ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΦΥΣΙΚΗΣ Λυκείου "ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ" 2024 - Β΄ Τάξη

8/3/2024

ΟΔΗΓΙΕΣ

1. Η αναλυτική λύση των θεμάτων θα γίνει γραπτώς σε τετράδιο ή σε φύλλα Α4 που θα σας δοθούν. Στον κατάλληλο χώρο του τετραδίου ή στην πρώτη σελίδα Α4 θα αναγράψετε τα ονομαστικά στοιχεία σας
2. Όλα τα ζητούμενα αριθμητικά αποτελέσματα πρέπει ΟΠΩΣΔΗΠΟΤΕ να μεταφερθούν στο ***Φύλλο Απαντήσεων*** που θα βρείτε αμέσως μετά τις εκφωνήσεις και το τυπολόγιο..
3. Όπου ζητούνται γραφήματα θα σχεδιαστούν στους ειδικούς χώρους του ***Φύλλου Απαντήσεων***.
4. Στο τέλος της εξέτασης θα παραδώσετε το τετράδιο (ή τα φύλλα Α4) με τις αναλυτικές λύσεις σας ΜΑΖΙ με το φύλλο απαντήσεων.
5. Το Φύλλο Απαντήσεων θα συρραφεί στο τετράδιο (ή στα φύλλα Α4).
6. Τα ονομαστικά στοιχεία **ΔΕΝ** θα καλυφθούν με μαύρο αυτοκόλλητο.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1ο ΘΕΜΑ

Από τη δεκαετία του 1960, όλα τα μοντέλα αυτοκινήτου έχουν ηλεκτρικό σύστημα που λειτουργεί με τάση τροφοδοσίας («πηγή») $12\ V$.
Τον Δεκέμβριο του 2023, ο Elon Musk, γενικός διευθυντής της αυτοκινητοβιομηχανίας Tesla, έδωσε συνέντευξη για το νέο μοντέλο ηλεκτρικού αυτοκινήτου της εταιρίας, το Cybertruck, και για την αλλαγή της τάσης λειτουργίας του ηλεκτρικού συστήματος του σε σχέση με όλα τα άλλα μοντέλα αυτοκινήτου.
Απόσπασμα από τη συνέντευξη:
Ερώτηση: «Πόσο δύσκολο ήταν να μετακινηθείτε από τα $12\ V$ στα $48\ V$, γιατί όταν κυκλοφόρησε το προηγούμενο σας μοντέλο, περίμενα να το είχατε κάνει από τότε και περίμενα μία μεγάλη μείωση του βάρους και περιορισμό των καλωδίων, αλλά τελικά το κάνατε τώρα. Πόσο δύσκολο ήταν;»
Elon Musk: «Είναι πολύ δύσκολο να το αλλάξεις από τα $12\ V$ στα $48\ V$ γιατί όλα τα υπόλοιπα περιφερειακά εξαρτήματα τα οποία συνδέονται στο κύκλωμα θα πρέπει και αυτά να είναι φτιαγμένα για $48\ V$ (…) και υπάρχουν εκατοντάδες πράγματα τα οποία συνδέονται (…) όπως ο κινητήρας του παραθύρου, οι αερόσακοι, ο κινητήρας που ρυθμίζει τη θέση του καθίσματος, τα φωτάκια, τα πάντα δουλεύουν σε $12\ V$, οπότε ολόκληρη η εφοδιαστική αλυσίδα, όλη η σχεδιαστική υποδομή είναι φτιαγμένη για $12\ V$ και γι' αυτό έχει κολλήσει σε αυτή την χαμηλή τιμή τάσης για πολύ καιρό και νομίζω πως οι άνθρωποι που ξέρουν λίγο από ηλεκτρολογική μηχανική, δε χρειάζεται να ξέρεις πολλά, αλλά λίγα, θα καταλάβουν πως χρειάζεσαι υψηλότερη τάση ώστε να μειώσεις τις απώλειες λόγω της αντίστασης. Η θέρμανση κάθε καλωδίου είναι I^2R, δηλαδή το τετράγωνο του ρεύματος επί την αντίσταση, οπότε αν θέλεις να πάρεις μία συγκεκριμένη ισχύ, καθώς ανεβάζεις την τάση θα μικρύνεις την ένταση μια και τάση επί ένταση ισούται με την ισχύ σου, ώστε να κρατήσεις την ισχύ σταθερή, αλλά η θέρμανση είναι ανάλογη με το τετράγωνο του ρεύματος, οπότε θέλεις να αυξήσεις την τάση ώστε να μειώσεις την ένταση, και έτσι να μειώσεις τη θέρμανση του καλωδίου, με τελικό αποτέλεσμα πως μπορείς να έχεις πολύ λεπτότερα σύρματα οπότε καθώς αυξάνεις την τάση μπορείς να μειώσεις το πάχος των καλωδίων, οπότε μπορείς να έχεις πολύ, να χρησιμοποιήσεις πολύ λιγότερο, συνοπτικά, χαλκό και επίσης το συνολικό βάρος του χαλκού γίνεται πολύ λιγότερο καθώς αυξάνεις την τάση.»

Στα παρακάτω ερωτήματα χρησιμοποιήστε τις πληροφορίες που υπάρχουν στο κείμενο του αποσπάσματος της συνέντευξης, καθώς και τα εξής δεδομένα:

- Σε ένα σύγχρονο αυτοκίνητο υπάρχουν, κατά μέσο όρο, 1500 μέτρα χάλκινων καλωδίων.
- Ένα μέσο κόστος για τον χαλκό είναι περίπου 8 € ανά κιλό.
- Τα χάλκινα καλώδια σε ένα κανονικό αυτοκίνητο (δηλαδή αυτοκίνητο στο οποίο το ηλεκτρικό σύστημα λειτουργεί στα 12 V) έχουν διάφορες διαμέτρους με μία μέση διάμετρο στα $4{,}0\ mm$.

- Η πυκνότητα του χαλκού είναι ίση με $8{,}96\ g/cm^3$
- Η ειδική αντίσταση του χαλκού είναι $1{,}72 \times 10^{-8}\ \Omega m$
- Τα καλώδια έχουν κυλινδρικό σχήμα. Ο όγκος κυλίνδρου μήκους L και ακτίνας r είναι $V = \pi r^2 L$

Οι απαντήσεις να γραφούν με ακρίβεια δύο σημαντικών ψηφίων.

