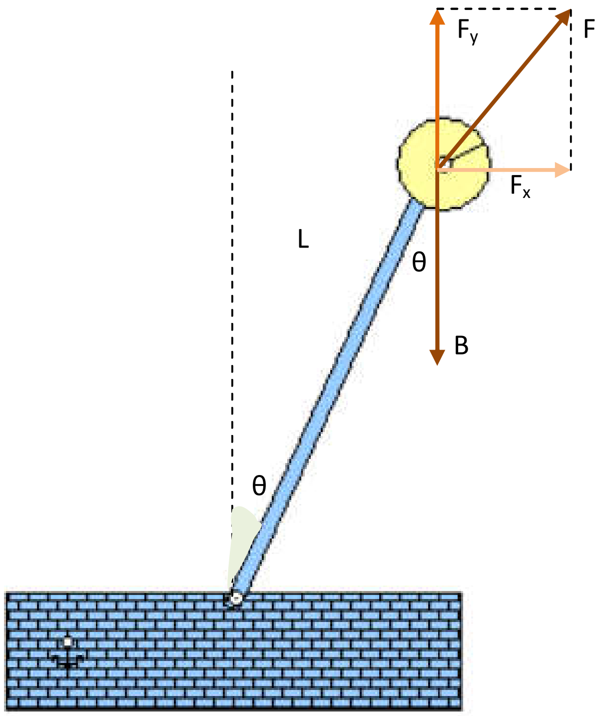
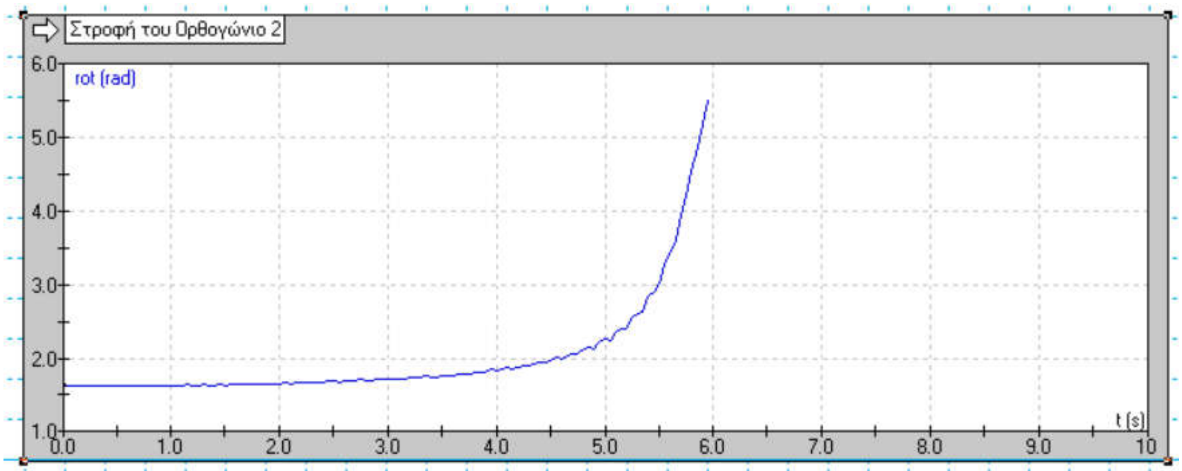
ΜΙΑ ΠΑΡΑΔΟΞΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ

Σώμα μάζας m είναι ενωμένο στο άκρο αβαρούς ράβδου. Στο άλλο άκρο της ράβδου υπάρχει άρθρωση. Το σώμα προφανώς δεν μπορεί λόγω της άρθρωσης να ισορροπήσει κατακόρυφα, αφού μία τέτοια ισορροπία είναι ασταθής. Αν όμως η άρθρωση βρίσκεται σε μία πλατφόρμα και θέσουμε την πλατφόρμα σε κατακόρυφη ταλάντωση με το κατάλληλο πλάτος και συχνότητα, τότε το σώμα ισορροπεί κατακόρυφα!

