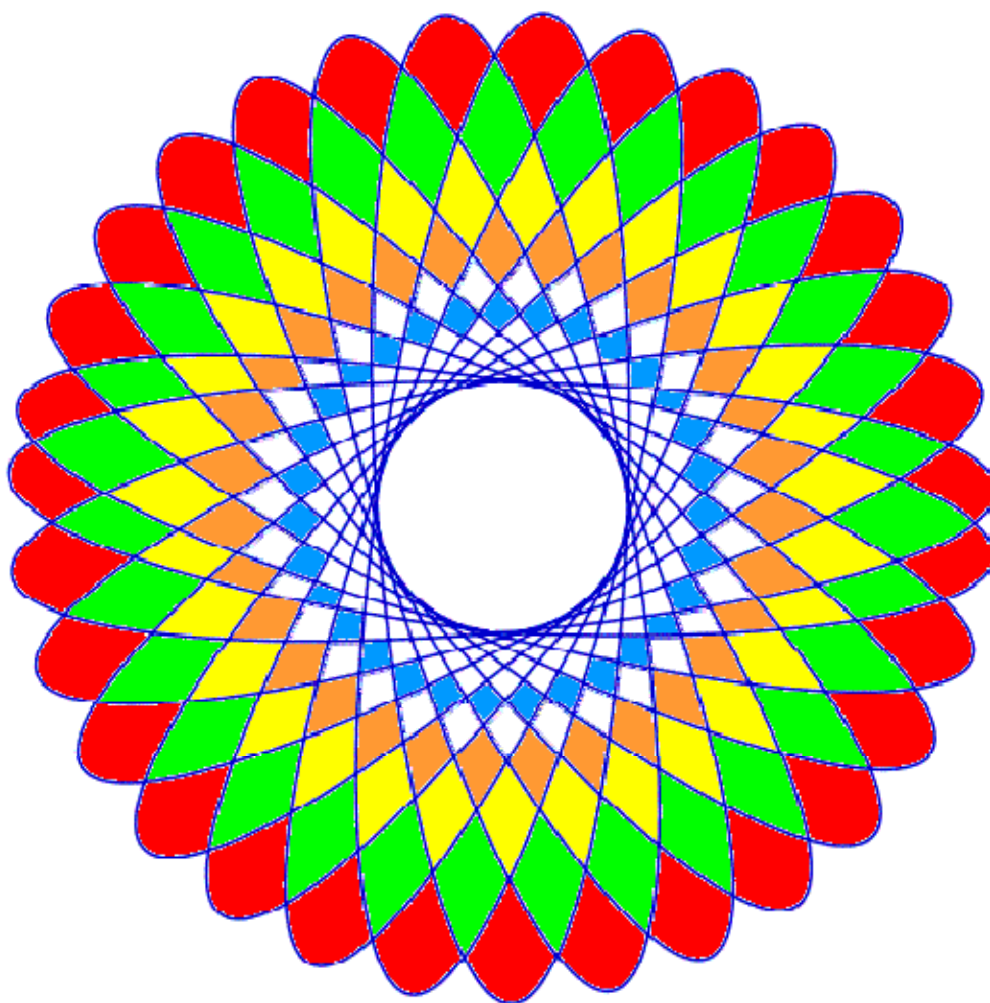


Φεργαδιώτης Αθανάσιος

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ ΣΤΗΝ



ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέμα 2^ο (150)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο - ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

(11)

1.GI A ALG 2 497

Ένα τηλεοπτικό παιχνίδι παίζεται με ζεύγη αντιπάλων των δυο φύλων. Στο παιχνίδι συμμετέχουν 3 άντρες: ο Δημήτρης (Δ), ο Κώστας (Κ), ο Μιχάλης (Μ) και 2 γυναίκες: η Ειρήνη (Ε) και η Ζωή (Ζ). Επιλέγονται στην τύχη ένας άντρας και μια γυναίκα για να διαγωνιστούν και καταγράφονται τα ονόματά τους.

α) Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων

A : Να διαγωνίστηκαν ο Κώστας ή ο Μιχάλης .

B : Να διαγωνίστηκε η Ζωή.

Γ: Να μη διαγωνίστηκε ούτε ο Κώστας ούτε ο Δημήτρης.

(Μονάδες 15)

2.GI A ALG 2 499

Από τους μαθητές ενός Λυκείου, το 25% συμμετέχει στη θεατρική ομάδα, το 30% συμμετέχει στην ομάδα ποδοσφαίρου και το 15% των μαθητών συμμετέχει και στις δύο ομάδες. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Αν ονομάσουμε τα ενδεχόμενα:

A: «ο μαθητής να συμμετέχει στη θεατρική ομάδα» και

B: «ο μαθητής να συμμετέχει στην ομάδα ποδοσφαίρου»,

α) να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα:

i) $A \cup B$ ii) $A \cap B$ iii) $B - A$ iv) A'

(Μονάδες 12)

β) να υπολογίσετε τις πιθανότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων

i) ο μαθητής που επιλέχθηκε να συμμετέχει μόνο στην ομάδα ποδοσφαίρου

ii) ο μαθητής που επιλέχθηκε να μη συμμετέχει σε καμία ομάδα.

(Μονάδες 13)

3.GI A ALG 2 1003

Ένα κουτί περιέχει άσπρες, μαύρες, κόκκινες και πράσινες μπάλες. Οι άσπρες είναι 5, οι μαύρες είναι 9, ενώ οι κόκκινες και οι πράσινες μαζί είναι 16. Επιλέγουμε μια μπάλα στην τύχη. Δίνονται τα παρακάτω ενδεχόμενα:

A: η μπάλα που επιλέγουμε είναι ΑΣΠΡΗ

K: η μπάλα που επιλέγουμε είναι ΚΟΚΚΙΝΗ

Π: η μπάλα που επιλέγουμε είναι ΠΡΑΣΙΝΗ

α) Χρησιμοποιώντας τα A, K και Π να γράψετε στη γλώσσα των συνόλων τα ενδεχόμενα:

i) Η μπάλα που επιλέγουμε δεν είναι άσπρη,

ii) Η μπάλα που επιλέγουμε είναι κόκκινη ή πράσινη.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης καθενός από τα δύο ενδεχόμενα του ερωτήματος (α).

(Μονάδες 12)

4.GI_A_ALG_2_1102

Δίνονται δύο ενδεχόμενα A , B ενός δειγματικού χώρου Ω και οι πιθανότητες:

$$P(A) = \frac{3}{4}, \quad P(A - B) = \frac{5}{8} \quad \text{και} \quad P(B) = \frac{1}{4}$$

α) Να υπολογίσετε την $P(A \cap B)$

(Μονάδες 9)

β) i) Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και να γράψετε στη γλώσσα των συνόλων το ενδεχόμενο: « A ή B ».