Α.1. Να εξηγήσετε, με βάση το κείμενο, πώς φαίνεται ότι η σύνδεση των εξαρτημάτων στο ηλεκτρικό σύστημα του αυτοκινήτου είναι παράλληλη.

Α.2. Σε κάποιο σημείο διαβάζουμε «Η θέρμανση κάθε καλωδίου είναι I^2R». Να εξηγήσετε σε ποιο φυσικό μέγεθος αναφέρεται η συγκεκριμένη φράση.

Α.3. Η ισχύς που χρειάζεται ο ηλεκτρικός κινητήρας που ανεβοκατεβάζει το παράθυρο ενός αυτοκινήτου είναι $144\ W$.

Α.3.α. Να υπολογίσετε την ένταση του ρεύματος που θα διαρρέει τα καλώδια που τροφοδοτούν αυτόν τον κινητήρα εάν λειτουργεί i) στα $12\ V$, ii) στα $48\ V$

Α.3.β. Το μήκος των συγκεκριμένων καλωδίων είναι $1{,}5\ m$ και είναι από χαλκό. Να υπολογίσετε την αντίσταση των καλωδίων σε ένα κανονικό αυτοκίνητο ($12\ V$).

Α.3.γ. Να υπολογίσετε τον ρυθμό παραγωγής θερμότητας στα καλώδια αυτά (για τα $12\ V$).

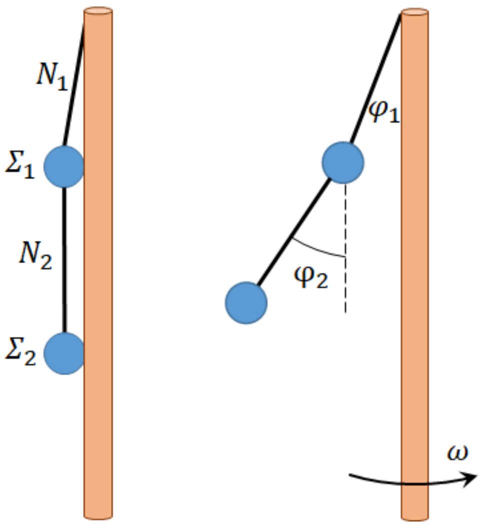
Α.3.δ. Λόγω της ενέργειας που υπολογίστηκε στο ερώτημα (γ), τα καλώδια θερμαίνονται. Για να αντέξουν τη θέρμανση και να μην κινδυνεύσουν να καταστραφούν, πρέπει έχουν αρκετά μεγάλη μάζα. Μάλιστα, η απαιτούμενη κάθε φορά μάζα είναι ανάλογη του ρυθμού παραγωγής θερμότητας. Αν r_1 είναι η μέση ακτίνα των καλωδίων όταν η τάση λειτουργίας είναι 12 V και r_2 η απαιτούμενη μέση ακτίνα των καλωδίων όταν η τάση γίνει $48\ V$ να αποδείξετε πως $\frac{r_1}{r_2} = 2$

Α.4. Χρησιμοποιώντας την απάντηση του ερωτήματος 3δ να υπολογίσετε τη μείωση του κόστους των καλωδίων για όλο το αυτοκίνητο με την αλλαγή από τα $12\ V$ στα $48\ V$.

Α.5. Στην ερώτηση προς τον Elon Musk αναφέρεται άλλος ένας λόγος για τον οποίο η αύξηση της τάσης θα οδηγήσει σε μείωση του κόστους. Εξηγήστε.

2ο ΘΕΜΑ

Στην κορυφή κατακόρυφης, άκαμπτης και αβαρούς κυλινδρικής ράβδου αμελητέας διατομής, δένουμε το ένα άκρο ιδανικού ανελαστικού νήματος N_1, αμελητέας μάζας. Στο άλλο άκρο του νήματος προσδένουμε σφαιρίδιο Σ_1. Στο κάτω άκρο του Σ_1 στερεώνουμε νήμα N_2, όμοιο με το N_1. Στο ελεύθερο άκρο του N_2 προσδένουμε πανομοιότυπο σφαιρίδιο Σ_2. Με κατάλληλη διαδικασία θέτουμε την ράβδο σε περιστροφή υπό σταθερή γωνιακή ταχύτητα περί τον άξονα συμμετρίας της, έτσι ώστε τα σώματα Σ_1, Σ_2 και τα νήματα N_1, N_2 να παραμένουν στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο. Παρατηρούμε ότι τα νήματα εκτρέπονται από την κατακόρυφο κατά γωνίες φ_1 και φ_2 αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\varphi_2 > \varphi_1$.



3ο ΘΕΜΑ

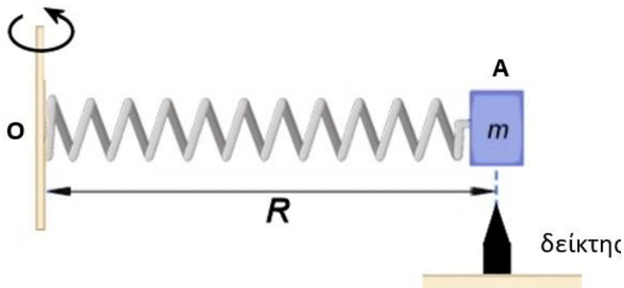
Σώμα μάζας $M = 100\ kg$ εκτοξεύεται από έναν κανόνι. Σε κάποιο σημείο της τροχιάς του το σώμα εκρήγνυται και διασπάται (χωρίς απώλεια μάζας) σε δύο κομμάτια που κινούνται με αρχικές ορμές μέτρων $P_1 = 36 \cdot 10^3\ Kg \cdot m/s$ και $P_2 = 24 \cdot 10^3\ Kg \cdot m/s.$ Οι φορείς των αρχικών ορμών των δύο κομματιών σχηματίζουν γωνία $\theta = 60°$, ενώ ο λόγος μαζών του δεύτερου κομματιού ως προς το πρώτο είναι, έστω, λ. Θεωρούμε ότι η έκρηξη και η διάσπαση πραγματοποιούνται ακαριαία. Για κάποια τιμή του λ η μεταβολή ενέργειας ΔE λόγω της έκρηξης είναι η ελάχιστη δυνατή.

Γ.1. Να υπολογίσετε αυτή την ελάχιστη τιμή ΔE_{min} της μεταβολής της ενέργειας λόγω της έκρηξης.
Γ.2. Να υπολογίσετε την τιμή του λ, στην οποία αντιστοιχεί η ΔE_{min}.

