

Γενική άσκηση στη συμβολή κυμάτων (Λύση)

α) Η χρονική στιγμή t_1 που το κύμα από την πρώτη πηγή φτάνει στο σημείο P είναι:

$$u = \frac{r_1}{t_1} \Rightarrow t_1 = \frac{r_1}{u} \Rightarrow t_1 = \frac{6}{10} s \Rightarrow t_1 = 0,6s$$

Τα κύματα φτάνουν στο σημείο P με χρονική διαφορά $\Delta t = 0,8s$ και αφού $r_2 > r_1$ η χρονική στιγμή t_2 που το κύμα από τη δεύτερη πηγή φτάνει στο σημείο P θα είναι:

$$t_2 = t_1 + \Delta t \Rightarrow t_2 = 0,6s + 0,8s \Rightarrow t_2 = 1,4s$$

Η απόσταση του σημείου P από τη δεύτερη πηγή είναι:

$$r_2 = u.t_2 \Rightarrow r_2 = 10.1,4m \Rightarrow r_2 = 14m$$

β) Από την εξίσωση απομάκρυνσης των πηγών $y = 0,2.\eta\mu 10\pi t$ (S.I.) έχουμε:

$$A = 0,2m$$

$$\omega = 10\pi \text{ rad/s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{10\pi} s \Rightarrow T = 0,2s$$

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = \frac{1}{0,2} Hz \Rightarrow f = 5Hz$$

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής έχουμε:

$$u = \lambda.f \Rightarrow \lambda = \frac{u}{f} \Rightarrow \lambda = \frac{10}{5} m \Rightarrow \lambda = 2m$$

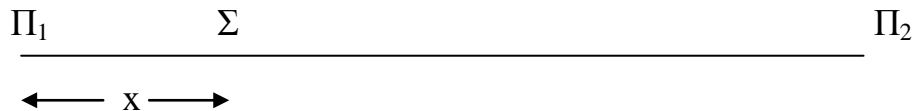
Θα εξετάσουμε αν το σημείο P είναι σημείο ενίσχυσης:

$$\frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \frac{14 - 6}{2} = \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow r_2 - r_1 = 4.\lambda \quad \text{άρα στο σημείο P έχουμε ενίσχυση.}$$

γ) Για τα σημεία ενίσχυσης ισχύει ότι $r_2 - r_1 = N\lambda$

Για το σημείο P αποδείξαμε στο ερώτημα (β) ότι $N = 4$ δηλαδή το σημείο αυτό βρίσκεται στον πέμπτο κροσσό ενίσχυσης.

δ) Τώρα θα υπολογίσουμε το πλήθος των ενισχύσεων που υπάρχουν στο ευθύγραμμο τμήμα των πηγών.



Θεωρώ ένα τυχαίο σημείο ενίσχυσης Σ του τμήματος των πηγών που απέχει απόσταση x από την πρώτη πηγή. Θα ισχύει:

$$r_1 - r_2 = N\lambda \Rightarrow x - (d - x) = N\lambda \Rightarrow 2x - d = N\lambda \Rightarrow 2x = N\lambda + d \Rightarrow x = \frac{N\lambda + d}{2}$$
$$\Rightarrow x = N + 6$$

Αφού το σημείο Σ ανήκει στο τμήμα των πηγών θα ισχύει:

$0 \leq x \leq d \Rightarrow 0 \leq N + 6 \leq 12 \Rightarrow -6 \leq N \leq 6$ άρα οι τιμές του N είναι -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Υπάρχουν λοιπόν 13 σημεία ενίσχυσης στο ευθύγραμμο τμήμα των πηγών.