(Μονάδες 7)

ii) Να υπολογίσετε την πιθανότητα πραγματοποίησης του παραπάνω ενδεχομένου.

(Μονάδες 9)

5.GI_A_ALG_2_1287

Δίνεται ο πίνακας:

	1	2	3
1	11	12	13
2	21	22	23
3	31	32	33

Επιλέγουμε τυχαία έναν από τους εννέα διψήφιους αριθμούς του παραπάνω πίνακα.

Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης των παρακάτω ενδεχομένων:

A: ο διψήφιος να είναι άρτιος

(Μονάδες 7)

B: ο διψήφιος να είναι άρτιος και πολλαπλάσιο του 3

(Μονάδες 9)

Γ: ο διψήφιος να είναι άρτιος ή πολλαπλάσιο του 3

(Μονάδες 9)

6.GI_A_ALG_2_1506

Δίνεται το σύνολο $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ και τα υποσύνολά του $A = \{1,2,4,5\}$ και $B = \{2,4,6\}$.

α) Να παραστήσετε στο ίδιο διάγραμμα Venn, με βασικό σύνολο το Ω , τα σύνολα A και B . Κατόπιν, να προσδιορίσετε τα σύνολα $A \cup B$, $A \cap B$, A' και B' .

(Μονάδες 13)

β) Επιλέγουμε τυχαία ένα στοιχείο του Ω . Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

(i) Να μην πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A .

(Μονάδες 4)

(ii) Να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα ενδεχόμενα A και B .

(Μονάδες 4)

(iii) Να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα A , B .

(Μονάδες 4)

7.GI_A_ALG_2_1520

Από τους σπουδαστές ενός Ωδείου, το 50% μαθαίνει πιάνο, το 40% μαθαίνει κιθάρα, ενώ το 10% των σπουδαστών μαθαίνει και τα δύο αυτά όργανα. Επιλέγουμε τυχαία ένα σπουδαστή του Ωδείου. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A: ο σπουδαστής αυτός μαθαίνει πιάνο

B: ο σπουδαστής αυτός μαθαίνει κιθάρα

Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου:

α) Ο σπουδαστής αυτός να μαθαίνει ένα τουλάχιστον από τα δύο παραπάνω όργανα.

(Μονάδες 12)

β) Ο σπουδαστής αυτός να μην μαθαίνει κανένα από τα δύο παραπάνω όργανα.

(Μονάδες 13)

8.GI_A_ALG_2_3383

Το 70% των κατοίκων μιας πόλης έχει αυτοκίνητο, το 40% έχει μηχανάκι και το 20% έχει και αυτοκίνητο και μηχανάκι. Επιλέγουμε τυχαία έναν κάτοικο αυτής της πόλης. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A: ο κάτοικος να έχει αυτοκίνητο

M: ο κάτοικος να έχει μηχανάκι.

α) να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα:

- i) $A \cup M$ ii) $M - A$ iii) M'

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την πιθανότητα ο κάτοικος που επιλέχθηκε :

i) Να μην έχει μηχανάκι.

(Μονάδες 7)

ii) Να μην έχει ούτε μηχανάκι ούτε αυτοκίνητο.

(Μονάδες 9)

9.GI_A_ALG_2_3384

Από τους 180 μαθητές ενός λυκείου, 20 μαθητές συμμετέχουν στη θεατρική ομάδα, 30 μαθητές συμμετέχουν στην ομάδα στίβου, ενώ 10 μαθητές συμμετέχουν και στις δύο ομάδες. Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή του λυκείου. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A: ο μαθητής συμμετέχει στη θεατρική ομάδα

B: ο μαθητής συμμετέχει στην ομάδα στίβου

α) να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα:

- i) $A \cup B$ ii) $B - A$ iii) A'

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής που επιλέχθηκε:

i) Να μη συμμετέχει σε καμία ομάδα.

(Μονάδες 9)

ii) Να συμμετέχει μόνο στην ομάδα στίβου.

(Μονάδες 7)

10.GI_A_ALG_2_3878

Ένα Λύκειο έχει 400 μαθητές από τους οποίους οι 200 είναι μαθητές της Α' τάξης. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή, η πιθανότητα να είναι μαθητής της Γ' τάξης είναι 20%. Να βρείτε:

α) Το πλήθος των μαθητών της Γ' τάξης

(Μονάδες 10)

β) Το πλήθος των μαθητών της Β' τάξης.

(Μονάδες 5)

γ) Την πιθανότητα ο μαθητής που επιλέξαμε να είναι της Β' τάξης.

(Μονάδες 10)

11.GI_A_ALG_2_13096

α) Αν A, B, Γ είναι τρία ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω ενός πειράματος τύχης, που αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα, να διατυπώσετε λεκτικά τα παρακάτω ενδεχόμενα:

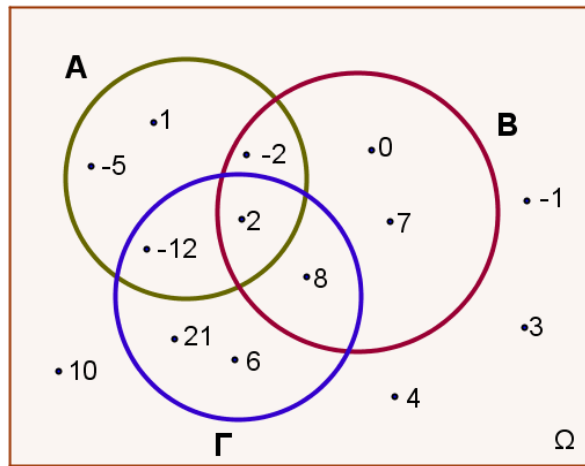
- i) $A \cup B$ ii) $B \cap \Gamma$ iii) $(A \cap B) \cap \Gamma$ iv) A'

(Μονάδες 12)

β) Στο παρακάτω σχήμα παριστάνονται με διάγραμμα Venn ο παραπάνω δειγματικός χώρος Ω και τα τρία ενδεχόμενα A, B και Γ αυτού. Να υπολογίσετε την πιθανότητα πραγματοποίησης των ενδεχομένων του (α) ερωτήματος.