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

4ο ΘΕΜΑ

Ένα μικρό σώμα Α, μάζας $m = 0{,}2\ kg$, είναι δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου. Με τη βοήθεια κατάλληλου μηχανισμού το σύστημα μπορεί να εκτελεί (με αμελητέες τριβές) ομαλή κυκλική κίνηση σε οριζόντιο επίπεδο με το κέντρο της τροχιάς να βρίσκεται στο άλλο ακλόνητο άκρο **Ο** του ελατηρίου. Κατ' αυτό τον τρόπο η δύναμη που ασκεί το ελατήριο στο σώμα Α παίζει το ρόλο της απαραίτητης κεντρομόλου δύναμης. Κάτω από το περιστρεφόμενο σώμα μπορεί να κινείται μικρός δείκτης, που κατά την περιστροφή του συστήματος τον τοποθετούμε στην ίδια κατακόρυφη ακριβώς κάτω από το σώμα Α, ώστε με τη βοήθειά του να μετράμε την απόσταση από τον άξονα περιστροφής **Ο** μέχρι το κέντρο του σώματος **Α** (που το θεωρούμε ως υλικό σημείο). Η απόσταση αυτή όταν το σύστημα δεν περιστρέφεται ισούται με το φυσικό μήκος L_o του ελατηρίου, ενώ όταν περιστρέφεται ισούται με την ακτίνα R της κυκλικής τροχιάς.



Εικόνα 1: Απλοποιημένη αναπαράσταση της πειραματικής διάταξης

Έτσι μετρήθηκε το φυσικό μήκος του ελατηρίου και βρέθηκε ίσο με $L_o = 30\ cm$.

Θέτουμε σε περιστροφή το σύστημα με συγκεκριμένη συχνότητα. Τοποθετούμε το δείκτη ακριβώς κάτω από το περιστρεφόμενο σώμα και μετράμε την ακτίνα R της κυκλικής του τροχιάς, καθώς και το χρονικό διάστημα Δt που απαιτείται για να περάσει το σώμα $N = 10$

φορές πάνω από το δείκτη. Μετά αλλάζουμε τη συχνότητα περιστροφής και επαναλαμβάνουμε τις μετρήσεις, ώστε να πάρουμε συνολικά πέντε σειρές μετρήσεων.

Οι μετρήσεις που πήραμε φαίνονται στον Πίνακα 1, που υπάρχει στο Φύλλο Απαντήσεων.

Δ.1. Να συμπληρώσετε και τις άλλες στήλες του Πίνακα 1. Να γράψετε τα αποτελέσματα με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων. Σε κάθε περίπτωση η περίοδος της κυκλικής κίνησης υπολογίζεται ως $T = \frac{\Delta t}{N}$ και η επιμήκυνση του ελατηρίου ως $\Delta L = R - L_o$.

Δ.2. Να αποδείξετε θεωρητικά πως η περίοδος T της ομαλής κυκλικής κίνησης του σώματος είναι ίση με: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m \cdot R}{k \cdot \Delta L}}$, από την οποία προκύπτει $T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot m}{k}\left(\frac{R}{\Delta L}\right)$. Τι σημαίνει αυτό για τη μορφή της γραφικής παράστασης $T^2 = f\left(\frac{R}{\Delta L}\right)$;

Δ.3. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση $T^2 = f\left(\frac{R}{\Delta L}\right)$.

Δ.4. Να περιγράψετε μία μέθοδο για να υπολογίσετε την σταθερά k του ελατηρίου με τη βοήθειά της γραφικής παράστασης που κατασκευάσατε στο προηγούμενο βήμα.

Δ.5. Να υπολογίσετε την σταθερά k του ελατηρίου.

Όπου απαιτείται μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την προσέγγιση $\pi^2 \approx 10$.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΦΥΣΙΚΗΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Οριζόντια Βολή - Κυκλική Κίνηση

$x = v_0 t$	$v_x = v_0$	$f = \frac{1}{T}$	$\omega = \frac{\theta}{t}$	$a_k = \frac{v^2}{R}$
$y = \frac{1}{2}gt^2$	$v_y = gt$	$v = \frac{s}{t}$	$\omega = \frac{2\pi}{T}$	$F_k = ma_k$
$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$	$f = \frac{N}{t}$	$v = \frac{2\pi R}{T}$	$v = \omega R$	$F_k = \frac{mv^2}{R}$

Ορμή

$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$	$\Sigma\vec{F}_{\varepsilon\xi} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{p}_{\text{ολ(αρχ)}} = \vec{p}_{\text{ολ(τελ)}}$

Κινητική Θεωρία των Αερίων

$pV = \text{σταθ. για } n, T = \text{σταθ.}$ Νόμος του Boyle	$\frac{p}{T} = \text{σταθ. για } n, V = \text{σταθ.}$ Νόμος του Charles	$\frac{V}{T} = \text{σταθ. για } n, p = \text{σταθ.}$ Νόμος του Gay-Lussac

$pV = nRT$	$p = \frac{\rho}{M}RT$	$p = \frac{1}{3}\frac{Nm\bar{v^2}}{V}$	$\bar{K} = \frac{3}{2}kT$	$v_{\varepsilon\nu} = \sqrt{\bar{v^2}}$	$v_{\varepsilon\nu} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$

Θερμοδυναμική

$\Delta W = p\Delta V$	$W = nRT\ln\frac{V_2}{V_1}$	$W = \frac{p_\tau V_\tau - p_\alpha V_\alpha}{1-\gamma}$	$e = 1 - \frac{\lvert Q_c\rvert}{Q_h}$
$U = \frac{3}{2}nRT$	$pV^\gamma = \text{σταθ.}$		
$Q = \Delta U + W$	$W = -\Delta U$	$e = \frac{W}{Q_h}$	$e = 1 - \frac{T_c}{T_h}$ (Carnot)

Ηλεκτρικό Πεδίο

$F = k_c\frac{\lvert q_1 q_2\rvert}{r^2}$	$E = k_c\frac{\lvert Q\rvert}{r^2}$	$U_\infty = 0, \quad V_\infty = 0$	$E = \frac{V}{d}$	$C = \frac{Q}{V}$
$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$	$W_{A\to B} = U_A - U_B$	$U_A = W_{A\to\infty}$	$x = v_0 t \pm \frac{1}{2}at^2$	$C = \epsilon\epsilon_0\frac{S}{\ell}$
	$V = \frac{U}{q}$	$U = k_c\frac{Qq}{r}$	$v = v_0 \pm at$	
$E = \frac{F}{\lvert q\rvert}$	$W_{A\to B} = q(V_A - V_B)$	$V = k_c\frac{Q}{r}$	$a = \frac{qE}{m} = \frac{qV}{md}$	$U = \frac{1}{2}CV^2$