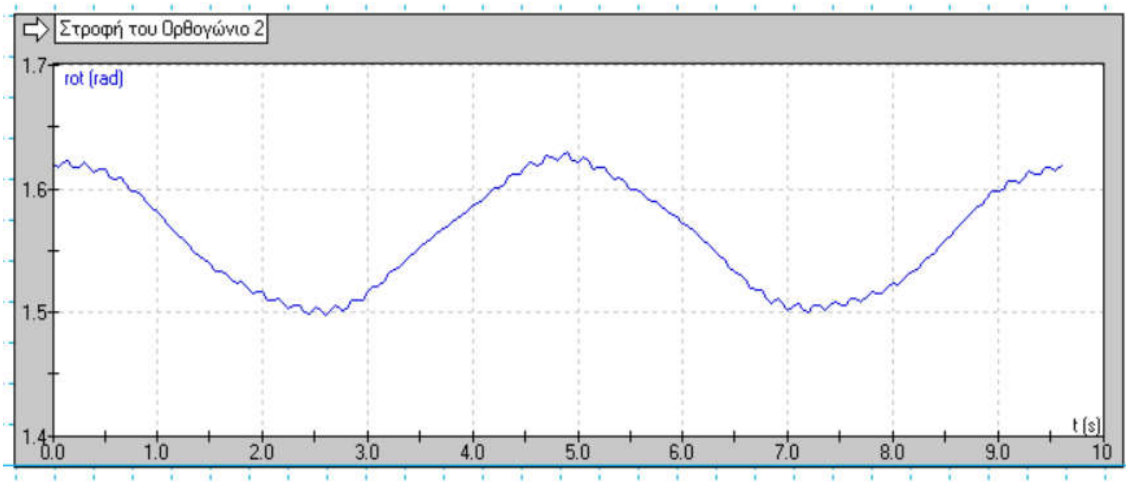


Οι πρώτες παρατηρήσεις με τη βοήθεια του Interactive Physics

Φτιάξαμε μία προσομοίωση στο I.P με μήκος αβαρούς ράβδου 1m και πλάτος ταλάντωσης της πλατφόρμα 5cm. Διαπιστώσαμε ότι όταν η κυκλική συχνότητα ταλάντωσης της πλατφόρμας ήταν μικρότερη από 85r/s τότε η ράβδος έπεφτε και η γωνία θ δίνονταν από την παρακάτω γραφική:



Όταν όμως η κυκλική συχνότητα ταλάντωσης της πλατφόρμας γινόταν μεγαλύτερη από 85r/s τότε η ράβδος ισορροπούσε κατακόρυφα προς τα πάνω. Η γραφική παράσταση της θ=θ(t) ήταν τότε η παρακάτω. Από τη γραφική παράσταση φαίνεται ευκρινώς ότι είναι ο συνδυασμός μίας αργής ταλάντωσης που η κυκλική της συχνότητα καθορίζεται από το μήκος της ράβδου και μίας μικρότερου πλάτους αλλά αρκετά γρηγορότερης με συχνότητα που καθορίζεται από τη συχνότητα της πλατφόρμας.



Μελέτη του προβλήματος

Σημειώνουμε τις δυνάμεις στο σώμα. Είναι το βάρος και η δύναμη από την αβαρή ράβδο. Εφαρμόζω το θεμελιώδη νόμο για τις περιστροφές ως προς το σημείο της άρθρωσης και έχω:

$$mgL\eta\mu\theta - F_y L\eta\mu\theta = \mathrm{I}\alpha_\gamma \rightarrow mgL\eta\mu\theta - ma_{\tau\alpha\lambda}L\eta\mu\theta = mL^2\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad (1)$$

(Η δύναμη F που ασκείται στην πλατφόρμα στον άξονα y ώστε να κάνει αρμονική ταλάντωση μεταφέρεται και στο σώμα μάζας m). Άρα:

$$(g - \omega^2 \mathrm{A}\sigma\upsilon\nu\omega \cdot t)\eta\mu\theta = L\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad (2)$$

Θεωρούμε ότι το πλάτος της ταλάντωσης της πλατφόρμας είναι πολύ μικρότερο από το μήκος του εκκρεμούς. A<<L

