Β΄ Λυκείου

9 Μαρτίου 2013

Θεωρητικό Μέρος

Θέμα 1^o

Α. Ένα σωματίδιο με μάζα m και ηλεκτρικό φορτίο q επιταχύνεται από διαφορά δυναμικού V, κινούμενο οριζόντια προς το νότο. Το σωματίδιο εισέρχεται σε περιοχή όπου συνυπάρχουν ομογενές μαγνητικό πεδίο B με κατεύθυνση προς την ανατολή και ομογενές ηλεκτρικό πεδίο E με κατεύθυνση κατακόρυφη προς τα κάτω, διατηρώντας αμετάβλητη την ταχύτητά του. Να βρείτε την τάση V σε σχέση με τα μεγέθη m, E, q, B. Να αγνοήσετε το βαρυτικό πεδίο.

Β. Ένας δύτης θέλει να μετρήσει το βάθος σε ένα σημείο της λίμνης του Κουρνά. Επισκεπτόμενος τη λίμνη, πήρε μαζί του μόνο έναν ογκομετρικό κύλινδρο. Τι είδους μέτρηση θα εκτελέσει, ποια μέθοδο θα χρησιμοποιήσει και τις τιμές ποιων φυσικών μεγεθών πρέπει να γνωρίζει για να υπολογίσει το βάθος στο σημείο αυτό;

Θέμα 2^o

Ο μικρός Γιάννης παίζει και φυσά μέσα από ένα πλαστικό παιχνίδι σαπουνόφουσκες οι οποίες αποτελούνται από νερό και σαπούνι. Ορισμένες από αυτές ισορροπούν στιγμιαία στον αέρα του δωματίου του, ο οποίος βρίσκεται υπό κανονικές συνθήκες.

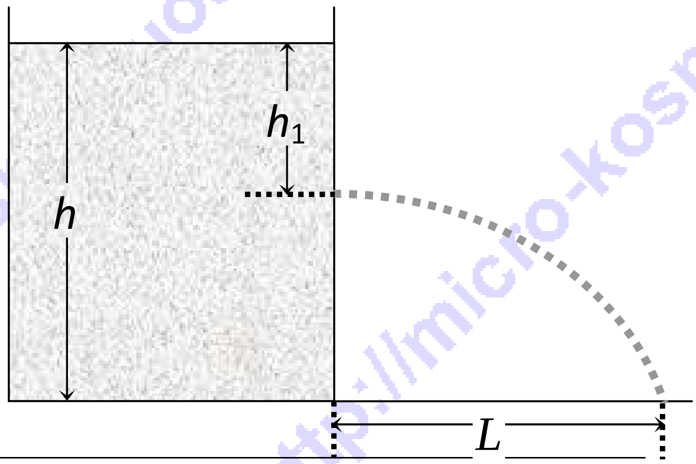
α) Βρείτε τη σχετική λεπτότητα της σαπουνόφουσκας η οποία ορίζεται ως ο λόγος πάχος/ακτίνα.

β) Βρείτε τη μάζα του υγρού μιας σαπουνόφουσκας με ακτίνα r=5cm.

Η μέση γραμμομοριακή μάζα του αέρα είναι M=29 g/mol, η θερμοκρασία του αέρα στο εσωτερικό της σαπουνόφουσκας είναι όση η φυσιολογική θερμοκρασία του ανθρώπινου σώματος, δηλαδή 37^{o}C και η πυκνότητα της σαπουνόφουσκας είναι ίση με την πυκνότητα του καθαρού νερού 10^3kg/m^3.Η πυκνότητα του αέρα είναι 1,29kg/m^3 σε Κανονικές Συνθήκες.

Σημείωση: Μη λάβετε υπ’ όψιν την επίδραση της επιφανειακής τάσης του υγρού. Η άνωση στη σταγόνα ισούται με το βάρος του εκτοπιζόμενου αέρα.

