**Εύρεση κέντρου μάζας και μελέτη κίνησης στερεού**

Ομογενής ράβδος μάζας M = 4Kg και μήκους L = 3m έχει στερεωμένες στα δύο της άκρα σημειακές μάζες $m_1$ = 8Kg και $m_2$ = 3Kg. Η ράβδος είναι τοποθετημένη σε οριζόντιο λείο δάπεδο και ισορροπεί οριζόντια. Τη χρονική στιγμή t = 0 αρχίζει να ασκείται σταθερή δύναμη F = 30N κάθετα στη ράβδο στο άκρο εκείνο που είναι στερεωμένη η μάζα $m_1$. Αν η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα κάθετο σε αυτήν που περνά από το μέσον της είναι $I = ML^2/12$:

α) να προσδιορίσετε τη θέση του κέντρου μάζας του συστήματος

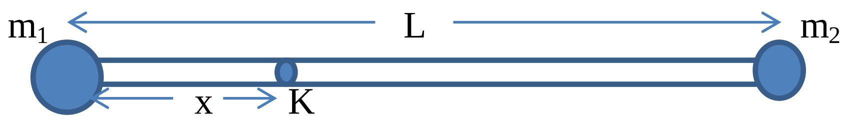
β) να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς το κέντρο μάζας του

γ) να περιγράψετε την κίνηση που θα κάνει το σύστημα

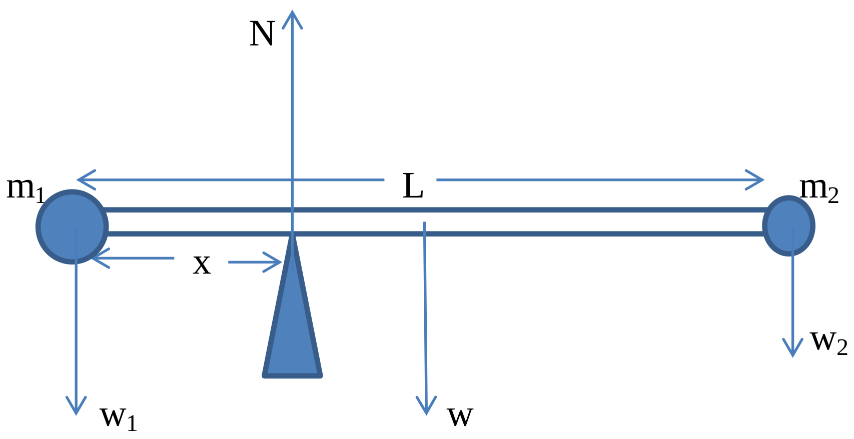
δ) να υπολογίσετε για t = 0 την επιτάχυνση των μαζών $m_1$ και $m_2$.

**Λύση**

α) Έστω ότι το κέντρο μάζας του συστήματος απέχει απόσταση x από τη μάζα $m_1$ ($x < L/2$ αφού $m_1 > m_2$) όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.




Είναι προφανές ότι αν το σύστημα στηριχθεί στο κέντρο μάζας K θα ισορροπήσει. Επομένως το άθροισμα των ροπών ως προς K όλων των ασκούμενων δυνάμεων στο σύστημα θα είναι ίσο με μηδέν. Οι δυνάμεις που δέχεται το σύστημα αν στηριχθεί ως προς K φαίνονται παρακάτω:



Θα ισχύει:

$$\Sigma\tau_{(K)}=0 \Rightarrow \tau_{w_1}+\tau_{w}+\tau_{w_2}+\tau_{N}=0 \Rightarrow w_1.x-w.(\frac{L}{2}-x)-w_2(L-x)+0=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 80x-40(\frac{3}{2}-x)-30(3-x)=0 \Rightarrow 80x-60+40x-90+30x=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 150x=150 \Rightarrow x=1m$$

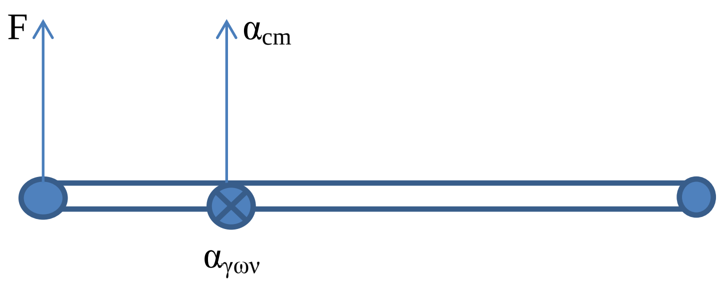
Άρα το κέντρο μάζας του συστήματος απέχει από τη μάζα $m_1$ απόσταση x = 1m.