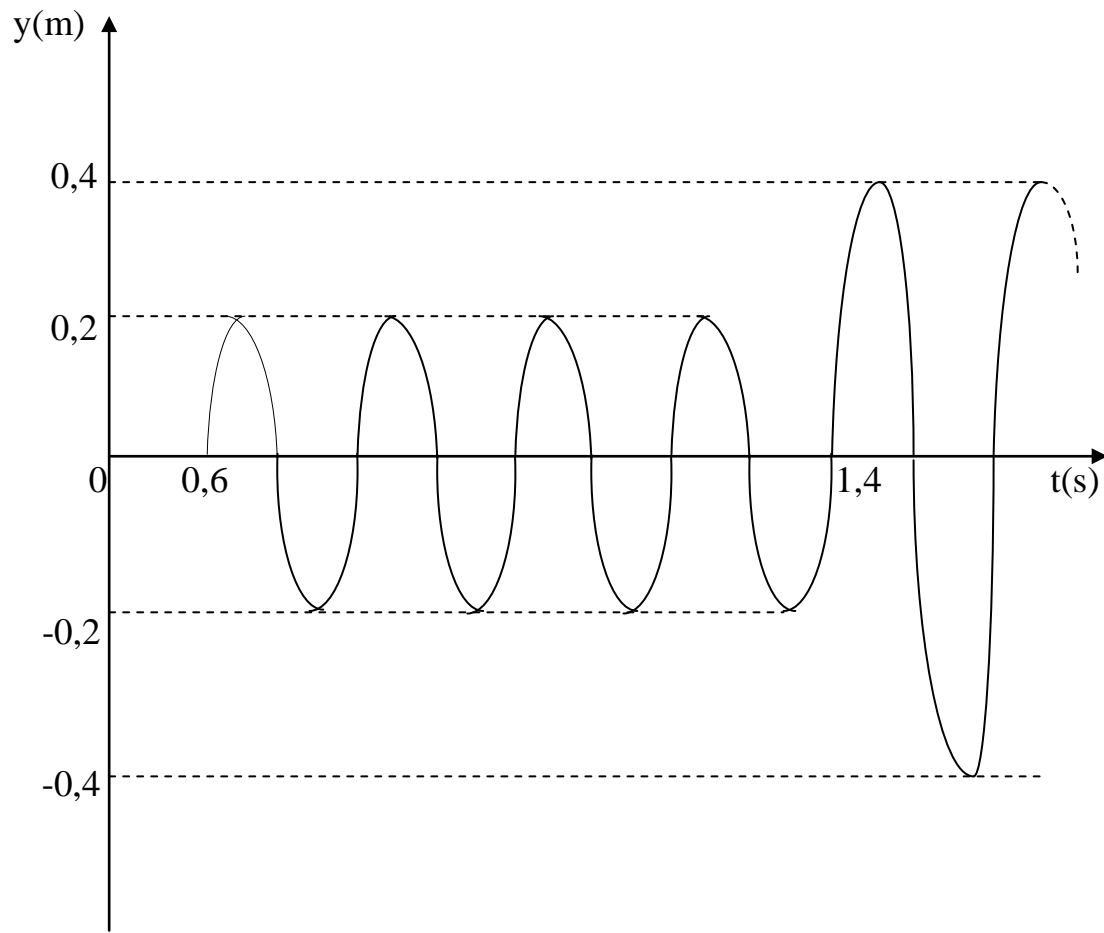
ε) Για το σημείο P ισχύουν:

Από $t = 0$ μέχρι $t = 0,6s$ είναι ακίνητο (δεν έχει φτάσει ακόμα κανένα από τα δύο κύματα στο P).

Από $t = 0,6s$ μέχρι $t = 1,4s$ το σημείο P κινείται υπό την επίδραση του κύματος από την πρώτη πηγή άρα το πλάτος ταλάντωσης είναι $A = 0,2m$.

Από τη στιγμή $t = 1,4s$ και μετά το σημείο P κινείται υπό την επίδραση και των δύο κυμάτων και αφού αποδείξαμε ότι είναι σημείο ενίσχυσης, το πλάτος ταλάντωσης θα είναι $A' = 2.A = 0,4m$

Η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του σημείου P σε συνάρτηση με το χρόνο φαίνεται παρακάτω.



στ) Όταν το σημείο P κινείται λόγω του πρώτου κύματος, η μέγιστή του ταχύτητα είναι:

$$u = \omega \cdot A \Rightarrow u = 10\pi \cdot 0,2 \text{ m/s} \Rightarrow u = 2\pi \text{ m/s}$$

Όταν το σημείο P κινείται λόγω και των δύο κυμάτων, η μέγιστή του ταχύτητα είναι:

