)(\omega - 2) \overset{|x|=\omega}{=} (|x| - 3)(|x| - 2)$$

Άρα

$$f(x) = \frac{|x|^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3} = \frac{(|x| - 3)(|x| - 2)}{|x| - 3} = |x| - 2 \text{ και } x \in A$$

3. Έχουμε,

$$(f(x)+2)^2 - 4f(x) - 5 = 0 \overset{\text{ερωτ.2}}{\Leftrightarrow} (|x| - 2 + 2)^2 - 4(|x| - 2) - 5 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 - 4|x| + 3 = 0,$$

$x \in A$ και θεωρούμε $|x| = \omega \geq 0$, οπότε η τελευταία εξίσωση ισοδύναμα,

$$\omega^2 - 4\omega + 3 = 0$$

με

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 > 0$$

και έχει ρίζες

$$\omega=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{4}}{2\cdot 1}=\frac{4\pm 2}{2}\Rightarrow \omega=3 \text{ ή } \omega=1$$

Αν $\omega=3\Rightarrow |x|=3\notin A$ και απορρίπτεται.

Αν $\omega=1\Rightarrow |x|=1\Leftrightarrow x=\pm 1$ δεκτές ρίζες.

ΑΣΚΗΣΗ 5 (4_4647)

Για δεδομένο $\lambda\in\mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=(\lambda+1)x^2-(\lambda+1)x+2$, με $x\in\mathbb{R}$.

1. Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(0,2)$.

(Μονάδες 3)

2. Για $\lambda=-1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 4)

3. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(2,0)$, να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ και σε άλλο σημείο.

(Μονάδες 8)

4. Για $\lambda=1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

1. Η συνάρτηση f ορίζεται στο $A_f=\mathbb{R}$ και η C_f θα διέρχεται από το σημείο $A(0,2)$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ αν $f(2)=0$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$

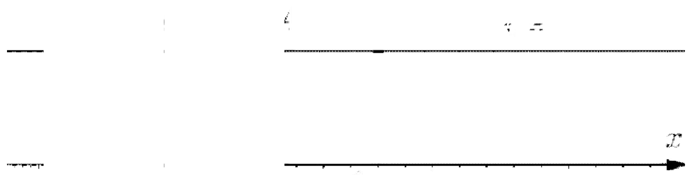
Και είναι

$$f(0)=(\lambda+1)\cdot 0^2-(\lambda+1)\cdot 0+2=2 \text{ για κάθε } \lambda\in\mathbb{R}$$

2. Για $\lambda=-1$ έχουμε ότι

$$f(x)=(-1+1)\cdot x^2-(-1+1)\cdot x+2=2$$

οπότε η γραφική παράσταση της f είναι μια ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ που διέρχεται από το σημείο $A(0,2)$ και η γραφική της παράσταση είναι,



3. Αφού η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(2,0)$ ισχύει $f(2)=0$ και ισοδύναμα είναι,

$$(\lambda+1)\cdot 2^2-(\lambda+1)\cdot 2+2=0 \Leftrightarrow 4\lambda+4-2\lambda-2+2=0 \Leftrightarrow 2\lambda=-4 \Leftrightarrow \lambda=-2$$

Για $\lambda=-2$ ο τύπος της συνάρτησης γίνεται,

$$f(x)=(-2+1)x^2-(-2+1)x+2 \Leftrightarrow f(x)=-x^2+x+2 \text{ με } x\in\mathbb{R}$$

Η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ αν

$$f(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+x+2=0$$

και είναι

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1^2-4\cdot(-1)\cdot 2=9$$

άρα,

$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\cdot\alpha}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2\cdot(-1)} \Rightarrow x=2 \text{ ή } x=-1$$

Άρα, η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ και στο σημείο $\Gamma(-1,0)$

4. Για $\lambda=1$ ο τύπος της συνάρτησης γίνεται,

$$f(x)=(1+1)\cdot x^2-(1+1)\cdot x+2 \Leftrightarrow f(x)=2x^2-2x+2 \text{ με } x\in\mathbb{R}$$

και το τριώνυμο $2x^2-2x+2$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-2)^2-4\cdot 2\cdot 2=-4<0,$$

άρα είναι ομόσημο του α και αφού $\alpha=2>0$ είναι

$$2x^2-2x+2>0 \Leftrightarrow f(x)>0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Άρα η C_f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα x'x.

