



**ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

**ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ**

1. Ιδιότητες της πρόσθεσης.....	3
2. Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού.....	3
3. Δυνάμεις Φυσικών Αριθμών .....	5
4. Τα κλάσματα .....	6
5. Ισοδύναμα Κλάσματα.....	6
6. Πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων .....	7
7. Πολλαπλασιασμός κλασμάτων.....	8
8. Διάρθρωση κλασμάτων.....	8

**1. Ιδιότητες της πρόσθεσης**

- Το 0 όταν προστεθεί σε ένα φυσικό αριθμό δεν τον μεταβάλλει.  
 $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$   
 π.χ.:  $5 + 0 = 0 + 5 = 5$
- Μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά των δύο προσθετέων ενός αθροίσματος (αντιμεταθετική ιδιότητα)  
 $\alpha + \beta = \beta + \alpha$   
 π.χ.:  $5 + 2 = 2 + 5 = 7$
- Μπορούμε να αντικαθιστούμε προσθετέους με το άθροισμά τους ή να αναλύουμε ένα προσθετέο σε άθροισμα (προσεταιριστική ιδιότητα).  
 $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$   
 π.χ.:  $5 + (2 + 3) = (5 + 2) + 3 = 10$

**2. Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού**

- Το 1 όταν πολλαπλασιαστεί με ένα φυσικό αριθμό δεν τον μεταβάλλει  
 $\alpha * 1 = 1 * \alpha = \alpha$   
 π.χ.:  $5 * 1 = 1 * 5 = 5$
- Μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά των παραγόντων ενός γινομένου (αντιμεταθετική ιδιότητα)  
 $\alpha * \beta = \beta * \alpha$   
 π.χ.:  $5 * 2 = 2 * 5 = 10$
- Μπορούμε να αντικαθιστούμε παράγοντες με το γινόμενό τους ή να αναλύσουμε ένα παράγοντα σε γινόμενο (προσεταιριστική ιδιότητα)  
 $\alpha * (\beta * \gamma) = (\alpha * \beta) * \gamma$   
 π.χ.:  $2 * (3 * 4) = (2 * 3) * 4 = 24$
- Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση  
 $\alpha * (\beta + \gamma) = \alpha * \beta + \alpha * \gamma$   
 π.χ.:  $3 * (2 + 5) = 3 * 2 + 3 * 5 = 6 + 15 = 21$

**Άσκηση 1**

Να εκτελεστούν οι ακόλουθες πράξεις:

α)  $89 * 7 + 89 * 3 = 89 (7+3) = 89 * 10 = 890$

$$\alpha) 23 * 49 + 77 * 49 = (23 + 77) * 49 = 100 + 49 = 490$$

$$\gamma) \alpha * (\beta + \gamma) = \alpha * \beta + \alpha * \gamma$$

$$\delta) 3 * (\alpha + \gamma) = 3\alpha + 3\beta$$

- Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την αφαίρεση

$$\alpha * (\beta - \gamma) = \alpha * \beta - \alpha * \gamma$$

### Άσκηση 2

Να εκτελεστούν οι ακόλουθες πράξεις:

$$\alpha) 76 * 13 - 76 * 3 = 76 * (13 - 3) = 76 * 10 = 760$$

$$\beta) 284 * 99 = 284 * (100 - 1) = 284 * 100 - 284 * 1 = 28.000 - 284 = 28116$$

$$\gamma) \alpha * (\beta - \gamma) = \alpha * \beta - \alpha * \gamma$$

$$\delta) 5 * (\alpha + \gamma) = 5\alpha + 5\beta$$

**3. Δυνάμεις Φυσικών Αριθμών**

- Το γινόμενο  $\alpha * \alpha * \alpha * \dots * \alpha$ , που έχει  $n$  παράγοντες ίσους με το  $\alpha$ , λέγεται δύναμη του  $\alpha$  στην  $n$  ή νιοστή δύναμη του  $\alpha$  και συμβολίζεται με  $\alpha^n$ .
- Ο αριθμός  $\alpha$  λέγεται βάση της δύναμης και ο  $n$  λέγεται εκθέτης.
- Η δύναμη του αριθμού στη δευτέρα, δηλαδή το  $\alpha^2$ , λέγεται και τετράγωνο του  $\alpha$ .  