Βαρυτικό Πεδίο

$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$	$V_A = \frac{W_{A\to\infty}}{m}$	$V = -G\frac{M}{r}$	$V = -G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma + h}$
$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$	$U_\infty = 0$	$U = -G\frac{m_1 m_2}{r}$	$g_0 = G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2}$
$W_{A\to B} = U_A - U_B$	$V_\infty = 0$		
$W_{A\to B} = m(V_A - V_B)$	$g = G\frac{M}{r^2}$	$g = G\frac{M_\Gamma}{(R_\Gamma + h)^2}$	$v_{\text{διαφυγής}} = \sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma + h}}$

Ηλεκτρικό Ρεύμα

$I = \frac{q}{t}$	$I = \frac{V}{R}$	$V = V_1 + V_2$	$\frac{1}{R_{\text{ολ}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$	$P = I^2 R$	$\mathcal{E} = \frac{P}{I}$
$\Sigma I = 0$	$R = \rho\frac{\ell}{S}$	$R_{\text{ολ}} = R_1 + R_2$	$W = VIt$	$P = \frac{V^2}{R}$	$V_\pi = \mathcal{E} - Ir$
$\Sigma(\Delta V) = 0$	$\rho = \rho_0(1 + a\theta)$	$I = I_1 + I_2$	$P = \frac{W}{t}$	$Q = I^2 Rt$	$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{\text{ολ}}} = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$
$R = \frac{V}{I}$	$I = I_1 = I_2$	$V = V_1 = V_2$	$P = VI$	$\mathcal{E} = \frac{W}{q}$	

Φως

$c = \lambda f$	$n = \dfrac{\lambda_0}{\lambda}$	$K = k_c \dfrac{e^2}{2r}$	$E = -k_c \dfrac{e^2}{2r}$	$E = \dfrac{E_1}{n^2}$
$E = hf$	$L = mvr$			
$n = \dfrac{c_0}{c}$	$E_\alpha - E_\tau = hf$	$U = -k_c \dfrac{e^2}{r}$	$r_n = n^2 r_1$	$\lambda_{\min} = \dfrac{hc}{eV}$

Σταθερές

$R = 8,314\,\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\cdot K}}$	$G = 6,67\times 10^{-11}\,\dfrac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}}$	$e = 1,6\times 10^{-19}\,\mathrm{C}$	$\epsilon_0 = 8,85\times 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$
$k = 1,38\times 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$	$M_\Gamma = 5,97\times 10^{24}\,\mathrm{kg}$	$h = 6,63\times 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$	$m_e = 9,1\times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
	$R_\Gamma = 6400\,\mathrm{km}$	$E_1 = -13,6\,\mathrm{eV}$	$m_p = 1,67\times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
$k_c = 9\times 10^9\,\dfrac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{C^2}}$	$g_0 = 9,8\,\mathrm{m/s^2}$	$1\,\mathrm{eV} = 1,6\times 10^{-19}\,\mathrm{J}$	$c = 3\times 10^8\,\mathrm{m/s}$
		$1\,\mathrm{atm} = 1,013\times 10^5\,\mathrm{Pa}$	

Σύμβολα

x, y : Θέση	ω : Γωνιακή ταχύτητα	e : Συντελεστής απόδοσης	c : Ταχύτητα του φωτός
v : Ταχύτητα	W : Έργο	q, Q : Φορτίο	λ : Μήκος κύματος
a : Επιτάχυνση	K : Κινητική ενέργεια	V : Δυναμικό, Διαφορά δυναμικού	L : Στροφορμή
m, M : Μάζα	U : Δυναμική ενέργεια	C : Χωρητικότητα	E : Ένταση Ηλεκτρικού Πεδίου
F : Δύναμη	p : Ορμή	R : Αντίσταση	g : Επιτάχυνση λόγω βαρύτητας
s : Διάστημα	ρ : Πυκνότητα	ρ : Ειδική αντίσταση	I : Ένταση ηλεκτρικού ρεύματος
f : Συχνότητα	p : Πίεση	P : Ισχύς	
T : Περίοδος	Q : Θερμότητα	$\mathcal{E}$: ΗΕΔ πηγής	
θ : Γωνία	U : Εσωτερική ενέργεια		

Μονάδες Μέτρησης Μεγεθών

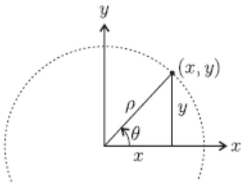
μέτρο, m	νιούτον, N	τζούλ, J	κουλόμπ, C	Ωμ, Ω
χιλιόγραμμο, kg	ακτίνιο, rad	βάτ, W	βόλτ, V	αμπέρ, A
δευτερόλεπτο, s	χέρτζ, Hz	πασκάλ, Pa	φαράντ, F	

Πολλαπλάσια - Υποπολλαπλάσια

$10^{12} \rightarrow$ Tera (T)	$10^{3} \rightarrow$ kilo (k)	$10^{-6} \rightarrow$ micro (μ)
$10^{9} \rightarrow$ Giga (G)	$10^{-2} \rightarrow$ centi (c)	$10^{-9} \rightarrow$ nano (n)
$10^{6} \rightarrow$ Mega (M)	$10^{-3} \rightarrow$ milli (m)	$10^{-12} \rightarrow$ pico (p)

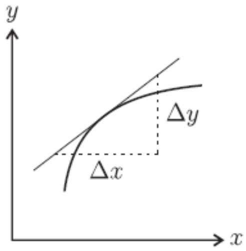
Μαθηματικό Βοήθημα

θ (°)	ημ θ	συν θ	εφ θ
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	–
180°	0	−1	0
270°	−1	0	–



$\rho^2 = x^2 + y^2$

ημ $\theta = \frac{y}{\rho}$, συν $\theta = \frac{x}{\rho}$, εφ $\theta = \frac{y}{x}$



κλίση $= \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

ΦΥΛΛΟ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

Επώνυμο: …………………………………. Όνομα: …………………… Τάξη: …

Πατρώνυμο: ………………. Μητρώνυμο: …………………

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1ο ΘΕΜΑ

Α.1. (στο τετράδιο) , **Α.2.** (στο τετράδιο) , **Α.3α.** $I_1 =$…… , $I_2 =$…… , **Α.3β.** $R =$……….