(Μονάδες 13)

-6- Τράπεζα θεμάτων Άλγεβρας Α' Λυκείου – Φεργαδιώτης Αθανάσιος



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο - ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ

(3)

1.GI_A_ALG_2_1070

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$, ώστε να ισχύουν:

$$\frac{\alpha + \beta}{\beta} = 4 \quad \text{και} \quad \frac{\gamma}{\delta - \gamma} = \frac{1}{4}$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3\beta$ και $\delta = 5\gamma$

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\Pi = \frac{\alpha\gamma + \beta\gamma}{\beta\delta - \beta\gamma}$$

(Μονάδες 15)

2.GI_A_ALG_2_1080

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει: $\frac{4x + 5y}{x - 4y} = -2$

α) Να αποδείξετε ότι: $y = 2x$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{2x^2 + 3y^2 + xy}{xy}$$

(Μονάδες 13)

3.GI_A_ALG_2_3874

Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha \neq \beta$ για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{\alpha^2 + 1}{\beta^2 + 1} = \frac{\alpha}{\beta}$$

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

(Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K = \frac{\alpha^{22} \cdot (\beta^3)^8}{\alpha^{-2} \cdot (\alpha\beta)^{25}}$

(Μονάδες 12)

ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

(10)

1.GI_A_ALG_2_486

Αν $0 < \alpha < 1$, τότε

α) να αποδείξετε ότι: $\alpha^3 < \alpha$

(Μονάδες 13)

β) να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$0, \alpha^3, 1, \alpha, \frac{1}{\alpha}$$

(Μονάδες 12)

2.GI_A_ALG_2_487

α) Να αποδείξετε ότι για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10$$

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$

(Μονάδες 13)

3.GI_A_ALG_2_506

Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιών ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x + y$

(Μονάδες 5)

β) $2x - 3y$

(Μονάδες 10)

γ) $\frac{x}{y}$

(Μονάδες 10)

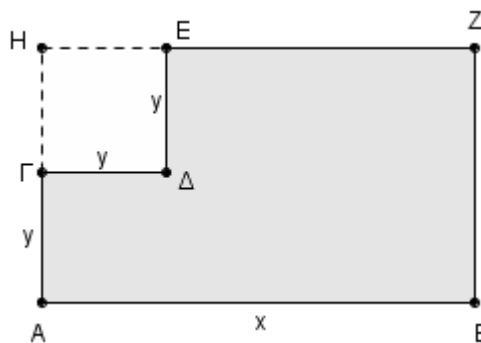
4.GI_A_ALG_2_1092

Από το ορθογώνιο $ABZH$ αφαιρέθηκε το τετράγωνο $\Gamma\Delta E\text{H}$ πλευράς y .

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος $EZBA\Gamma\Delta$ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση:

$$\Pi = 2x + 4y$$

(Μονάδες 10)



β) Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος.

(Μονάδες 15)

5.GI_A_ALG_2_1541

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$ τότε:

α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 10)

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 15)

6.GI_A_ALG_2_3852

Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύουν:

$$2 \leq \alpha \leq 4 \quad \text{και} \quad -4 \leq \beta \leq -3$$

Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha - 2\beta$

(Μονάδες 12)

β) $\alpha^2 - 2\alpha\beta$

(Μονάδες 13)

7.GI_A_ALG_2_3870

Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9$ και $\Lambda = 2\alpha(3 - \beta)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$

(Μονάδες 3)

β) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β .

(Μονάδες 10)

γ) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

8.GI_A_ALG_2_4299

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν: $3 \leq x \leq 5$ και $-2 \leq y \leq -1$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:

α) $y - x$

(Μονάδες 12)

β) $x^2 + y^2$

(Μονάδες 13)

8.GI_A_ALG_2_7519

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$

(Μονάδες 12)

β) $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$

(Μονάδες 13)

9.GI_A_ALG_2_13152

Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2$ και $\Lambda = 2\alpha\beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β .

(Μονάδες 12)

β) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

(16)

1.GI_A_ALG_2_504

α) Αν $\alpha < 0$, να αποδειχθεί ότι: $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$

(Μονάδες 15)

β) Αν $\alpha < 0$, να αποδειχθεί ότι: $\left| \alpha \right| + \left| \frac{1}{\alpha} \right| \geq 2$

(Μονάδες 10)

2.GI_A_ALG_2_509

α) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, να αποδειχθεί ότι: $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| + \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \geq 2$ (1)

(Μονάδες 15)

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

3.GI_A_ALG_2_991

Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x + 1| < 2$,

α) να δείξετε ότι $x \in (-3, 1)$

(Μονάδες 12)

β) να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης: $K = \frac{|x+3| + |x-1|}{4}$ είναι αριθμός ανεξάρτητος του x .

(Μονάδες 13)

4.GI_A_ALG_2_996

Δίνεται η παράσταση: $A = |x - 1| + |y - 3|$, με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$. Να αποδείξετε ότι:

α) $A = x - y + 2$

(Μονάδες 12)

β) $0 < A < 4$

(Μονάδες 13)

5.GI_A_ALG_2_1009

Δίνεται η παράσταση: $A = |3x - 6| + 2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι

i) για κάθε $x \geq 2$, $A = 3x - 4$

ii) για κάθε $x < 2$, $A = 8 - 3x$

(Μονάδες 12)

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{9x^2 - 16}{|3x - 6| + 2} = 3x + 4$$

(Μονάδες 13)

6.GI_A_ALG_2_1062

- α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει : $|y - 3| < 1$.
(Μονάδες 12)
- β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή του εμβαδού E του ορθογωνίου.
(Μονάδες 13)

7.GI_A_ALG_2_1074

- α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει : $|y - 3| < 1$.
(Μονάδες 12)
- β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να αποδείξετε ότι: $6 < \Pi < 14$, όπου Π είναι η περίμετρος του ορθογωνίου.
(Μονάδες 13)

8.GI_A_ALG_2_1089

- Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$,
- α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x - 5|$ και $|x - 10|$ χωρίς απόλυτες τιμές.
(Μονάδες 10)
- β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
- $$A = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10}$$
- (Μονάδες 15)

9.GI_A_ALG_2_1091

- Δίνεται η παράσταση: $A = |x - 1| - |x - 2|$
- α) Για $1 < x < 2$, να δείξετε ότι: $A = 2x - 3$
(Μονάδες 13)
- β) Για $x < 1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε.
(Μονάδες 12)

10.GI_A_ALG_2_1273

- Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y , για τα οποία ισχύουν: $|x - 3| \leq 2$ και $|y - 6| \leq 4$.
- α) Να δείξετε ότι: $1 \leq x \leq 5$ και $2 \leq y \leq 10$.
(Μονάδες 12)
- β) Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $2x$ και y
(Μονάδες 13)

11.GI_A_ALG_2_2702

- Δίνονται οι παραστάσεις:
- $$A = |2x - 4| \text{ και } B = |x - 3|, \text{ όπου ο } x \text{ είναι πραγματικός αριθμός.}$$
- α) Για κάθε $2 \leq x < 3$ να αποδείξετε ότι $A + B = x - 1$.
(Μονάδες 16)
- β) Υπάρχει $x \in [2, 3)$ ώστε να ισχύει $A + B = 2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 9)

12.GI_A_ALG_2_3884

Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x, 3) = 3 - 2x$

α) Να αποδείξετε ότι $x \leq \frac{3}{2}$.