β) Θα υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς το κέντρο μάζας Κ.

$$I_{cm}=I_{\rho\acute{\alpha}\beta\delta o\upsilon}+I_{m_1}+I_{m_2} \Rightarrow I_{cm}=\frac{1}{12}ML^2+M(\frac{L}{2}-x)^2+m_1.x^2+m_2.(L-x)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow I_{cm}=(\frac{1}{12}.4.3^2+4.(\frac{3}{2}-1)^2+8.1^2+3.(3-1)^2)Kg.m^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow I_{cm}=(3+4.0{,}5^2+8+3.4)Kg.m^2 \Rightarrow I_{cm}=(3+1+8+12)Kg.m^2 \Rightarrow I_{cm}=24Kg.m^2$$

γ) Το σύστημα δέχεται στην οριζόντια διεύθυνση μόνο την επίδραση της σταθερής δύναμης F (εφόσον το δάπεδο είναι λείο). Άρα θα εκτελέσει μεταφορική κίνηση και μάλιστα με σταθερή επιτάχυνση η οποία θα ισούται με:

$$\Sigma F_x=M_{o\lambda}.\alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm}=\frac{\Sigma F_x}{M_{o\lambda}} \Rightarrow \alpha_{cm}=\frac{F}{M+m_1+m_2} \Rightarrow \alpha_{cm}=\frac{30}{15}\frac{m}{s^2} \Rightarrow \alpha_{cm}=2\frac{m}{s^2}$$

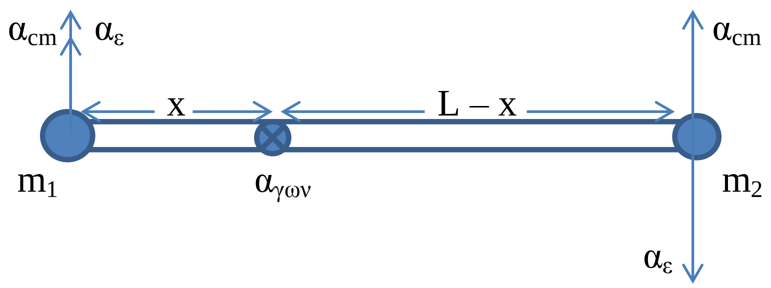



Ταυτόχρονα όμως θα εκτελέσει και στροφική κίνηση γύρω από το κέντρο μάζας Κ. Σε αντίθεση όμως με τη μεταφορική κίνηση η γωνιακή επιτάχυνση δεν θα παραμένει σταθερή. Αυτό γιατί η ροπή της δύναμης F ως προς το κέντρο μάζας αλλάζει διαρκώς. Τη χρονική στιγμή t = 0 η γωνιακή επιτάχυνση είναι:

$$\Sigma\tau_{(K)} = I_{cm}.\alpha_{\gamma\omega\nu} => \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Sigma\tau_{(K)}}{I_{cm}} => \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{F.x}{I_{cm}} => \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{30.1}{24}\frac{rad}{s^2} => \alpha_{\gamma\omega\nu} = 1{,}25\frac{rad}{s^2}$$

Η γωνιακή επιτάχυνση θα μειώνεται συνεχώς μέχρι που η ράβδος θα έχει στραφεί κατά π/2 rad σε σχέση με την αρχική της διεύθυνση. Μετά γίνεται γωνιακή επιβράδυνση με όλο και αυξανόμενο μέτρο μέχρι η ράβδος να στραφεί κατά π rad σε σχέση με την αρχική της διεύθυνση. Κείνη τη στιγμή η γωνιακή ταχύτητα μηδενίζεται και η φορά περιστροφής της ράβδου θα γίνει αντίθετη. Αυτό θα επαναλαμβάνεται διαρκώς οπότε η στροφική κίνηση θα είναι μεταβαλλόμενη μη ομαλά. Συνολικά λοιπόν το σύστημα θα εκτελεί μεταφορικά μια ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ενώ στροφικά μια στροφική ταλάντωση γύρω από το κέντρο μάζας.

δ) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η επιτάχυνση καθεμιάς από τις μάζες $m_1$ και $m_2$:




Η επιτρόχια επιτάχυνση της μάζας $m_1$ είναι:

$\alpha_\varepsilon = \alpha_{\gamma\omega\nu}.x => \alpha_\varepsilon = 1{,}25.1\text{m/s}^2 => \alpha_\varepsilon = 1{,}25\text{m/s}^2$

Άρα η επιτάχυνση της μάζας $m_1$ είναι:

$\alpha_{m1} = \alpha_{cm} + \alpha_\varepsilon => \alpha_{m1} = 3{,}25\text{m/s}^2$

Η επιτρόχια επιτάχυνση της μάζας $m_2$ είναι:

$\alpha_\varepsilon = \alpha_{\gamma\omega\nu}.(L - x) => \alpha_\varepsilon = 1{,}25.2\text{m/s}^2 => \alpha_\varepsilon = 2{,}5\text{m/s}^2$

Άρα η επιτάχυνση της μάζας $m_2$ είναι:

$\alpha_{m2} = \alpha_\varepsilon - \alpha_{cm} => \alpha_{m2} = 0{,}5\text{m/s}^2$

Ψαρουδάκης Μανώλης, Φυσικός