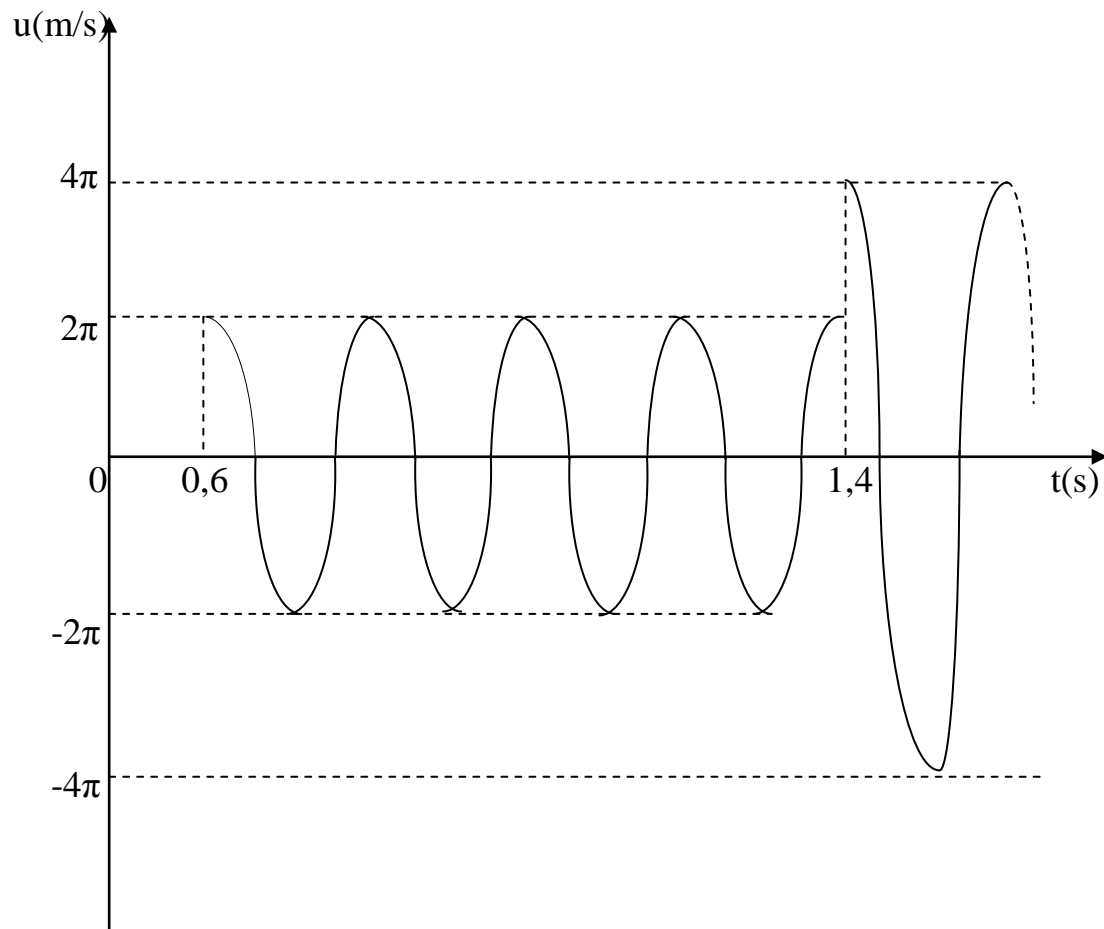
$$u = \omega \cdot A' \Rightarrow u = 10\pi \cdot 0,4 \text{ m/s} \Rightarrow u = 4\pi \text{ m/s}$$

Από $t = 0$ μέχρι $t = 0,6\text{s}$ το σημείο P είναι ακίνητο ($u = 0$).

Από $t = 0,6\text{s}$ μέχρι $t = 1,4\text{s}$ η ταχύτητα μεταβάλλεται αρμονικά με μέγιστη τιμή την $2\pi \text{ m/s}$.

Από $t = 1,4\text{s}$ και μετά η ταχύτητα μεταβάλλεται αρμονικά με μέγιστη τιμή την $4\pi \text{ m/s}$.

Η γραφική παράσταση της ταχύτητας του σημείου P σε συνάρτηση με το χρόνο φαίνεται παρακάτω.



ζ) Όταν το σημείο P κινείται λόγω του πρώτου κύματος, η μέγιστή του επιτάχυνση είναι:

$$a = \omega^2 \cdot A \Rightarrow a = (10\pi)^2 \cdot 0,2 \text{ m/s}^2 \Rightarrow a = 200 \text{ m/s}^2$$

Όταν το σημείο P κινείται λόγω και των δύο κυμάτων, η μέγιστή του επιτάχυνση είναι:

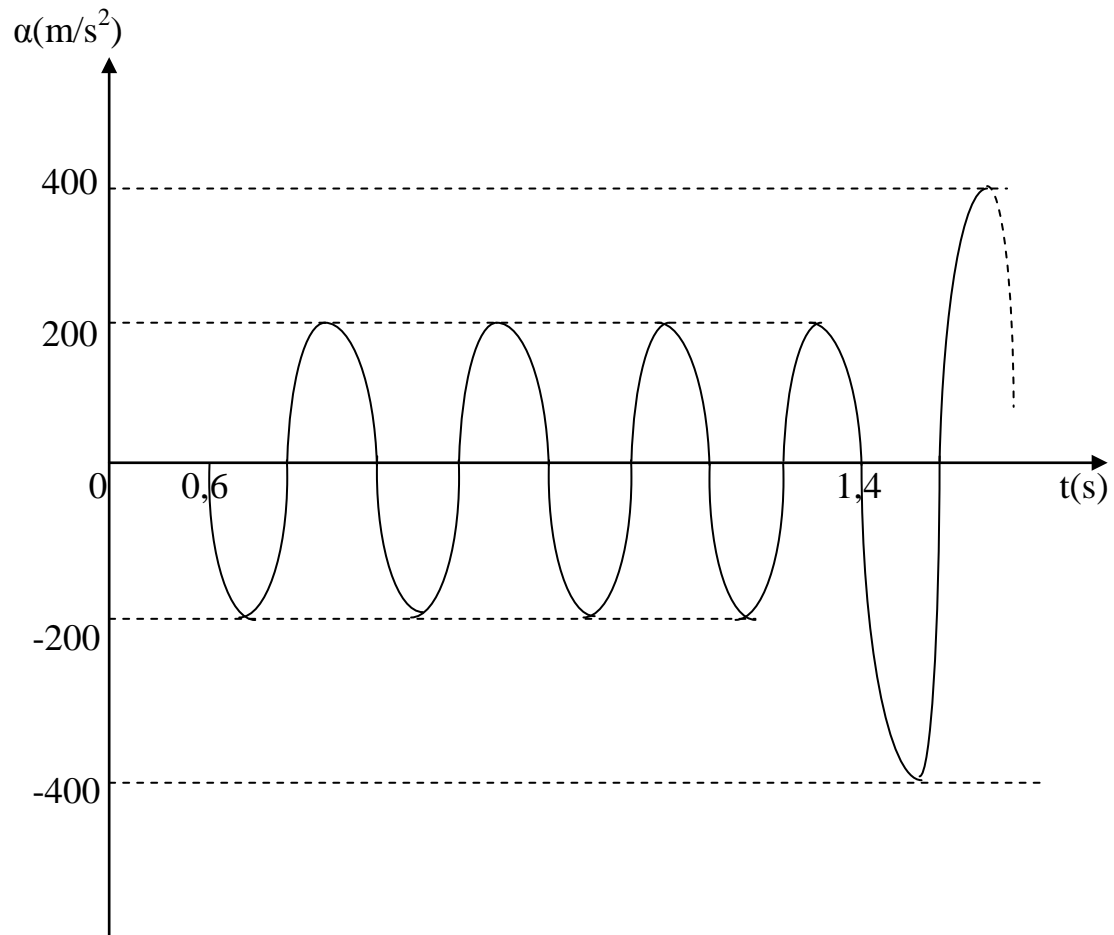
$$a = \omega^2 \cdot A' \Rightarrow a = (10\pi)^2 \cdot 0,4 \text{ m/s}^2 \Rightarrow a = 400 \text{ m/s}^2$$

Από $t = 0$ μέχρι $t = 0,6\text{s}$ το σημείο P είναι ακίνητο ($a = 0$).

Από $t = 0,6\text{s}$ μέχρι $t = 1,4\text{s}$ η επιτάχυνση μεταβάλλεται αρμονικά με μέγιστη τιμή την 200 m/s^2 .

Από $t = 1,4\text{s}$ και μετά η επιτάχυνση μεταβάλλεται αρμονικά με μέγιστη τιμή την 400 m/s^2 .

Η γραφική παράσταση της επιτάχυνσης του σημείου P σε συνάρτηση με το χρόνο φαίνεται παρακάτω.



