

Δεδομένα

$$n = 1/R, \quad V_1 = 10^{-3} \text{ m}^3, \quad P_1 = 6 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2, \quad V_2 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3, \quad P_2 = 1,5 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$$

Ζητούμενα

α) $\Delta U = ;$

β) $W = ;$

γ) $Q = ;$

δ) $T_{\max} = ;$

Λύση

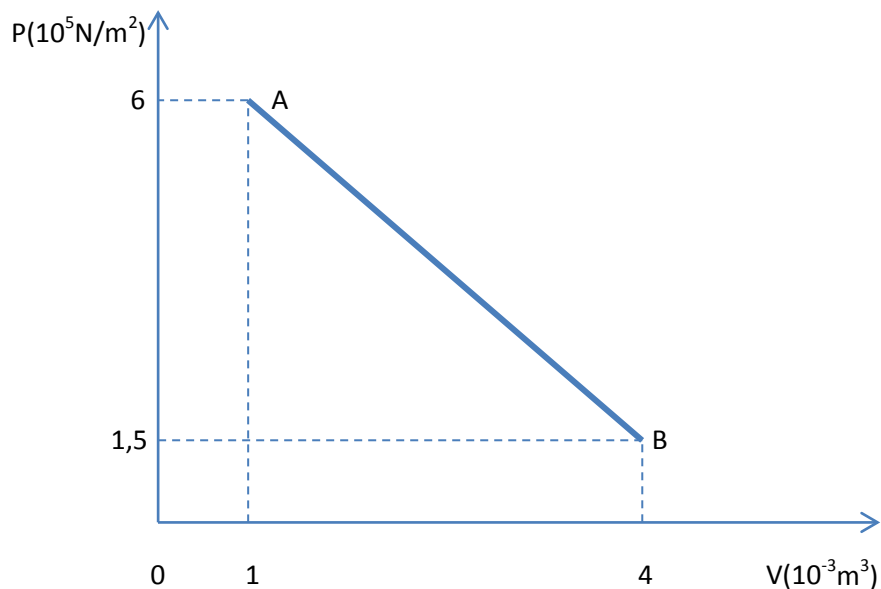
α) Αφού $\gamma = 5/3$ θα ισχύουν $C_p = 5R/2$ και $C_v = 3R/2$

$$\Delta U = nC_v \Delta T \Rightarrow \Delta U = n \frac{3R}{2} \Delta T \Rightarrow \Delta U = \frac{3}{2} nR \Delta T \Rightarrow \Delta U = \frac{3}{2} (P_2 V_2 - P_1 V_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta U = \frac{3}{2} (1,5 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-3} - 6 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3}) J \Rightarrow \Delta U = \frac{3}{2} (600 - 600) J \Rightarrow \Delta U = 0$$

Άρα η μεταβολή AB έχει τα άκρα της πάνω στην ίδια ισόθερμη καμπύλη.

β) Για να υπολογίσουμε το έργο θα φτιάξουμε το διάγραμμα P-V.



Το έργο της μεταβολής AB θα ισούται αριθμητικά με το εμβαδόν του τραπεζίου, άρα:

$$W = \frac{6 \cdot 10^5 + 1,5 \cdot 10^5}{2} \cdot 3 \cdot 10^{-3} \text{ J} \Rightarrow W = \frac{7,5 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{2} \text{ J} \Rightarrow W = 11,25 \cdot 10^2 \text{ J} = 1125 \text{ J}$$

γ) Από τον πρώτο θερμοδυναμικό νόμο έχουμε:

$$Q = W + \Delta U \Rightarrow Q = 1125 \text{ J} + 0 \text{ J} \Rightarrow Q = 1125 \text{ J}$$

δ) Για να υπολογίσουμε τη μέγιστη θερμοκρασία T από την οποία πέρασε το αέριο κατά τη διάρκεια της μεταβολής AB, θα βρούμε τη συνάρτηση $P(V)$. Επειδή είναι γραμμική θα έχει τη μορφή $P = a \cdot V + b$. Γνωρίζουμε δύο σημεία από τα οποία περνάει επομένως θα ισχύουν:

$$6 \cdot 10^5 = a \cdot 10^{-3} + b \quad (1)$$

$$1,5 \cdot 10^5 = a \cdot 4 \cdot 10^{-3} + b \quad (2)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (1) και (2) θα έχουμε:

$$4,5 \cdot 10^5 = -a \cdot 3 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}^5 \Rightarrow a = \frac{4,5 \cdot 10^5}{-3 \cdot 10^{-3}} \text{ N/m}^5 \Rightarrow a = -1,5 \cdot 10^8 \text{ N/m}^5$$

και με αντικατάσταση στην (1):

$$b = (6 \cdot 10^5 - (-1,5 \cdot 10^8) \cdot 10^{-3}) \text{ N/m}^2 \Rightarrow b = (6 \cdot 10^5 + 1,5 \cdot 10^5) \text{ N/m}^2 \Rightarrow b = 7,5 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$$

Άρα η συνάρτηση $P(V)$ είναι: $P = -1,5 \cdot 10^8 V + 7,5 \cdot 10^5 \text{ (SI)}$

Ξεκινώντας από την καταστατική εξίσωση και αντικαθιστώντας την πίεση P με τον τύπο της συνάρτησης $P(V)$ θα έχουμε:

$$PV = nRT \Rightarrow (-1,5 \cdot 10^8 V + 7,5 \cdot 10^5)V = 1 \cdot T \Rightarrow -1,5 \cdot 10^8 V^2 + 7,5 \cdot 10^5 V - T = 0$$

Ο όγκος V είναι πραγματικός αριθμός επομένως για τη διακρίνουσα ισχύει:

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow (7,5 \cdot 10^5)^2 - 4(-1,5 \cdot 10^8)(-T) \geq 0 \Rightarrow \frac{225}{4} 10^{10} - 6 \cdot 10^8 T \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T \leq \frac{225 \cdot 10^{10}}{24 \cdot 10^8} \text{ K} \Rightarrow T \leq \frac{22500}{24} \text{ K} \Rightarrow T \leq 937,5 \text{ K}$$

Άρα η μέγιστη θερμοκρασία από την οποία πέρασε το αέριο κατά τη διάρκεια της μεταβολής AB είναι $T_{\max} = 937,5 \text{ K}$

Ψαρουδάκης Μανώλης, Φυσικός