(Μονάδες 12)

β) Αν $x \leq \frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K = |2x - 3| - 2|3 - x|$ είναι ανεξάρτητη του x .

(Μονάδες 13)

13.GI_A_ALG_2_4290

Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x - 2| < 3$

α) Να αποδείξετε ότι: $-1 < x < 5$

(Μονάδες 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|x+1| + |x-5|}{3}$

(Μονάδες 13)

14.GI_A_ALG_2_4295

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί y , για τους οποίους ισχύει: $|y - 2| < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι: $y \in (1, 3)$

(Μονάδες 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|y-1| + |y-3|}{2}$

(Μονάδες 13)

15.GI_A_ALG_2_4318

Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x - 1| < 1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $0 < x < 1$

(Μονάδες 15)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$1, x, x^2$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

16.GI_A_ALG_2_7521

α) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|1 - 2x| < 5$ και

(Μονάδες 9)

ii) $|1 - 2x| \geq 1$

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

(Μονάδες 7)

ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

(13)

1.GI_A_ALG_2_936

Δίνεται η παράσταση: $A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 12) β)

Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .
(Μονάδες 13)

2.GI_A_ALG_2_938

α) Να δείξετε ότι: $3 < \sqrt[3]{30} < 4$
(Μονάδες 12)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6 - \sqrt[3]{30}$
(Μονάδες 13)

3.GI_A_ALG_2_944

Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.
(Μονάδες 13)

β) Για $x = 5$, να αποδείξετε ότι: $A^2 + A - 6 = 0$
(Μονάδες 12)

4.GI_A_ALG_2_947

Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x - 4}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.
(Μονάδες 12)

β) Αν $x = 4$, να αποδείξετε ότι: $A^2 - A = 2(10 - \sqrt{5})$
(Μονάδες 13)

5.GI_A_ALG_2_950

Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{1-x} - \sqrt[4]{x^4}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.
(Μονάδες 13)

β) Αν $x = -3$, να αποδείξετε ότι: $A^3 + A^2 + A + 1 = 0$
(Μονάδες 12)

6.GI_A_ALG_2_952

Δίνεται η παράσταση: $B = \sqrt[5]{(x-2)^5}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x υπό μορφή διαστήματος.
(Μονάδες 13)

β) Για $x = 4$, να αποδείξετε ότι: $B^2 + 6B = B^4$
(Μονάδες 12)

7.GI_A_ALG_2_955

Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{2})^6$ και $B = (\sqrt[3]{2})^6$

α) Να δείξετε ότι: $A - B = 4$

(Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$\sqrt{2}, 1, \sqrt[3]{2}$$

(Μονάδες 12)

8.GI_A_ALG_2_1276

Δίνεται η παράσταση: $K = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$.

α) Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το x , ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

(Μονάδες 12)

β) Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι παράσταση K σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

(Μονάδες 13)

9.GI_A_ALG_2_1300

Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις:

$$A = (\sqrt{2})^6, \quad B = (\sqrt[3]{3})^6, \quad \Gamma = (\sqrt[6]{6})^6$$

α) Να δείξετε ότι:

$$A + B + \Gamma = 23$$

(Μονάδες 13)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$\sqrt[3]{3}, \sqrt[6]{6}$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

10.GI_A_ALG_2_4311

Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \sqrt{(x-2)^2}$ και $B = \sqrt[3]{(2-x)^3}$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ;

(Μονάδες 7)

β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ;

(Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x \leq 2$, ισχύει $A = B$.

(Μονάδες 10)

11.GI_A_ALG_2_4314

Αν είναι $A = \sqrt[3]{5}$, $B = \sqrt{3}$, $\Gamma = \sqrt[6]{5}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt{15}$

(Μονάδες 15)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς A, B .

(Μονάδες 10)

12.GI_A_ALG_2_4316

Αν είναι $A = 2 - \sqrt{3}$, $B = 2 + \sqrt{3}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B = 1$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = A^2 + B^2$.

(Μονάδες 13)

13.GI_A_ALG_2_8173

Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις):

$$\sqrt{2} = 1,41$$

$$\sqrt{3} = 1,73$$

$$\sqrt{5} = 2,24$$

$$\sqrt{7} = 2,64$$

α) Να επιλέξετε έναν τρόπο, ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς

$$\sqrt{20} , \sqrt{45} \text{ και } \sqrt{80}$$

(Μονάδες 12)

β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών πώς θα μπορούσατε να υπολογί-

σετε την τιμή της παράστασης $\frac{3\sqrt{20} + \sqrt{80}}{\sqrt{45} - \sqrt{5}}$;

(Μονάδες 13)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο - ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ

(5)

1.GI_A_ALG_2_485

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x = x + \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε.

(Μονάδες 8)

γ) Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

2.GI_A_ALG_2_507

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - 9)x = \lambda^2 - 3\lambda$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α) Επιλέγοντας τρεις διαφορετικές πραγματικές τιμές για το λ , να γράψετε τρεις εξισώσεις.

(Μονάδες 6)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μία και μοναδική λύση.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της (1) να ισούται με 4.

(Μονάδες 10)

3.GI_A_ALG_2_1055

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - 1)x = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda = 1$ και για $\lambda = -1$.

(Μονάδες 12)

β) Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

4.GI_A_ALG_2_3382

Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

α) Να δείξετε ότι: $A = 4$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $|x + A| = 1$.

(Μονάδες 13)

5.GI_A_ALG_2_4302

Δίνεται η εξίσωση: $(a + 3)x = a^2 - 9$, με παράμετρο $a \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) όταν $a = 1$

(Μονάδες 5)

ii) όταν $a = -3$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του a , για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή.

(Μονάδες 12)

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ

(26)

1.GI_A_ALG_2_481

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει:

$$x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$$

(Μονάδες 9)

2.GI_A_ALG_2_483

α) Να λύσετε την εξίσωση $|2x - 1| = 3$

(Μονάδες 12)

β) Αν α, β με $\alpha < \beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + 3 = 0$

(Μονάδες 13)

3.GI_A_ALG_2_493

α) Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| = \sqrt{3}$.

(Μονάδες 10)

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του α) ερωτήματος.
(Μονάδες 15)

4.GI_A_ALG_2_496

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει:

$$(x_1 + x_2)^2 + x_1 \cdot x_2 + 5 = 0$$

(Μονάδες 9)

5.GI_A_ALG_2_1005

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{1+x}{x-1}$ και $B = \frac{2}{x^2-x}$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι για να ορίζονται ταυτόχρονα οι παραστάσεις A, B πρέπει:

$$x \neq 1 \text{ και } x \neq 0.$$

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $A = B$.