ΑΣΚΗΣΗ 6 (4_4656)

Δίνονται η συνάρτηση $f(x)=x^2+x+1, x\in\mathbb{R}$

1. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 5)

2. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$.

(Μονάδες 10)

3. Έστω $M(x,y)$ σημείο της C_f. Αν για την τετμημένη x του σημείου M ισχύει: $|2x-1|<3$, τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

1. Η συνάρτηση f ορίζεται στο $A_f = \mathbb{R}$

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ είναι αδύνατη για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Έχουμε

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2+x+1=0 \ \ (1)$$

και έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = -3 < 0$$

άρα η εξίσωση (1) είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$, άρα η C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

2. Η C_f θα βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$ στα διαστήματα που είναι λύσεις της ανίσωσης,

$$f(x) < 2x+3 \Leftrightarrow x^2+x+1 < 2x+3 \Leftrightarrow x^2-x-2<0$$

Όμως για το τριώνυμο x^2-x-2 έχουμε διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 9 > 0$$

και $\alpha = 1 > 0$ και ρίζες

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Rightarrow x = \frac{-(-1)\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1} \Rightarrow x = 2 \ \text{ ή } \ x=-1$$

οπότε έχουμε

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		+	0	−	0	+	

Άρα, $-1<x<2$ δηλαδή οι τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$ είναι τα $x \in (-1,2)$

3. Λόγω του ερωτ.2., αρκεί να δείξουμε ότι, $x \in (-1,2)$,είναι,

$$|2x-1|<3 \Leftrightarrow -3<2x-1<3 \Leftrightarrow -2<2x<4 \Leftrightarrow -1<x<2$$

δηλαδή $x \in (-1,2)$

ΑΣΚΗΣΗ 7 (4_4663)

Δίνεται η εξίσωση $(x-2)^2 = \lambda(4x-3)$ με παράμετρο $\boldsymbol{x} \in R$.

1. Να γράψετε την εξίσωση στη μορφή $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$.

(Μονάδες 5)

2.Να βρείτε για ποιές τιμές του λ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 10)

3.Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, στην περίπτωση που έχει ρίζες πραγματικές και άνισες,

i) να υπολογίσετε τα $S = x_1+x_2$ και $P = x_1\cdot x_2$.

ii) να αποδείξετε ότι η παράσταση $A=(4x_1-3)(4x_2-3)$ είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή.

(Μονάδες 10)

<u>Λύση</u>

1. Είναι:

$$(x-2)^2 = \lambda(4x-3) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 4\lambda x - 3\lambda \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 4x + 4 - 4\lambda x + 3\lambda = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4(1+\lambda)x + 4 + 3\lambda = 0,$$

η οποία είναι στη μορφή

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0$ με $\alpha = 1 \neq 0$, $\beta = -4(1+\lambda)$ και $\gamma = 4 + 3\lambda$.

2. Το τριώνυμο $x^2 - 4(1+\lambda)x + 4 + 3\lambda$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = [-4(\lambda+1)]^2 - 4\cdot(4+3\lambda) = 16(\lambda+1)^2 - 4(4+3\lambda) = 4[4(\lambda^2+2\lambda+1) - (4+3\lambda)]$$
$$= 4(4\lambda^2 + 8\lambda + 4 - 4 - 3\lambda) = 4(4\lambda^2 + 5\lambda)$$

Το τριώνυμο $4\lambda^2 + 5\lambda$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 5^2 - 4\cdot 4\cdot 0 = 25$$

και ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \text{ άρα } \lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25}}{2\cdot 4} = \frac{-5 \pm 5}{8} = \begin{cases} \dfrac{-5+5}{8} = 0 \\ \text{ή} \\ \dfrac{-5-5}{8} = -\dfrac{5}{4} \end{cases}$$

ενώ ισχύει

λ	$-\infty$	$-\frac{5}{4}$		0	$+\infty$
$4\lambda^2 + 5\lambda$	$+$	0	$-$	0	$+$

Η εξίσωση

$$x^2 - 4(1+\lambda)x + 4 + 3\lambda = 0 \quad (1),$$

έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, όταν

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 4(4\lambda^2 + 5\lambda) > 0 \Leftrightarrow \lambda < -\frac{5}{4} \text{ ή } \lambda > 0.$$