Θέμα 3^o



Σε δοχείο που περιέχει υγρό μέχρι ύψους h ανοίγουμε μία μικρή οπή σε βάθος h_1 από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού. Αν θεωρήσουμε ότι η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού έχει εμβαδό πολύ μεγαλύτερο από το εμβαδό της οπής, τότε αποδεικνύεται ότι η ταχύτητα με την οποία εξέρχεται το υγρό από την τρύπα δίνεται από τη σχέση:

$$\rho g h_1 = \frac{1}{2}\rho \upsilon^2$$

(Εξίσωση Bernoulli), όπου ρ η πυκνότητα του υγρού, g η επιτάχυνση της βαρύτητας και υ η ταχύτητα με την οποία το υγρό εξέρχεται κάθετα από το τοίχωμα του δοχείου που είναι κατακόρυφο. Θεωρώντας ότι δεν υπάρχει αντίσταση από τον αέρα κατά την κίνηση του υγρού έξω από το δοχείο:

α) Βρείτε σε ποια σημεία (δηλαδή τις αποστάσεις $h_{1\alpha}$ και $h_{1\beta}$ από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού) μπορούμε να ανοίξουμε δύο οπές στο δοχείο, ώστε το υγρό που εξέρχεται από αυτές να πέφτει στο ίδιο σημείο σε δεδομένη απόσταση L από τη βάση του δοχείου (Θεωρήστε γνωστές τις ποσότητες h και L).

β) Για ποια απόσταση L το παραπάνω ερώτημα δεν έχει λύση;

γ) Σχεδιάστε το βεληνεκές L σε συνάρτηση με το ύψος h_1 από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού από την οποία ανοίγουμε οπή για έξοδο του υγρού.

<u>Πειραματικό Μέρος</u>

Σε δύο παράλληλες μεταλλικές πλάκες Χ και Υ με εμβαδόν A=1,7 10^{-2} m^2 η κάθε μία εφαρμόζεται τάση V. Οι πλάκες απέχουν μικρή απόσταση d=20mm σε σχέση με τις διαστάσεις τους και μεταξύ τους υπάρχει αέρας.

α) Βρείτε μια έκφραση για τη δύναμη που δέχεται η πλάκα Υ από την Χ ως συνάρτηση των μεγεθών A, V, d και της διηλεκτρικής σταθεράς του κενού ε_0. Η διηλεκτρική σταθερά του αέρα είναι περίπου ίση με τη διηλεκτρική σταθερά του κενού. Δίνεται ότι η δύναμη που δέχεται η πλάκα Υ από την πλάκα Χ έχει μέτρο $F = \frac{Eq}{2}$ όπου q το ηλεκτρικό φορτίο της θετικά φορτισμένης πλάκας και E το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των πλακών.

β) Προκειμένου να μετρήσουμε τη διηλεκτρική σταθερά του κενού προσαρμόζουμε τις μεταλλικές πλάκες σε κατάλληλη διάταξη η οποία λέγεται Ζυγός Τάσης, μέσω της οποίας μπορούμε να αλλάζουμε την τάση και με τη βοήθεια αισθητήρα δύναμης να μετράμε τη δύναμη που δέχεται η πλάκα Υ από την Χ. Κρατώντας λοιπόν σταθερή την απόσταση d των πλακών εφαρμόσαμε διαφορετικές τάσεις και μετρήσαμε τη δύναμη. Τα πειραματικά δεδομένα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

V (kV)	F (mN)
2,0	0,6
2,5	1,0
3,0	1,5
3,5	2,0
4,0	2,5
4,5	3,2
5,0	4,0

Να βρείτε τη διηλεκτρική σταθερά του αέρα ε_0 κάνοντας το κατάλληλο γράφημα στο χαρτί μιλιμετρέ που θα βρείτε σε ξεχωριστό φύλλο των εκφωνήσεων, το οποίο θα παραδώσετε μαζί με τις απαντήσεις σας.

γ) Η τιμή της ε_0 που αναφέρεται στη βιβλιογραφία είναι $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ As/Vm. Ποιο το σχετικό σφάλμα στον υπολογισμό σας;

Η χωρητικότητα των δύο μεταλλικών πλακών Χ και Υ είναι: $C = \varepsilon_0 \dfrac{A}{d}$.

Καλή επιτυχία

Αν θέλετε, μπορείτε να κάνετε κάποιο γράφημα σ' αυτή τη σελίδα και να την επισυνάψετε μέσα στο τετράδιό σας.

Επιλέξτε τους άξονες, τιτλοδοτήστε και συμπεριλάβετε τις κατάλληλες μονάδες σε κάθε άξονα.