(Μονάδες 13)

6.GI_A_ALG_2_1007

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης: $-2x^2 + 10x = 12$ (Μονάδες 15)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{-2x^2 + 10 - 12}{x - 2} = 0$ (Μονάδες 10)

7.GI_A_ALG_2_1067

Δίνεται η παράσταση: $K = \frac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 - 3x - 2}$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 2$. (Μονάδες 10)

β) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση K ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση K . (Μονάδες 8)

8.GI_A_ALG_2_1093

Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{5 + \sqrt{5}}$, $B = \frac{1}{5 - \sqrt{5}}$

α) Να δείξετε ότι:
i) $A + B = \frac{1}{2}$ (Μονάδες 8)

ii) $A \cdot B = \frac{1}{20}$ (Μονάδες 8)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση $2^{\text{ου}}$ βαθμού με ρίζες τους αριθμούς A και B . (Μονάδες 9)

9.GI_A_ALG_2_1097

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + \lambda x - 5$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Αν μια ρίζα του τριωνύμου είναι ο αριθμός $x_0 = 1$, να προσδιορίσετε την τιμή του λ . (Μονάδες 12)

β) Για $\lambda = 3$, να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο. (Μονάδες 13)

10.GI_A_ALG_2_1275

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + 5x - 1$.

α) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, x_1 και x_2 . (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων: $x_1 + x_2$, $x_1 \cdot x_2$ και $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ (Μονάδες 9)

γ) Να προσδιορίσετε μια εξίσωση $2^{\text{ου}}$ βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$. (Μονάδες 10)

11.GI_A_ALG_2_1281

Δίνεται το τριώνυμο $-x^2 + (\sqrt{3}-1)x + \sqrt{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$$\Delta = (\sqrt{3} + 1)^2$$

(Μονάδες 12)

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο

(Μονάδες 13)

12.GI_A_ALG_2_1282

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $3x^2 - 2x - 1$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες έχει νόημα η παράσταση:

$$A(x) = \frac{x-1}{3x^2-2x-1}$$

και στη συνέχεια να την απλοποιήσετε.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $|A(x)| = 1$

(Μονάδες 8)

13.GI_A_ALG_2_1298

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha + \beta = 2 \quad \text{και} \quad \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = -30$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -15$.

(Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

(Μονάδες 15)

14.GI_A_ALG_2_1509

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x + 6 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1, να βρείτε το λ .

(Μονάδες 13)

β) Για $\lambda = 2$ να λύσετε την εξίσωση (1)

(Μονάδες 12)

15.GI_A_ALG_2_1533

Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + 2x + \lambda - 2 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 10)

β) Στην περίπτωση που η εξίσωση έχει δυο ρίζες x_1, x_2 , να προσδιορίσετε το λ ώστε να ισχύει:

$$x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) = 1$$

(Μονάδες 15)

16.GI_A_ALG_2_3839

Δίνεται η εξίσωση: $\lambda x^2 - (\lambda - 1)x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq 0$.

α) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -2 .

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \neq 0$.

(Μονάδες 13)

17.GI_A_ALG_2_3847

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq -2$.

Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες:

α) η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 13)

β) το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι ίσο με 2.

(Μονάδες 12)

18.GI_A_ALG_2_3857

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha \cdot \beta = 4 \quad \text{και} \quad \alpha^2 \beta + \alpha \beta^2 = 20$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha + \beta = 5$.

(Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β , και να τους βρείτε.

(Μονάδες 15)

19.GI_A_ALG_2_3863

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha + \beta = -1 \quad \text{και} \quad \alpha^3 \beta + 2\alpha^2 \beta^2 + \alpha \beta^3 = -12$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -12$.

(Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

(Μονάδες 15)

20.GI_A_ALG_2_4308

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση

$$\Pi = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x}$$

έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

(Μονάδες 10)

β) Για τις τιμές του x που βρήκατε στο α) ερώτημα, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x} = 0.$$

(Μονάδες 15)

21.GI_A_ALG_2_4309

Δίνεται ορθογώνιο με περίμετρο $\Pi = 20\text{cm}$ και εμβαδόν $E = 24\text{cm}^2$.

α) Να κατασκευάσετε μία εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ως ρίζες τα μήκη των πλευρών αυτού του ορθογωνίου.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

(Μονάδες 10)

22.ΓΙ Α ALG 2 4310

Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α, β , τέτοιοι ώστε:

$$\alpha + \beta = 12 \quad \text{και} \quad \alpha^2 + \beta^2 = 272 .$$

α) Με τη βοήθεια της ταυτότητας $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, να δείξετε ότι:

$$\alpha \cdot \beta = -64 .$$

(Μονάδες 8)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α, β .

(Μονάδες 10)

γ) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α, β .

(Μονάδες 7)

23.ΓΙ Α ALG 2 4313

Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{3 - \sqrt{7}}$, $B = \frac{1}{3 + \sqrt{7}}$

α) Να δείξετε ότι: $A + B = 3$ και $A \cdot B = \frac{1}{2}$

(Μονάδες 12)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς A, B

(Μονάδες 13)

24.ΓΙ Α ALG 2 4317

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq -2$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 12)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης να βρείτε το λ ώστε $x_1 \cdot x_2 = -3$

(Μονάδες 13)

25.ΓΙ Α ALG 2 13073

Το πάτωμα του εργαστήριου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις $(x + 1)$ μέτρα και x μέτρα.

α) Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος.

(Μονάδες 10)

β) Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90 τετραγωνικά μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του.

(Μονάδες 15)

26.ΓΙ Α ALG 2 13153

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - kx - 2$, με $k \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{R}$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου.

(Μονάδες 10)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x - 2 = 0$ (1),

i) να βρείτε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών της (1).

(Μονάδες 6)

ii) να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες ρ_1, ρ_2 , όπου $\rho_1 = 2x_1$ και $\rho_2 = 2x_2$.

(Μονάδες 9)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ

(9)

1.GI_A_ALG_2_489

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x - 5| < 2$

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|2 - 3x| > 5$

(Μονάδες 8)

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των δυο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

(Μονάδες 9)

2.GI_A_ALG_2_491

Δίνονται οι ανισώσεις: $3x - 1 < x + 9$ και $2 - \frac{x}{2} \leq x + \frac{1}{2}$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε το σύνολο των κοινών τους λύσεων.

(Μονάδες 10)

3.GI_A_ALG_2_503

α) Να λύσετε την ανίσωση: $\left|x - \frac{1}{2}\right| < 4$

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x + 5| \geq 3$

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων (α) και (β) με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών και να τις γράψετε με τη μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 7)

4.GI_A_ALG_2_505

α) Να λύσετε την εξίσωση: $|2x - 4| = 3|x - 1|$

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|3x - 5| > 1$

(Μονάδες 9)

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

5.GI_A_ALG_2_1039

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x - 1| \geq 5$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των (α) και (β).