Α.3γ. $P =$…...... , **Α.3δ.** $\frac{r_1}{r_2} =$……..
Α.4. Μείωση κόστους: …………………………. , **Α.5.** (στο τετράδιο)

2ο ΘΕΜΑ

(στο τετράδιο)

3ο ΘΕΜΑ

Γ.1. $\Delta E_{min} =$………………….. **Γ.2.** $\lambda =$…………………..

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

4ο ΘΕΜΑ

Δ.1.

Πίνακας 1: Πειραματικά δεδομένα

α/α	$R\ (m)$	$\Delta t\ (s)$	$T = \left(\frac{\Delta t}{N}\right)\ (s)$	$T^2\ (s^2)$	$\Delta L = R - L_o\ (m)$	$(R/\Delta L)$
1	0,32	20,7				
2	0,34	15,1				
3	0,36	12,5				
4	0,38	11,4				
5	0,40	10,5				

Δ.2. (στο τετράδιο)

Δ.3.

Δ.4. …………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

Δ.5. $k =$…………………..

Καλή επιτυχία!

Συνοπτικές Απαντήσεις

1ο ΘΕΜΑ

Α.1. Στο κείμενο αναφέρεται πως όλα τα περιφερειακά εξαρτήματα λειτουργούν με τάση 12 V (και θα πρέπει να αλλαχθούν από εξαρτήματα που θα λειτουργούν σε τάση 48 V με την αλλαγή της τάσης). Για να λειτουργούν όλα με την ίδια τάση σημαίνει πως είναι συνδεδεμένα παράλληλα.

(2 μόρια)

Α.2. Πρόκειται για την ισχύ ή τον ρυθμό με τον οποίο εκλύεται (παράγεται) θερμότητα στα καλώδια.

(2 μόρια)

Α.3α. i) $P = VI \Longrightarrow 144\,W = (12\,V)I \Leftrightarrow I = 12\,A$
ii) $P = VI \Longrightarrow 144\,W = (48\,V)I \Leftrightarrow I = 3{,}0\,A$

(4 μόρια)

Α.3β. $R = \rho\frac{L}{S} = (1{,}72 \times 10^{-8}\,\Omega m)\frac{1{,}5\,m}{\pi\,(0{,}0020\,m)^2} = 0{,}0021\,\Omega$

(4 μόρια)

Α.3γ. $P = I^2R = (12\,A)^2(0{,}0021\,\Omega) = 0{,}30\,W$

(3 μόρια)

Α.3δ. $P = I^2R = I^2\rho\frac{L}{S}$
Εφαρμόζοντας για κάθε τάση και διαιρώντας κατά μέλη:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{{I_1}^2\rho\frac{L}{S_1}}{{I_2}^2\rho\frac{L}{S_2}}$$

Είναι $L_1 = L_2 = L$ γιατί το μήκος του καλωδίου εξαρτάται από την απόσταση της πηγής από τον κινητήρα.
Είναι $\frac{I_1}{I_2} = 4$, όπως υπολογίστηκε στο ερώτημα 3α
Επειδή ρυθμός παραγωγής θερμότητας (ισχύς) είναι ανάλογη της μάζας του καλωδίου, είναι $\frac{P_1}{P_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{\rho V_1}{\rho V_2} = \frac{\rho L\pi {r_1}^2}{\rho L\pi {r_2}^2} = \frac{{r_1}^2}{{r_2}^2}$
Συνδυάζοντας όλες τις παραπάνω σχέσεις:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{{I_1}^2\rho\frac{L}{S_1}}{{I_2}^2\rho\frac{L}{S_2}} \Longrightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{{I_1}^2 S_2}{{I_2}^2 S_1} \Longrightarrow \frac{{r_1}^2}{{r_2}^2} = 4^2\frac{{r_2}^2}{{r_1}^2} \Leftrightarrow \frac{{r_1}^4}{{r_2}^4} = 16 \Longrightarrow \frac{r_1}{r_2} = 2$$

(5 μόρια)

Α.4. Η απαιτούμενη ακτίνα είναι η μισή, δηλαδή $r_2 = 0{,}001\,m$. Ο συνολικός όγκος των καλωδίων θα είναι:
Πριν την αλλαγή

$$V_1 = \pi{r_1}^2L_1 = \pi(0{,}002\,m)^2(1500\,m) = 0{,}0188\,m^3$$

Μετά την αλλαγή

$$V_2 = \pi{r_2}^2L_2 = \pi(0{,}001\,m)^2(1500\,m) = 0{,}0047\,m^3$$

Η μάζα των καλωδίων είναι αντίστοιχα:
Πριν την αλλαγή (d η πυκνότητα)

$$m_1 = dV_1 = \left(8960\frac{kg}{m^3}\right)(0{,}0188\, m^3) = 169\, kg$$

Μετά την αλλαγή

$$m_2 = dV_2 = \left(8960\frac{kg}{m^3}\right)(0{,}047\, m^3) = 42\, kg$$

'Αρα θα χρειαστούν $169\, kg - 42\, kg = 127\, kg$ λιγότερα.

Η μείωση του κόστους θα είναι $(127\, kg) \times \left(8\frac{€}{kg}\right) = 1016\, € \cong 1000\, €$

(4 μόρια)

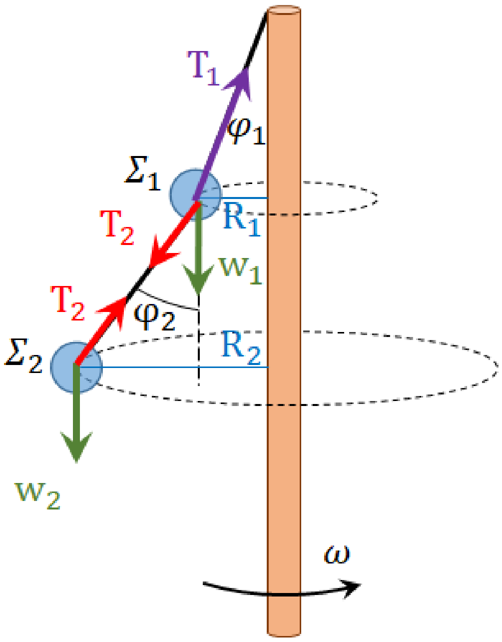
Α.5. Στην ερώτηση προς τον Elon Musk αναφέρεται πως «περίμενα μία μεγάλη μείωση του βάρους και περιορισμό των καλωδίων». Η συνολική μάζα του αυτοκινήτου θα μειωθεί κατά $127\, kg$ λόγω της μείωσης των καλωδίων, άρα το αυτοκίνητο θα είναι πιο ελαφρύ, που σημαίνει πως το αυτοκίνητο θα χρειάζεται λιγότερη ηλεκτρική ενέργεια για να κινηθεί, άρα το κόστος για την κίνησή του θα είναι μικρότερο.