3. i) Για $\lambda < -\frac{5}{4}$ ή $\lambda > 0$ η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες και πραγματικές ρίζες x_1, x_2, με άθροισμα

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-4(1+\lambda)}{1} = 4(1+\lambda)$$

και γινόμενο

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{4+3\lambda}{1} = 4 + 3\lambda$$

ii) Για $\lambda < -\frac{5}{4}$ ή $\lambda > 0$ έχουμε ότι:

$$A = (4x_1 - 3)(4x_2 - 3) = 16x_1x_2 - 12x_1 - 12x_2 + 9 = 16x_1x_2 - 12(x_1 + x_2) + 9 = 16P - 12S + 9$$
$$= 16(4+3\lambda) - 12\cdot 4(1+\lambda) + 9 = 64 + 48\lambda - 48 - 48\lambda + 9 = 25$$

που είναι ανεξάρτητη του λ.

ΑΣΚΗΣΗ 8 (4_4679)

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\sqrt{x^2-x+\frac{\alpha}{4}}$

1. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f να είναι το σύνολο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

2. Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και να γράψετε τον τύπο της χωρίς το σύμβολο της τετραγωνικής ρίζας.

(Μονάδες 7)

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}$.

(Μονάδες 8)

<u>Λύση</u>

1. Η συνάρτηση f ορίζεται όταν $x^2-x+\frac{\alpha}{4}\geq 0$.

Για να ορίζεται η συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$, πρέπει η ανίσωση $x^2-x+\frac{\alpha}{4}\geq 0$ να ισχύει για κάθε $x\in R$, δηλαδή θα πρέπει η διακρίνουσα του τριωνύμου να είναι μη θετική.

Συνεπώς πρέπει:

$$\Delta\leq 0\Leftrightarrow(-1)^2-4\cdot 1\cdot\frac{\alpha}{4}\leq 0\Leftrightarrow 1-\alpha\leq 0\Leftrightarrow\alpha\geq 1.$$

2. i) Αν $\alpha\geq 1$, η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$, οπότε:

$$f(0)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{0^2-0+\frac{\alpha}{4}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{\alpha}{4}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\alpha}{4}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\alpha=1,\text{ που είναι δεκτή.}$$

Για $\alpha=1$, έχουμε:

$$f(x)=\sqrt{x^2-x+\frac{1}{4}}=\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}=\left|x-\frac{1}{2}\right|.$$

ii) Έχουμε,

$$f(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left|x-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ \text{ή}\ x-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=1\ \text{ή}\ x=0.$$

ΑΣΚΗΣΗ 9 (4_4861)

Μία μπάλα που εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω, αφού διαγράψει μια τροχιά, μετά από κάποιο χρόνο θα πέσει στο έδαφος. Το ύψος h (σε m) από το έδαφος, στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή t (σε sec) κατά την κίνησή της προσδιορίζεται από τη συνάρτηση

$$h(t) = -5t^2 + 10t + 1,05$$

α) Να βρείτε τις τιμές $h(0), h(1), h(2)$ και να εξηγήσετε τι παριστάνουν στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε μετά από πόσο χρόνο η μπάλα θα πέσει στο έδαφος. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι το ύψος στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή t μπορεί να προσδιοριστεί και από τον τύπο:

$$h(t) = 5[1,21 - (t-1)^2]$$ (Μονάδες 5)

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει χρονική στιγμή t_1 (σε sec) που το ύψος h της μπάλας από το έδαφος θα είναι πάνω από 6,05 m. (Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Βάζοντας στον τύπο της συνάρτησης διαδοχικά τις τιμές t=0 , t=1 και t=2 , έχουμε:

$$h(0)=1,05m\ ,\ h(1)=6,05m \text{ και } h(2)=1,05m.$$

Αυτό σημαίνει ότι τη χρονική στιγμή t=0 sec, δηλαδή τη χρονική στιγμή που η μπάλα εκτοξεύεται, αυτή βρίσκεται σε απόσταση 1,05m από το έδαφος (σημείο εκτόξευσης). Τη χρονική στιγμή t=1 sec , δηλαδή 1 sec μετά από την εκτόξευση η μπάλα βρίσκεται σε απόσταση 6,05m από το έδαφος, ενώ τη χρονική στιγμή t=2 sec , δηλαδή 2 sec μετά την εκτόξευση η μπάλα βρίσκεται σε απόσταση 1,05 m από το έδαφος , επιστρέφοντας ξανά στο σημείο εκτόξευσης.