Θέλουμε να βρούμε τη λύση θ=θ(t) της διαφορικής εξίσωσης (2) και να μελετήσουμε πότε αυτή η λύση δίνει μία ευσταθή ισορροπία γύρω από τη θέση θ=0. Όπως προαναφέραμε, σ' αυτή την περίπτωση η γωνία θ εκτελεί ταλάντωση γύρω από τη θέση μηδέν με κυκλική συχνότητα χαρακτηριστική της συχνότητας ταλάντωσης του σώματος, δηλαδή με κυκλική συχνότητα

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} << \omega \qquad (3)$$

Επομένως η λύση που ψάχνουμε θα αποτελείται από δύο όρους. Έναν όρο $\theta_0(t)$ που θα μεταβάλλεται αργά με το χρόνο με συχνότητα ω_0 και από έναν άλλο πολύ μικρότερο όρο δ(t) που θα μεταβάλλεται πολύ πιο γρήγορα με συχνότητα ω. Δηλαδή ψάχνουμε για λύση της διαφορικής της μορφής

$$\boldsymbol{\theta(t)=\theta_0(t)+\delta(t)}$$

οπότε ημθ = ημ(θ_0+δ) = ημθ_0συνδ+συνθ_0ημδ ≈ ημθ_0+δσυνθ_0 αφού υποθέτοντας ότι το δ πολύ μικρή γωνία θα έχουμε συνδ ≈ 1 και ημδ ≈ δ

Έτσι η διαφορική εξίσωση (2) γίνεται:

$$\frac{d^2\theta_0}{dt^2}+\frac{d^2\delta}{dt^2}+\frac{\omega^2 A}{L}\sigma\upsilon\nu\omega t\cdot\eta\mu\theta_0+\frac{\omega^2 A}{L}\sigma\upsilon\nu\omega t\cdot\delta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta_0-\frac{g}{L}\eta\mu\theta_0-\frac{g}{L}\delta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta_0=0 \qquad (4)$$

Επειδή όπως είπαμε το θ μεταβάλλεται αργά με το χρόνο ενώ το δ γρήγορα, θα έχουμε $\frac{d^2\theta_0}{dt^2} <<< \frac{d^2\delta}{dt^2}$

Λόγω της (3) οι όροι που περιέχουν το g μπορούν ν' απαλείφουν. Επίσης επειδή ο όρος όπως είπαμε δ είναι πολύ μικρός, μπορούμε να τον απαλείψουμε. Έτσι η διαφορική (4) προσεγγίζεται με τη:

$$\frac{d^2\delta}{dt^2}+\frac{\omega^2 A}{L}\sigma\upsilon\nu\omega t\cdot\eta\mu\theta_0=0\rightarrow\delta\approx\frac{A}{L}\sigma\upsilon\nu\omega t\cdot\eta\mu\theta_0 \qquad (5)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (4) και (5) έχουμε:

$$\begin{aligned}&\frac{d^2\theta_0}{dt^2}+\frac{\omega^2 A}{L}\sigma\upsilon\nu\omega t\cdot(\frac{A}{L}\sigma\upsilon\nu\omega t\cdot\eta\mu\theta_0)\cdot\sigma\upsilon\nu\theta_0-\frac{g}{L}\eta\mu\theta_0-\frac{g}{L}\frac{A}{L}\sigma\upsilon\nu\omega t\cdot\eta\mu\theta_0\cdot\sigma\upsilon\nu\theta_0=0\rightarrow\\&\frac{d^2\theta_0}{dt^2}+\frac{\omega^2 A^2}{L^2}\sigma\upsilon\nu\omega^2 t\cdot\eta\mu\theta_0\cdot\sigma\upsilon\nu\theta_0-\frac{g}{L}\eta\mu\theta_0-\frac{gA}{L^2}\sigma\upsilon\nu\omega t\cdot\eta\mu\theta_0\cdot\sigma\upsilon\nu\theta_0=0\end{aligned} \qquad (6)$$

Παίρνουμε το μέσο όρο για μία περίοδο του ω και έχουμε:

$$\overline{\frac{d^2\theta_0}{dt^2}}+\frac{\omega^2 A^2}{L^2}\overline{\sigma\upsilon\nu\omega^2 t}\cdot\eta\mu\theta_0\cdot\sigma\upsilon\nu\theta_0-\frac{g}{L}\eta\mu\theta_0-\frac{gA}{L^2}\overline{\sigma\upsilon\nu\omega t}\cdot\eta\mu\theta_0\cdot\sigma\upsilon\nu\theta_0=0 \qquad (7)$$