Συνοπτικές Απαντήσεις
Θεωρητικό Μέρος

Θέμα 1ο:
Α. $qV=mv^2/2$ **(1)** και $Bvq=Eq$ (2) Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$V=mE^2/2qB^2$$

Β. Καταδύεται κρατώντας τον ογκομετρικό κύλινδρο με το ανοικτό άκρο προς τα κάτω και όταν φτάσει στον πυθμένα μετρά σε ποια υποδιαίρεση έχει φτάσει το επίπεδο του εισερχόμενου νερού. Στην ατμοσφαιρική πίεση P_0 ο όγκος του αέρα στον κύλινδρο είναι $V_1=LA$ όπου L το ύψος και A το εμβαδόν διατομής του κυλίνδρου. Στον πυθμένα της λίμνης η πίεση αυξάνεται σε $P=P_0+\rho gh$ όπου h το βάθος της λίμνης το οποίο πρέπει να καθορίσει, ρ η πυκνότητα του νερού και g η επιτάχυνση λόγω της βαρύτητας. Τότε ο όγκος του αέρα στον κύλινδρο θα είναι $V_2=xA$ όπου x το ύψος της αερίου στήλης στον πυθμένα της λίμνης. Υποθέτοντας ότι η θερμοκρασία και η πυκνότητα του νερού στα διάφορα βάθη παραμένουν οι ίδιες, σύμφωνα με το νόμο του Boyle:

$$P_0V_1=PV_2$$

δηλαδή:

$$P_0LA=(P_0+\rho gh)xA$$

ή

$$P_0L=P_0x+\rho ghx$$

από την οποία:

$$h=\frac{P_o(L-x)}{\rho g x}$$

Θέμα 2ο:
α) Σε κάθε σαπουνόφουσκα ασκούνται το βάρος του υγρού της σαπουνόφουσκας, το βάρος του αέρα που περιέχει και η άνωση. Επειδή η σαπουνόφουσκα ισορροπεί θα είναι:

$$m_{υγρ}g+\rho_T Vg=\rho_0 Vg \quad (1)$$

Όπου ρ_T η πυκνότητα του αέρα στο εσωτερικό της σαπουνόφουσκας σε θερμοκρασία T ίση με εκείνη του ανθρώπινου σώματος και ρ_0 η πυκνότητα του αέρα σε κανονικές συνθήκες.

Από την καταστατική εξίσωση προκύπτει εύκολα ότι:

$$\rho_T=\frac{MP}{RT} \quad (2) \qquad \text{και} \qquad \rho_0=\frac{MP}{RT_0} \quad (3)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (2) και (3) έχουμε:

$$\frac{\rho_T}{\rho_0}=\frac{T_0}{T} \quad (4)$$

Από την (1) $m_{υγρ} = (\rho_0 - \rho_T)V$ και με τη βοήθεια της (4)

$m_{υγρ} = (\rho_0 - \rho_0 \frac{T_0}{T})V$ και επειδή $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$m_{υγρ} = \rho_0(1 - \frac{T_0}{T})\frac{4}{3}\pi r^3$ (5)

Όμως ο όγκος του υγρού της σαπουνόφουσκας είναι: $V_1 = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \Delta r$ (6)

όπου Δr το πάχος της σαπουνόφουσκας.

Η μάζα του υγρού της σαπουνόφουσκας αφού αυτό έχει την ίδια πυκνότητα με το νερό θα είναι:

$m_{υγρ} = \rho_{νερ}V_1$ (7) η οποία με τη βοήθεια της (6) δίνει:

$m_{υγρ} = \rho_{νερ} 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \Delta r$ (8)

Από την (8) με τη βοήθεια της (5) έχουμε ότι:

$$\Delta r = \frac{\rho_0}{3\rho_{νερ}}\left(1 - \frac{T_0}{T}\right)r$$

και μετά τις πράξεις: $\Delta r = \frac{1,29}{3000}0,12r$,

οπότε:

$$\frac{\Delta r}{r} = 5,16 \cdot 10^{-5} \quad (9)$$

β) Η μάζα της σαπουνόφουσκας θα είναι:

$m_{υγρ} = \rho_{υγρ}V = \rho_{υγρ}4\pi r^2 \Delta r$ και με τη βοήθεια της (9)

$m_{υγρ} = \rho_{υγρ} \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 5,16 \cdot 10^{-5} r$ από την οποία με αντικατάσταση έχουμε:

$$m_{υγρ} \cong 81 \cdot 10^{-3} g$$

Θέμα 3ο:

α) Από την εξίσωση που δίνεται, η ταχύτητα εξόδου του υγρού είναι: $\rho g h_1 = \frac{1}{2}\rho υ^2 \Rightarrow υ = \sqrt{2gh_1}$ (1). Τα μόρια του υγρού εκτελούν οριζόντια βολή μετά την έξοδο από την οπή με ταχύτητα υ και από ύψος h-h_1. Ο χρόνος t_1 για να φτάσουν στο κατώτερο σημείο θα είναι: $h - h_1 = \frac{1}{2}g t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2(h-h_1)}{g}}$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι το βεληνεκές L θα είναι:

$$L = ut_1 = \sqrt{2gh_1 \frac{2(h-h_1)}{g}} = 2\sqrt{h_1(h-h_1)} \Rightarrow L^2 = 4h_1(h-h_1) \Rightarrow 4h_1^2 - 4hh_1 + L^2 = 0 \Rightarrow$$

$$h_1^2 - hh_1 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 = 0 \quad (3).$$

Η (3) είναι μία εξίσωση β΄ βαθμού με άγνωστο το h_1 και διακρίνουσα: $\Delta = h^2 - 4\frac{L^2}{4} = h^2 - L^2$ (4).

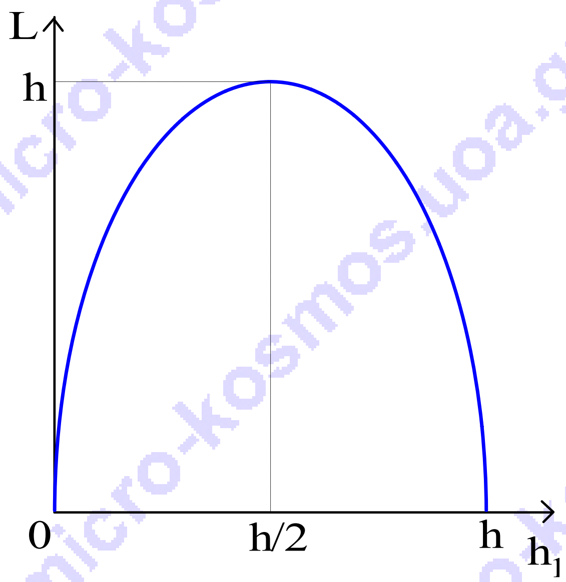
Για $\Delta > 0$, έχουμε δύο λύσεις για το ύψος h_1:

$$h_{1\alpha} = \frac{h-\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{h-\sqrt{h^2-L^2}}{2} = \frac{h}{2} - \frac{\sqrt{h^2-L^2}}{2} \quad \text{και} \quad h_{1\beta} = \frac{h+\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{h+\sqrt{h^2-L^2}}{2} = \frac{h}{2} + \frac{\sqrt{h^2-L^2}}{2}.$$

Συνεπώς αν πάνω και κάτω από το μέσο ύψος $\frac{h}{2}$, ανοίξουμε δύο μικρές οπές σε απόσταση $\frac{\sqrt{h^2-L^2}}{2}$, το εξερχόμενο υγρό θα πέσει στο ίδιο σημείο.

β) Από την (4) προκύπτει ότι η (3) δεν έχει λύση για $\Delta<0$, δηλαδή για $L > h$.

γ) Από την (3) προκύπτει: $4h_1^2 - 4hh_1 + L^2 = 0 \Rightarrow L^2 = -4h_1^2 + 4hh_1 \Rightarrow L^2 = 4h_1(h-h_1)$. Επειδή οι ποσότητες L, h_1 και $h-h_1$ είναι θετικές έχουμε: $L = 2\sqrt{h_1(h-h_1)}$ (4). Για $h_1=0$ ή $h_1=h$, έχουμε $L=0$, ενώ για $h_1=\frac{h}{2}$, $L=h$. Για κάθε $L<h$, σύμφωνα με την (1) υπάρχουν 2 τιμές του h_1 που δίνουν αυτήν την τιμή του βεληνεκούς, συμμετρικές γύρω από το $h_1=\frac{h}{2}$, επομένως η γραφική παράσταση είναι συμμετρική γύρω από αυτήν την τιμή. Για $L=h$, η λύση της (3) είναι διπλή και ίση με $h_1=\frac{h}{2}$. Αυτή είναι και η μέγιστη τιμή του L για δεδομένο h. Με βάση αυτά σχεδιάζουμε το διπλανό διάγραμμα.