(1 μόριο)

2ο ΘΕΜΑ

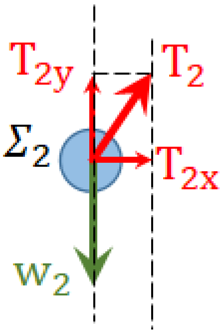
Έστω l το μήκος κάθε νήματος και m η μάζα κάθε σώματος. Το σώμα Σ_2 δέχεται το βάρος του $w_2 = mg$ και την τάση T_2.

(2 μόρια)



Αναλύουμε την τάση T_2 σε οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα, έστω $T_{2x} = T_2 ημφ_2$ και $T_{2y} = T_2 συνφ_2$ αντίστοιχα.

(2 μόρια)



Στον κατακόρυφο άξονα το Σ_2 ισορροπεί, άρα:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_{2y} = w_2 \Rightarrow T_2 \sigma\upsilon\nu\varphi_2 = w_2 \qquad (1)$$

(2 μόρια)

Στο οριζόντιο επίπεδο το Σ_2 εκτελεί κυκλική ομαλή κίνηση, άρα:

$$\Sigma F_x = F_\kappa \Rightarrow T_{2x} = F_\kappa \Rightarrow T_2\eta\mu\varphi_2 = \frac{m_2 {\upsilon_2}^2}{R_2} \Rightarrow T_2\eta\mu\varphi_2 = \frac{m(\omega \cdot R_2)^2}{R_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_2\eta\mu\varphi_2 = m \cdot \omega^2 \cdot R_2 \qquad (2)$$

(2 μόρια)

Από την εκφώνηση γνωρίζουμε ότι η διατομή της ράβδου είναι αμελητέα, συνεπώς:

$$R_2 = l \cdot \eta\mu\varphi_1 + l \cdot \eta\mu\varphi_2 \Rightarrow R_2 = l \cdot (\eta\mu\varphi_1 + \eta\mu\varphi_2) \qquad (3)$$

(2 μόρια)

Συνδυάζοντας τις (2) και (3) έχουμε:

$$T_2\eta\mu\varphi_2 = m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot (\eta\mu\varphi_1 + \eta\mu\varphi_2) \qquad (4)$$

(1 μόριο)

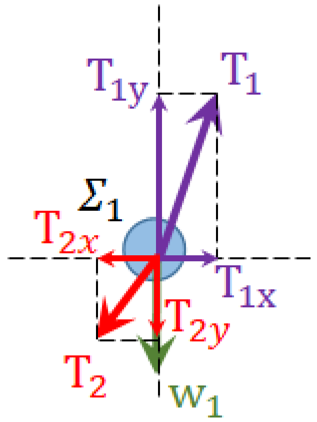
Διαιρούμε κατά μέλη τις (4) και (1):

$$\varepsilon\varphi\varphi_2 = m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \frac{(\eta\mu\varphi_1 + \eta\mu\varphi_2)}{mg} \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi_2 = \omega^2 \cdot l \cdot \frac{(\eta\mu\varphi_1 + \eta\mu\varphi_2)}{g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi_2 = \frac{\omega^2 \cdot l}{g}(\eta\mu\varphi_1 + \eta\mu\varphi_2) \qquad (4\beta)$$

(1 μόριο)

Στο Σ_1 έχουμε αντίστοιχα:



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_{1y} = w_1 + T_{2y} \Rightarrow T_1 \sigma\upsilon\nu\varphi_1 = w_1 + T_2 \sigma\upsilon\nu\varphi_2 \qquad (5)$$

(2 μόρια)

και

$$\Sigma F_x = F_\kappa \Rightarrow T_{1x} - T_{2x} = F_\kappa \Rightarrow T_1 \eta\mu\varphi_1 - T_2 \eta\mu\varphi_2 = \frac{m_1 {\upsilon_1}^2}{R_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_1 \eta\mu\varphi_1 - T_2 \eta\mu\varphi_2 = \frac{m(\omega \cdot R_1)^2}{R_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_1 \eta\mu\varphi_1 - T_2 \eta\mu\varphi_2 = m \cdot \omega^2 \cdot R_1 \qquad (6)$$

(2 μόρια)

Για την R_1 από την γεωμετρία του σχήματος έχουμε:

$$R_1 = l \cdot \eta\mu\varphi_1 \qquad (7)$$

Συνδυάζοντας τις (6) και (7) καταλήγουμε:

$$T_1 \eta\mu\varphi_1 - T_2 \eta\mu\varphi_2 = m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \eta\mu\varphi_1 \qquad (8)$$

(1 μόριο)

Η (5), λόγω της (1), γίνεται:

$$T_1 \sigma\upsilon\nu\varphi_1 = w_1 + w_2 \Rightarrow T_1 \sigma\upsilon\nu\varphi_1 = 2mg \qquad (9)$$

(1 μόριο)

Η (8), με αντικατάσταση από την (4), δίνει:

$$T_1 \eta\mu\varphi_1 - T_2 \eta\mu\varphi_2 = m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \eta\mu\varphi_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_1 \eta\mu\varphi_1 - m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot (\eta\mu\varphi_1 + \eta\mu\varphi_2) = m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \eta\mu\varphi_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_1 \eta\mu\varphi_1 = m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot [\eta\mu\varphi_1 + (\eta\mu\varphi_1 + \eta\mu\varphi_2)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_1 \eta\mu\varphi_1 = m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot (2\eta\mu\varphi_1 + \eta\mu\varphi_2) \qquad (10)$$

(2 μόρια)