(Μονάδες 8)

6.GI_A_ALG_2_1077

α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 5| < 4$.

(Μονάδες 10)

β) Αν κάποιος αριθμός a επαληθεύει την παραπάνω ανίσωση, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{9} < \frac{1}{a} < 1$$

(Μονάδες 15)

7.GI_A_ALG_2_1305

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x + 4| \geq 3$

(Μονάδες 12)

β) Αν $a \geq -1$, να γράψετε την παράσταση $A = ||a + 4| - 3|$ χωρίς απόλυτες τιμές. Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

(Μονάδες 13)

8.GI_A_ALG_2_4305

α) Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|2x - 3| \leq 5$

(Μονάδες 9)

ii) $|2x - 3| \geq 1$

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

(Μονάδες 7)

9.GI_A_ALG_2_4306

α) Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - x - 6 = 0$ (1)

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 1| < 2$ (2)

(Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2).

(Μονάδες 7)

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ

(11)

1.GI_A_ALG_2_478

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x + (\lambda^2 + \lambda - 1) = 0$ (1), με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ , ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές.
(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $S^2 - P - 2 \geq 0$, όπου S και P είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της (1).

(Μονάδες 13)

2.GI_A_ALG_2_484

α) Να λύσετε τις ανισώσεις: $|2x - 5| \leq 3$ και $2x^2 - x - 1 \geq 0$

(Μονάδες 16)

β) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος α).

(Μονάδες 9)

3.GI_A_ALG_2_490

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 1$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες: $2x^2 - 3x + 1 < 0$

(Μονάδες 5)

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{1}{\sqrt{2}}$ είναι λύσεις της ανίσωσης: $2x^2 - 3x + 1 < 0$

(Μονάδες 10)

4.GI_A_ALG_2_498

α) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{|x+1|}{3} - \frac{|x+1|+4}{5} = \frac{2}{3}$

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$

(Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος.

(Μονάδες 7)

5.GI_A_ALG_2_1277

Δίνονται οι ανισώσεις: $-x^2 + 5x - 6 < 0$ (1) και $x^2 - 16 \leq 0$ (2).

α) Να βρεθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1), (2).

(Μονάδες 12)

β) Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων.

(Μονάδες 13)

6.GI_A_ALG_2_1278

Δίνεται πραγματικός αριθμός x , για τον οποίο ισχύει: $d(x, -2) < 1$.

Να δείξετε ότι:

α) $-3 < x < -1$.

(Μονάδες 10)

β) $x^2 + 4x + 3 < 0$.

(Μονάδες 15)

7.GI_A_ALG_2_1288

- α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 10x + 21 < 0$ (Μονάδες 12)
- β) Δίνεται η παράσταση: $A = |x - 3| + |x^2 - 10x + 21|$
- i) Για $3 < x < 7$, να δείξετε ότι: $A = -x^2 + 11x - 24$ (Μονάδες 8)
- ii) Να βρείτε τις τιμές του $x \in (3, 7)$, για τις οποίες ισχύει $A = 6$. (Μονάδες 5)

8.GI_A_ALG_2_1297

- α) Να λύσετε την ανίσωση: $3x^2 - 4x + 1 \leq 0$. (Μονάδες 12)
- β) Αν α, β δυο αριθμοί που είναι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{3\alpha + 6\beta}{9}$ είναι επίσης λύση της ανίσωσης. (Μονάδες 13)

9.GI_A_ALG_2_1512

- α) Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 - x - 2 = 0$ (Μονάδες 8)
- β) Να λυθεί η ανίσωση: $x^2 - x - 2 > 0$ και να παραστήσετε το σύνολο λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 12)
- γ) Να τοποθετήσετε το $-\frac{4}{3}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι το $-\frac{4}{3}$ λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

10.GI_A_ALG_2_1544

- α) Να αποδείξετε ότι $x^2 + 4x + 5 > 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x . (Μονάδες 10)
- β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση:
 $B = |x^2 + 4x + 5| - |x^2 + 4x + 4|$ (Μονάδες 15)

11.GI_A_ALG_2_3380

- Δίνεται το τριώνυμο: $f(x) = 3x^2 + 9x - 12, x \in \mathbb{R}$
- α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 13)
- β) Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (α). Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο - ΠΡΟΟΔΟΙ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

(17)

1.GI_A_ALG_2_474

Θεωρούμε την ακολουθία (a_n) των θετικών περιττών αριθμών: 1, 3, 5, 7, ...

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η (a_n) είναι αριθμητική πρόοδος και να βρείτε τον εκατοστό όρο της.
(Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των n πρώτων περιττών θετικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο του πλήθους τους.
(Μονάδες 10)

2.GI_A_ALG_2_480

Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε σειρά έχει a καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η 7η σειρά έχει 36 καθίσματα και το πλήθος των καθισμάτων του σταδίου είναι 300.

α) Αποτελούν τα καθίσματα του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.
(Μονάδες 12)

β) Πόσα καθίσματα έχει κάθε σειρά;
(Μονάδες 13)

3.GI_A_ALG_2_508

α) Να βρείτε το άθροισμα των n πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων $1, 2, 3, \dots, n$
(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε πόσους από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε άθροισμα τον αριθμό 45.
(Μονάδες 13)

4.GI_A_ALG_2_1015

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (a_n) με όρους $a_2 = 0$, $a_4 = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 2$ και $\alpha_1 = -2$, όπου ω είναι η διαφορά της προόδου και α_1 ο πρώτος όρος της.
(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι ο n -οστός όρος της προόδου είναι ίσος με $a_n = 2n - 4$, $n \in \mathbb{N}^*$, και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98.
(Μονάδες 15)

5.GI_A_ALG_2_1050

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί: $x + 2$, $(x + 1)^2$, $3x + 2$ με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου, όταν
i) $x = 1$
ii) $x = -1$.
(Μονάδες 12)

6.GI_A_ALG_2_1057

Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη της.

- α) Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της n -οστής σειράς. (Μονάδες 9)
- β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά; (Μονάδες 8)
- γ) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο; (Μονάδες 8)

7.GI_A_ALG_2_1064

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (a_n) για την οποία ισχύει ότι: $a_1 = 19$ και $a_{10} - a_6 = 24$.

- α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 6$. (Μονάδες 9)
- β) Να βρείτε τον a_{20} . (Μονάδες 8)
- γ) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου. (Μονάδες 8)

8.GI_A_ALG_2_1086

Οι αριθμοί $A = 1$, $B = x + 4$, $\Gamma = x + 8$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (a_n).