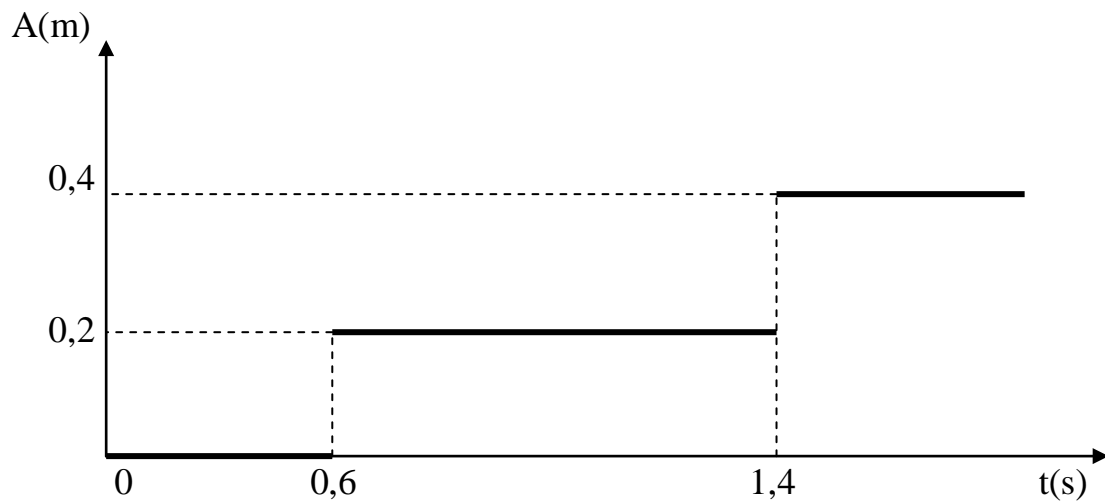
η) Για το πλάτος ταλάντωσης του σημείου P ισχύουν:

Από $t = 0$ μέχρι $t = 0,6\text{s}$ $A = 0$

Από $t = 0,6\text{s}$ μέχρι $t = 1,4\text{s}$ $A = 0,2\text{m}$

Από $t = 1,4\text{s}$ και μετά $A = 0,4\text{m}$

Η γραφική παράσταση του πλάτους ταλάντωσης του σημείου P σε συνάρτηση με το χρόνο φαίνεται παρακάτω.



θ) Για τη φάση του σημείου P ισχύουν:

Από $t = 0$ μέχρι $t = 0,6\text{s}$: $\phi = 0$

Από $t = 0,6\text{s}$ μέχρι $t = 1,4\text{s}$:

$$\phi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) \Rightarrow \phi = 2\pi\left(\frac{t}{0,2} - \frac{6}{2}\right) = 2\pi(5t - 3) \Rightarrow \phi = 10\pi - 6\pi \quad (\text{S.I.})$$

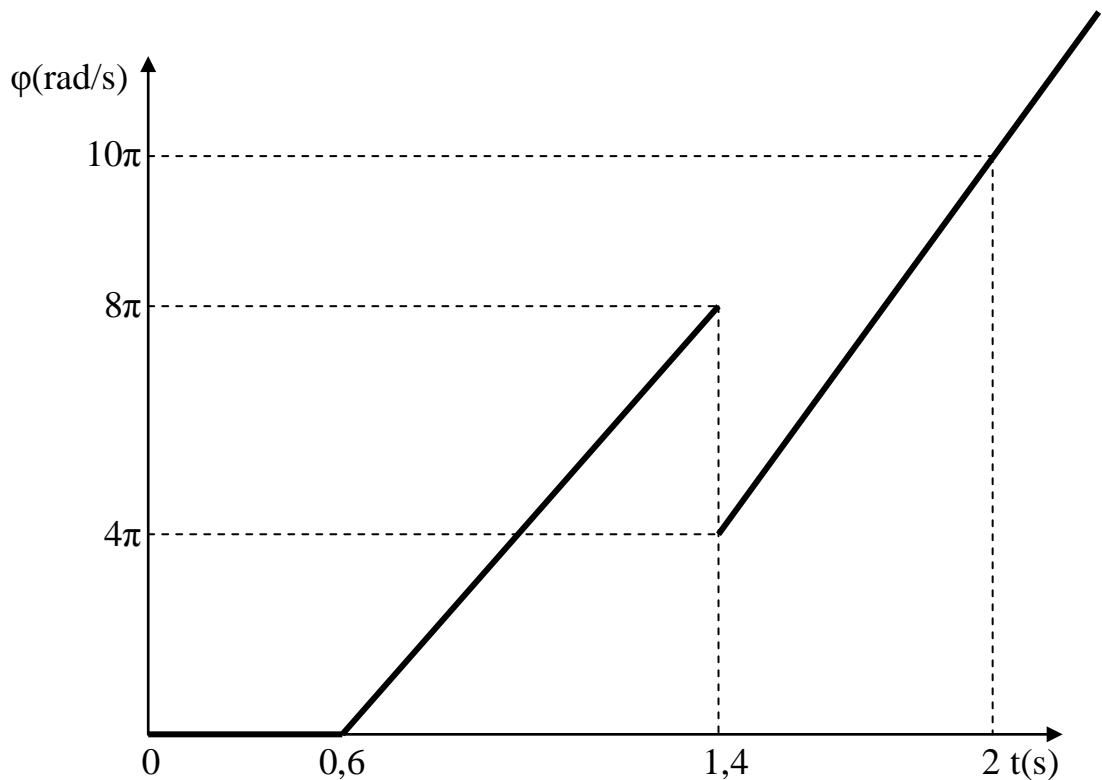
Η γραφική παράσταση θα είναι ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $(0,6, 0)$ και $(1,4, 8\pi)$.