β) Θέλουμε να βρούμε τη χρονική στιγμή t για την οποία η μπάλα απέχει από το έδαφος απόσταση ίση με 0 m.

Είναι

$$h(t)=0 \Leftrightarrow -5t^2 + 10t + 1,05 = 0$$

Η παραπάνω δευτεροβάθμια εξίσωση έχει

$$\Delta = 10^2 - 4\cdot(-5)\cdot 1,05 = 121$$

και ρίζες

$$t_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{121}}{-10} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{-10+11}{-10} = -\dfrac{1}{10} = -0,1 \\ \text{ή} \\ t_2 = \dfrac{-10-11}{-10} = \dfrac{21}{10} = 2,1 \end{cases}$$

Επειδή t>0 , δεχόμαστε την τιμή t=2,1 , δηλαδή 2,1 sec μετά την εκτόξευση η μπάλα θα έχει πέσει στο έδαφος.

γ) Εφαρμόζοντας τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου στο αρχικό τριώνυμο , έχουμε:

$$h(t) = -5t^2 + 10t + 1,05 = -5\left(t^2 - 2t - \frac{1,05}{5}\right) = -5(t^2 - 2t - 0,21) = -5(t^2 - 2t + 1 - 1 - 0,21) =$$

$$= -5\left[(t-1)^2 - 1,21\right] = 5\left[1,21 - (t-1)^2\right]$$

δ) Θα εξετάσουμε αν υπάρχει χρονική στιγμή $t_1 > 0$ τέτοια , ώστε

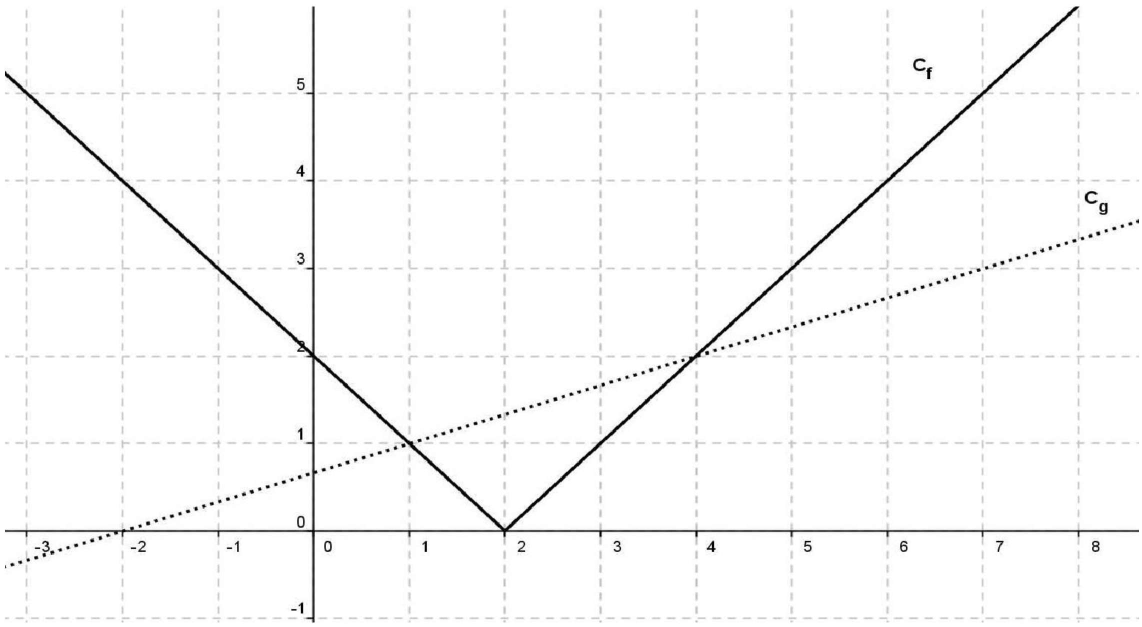
$h(t_1)>6{,}05 \Leftrightarrow 5\left[1{,}21-(t_1-1)^2\right] > 6{,}05 \Leftrightarrow 1{,}21-(t_1-1)^2 > 1{,}21 \Leftrightarrow -(t_1-1)^2 > 0 \Leftrightarrow (t_1-1)^2 < 0$,

το οποίο είναι αδύνατο. Άρα δεν υπάρχει χρονική στιγμή t_1 που το ύψος της μπάλας από το έδαφος θα είναι πάνω από 6,05 m.