- α) Να βρείτε τη τιμή του x . (Μονάδες 10)
- β) Αν $x = 1$ και ο αριθμός A είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου (a_n),
- i) να υπολογίσετε τη διαφορά ω . (Μονάδες 7)
- ii) να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 8)

9.GI_A_ALG_2_1101

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2\beta x + (\beta^2 - 4) = 0$, (1) με παράμετρο $\beta \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = \beta - 2$ και $x_2 = \beta + 2$ (Μονάδες 12)
- β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2 , με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 13)

10.GI_A_ALG_2_1301

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (a_n) για την οποία ισχύει: $a_4 - a_2 = 10$

- α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 5$. (Μονάδες 12)
- β) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι 33, να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου. (Μονάδες 13)

11.GI_A_ALG_2_1513

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (a_n) με $a_1 = 1$ και $a_3 = 9$.

- α) Να βρείτε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 12)
- β) Να βρείτε το μικρότερο θετικό ακέραιο n , ώστε να ισχύει $a_n > 30$. (Μονάδες 13)

12.GI_A_ALG_2_4300

Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύουν: $a_1 = 2$ και $a_{25} = a_{12} + 39$.

- α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$. (Μονάδες 12)
β) Να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 152. (Μονάδες 13)

13.GI_A_ALG_2_4301

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω .

- α) Να δείξετε ότι: $\frac{a_{15} - a_9}{a_{10} - a_7} = 2$. (Μονάδες 13)
β) Αν $a_{15} - a_9 = 18$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου. (Μονάδες 12)

14.GI_A_ALG_2_4303

Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύουν: $a_4 - a_9 = 15$ και $a_1 = 41$.

- α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με -3 . (Μονάδες 12)
β) Να βρείτε το θετικό ακέραιο v , ώστε $a_v = v$. (Μονάδες 13)

15.GI_A_ALG_2_4304

Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) με διαφορά $\omega = 4$, ισχύει: $a_6 + a_{11} = 40$.

- α) Να βρείτε τον πρώτο όρο a_1 της προόδου. (Μονάδες 12)
β) Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το μηδέν; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

16.GI_A_ALG_2_4312

Οι αριθμοί $x + 6$, $5x + 2$, $11x - 6$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο a_1 και διαφορά ω .

- α) Να βρείτε την τιμή του x και να αποδείξετε ότι $\omega = 4$. (Μονάδες 12)
β) Αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι $a_1 = 0$, να υπολογίσετε το άθροισμα S_8 των 8 πρώτων όρων. (Μονάδες 13)

17.GI_A_ALG_2_4319

Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) είναι $a_1 = 2$ και $a_5 = 14$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 3$. (Μονάδες 12)
β) Να βρείτε πόσους αρχικούς (πρώτους) όρους πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77. (Μονάδες 13)
(Δίνεται: $\sqrt{1849} = 43$).

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

(7)

1.GI_A_ALG_2_495

Σε γεωμετρική πρόοδο (a_n) με θετικό λόγο λ , ισχύει: $a_3 = 1$ και $a_5 = 4$.

α) Να βρείτε το λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι ο n -οστός όρος της προόδου είναι:

$$a_n = 2^{n-3}.$$

(Μονάδες 12)

2.GI_A_ALG_2_1032

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί: x , $2x + 1$, $5x + 4$, με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το λόγο λ της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, όταν:

i) $x = 1$

ii) $x = -1$

(Μονάδες 12)

3.GI_A_ALG_2_1088

α) Αν οι αριθμοί $4 - x$, x , 2 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x .

(Μονάδες 9)

β) Αν οι αριθμοί $4 - x$, x , 2 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x .

(Μονάδες 9)

γ) Να βρεθεί ο αριθμός x ώστε οι αριθμοί $4 - x$, x , 2 να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 7)

4.GI_A_ALG_2_1100

Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 - 5\beta x + 2\beta^2 = 0$ (1), με παράμετρο $\beta > 0$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = 2\beta$ και $x_2 = \frac{\beta}{2}$

(Μονάδες 12)

β) Αν x_1 , x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1 , β , x_2 , με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

(Μονάδες 13)

5.GI_A_ALG_2_3828

Οι αριθμοί $\kappa - 2$, 2κ και $7\kappa + 4$, $\kappa \in \mathbb{N}$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (a_n) .

α) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 4$ και να βρείτε το λόγο λ της προόδου.

(Μονάδες 12)

β) i) Να εκφράσετε το 2° όρο, τον 5° και τον 4° όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του a_1 .

(Μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι $a_2 + a_5 = 4(a_1 + a_4)$

(Μονάδες 7)

6.GI_A_ALG_2_4288

α) Να βρείτε, για ποιες τιμές του x , οι αριθμοί $x + 4$, $2 - x$, $6 - x$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 13)

β) Αν $x = 5$ και ο $6 - x$ είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρική προόδου, να βρείτε

i) το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 6)

ii) τον πρώτο όρο a_1 της προόδου.

(Μονάδες 6)

7.GI_A_ALG_2_4315

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (a_n) , για την οποία ισχύει $\frac{a_5}{a_2} = 27$.

α) Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 3$.

(Μονάδες 10)

β) Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο a_1 .

(Μονάδες 15)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^ο - ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

(9)

1.GI_A_ALG_2_488

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A .

(Μονάδες 5)

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - 5x + 3$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$

(Μονάδες 10)

2.GI_A_ALG_2_510

Δίνεται η συνάρτηση f , με: $f(x) = \begin{cases} 2x-5, & x \leq 3 \\ x^2, & 3 < x < 10 \end{cases}$

α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 25$.

(Μονάδες 9)

3.GI_A_ALG_2_999

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$.

(Μονάδες 12)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-2}{x^2-5x+6}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης.

(Μονάδες 5)

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = \frac{1}{x-3}$

(Μονάδες 8)

4.GI_A_ALG_2_1042

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2x+4, & x < 0 \\ x-1, & x \geq 0 \end{cases}$

α) Να δείξετε ότι $f(-1) = f(3)$

(Μονάδες 13)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε: $f(x) = 0$

(Μονάδες 12)

5.GI_A_ALG_2_1082

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x+2}{x^2-x-6}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 15)

β) Να δείξετε ότι: $f(2) + f(4) = 0$.

(Μονάδες 10)

6.GI_A_ALG_2_1096

Η απόσταση y (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μια πόλη A , μετά από x λεπτά, δίνεται από τη σχέση:

$$y = 35 + 0,8x$$

α) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη A μετά από 25 λεπτά;

(Μονάδες 12)

β) Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη A ;

(Μονάδες 13)

7.GI_A_ALG_2_1302

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \begin{cases} 8-x & \text{αν } x < 0 \\ 2x+5 & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-5) = f(4)$.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x) = 9$.

(Μονάδες 12)

8.GI_A_ALG_2_1532

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3-16x}{x-4}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι, για τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει $f(x) = x^2 + 4x$.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 32$.

(Μονάδες 10)

9.GI_A_ALG_2_1537

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) - f(2)$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{5}{2}$.