Διαιρούμε κατά μέλη τις (10) και (9):

$$\varepsilon\varphi\varphi_1 = m\cdot\omega^2\cdot l\cdot\frac{(2\eta\mu\varphi_1+\eta\mu\varphi_2)}{2mg} \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi_1 = \omega^2\cdot l\cdot\frac{(2\eta\mu\varphi_1+\eta\mu\varphi_2)}{2g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi_1 = \frac{\omega^2\cdot l}{g}\left(\eta\mu\varphi_1+\frac{\eta\mu\varphi_2}{2}\right) \quad (10\beta)$$

(1 μόριο)

Αφαιρούμε κατά μέλη τις (4) και (10β):

$$\varepsilon\varphi\varphi_2-\varepsilon\varphi\varphi_1 = \frac{\omega^2\cdot l}{g}\cdot\frac{\eta\mu\varphi_2}{2}$$

(1 μόριο)

Η γωνία φ_2 είναι οξεία, άρα $\eta\mu\varphi_2>0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι:

$$\varepsilon\varphi\varphi_2-\varepsilon\varphi\varphi_1>0 \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi_2>\varepsilon\varphi\varphi_1$$

(1 μόριο)

Επειδή η γωνία φ_1 είναι επίσης οξεία, η τελευταία σχέση δίνει:

$$\varphi_2>\varphi_1$$

που είναι το ζητούμενο.

(2 μόρια)

3ο ΘΕΜΑ

Γ.1. Έστω $\vec{P}_{\alpha\rho\chi}$ η ορμή του σώματος την στιγμή της έκρηξης και $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ οι ορμές των δύο κομματιών ακριβώς μετά την διάσπαση.
Αφού η έκρηξη πραγματοποιείται ακαριαία, μπορούμε να θεωρήσουμε το σώμα ως μονωμένο.

(1 μόριο)

Με βάση την Αρχή Διατήρησης της Ορμής, την οποία εφαρμόζουμε κατά τις χρονικές στιγμές ακριβώς πριν και ακριβώς μετά την έκρηξη, έχουμε:

$$\vec{P}_{\alpha\rho\chi} = \vec{P}_1+\vec{P}_2$$

(1 μόριο)

Από το Νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$$P_{\alpha\rho\chi}{}^2 = P_1{}^2+P_1{}^2+2\cdot P_1\cdot P_2\cdot\sigma\upsilon\nu\theta \qquad (1)$$

(2 μόρια)

Η κινητική ενέργεια του σώματος ακριβώς πριν την διάσπαση είναι:

$$K_{\alpha\rho\chi} = \frac{P_{\alpha\rho\chi}{}^2}{2M}$$

(1 μόριο)

ενώ η συνολική κινητική ενέργεια των δύο κομματιών ακριβώς μετά την διάσπαση είναι:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{{P_1}^2}{2m_1} + \frac{{P_2}^2}{2m_2}$$

(1 μόριο)

Η δυναμική ενέργεια δεν μεταβάλλεται κατά την διάσπαση, αφού αυτή θεωρείται ακαριαία.

(2 μόρια)

Συνεπώς, η μεταβολή ενέργειας λόγω της έκρηξης είναι:

$$\Delta E = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \frac{{P_1}^2}{2m_1} + \frac{{P_2}^2}{2m_2} - \frac{{P_{\alpha\rho\chi}}^2}{2M} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta E = \frac{1}{2}\left(\frac{{P_1}^2}{m_1} + \frac{{P_2}^2}{m_2} - \frac{{P_{\alpha\rho\chi}}^2}{M}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta E = \frac{1}{2}\left(\frac{m_2 M {P_1}^2 + m_1 M {P_2}^2 - m_1 m_2 {P_{\alpha\rho\chi}}^2}{m_1 \cdot m_2 \cdot M}\right)$$

(2 μόρια)

Χρησιμοποιώντας την (1) παίρνουμε:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{m_2 \cdot M \cdot {P_1}^2 + m_1 \cdot M \cdot {P_2}^2 - m_1 \cdot m_2 \cdot \left({P_1}^2 + {P_1}^2 + 2 \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta\right)}{m_1 \cdot m_2 \cdot M}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta E = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{m_2 \cdot (M - m_1) \cdot {P_1}^2 + m_1 \cdot (M - m_2) \cdot {P_2}^2 - 2 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}{m_1 \cdot m_2 \cdot M}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta E = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{{m_2}^2 \cdot {P_1}^2 + {m_1}^2 \cdot {P_2}^2 - 2 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}{m_1 \cdot m_2 \cdot M}\right)$$

(3 μόρια)

Αφού $\lambda = \frac{m_2}{m_1} \Rightarrow m_2 = \lambda \cdot m_1$, η τελευταία σχέση γράφεται:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\lambda^2 \cdot {m_1}^2 \cdot {P_1}^2 + {m_1}^2 \cdot {P_2}^2 - 2 \cdot \lambda \cdot {m_1}^2 \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}{\lambda \cdot {m_1}^2 \cdot M}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta E = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\lambda^2 \cdot {P_1}^2 + {P_2}^2 - 2 \cdot \lambda \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}{\lambda \cdot M}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \lambda \cdot M \cdot \Delta E = \lambda^2 \cdot {P_1}^2 + {P_2}^2 - 2 \cdot \lambda \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow {P_1}^2 \cdot \lambda^2 - 2 \cdot (P_1 \cdot P_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta + M \cdot \Delta E) \cdot \lambda + {P_2}^2 = 0 \qquad (2)$$

(2 μόρια)

Η (2) είναι δευτεροβάθμια ως προς λ και, εφόσον περιγράφει ένα φυσικό σύστημα έχει οπωσδήποτε (πραγματική) λύση.

(1 μόριο)

Άρα:

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow [2 \cdot (P_1 \cdot P_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta + M \cdot \Delta E)]^2 - 4 \cdot {P_1}^2 \cdot {P_2}^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [2 \cdot (P_1 \cdot P_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta + M \cdot \Delta E)]^2 \geq 4 \cdot {P_1}^2 \cdot {P_2}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot (P_1 \cdot P_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta + M \cdot \Delta E) \geq 2 \cdot P_1 \cdot P_2$$

(1 μόριο)

Στο τελευταίο βήμα εκμεταλλευτήκαμε το γεγονός ότι όλες οι ποσότητες είναι θετικές, συνεπώς η φορά της ανισότητας διατηρείται.