$$\alpha^2 = \alpha * \alpha$$

$$2^2 = 2 * 2 = 4$$
- Η δύναμη του αριθμού στην τρίτη, δηλαδή το  $\alpha^3$ , λέγεται κύβος του  $\alpha$ .  

$$\alpha^3 = \alpha * \alpha * \alpha$$

$$2^3 = 2 * 2 * 2 = 6$$
- Το  $\alpha^1$ , δηλαδή η πρώτη δύναμη ενός αριθμού  $\alpha$  είναι ο ίδιος ο αριθμός  $\alpha$ .
- Οι δυνάμεις του 1, δηλαδή το  $1^n$ , είναι όλες ίσες με 1.

**Άσκηση 3**

Να εκτελεστούν οι πράξεις:

$$\alpha) (2 * 5)^4 + 4 * (3 + 2)^2 = 10^4 + 4 * 5^2 = 10.000 + 4 * 25 = 10.000 + 100 = 10.100$$

$$\beta) (2 + 3)^3 - 8 * 3^2 = 5^3 - 8 * 9 = 125 - 72 = 53$$

$$\gamma) 3 * 5^2$$

$$\delta) 3 * 5^2 + 2$$

$$\epsilon) 3 * 5^2 + 2^2$$

$$\sigma\tau) 3 (5 + 2)^2$$

$$\zeta) 3^2 + 3^3 + 3^4$$

$$\eta) (13 - 2)^4 + 5 * 3^2$$

#### 4. Τα κλάσματα

1. Όταν ένα μέγεθος ή ένα σύνολο ομοειδών αντικειμένων χωριστεί σε  $n$  ίσα μέρη, το κάθε ένα από αυτά ονομάζεται νιοστό και συμβολίζεται με το  $1/n$
2. Κάθε τμήμα του μεγέθους ή του συνόλου αντικειμένων, που αποτελείται από  $k$  τέτοια ίσα μέρη, συμβολίζεται με το κλάσμα  $n/k$  και διαβάζεται “κάπα νιοστά”.
3. Η έννοια του κλάσματος επεκτείνεται και στην περίπτωση που ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρανομαστή. Τότε το κλάσμα είναι μεγαλύτερο από το 1.  
Είναι  $8/3 > 1$  διότι  $8 > 3$
4. Κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να έχει τη μορφή κλάσματος με παρανομαστή το ένα  
 $6 = 6/1, 15 = 15/1, 21 = 21/1$

#### 5. Ισοδύναμα Κλάσματα

1. Δύο κλάσματα  $\alpha/\beta$  και  $\gamma/\delta$  λέγονται ισοδύναμα όταν εκφράζουν το ίδιο τμήμα ενός μεγέθους ή ίσων μεγεθών. Επειδή ακριβώς εκφράζουν το ίδιο τμήμα ενός μεγέθους είναι και ίσα και γράφουμε  $\alpha/\beta = \gamma/\delta$ , δηλ.  $2/3 = 15/5$ 
  - Αν δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα τότε τα «χιαστή γινόμενα»  $\alpha \cdot \delta$  και  $\beta \cdot \gamma$  είναι ίσα.

Δηλαδή: αν  $\alpha/\beta = \gamma/\delta$  τότε:  $\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$

Για να κατασκευάσουμε ισοδύναμα κλάσματα ή για να διαπιστώσουμε ότι δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα, μπορούμε να εφαρμόσουμε τους παρακάτω κανόνες:

- Όταν πολλαπλασιαστούν οι όροι με τον ίδιο φυσικό αριθμό ( $\neq 0$ ) προκύπτει κλάσμα ισοδύναμο.  
 $2/3 = 2 \cdot 4 / 3 \cdot 4 = 8/12$
- Όταν οι όροι ενός κλάσματος διαιρεθούν με τον ίδιο φυσικό αριθμό ( $\neq 0$ ) προκύπτει κλάσμα ισοδύναμο.  
 $10/5 = \underline{10/5} = 2/3$

15/5

2. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται απλοποίηση του κλάσματος και έχει ως αποτέλεσμα ένα κλάσμα ισοδύναμο με το αρχικό με μικρότερους όρους.
3. Το κλάσμα εκείνο που δεν μπορεί να απλοποιηθεί (δεν υπάρχει κοινός διαιρέτης αριθμητή και παρανομαστή) λέγεται ανάγωγο.

$$7/12 \text{ ανάγωγο αφού } \text{ΜΚΔ}(7, 12) = 1$$

4. Όταν δύο ή περισσότερα κλάσματα έχουν τον ίδιο παρανομαστή λέγονται ομώνυμα και όταν έχουν διαφορετικούς παρανομαστές ονομάζονται ετερώνυμα.