Από $t = 1,4\text{s}$ και μετά:

$$\phi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right) \Rightarrow \phi = 2\pi\left(\frac{t}{0,2} - \frac{6+14}{2 \cdot 2}\right) = 2\pi(5t - 5) \Rightarrow \phi = 10\pi - 10\pi \quad (\text{S.I.})$$

Η γραφική παράσταση θα είναι ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $(1,4, 4\pi)$ και $(2, 10\pi)$.

Η γραφική παράσταση της φάσης ταλάντωσης του σημείου P σε συνάρτηση με το χρόνο φαίνεται παρακάτω.



ι) Έστω ότι στο σημείο P βρίσκεται ένας μικρός φελλός μάζας $m = 2 \cdot 10^{-4} \text{ Kg}$. Θα υπολογίσουμε τη δύναμη επαναφοράς που δέχεται ο φελλός κατά τις χρονικές στιγμές $t_1 = 0,5\text{s}$, $t_2 = 1,25\text{s}$ και $t_3 = 1,45\text{s}$.

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,5\text{s}$ κανένα από τα δύο κύματα δεν έχουν φτάσει στο σημείο P. Άρα η δύναμη επαναφοράς στο φελλό είναι $F = 0$

Τη χρονική στιγμή $t_2 = 1,25\text{s}$ μόνο το κύμα από την πρώτη πηγή έχει φτάσει στο σημείο P. Άρα η δύναμη επαναφοράς στο φελλό είναι:

$$\begin{aligned}
 F &= m \cdot a = m(-\omega^2 \cdot y) = -m \cdot \omega^2 \cdot A \cdot \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right) \Rightarrow F = -2 \cdot 10^{-4} (10\pi)^2 \cdot 0,2 \cdot \mu 2\pi \left(\frac{1,25}{0,2} - \frac{6}{2} \right) N \Rightarrow \\
 &\Rightarrow F = -0,2 \cdot 0,2 \cdot \mu 2\pi (6,25 - 3) N \Rightarrow F = -0,04 \mu (2\pi \cdot 3,25) N \Rightarrow F = -0,04 \mu 6,5\pi N \Rightarrow \\
 &\Rightarrow F = -0,04 \mu \frac{\pi}{2} N \Rightarrow F = -0,04 N
 \end{aligned}$$

Τη χρονική στιγμή $t_3 = 1,45\text{s}$ έχουν φτάσει και τα δύο κύματα στο σημείο P. Θα υπολογίσουμε πρώτα την απομάκρυνση του φελλού την παραπάνω χρονική στιγμή.

$$\begin{aligned}
 y &= 2A \cos 2\pi \frac{r_2 - r_1}{2\lambda} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda} \right) \Rightarrow y = 0,4 \cos 2\pi \frac{8}{4} \sin 2\pi \left(\frac{1,45}{0,2} - \frac{20}{4} \right) m \Rightarrow \\
 &\Rightarrow y = 0,4 \cos 4\pi \cdot \sin 2\pi (7,25 - 5) m \Rightarrow y = 0,4 \cdot 1 \cdot \sin(2\pi \cdot 2,25) m \Rightarrow y = 0,4 \cdot \sin 4,5\pi m \Rightarrow \\
 &\Rightarrow y = 0,4 \cdot \sin \frac{\pi}{2} m \Rightarrow y = 0,4 m
 \end{aligned}$$

Η δύναμη επαναφοράς στο φελλό είναι:

$$F = -m\omega^2 \cdot y \Rightarrow F = -2 \cdot 10^{-4} (10\pi)^2 \cdot 0,4 N \Rightarrow F = -0,2 \cdot 0,4 N \Rightarrow F = -0,08 N$$

Ψαρουδάκης Μανώλης, Φυσικός