(1 μόριο)

Από το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει:

$$\Delta E \geq \frac{P_1 \cdot P_2 \cdot (1 - \sigma\upsilon\nu\theta)}{M}$$

(1 μόριο)

Δηλαδή η ΔE είναι κάτω φραγμένη. Άρα:

$$\Delta E_{min} = \frac{P_1 \cdot P_2 \cdot (1 - \sigma\upsilon\nu\theta)}{M} \Rightarrow$$

(1 μόριο)

$$\Rightarrow \Delta E_{min} = \frac{36 \cdot 10^3 \cdot 24 \cdot 10^3 \cdot (1 - \sigma\upsilon\nu 60°)}{10^2} J \Rightarrow \Delta E_{min} = 432 \cdot 10^4 J$$

(1 μόριο)

Γ.2. Για $\Delta E = \Delta E_{min}$ η διακρίνουσα της (2) μηδενίζεται.

(1 μόριο)

Στην περίπτωση αυτή η δευτεροβάθμια έχει διπλή ρίζα

(1 μόριο)

ίση προς

$$\lambda = -\frac{[-2 \cdot (P_1 \cdot P_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta + M \cdot \Delta E_{min})]}{2 \cdot {P_1}^2} \Rightarrow \lambda = \frac{P_1 \cdot P_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta + M \cdot \Delta E_{min}}{{P_1}^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{36 \cdot 10^3 \cdot 24 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{2} + 10^2 \cdot 432 \cdot 10^4}{(36 \cdot 10^3)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

(2 μόρια)

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

4ο ΘΕΜΑ

Δ.1.

α/α	$R\ (m)$	$\Delta t\ (s)$	$T = \left(\frac{\Delta t}{N}\right)\ (s)$	$T^2\ (s^2)$	$\Delta L = R - L_o\ (m)$	$(R/\Delta L)$
1	0,32	20,7	2,07	4,28	0,02	16,00
2	0,34	15,1	1,51	2,28	0,04	8,50
3	0,36	12,5	1,25	1,56	0,06	6,00
4	0,38	11,4	1,14	1,30	0,08	4,75
5	0,40	10,5	1,05	1,10	0,10	4,00

(9 μόρια)

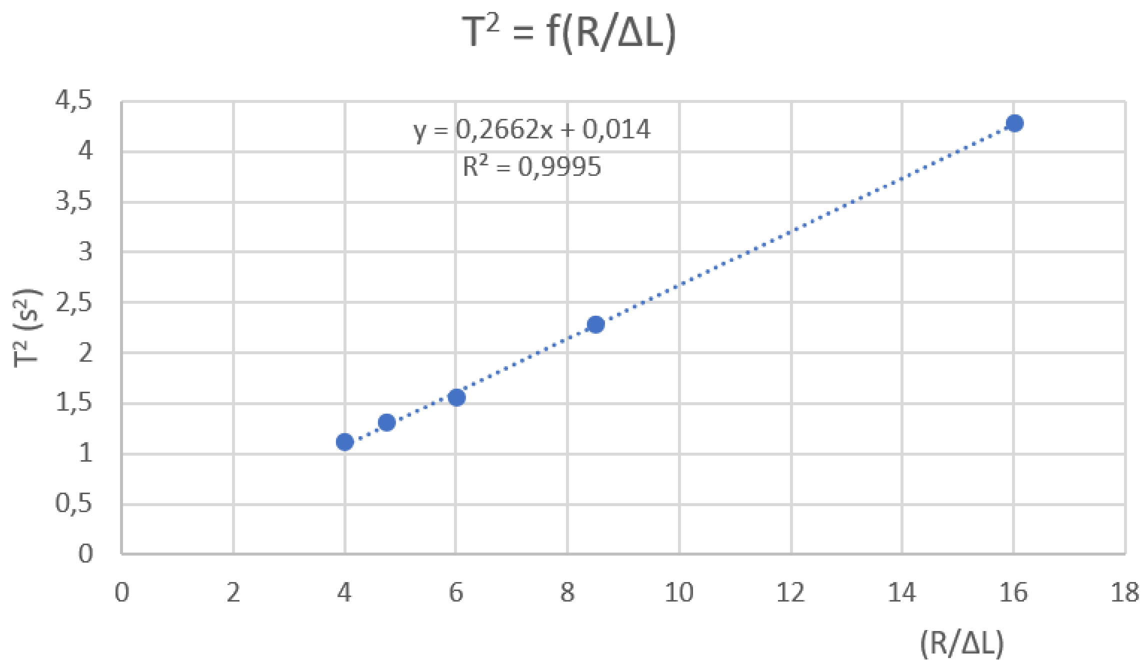
Δ.2. $F_{\varepsilon\lambda} = F_\kappa \Rightarrow k \cdot \Delta L = m \cdot \omega^2 \cdot R \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m \cdot R}{k \cdot \Delta L}}$

(4 μόρια)

Η γραφική παράσταση $T^2 = f\left(\frac{R}{\Delta L}\right)$ είναι ευθεία γραμμή με κλίση $\lambda = \frac{4\pi^2 m}{k}$.

(3 μόρια)

Δ.3.



(4 μόρια)

Δ.4. Από την γραφική παράσταση μπορούμε να βρούμε την τιμή του λ και από αυτή την τιμή της σταθεράς του ελατηρίου: $k = \frac{4\pi^2 m}{\lambda}$.

(3 μόρια)

Δ.5. Εφαρμόζοντας την μέθοδο αυτή υπολογίζουμε: $k = 29{,}7\,\frac{N}{m}$

(2 μόρια)

Οδηγίες βαθμολόγησης

1ο ΘΕΜΑ
Α.1.: 2 μόρια
Α.2.: 2 μόρια
Α.3α.: 4 μόρια
Α.3β.: 4 μόρια
Α.3γ.: 3 μόρια
Α.3δ.: 5 μόρια
Α.4.: 4 μόρια
Α.5.: 1 μόριο

2ο ΘΕΜΑ 25 μόρια

3ο ΘΕΜΑ
Γ.1.: 21 μόρια
Γ.2.: 4 μόρια
Λύση όπου η παράγωγος της ΔE λαμβάνεται ίση με 0, από εκεί προσδιορίζεται το λ και κατόπιν το ΔE_{min} θεωρείται πλήρης και λαμβάνει όλα τα μόρια.

4ο ΘΕΜΑ
Δ.1.: 9 μόρια
Δ.2.: 7 μόρια
Δ.3.: 4 μόρια
Δ.4.: 3 μόρια
Δ.5.: 2 μόρια