ΑΣΚΗΣΗ 10 (4_4886)

Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με

$$f(x) = |x-2| \text{ και } g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3},\ x \in \mathbb{R}$$



α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των C_f και C_g

(Μονάδες 6)

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα α).

(Μονάδες 8)

γ) Με την βοήθεια των γραφικών παραστάσεων, να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g

(Μονάδες 6)

δ) Με την βοήθεια του ερωτήματος γ), να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση

$$K = \sqrt{3|2-x|-(x+2)}$$

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Από το σχήμα παρατηρούμε ότι τα κοινά σημεία των C_f και C_g είναι τα $A(1,1)$ και $B(4,2)$

β) Τα σημεία τομής των C_f και C_g είναι οι λύσεις του συστήματος $\begin{cases} \psi = f(x) \\ \psi = g(x) \end{cases}$

Οπότε λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow |x-2|=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\Leftrightarrow 3|x-2|=x+2 \ \ (1)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις για την παράσταση που είναι μέσα στην απόλυτη τιμή:

● Αν $x-2\geq 0\Leftrightarrow x\geq 2$, τότε $|x-2|=x-2$ και η εξίσωση (1) ισοδύναμα γίνεται:
$3(x-2)=x+2\Leftrightarrow 3x-6=x+2\Leftrightarrow 3x-x=2+6\Leftrightarrow 2x=8\Leftrightarrow x=4$ που είναι δεκτή , αφού $4\geq 2$

● Αν $x-2<0\Leftrightarrow x<2$, τότε $|x-2|=-(x-2)=-x+2$ και η εξίσωση (1) ισοδύναμα γίνεται: $3(-x+2)=x+2\Leftrightarrow -3x+6=x+2\Leftrightarrow -3x-x=2-6\Leftrightarrow -4x=-4\Leftrightarrow x=1$
που επίσης είναι δεκτή , αφού $1<2$

Για $x=1$ σε μια από τις δύο εξισώσεις του συστήματος , έχουμε:

$$\psi=f(1)=|1-2|=|-1|=1 \ ,$$

ενώ για $x=4$ σε μια από τις δύο εξισώσεις του συστήματος, έχουμε:

$$\psi=f(4)=|4-2|=|2|=2$$

Με τη λύση του προηγούμενου συστήματος επιβεβαιώνουμε αλγεβρικά ότι τα κοινά σημεία C_f και C_g είναι τα $A(1,1)$ και $B(4,2)$

γ) Από το σχήμα παρατηρούμε ότι η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g όταν $x\in(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$

δ) Για να ορίζεται η παράσταση Κ θα πρέπει η υπόριζη ποσότητα να είναι μη αρνητική.
Δηλαδή θα πρέπει:

$3|2-x|-(x+2)\geq 0\Leftrightarrow 3|2-x|\geq x+2\Leftrightarrow 3|-(x-2)|\geq x+2\Leftrightarrow 3|x-2|\geq x+2\Leftrightarrow$

$|x-2|\geq \frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\Leftrightarrow f(x)\geq g(x)$

Άρα οι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης είναι τα διαστήματα του x για τα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g μαζί με τα σημεία τομής τους (λόγω του «ίσον»).

Οπότε η παράσταση Κ ορίζεται όταν $x\in\left(-\infty,1\right]\cup\left[4,+\infty\right)$

Μέθοδος*: Για να βρούμε τα διαστήματα του x για τα οποία η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g λύνουμε την ανίσωση $f(x)>g(x)$*
Για να βρούμε τα διαστήματα του x για τα οποία η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f βρίσκεται «κάτω» από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g λύνουμε την ανίσωση $f(x)<g(x)$

ΑΣΚΗΣΗ 11 (4_4912)

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=x^2+1$ και $g(x)=x+\alpha$, με $x\in\mathbb{R}$ και $\alpha\in\mathbb{R}$

α) Για $\alpha = 1$, να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δύο σημεία.