Πειραματικό Μέρος

α) Στη σχέση $E = \frac{V}{d}$ η οποία ισχύει στο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο των δύο πλακών το *E* οφείλεται και στα αντίθετα φορτία και των δύο πλακών.
Συνεπώς η δύναμη που δέχεται η πλάκα Υ από την πλάκα Χ θα είναι:

$$F = \frac{qV}{2d} \quad (1)$$

Η χωρητικότητα του συστήματος των πλακών είναι:

$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$ και επειδή $C = \frac{q}{V}$ έχουμε: $q = \varepsilon_0 \frac{A}{d} V$ (2)

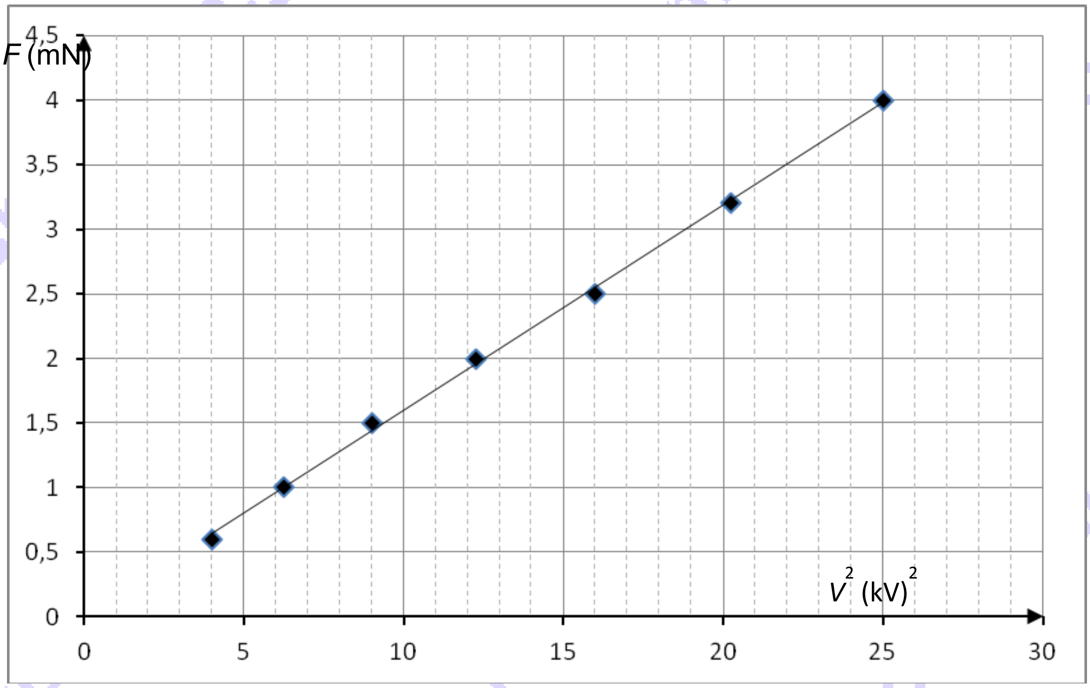
Από τις (1) και (2) έχουμε:

$$F = \frac{1}{2}\varepsilon_o \mathrm{A}\left(\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{d}}\right)^2 \quad \text{δηλαδή} \quad F = \frac{\varepsilon_o \mathrm{A}\mathrm{V}^2}{2\mathrm{d}^2} \quad (3)$$

β) Από την (3) φαίνεται ότι η δύναμη είναι ανάλογη του τετραγώνου της τάσης μεταξύ των πλακών. Οπότε θα έχουμε τον παρακάτω πίνακα ανάλυσης των δεδομένων

V (kV)	V^2(kV)^2	F (mN)
2,0	4	0,6
2,5	6,25	1,0
3,0	9	1,5
3,5	12,25	2,0
4,0	16	2,5
4,5	20,25	3,2
5,0	25	4,0

Το κατάλληλο γράφημα θα είναι εκείνο της δύναμης σχέση με το τετράγωνο της τάσης από την κλίση του οποίου υπολογίζουμε την τιμή της ε_0.



Η κλίση είναι: $\kappa \approx 0{,}16 \frac{mN}{(kV)^2}$

Αλλά από την (3) η κλίση είναι: $\kappa = \frac{\varepsilon_o A}{2d^2}$ οπότε: $\varepsilon_o = \frac{2\kappa d^2}{A}$ (4)

και αντικαθιστώντας τις τιμές του A =1,7 10^{-2} m^2 και του d=20 10^{-3}m

Βρίσκουμε τελικά: $\varepsilon_o = 7{,}5 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$

δ) το σχετικό σφάλμα στον υπολογισμό είναι:

$$\frac{|7{,}5 \cdot 10^{-12} - 8{,}85 \cdot 10^{-12}|}{8{,}85 \cdot 10^{-12}} \approx 15\%$$