### 6. Πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων

Γενικά για την πρόσθεση και την αφαίρεση κλασμάτων ισχύουν τα εξής:

1. Προσθέτουμε δύο ή περισσότερα ομώνυμα κλάσματα προσθέτοντας τους αριθμητές τους.

$$\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha + \beta}{\gamma}$$

2. Προσθέτουμε ετερώνυμα κλάσματα αφού πρώτα τα μετατρέψουμε σε ομώνυμα.

$$7/4 + 2/3 = 21/12 + 8/5 = 29/12$$

3. Αφαιρούμε δύο ομώνυμα κλάσματα αφαιρώντας τους αριθμητές τους.

$$\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha - \beta}{\gamma}$$

4. Αφαιρούμε δύο ετερώνυμα κλάσματα αφού τα μετατρέψουμε πρώτα σε ομώνυμα.

$$7/4 - 2/3 = 21/12 - 8/5 = 13/12$$

- Μερικές φορές αντί να γράφουμε  $1 + 4/5$ , γράφουμε πιο απλά  $1 4/5$
- Ο συμβολισμός αυτός, που παριστάνει το άθροισμα ενός ακεραίου με ένα κλάσμα μικρότερο της μονάδας, ονομάζεται μεικτός αριθμός.

### 7. Πολλαπλασιασμός κλασμάτων

1. Το γινόμενο δύο κλασμάτων είναι το κλάσμα που έχει αριθμητή το γινόμενο των αριθμητών και παρανομαστή το γινόμενο των παρανομαστών.

$$\frac{\alpha}{\beta} * \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha * \gamma}{\beta * \delta}$$

2. Το γινόμενο ενός φυσικού αριθμού επί ένα κλάσμα είναι το κλάσμα με αριθμητή το γινόμενο του αριθμητή επί τον φυσικό αριθμό και με τον ίδιο παρανομαστή.

$$\lambda * \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} * \lambda = \frac{\alpha * \lambda}{\beta}$$

3. Τα κλάσματα που έχουν γινόμενο 1 λέγονται αντίστροφα.

Επειδή  $\frac{\gamma}{\delta} * \frac{\delta}{\gamma} = 1$  τα κλάσματα  $\frac{\gamma}{\delta}$  και  $\frac{\delta}{\gamma}$  λέγονται αντίστροφα.

4. Ισχύουν όλες οι ιδιότητες των πράξεων των φυσικών αριθμών στα κλάσματα:

- Το 1 δεν μεταβάλλει το γινόμενο

$$1 * \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} * 1 = \frac{\alpha}{\beta}$$

- Αντιμεταθετική

$$\frac{\alpha}{\beta} * \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\gamma}{\delta} * \frac{\alpha}{\beta}$$

- Προσεταιριστική

$$\frac{\alpha}{\beta} * (\frac{\gamma}{\delta} * \frac{\epsilon}{\zeta}) = (\frac{\alpha}{\beta} * \frac{\gamma}{\delta}) * \frac{\epsilon}{\zeta}$$

- Επιμεριστική

$$\frac{\alpha}{\beta} * (\frac{\gamma}{\delta} - \frac{\epsilon}{\zeta}) = \frac{\alpha}{\beta} * \frac{\gamma}{\delta} - \frac{\alpha}{\beta} * \frac{\epsilon}{\zeta}$$

### 8. Διάρθρωση κλασμάτων

1. Για να διαιρέσουμε δύο φυσικούς αριθμούς αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

$$\alpha : \beta = \alpha * \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$$

2. Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

$$\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} * \frac{\delta}{\gamma}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} / \frac{\gamma}{\delta}$$



3. Ένα κλάσμα του οποίου ένας τουλάχιστον όρος του είναι κλάσμα, ονομάζεται σύνθετο κλάσμα.

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha * \delta}{\beta * \gamma}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha * \delta}{\beta * \gamma}$$