(Μονάδες 10)

γ) Για $\alpha > 1$, να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ομόσημες ή ετερόσημες.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Για $\alpha = 1$, ο τύπος της συνάρτησης g γίνεται: $g(x) = x + 1$

Τα σημεία τομής των C_f και C_g είναι οι λύσεις του συστήματος $\begin{cases} \psi = f(x) \\ \psi = g(x) \end{cases}$

Από το παραπάνω σύστημα προκύπτει η εξίσωση $f(x) = g(x)$

Έχουμε,

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 1 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x=1$$

Για $x = 0$ σε μια από τις δύο εξισώσεις του συστήματος , έχουμε:

$$\psi = g(0) = 0 + 1 = 1 \ ,$$

ενώ για $x = 1$ σε μια από τις δύο εξισώσεις του συστήματος, έχουμε:

$$\psi = g(1) = 1 + 1 = 2$$

Άρα τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι τα $A(0,1)$ και $B(1,2)$

β) Για να τέμνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g σε δύο σημεία θα πρέπει το σύστημα $\begin{cases} \psi = f(x) \\ \psi = g(x) \end{cases}$ να έχει δύο ακριβώς λύσεις.

Δηλαδή η εξίσωση

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 1 = x + \alpha \Leftrightarrow x^2 - x - \alpha + 1 = 0 \ (1)$$

θα πρέπει να έχει δύο ακριβώς λύσεις.

Αυτό ισχύει όταν

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 1 - 4(-\alpha + 1) > 0 \Leftrightarrow 1 + 4\alpha - 4 > 0 \Leftrightarrow 4\alpha > 3 \Leftrightarrow \alpha > \frac{3}{4}$$

γ) Για $\alpha > 1 > \frac{3}{4}$ οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία με τετμημένες x_1, x_2 που αποτελούν τις λύσεις της εξίσωσης (1) του προηγούμενου ερωτήματος.

Το γινόμενο P των ριζών μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης δίνεται από τον τύπο

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-\alpha + 1}{1} = -\alpha + 1 < 0$$

,που σημαίνει ότι οι τετμημένες x_1, x_2 των κοινών σημείων των C_f και C_g είναι ετερόσημες.

ΑΣΚΗΣΗ 12 (4_7784)

Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με $f(x) = |x-2|$ και $g(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) i) Να εκτιμήσετε τα σημεία τομής των C_f και C_g.

ii) Να εκτιμήσετε τις τιμές του x, για τις οποίες η C_f είναι κάτω από τη C_g.

Μονάδες 10

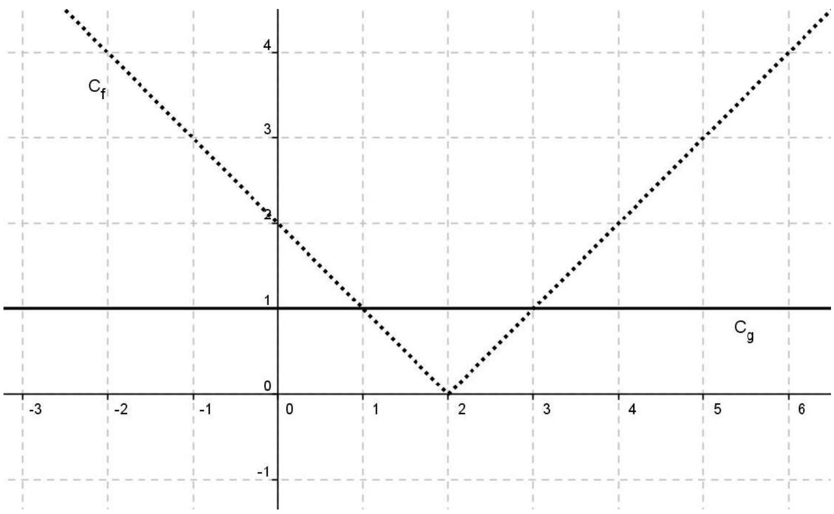
β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στο προηγούμενο ερώτημα.