Και λαμβάνοντας υπόψη ότι :

$\overline{\sigma\upsilon\nu\omega^2 t}=\frac{1}{2}$ ενώ $\overline{\sigma\upsilon\nu\omega t}=0$ καταλήγουμε στη σχέση:

$$\frac{d^2\theta_0}{dt^2}+\frac{\omega^2 A^2}{2L^2}\cdot\eta\mu\theta_0\cdot\sigma\upsilon\nu\theta_0-\frac{g}{L}\eta\mu\theta_0=0 \qquad (8)$$

Ολοκληρώνοντας τη τελευταία σχέση έχουμε:

$$\frac{1}{2}(\frac{d\theta_0}{dt})^2+\frac{\omega^2 A^2}{4L^2}\eta\mu^2\theta_0+\frac{g}{L}\sigma\upsilon\nu\theta_0=\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$$

Πολλαπλασιάζουμε τη σχέση με mL^2 και έχουμε:

$$\frac{1}{2}mL^2(\frac{d\theta_0}{dt})^2+\frac{m\omega^2 A^2}{4}\eta\mu^2\theta_0+mgL\sigma\upsilon\nu\theta_0=\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o} \qquad (9)$$

Αυτή όμως η σχέση δεν είναι παρά η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας με δυναμική ενέργεια την παράσταση:

$$U = \frac{m\omega^2 \mathrm{A}^2}{4}\eta\mu^2\theta_0 + mgL\sigma\upsilon\nu\theta_0 \qquad (10)$$

Για να μελετήσουμε τις θέσεις ισορροπίας του εκκρεμούς κοιτάμε που μηδενίζεται η παράγωγος της δυναμικής ενέργειας. Έτσι έχουμε:

$$\frac{dU}{d\theta_0} = 0 \rightarrow \frac{m}{2}\eta\mu\theta_0(\omega^2\mathrm{A}^2\sigma\upsilon\nu\theta_0 - 2gL) = 0 \qquad (11)$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν 3 θέσεις ισορροπίας. Οι θέσεις με $\theta_0=0$, $\theta_0=\pi$ και $\sigma\upsilon\nu\theta_0 = \frac{2gL}{\omega^2\mathrm{A}^2}$

Για να δούμε τώρα αν υπάρχει κάποια ευσταθής θέση ισορροπίας θα εξετάσουμε τη δεύτερη παράγωγο για να δούμε αν σε κάποια από αυτές τις 3 θέσεις είναι θετική, οπότε η δυναμική ενέργεια σ' αυτή τη θέση θα είναι ελάχιστη.

$$\frac{d^2U}{d\theta_0^2} = \sigma\upsilon\nu\theta_0(\omega^2\mathrm{A}^2\sigma\upsilon\nu\theta_0 - 2gL) - \omega^2\mathrm{A}^2\eta\mu^2\theta_0 \qquad (12)$$

- Για θ=0 έχουμε $\omega^2\mathrm{A}^2 - 2gL > 0$ ευσταθής ισορροπία
- Για θ=π έχουμε $\frac{d^2U}{d\theta_0^2} = \omega^2\mathrm{A}^2 + 2gL > 0$ ευσταθής ισορροπία
- Για $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{2gL}{\omega^2\mathrm{A}^2}$ έχουμε $\frac{d^2U}{d\theta_0^2} = -\omega^2\mathrm{A}^2\eta\mu^2\theta_0 < 0$ ασταθής ισορροπία

Καταλήξαμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι στη θέση $\theta_0 = 0$ έχουμε ευσταθή ισορροπία Ο.Ε.Δ.

ΑΡΑ ΓΙΑ ΝΑ ΙΣΟΡΡΟΠΕΙ ΤΟ ΣΩΜΑ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΑ ΠΡΟΣ ΤΑ ΠΑΝΩ ΘΑ ΠΡΕΠΕΙ: $\boxed{\omega > \frac{\sqrt{2gL}}{\mathrm{A}}}$

Εδώ η προσομοίωση στο Interactive Physics

Εδώ το πείραμα στο Youtube