(Μονάδες 15)

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

(7)

1.GI_A_ALG_2_477

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 7)

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f .

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες xx' και yy' .

(Μονάδες 9)

2.GI_A_ALG_2_492

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x - 15$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $f(-1) + f(0) + f(1)$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης της f με τους άξονες.

(Μονάδες 15)

3.GI_A_ALG_2_1024

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$, όπου a, β πραγματικοί αριθμοί.

α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 6)$, $B(-1, 4)$, να βρείτε τις τιμές των a, β .

(Μονάδες 13)

β) Αν $a = 1$ και $\beta = 5$, να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 12)

4.GI_A_ALG_2_1090

Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού a , ώστε το σημείο $M\left(a, \frac{1}{8}\right)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 12)

5.GI_A_ALG_2_1542

α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $A = x^3 - x^2 + 3x - 3$.

(Μονάδες 13)

β) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{3}{x}$ και $g(x) = x^2 - x + 3$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $A(1, 3)$.

(Μονάδες 12)

6.GI_A_ALG_2_1553

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3$ και $g(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g τέμνονται σε τρία σημεία τα οποία και να βρείτε.

(Μονάδες 13)

β) Αν A , O , B είναι τα σημεία τομής των παραπάνω γραφικών παραστάσεων, όπου $O(0,0)$, να αποδείξετε ότι A , B είναι συμμετρικά ως προς το O .

(Μονάδες 12)

7.GI_A_ALG_2_3381

Δίνεται η συνάρτηση g , με $g(x) = \frac{2x^2 - 4x + \mu}{x+1}$, όπου $\mu \in \mathbb{R}$.

Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης g διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$,

α) να δείξετε ότι $\mu = -6$.

(Μονάδες 9)

β) να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 9)

γ) για $\mu = -6$ να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης.

(Μονάδες 7)

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = ax + \beta$ (9)

1.GI_A_ALG_2_1283

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 + 2x - 3$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$$

και στη συνέχεια να απλοποιήσετε τον τύπο της.

(Μονάδες 9)

γ) Να παραστήσετε γραφικά την παραπάνω συνάρτηση.

(Μονάδες 8)

2.GI_A_ALG_2_1293

Η θερμοκρασία T σε βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$), σε βάθος x χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης, δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση:

$$T = 15 + 25 \cdot x, \text{ όταν } 0 \leq x \leq 200$$

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία ενός σημείου που βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι ίση με 290°C . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

γ) Σε ποιο βάθος μπορεί να βρίσκεται ένα σημείο, στο οποίο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 440°C ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

3.GI_A_ALG_2_1529

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$, με $a, \beta \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(0) = 5 \text{ και } f(1) = 3.$$

α) Να δείξετε ότι $a = -2$ και $\beta = 5$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 7)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 8)

4.GI_A_ALG_2_2212

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{2x^2 - 6|x|}{2|x| - 6}$

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = |x|$, για κάθε $x \in A$

(Μονάδες 10)

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x > 0$.

(Μονάδες 5)

5.GI_A_ALG_2_3378

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 6)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-2	-1		1	2	
y			-1			-3

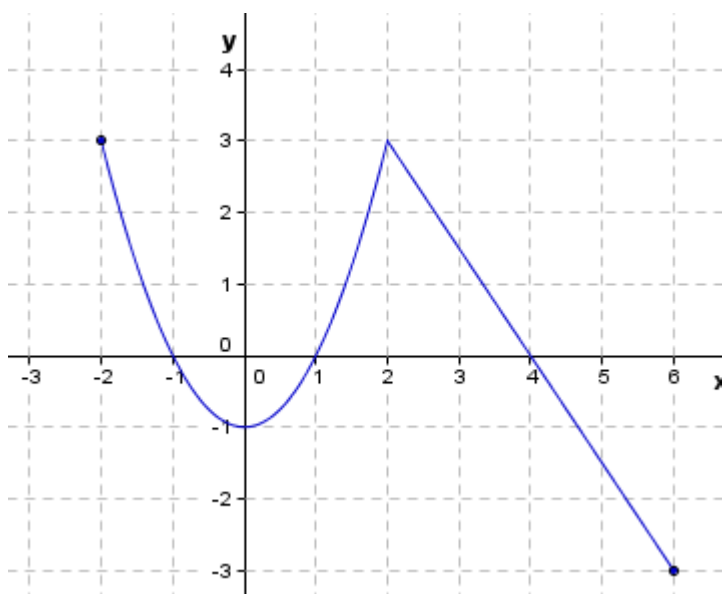
(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες.

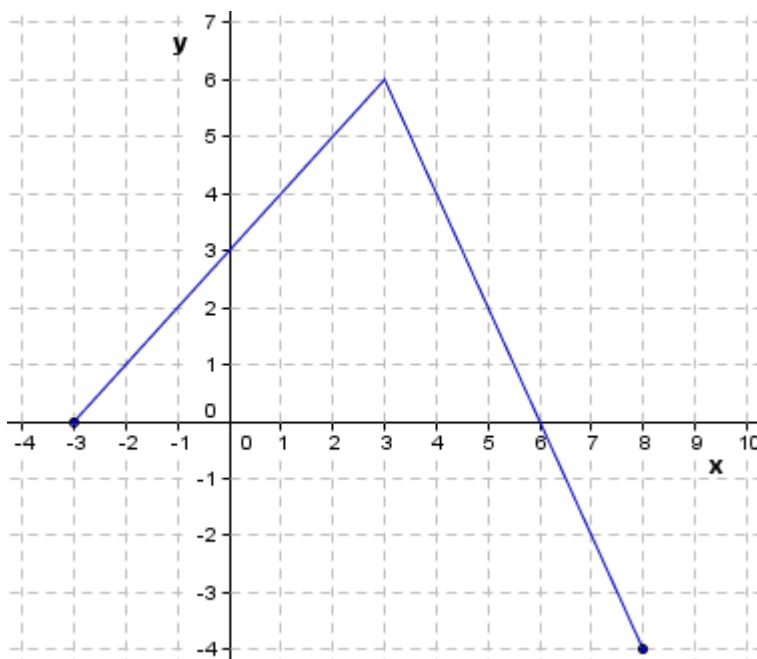
(Μονάδες 6)

δ) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα του πεδίου ορισμού στα οποία η συνάρτηση παίρνει αρνητικές τιμές.

(Μονάδες 7)



6.GI_A_ALG_2_3379



-38- Τράπεζα θεμάτων Άλγεβρας Α' Λυκείου – Φεργαδιώτης Αθανάσιος

Στο παραπάνω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 6)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-3	-1	0	3		
y					-2	-4

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες.

(Μονάδες 6)

δ) Να προσδιορίσετε το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές.

(Μονάδες 7)