Μονάδες 10

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση:

$$A = \frac{\sqrt{1-f(x)}}{f(x)}$$

Μονάδες 5



<u>ΛΥΣΗ</u>

α) i) Από το σχήμα προκύπτει ότι, οι C_f και C_g ότι τέμνονται στα σημεία

$$A(1,1)\ ,\ B(3,1).$$

ii) Ομοίως από το σχήμα η C_f είναι κάτω από την C_g για $1 < x < 3$

β) Για το i) πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = g(x)$, αφού στα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων έχουμε τις ίδιες συντεταγμένες.

Επομένως,

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow |x-2| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=1 \\ \text{ή} \\ x-2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ \text{ή} \\ x=1 \end{cases}$$

όπου προκύπτουν τα σημεία:

- Για $x = 3$ έχουμε $f(3) = g(3) = 1$
- Για $x = 1$ έχουμε $f(1) = g(1) = 1$

οπότε τα σημεία τομής των C_f και C_g είναι τα σημεία $A(1,1)$, $B(3,1)$

Για το ii) αρκεί να λύσουμε την ανίσωση $f(x) < g(x)$, έχουμε

$$|x-2| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-2 < 1 \overset{+2}{\Leftrightarrow} 1 < x < 3$$

άρα η C_f είναι κάτω από την C_g για $x \in (1,3)$

γ) Πρέπει:

- $f(x) \neq 0 \Leftrightarrow |x-2| \neq 0 \Leftrightarrow x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

  και

- $1 - f(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$.

Επομένως η παράσταση Α έχει νόημα πραγματικού αριθμού για $x \in [1,2) \cup (2,3]$

ΑΣΚΗΣΗ 13 (4_8455)

Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει:

- $|1-3\alpha| < 2$
- Η απόσταση του αριθμού β από τον αριθμό 2 είναι μικρότερη του 1.

α) Να αποδειχθεί ότι $-\dfrac{1}{3} < \alpha < 1$

Μονάδες 5

β) Να αποδειχθεί ότι $|\beta - 3\alpha - 1| < 3$

Μονάδες 10

γ) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4x^2 - 4(\beta-2)x + \beta^2}$ έχει πεδίο ορισμού όλο το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Είναι,

$$|1-3\alpha| < 2 \Leftrightarrow |3\alpha - 1| < 2 \Leftrightarrow -2 < 3\alpha - 1 < 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < \alpha < 1$$

β) Έχουμε,

$$|\beta - 2| < 1 \Rightarrow -1 < \beta - 2 < 1 \Rightarrow 1 < \beta < 3 \ (1)$$

και

$$-\frac{1}{3} < \alpha < 1 \Rightarrow 1 > -3\alpha > -3 \Rightarrow -3 < -3\alpha < 1 \ (2)$$

προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2),

$$-2 < \beta - 3\alpha < 4 \Rightarrow -3 < \beta - 3\alpha - 1 < 3 \Rightarrow |\beta - 3\alpha - 1| < 3$$

γ) Η διακρίνουσα του τριωνύμου $4x^2 - 4(\beta-2)x + \beta^2$ είναι

$$\begin{aligned}\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma &= 16(\beta-2)^2-16\beta^2\\ &=16\left[(\beta-2)^2-\beta^2\right]\\ &=16(\beta-2-\beta)(\beta-2+\beta)\\ &=-64(\beta-1)<0\end{aligned}$$

γιατί

$$|\beta-2|<1 \Leftrightarrow 1<\beta<3 \text{ άρα } \beta>1 \Rightarrow \beta-1>0$$

Επομένως, $\Delta<0$ άρα το τριώνυμο είναι πάντα ομόσημο του συντελεστή του x^2, δηλαδή θετικό για κάθε πραγματικό αριθμό x, αφού $\alpha=4>0$.

Β΄ τρόπος επίλυσης για το β) ερώτημα

Η δεύτερη συνθήκη δίνει $|\beta-2|<1$.

Από την ιδιότητα των απολύτων τιμών $|x|+|y|\geq|x+y|$ παίρνουμε,

$$|\beta-3\alpha-1|=|(\beta-2)+(1-3\alpha)|\leq|\beta-2|+|1-3\alpha|<1+2=3.$$