Το σημείο Φερμάτ υπό το πρίσμα του Νόμπελ Φυσικής 2024

Έμπνευση και αφορμή για τη γραφή αυτού του άρθρου ήταν η συζήτηση που άνοιξε μεταξύ συναδέλφων αν το βραβείο Νόμπελ της Φυσικής του 2024 που δόθηκε στους Τζον Χόπφιλντ και Τζέφρι Χίντον προωθεί τη Φυσική επιστήμη, οπότε καλώς εδόθη στους εν λόγω επιστήμονες, ή όχι οπότε και υπάρχουν ενστάσεις για την εν λόγω βράβευση.

Θα προσπαθήσουμε να λύσουμε ένα πρόβλημα χρησιμοποιώντας έννοιες και μεθόδους που χρησιμοποιούμε στη φυσική (κάτι παρόμοιο κάνανε και οι εν λόγω επιστήμονες) και θ' αφήσουμε τον αναγνώστη να κρίνει αν τελικά τέτοιου είδους προβλήματα προωθούν ή όχι τη φυσική επιστήμη.

Το πρόβλημα στην οικονομία

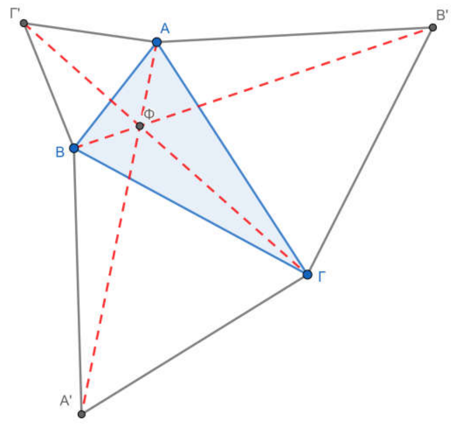
Ένας βεδουίνος τροφοδοτεί με εμπορεύματα 3 οάσεις. Την κάθε όαση την επισκέπτεται μία φορά το μήνα. Το ερώτημα είναι σε ποιο σημείο της ερήμου θα πρέπει να κατασκευάσει την αποθήκη του ώστε να ελαχιστοποιήσει το μήκος των μετακινήσεών του. Για την απλοποίηση του προβλήματος θεωρούμε ότι ο έμπορος μπορεί να κινηθεί κάθε φορά σε ευθεία και ότι η έρημος είναι επίπεδη.

Το πρόβλημα στη γεωμετρία

Έχουμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ. Ψάχνουμε να βρούμε ένα σημείο Φ στο εσωτερικό του τριγώνου τέτοιο ώστε ΦΑ+ΦΒ+ΦΓ=min.

Το σημείο αυτό ονομάζεται σημείο Φερμάτ (Fermat 1607-1665) αφού το συγκεκριμένο πρόβλημα το έλυσε ο Φερμάτ. Το ζητούμενο σημείο είναι εν τέλει αυτό που βλέπει τις κορυφές του τριγώνου υπό γωνία 120^0. Δηλαδή αυτό που $\widehat{\mathrm{A\Phi B}} = \widehat{\mathrm{B\Phi\Gamma}} = \widehat{\mathrm{\Gamma\Phi A}} = 120^0$

Για την εύρεση του σημείου κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΓ΄ ΑΓΒ΄ και ΒΓΑ΄ και ενώνουμε τα σημεία ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄. Οι τρεις αυτές ευθείες συντρέχουν στο ζητούμενο σημείο Φ.



Η απόδειξη στο youtube:

1. https://www.youtube.com/watch?v=p6EVWZKInYc
2. https://www.youtube.com/watch?v=wWXsajE-L_o&t=238s

Το πρόβλημα στη Φυσική

Θα προσπαθήσουμε τώρα να λύσουμε το εν λόγω πρόβλημα επικαλούμενοι γνώσεις και εργαλεία από τη φυσική.

Ψάχνουμε να βρούμε ένα σημείο στο οποίο ελαχιστοποιείται μία παράσταση που εξαρτάται μόνο από χωρικές συντεταγμένες. Αυτό θυμίζει την ελαχιστοποίηση της δυναμικής ενέργειας η οποία συμβαίνει στα σημεία ισορροπίας (ευσταθούς ή ασταθούς). Φανταζόμαστε ότι ένα σημείο (πηγή του πεδίου) παράγει ένα πεδίο που η δυναμική ενέργεια του μοναδιαίου υποθέματος που βρίσκεται σε οποιαδήποτε θέση και απέχει απόσταση r από την πηγή θα θέλαμε να δίνεται από τη σχέση:

$$U = c \cdot r \qquad (1)$$

Γιατί αν η δυναμική ενέργεια ενός μοναδιαίου υποθέματος δίνεται από τη σχέση (1), τότε αν είχαμε τρεις πηγές στην κορυφές ενός τριγώνου, η δυναμική ενέργεια του υποθέματος που βρίσκεται σε κάποιο σημείο Φ θα δίνεται από τη σχέση:

$$U = c(r_1 + r_2 + r_3) = c(\Phi\mathrm{A} + \Phi\mathrm{B} + \Phi\Gamma) \qquad (2)$$

Αφού προσδιορίσαμε τη σχέση που θα πρέπει να δίνει τη δυναμική ενέργεια, δεν μένει πάρα να βρούμε το πεδίο δυνάμεων, ένα κεντρικό και συντηρητικό πεδίο, που να παράγει το εν λόγω δυναμικό (1). Προφανώς για μία πηγή θα πρέπει να ισχύει η σχέση που συνδέει το έργο του πεδίου με τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας:

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}(r)d\vec{r} = U_A - U_B \to \int_A^B F(r)dr = c(r_A - r_B) \qquad (3)$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι:

$$F = -c \quad \text{και} \qquad (4)$$

$$\vec{F} = -c\frac{\vec{r}}{r} = -c\hat{r} \qquad (5)$$

Έτσι τώρα που έχουμε τρεις πηγές, το σημείο Φ στο οποίο η δυναμική ενέργεια ελαχιστοποιείται, θα είναι κάποιο σημείο ισορροπίας. Δηλαδή για το σημείο Φ θα πρέπει να ισχύει:

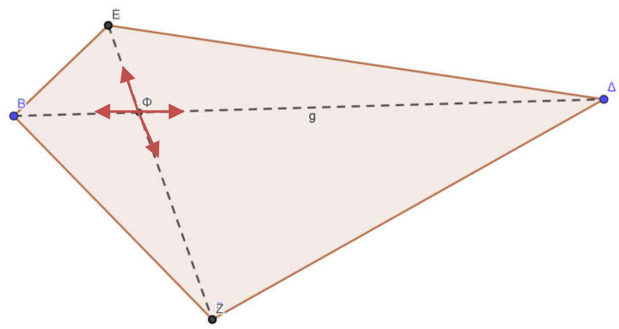
$$\vec{F}_{o\lambda}{}^{(\Phi)} = 0 \to -c(\hat{r}_1 + \hat{r}_2 + \hat{r}_3) = 0 \qquad (5)$$

Τρία μοναδιαία διανύσματα για να έχουν συνισταμένη μηδέν θα πρέπει να σχηματίζουν γωνία 120^0 . Άρα το ζητούμενο σημείο θα είναι αυτό από το οποίο θα φαίνονται οι κορυφές του τριγώνου υπό γωνία 120^0. Όπερ Έδει Δείξε.

Η θεώρηση του προβλήματος μέσω της φυσικής μας βοηθάει να επεκτείνουμε το πρόβλημα και στην περίπτωση τετραπλεύρου. Το πρόβλημα σε αυτή την περίπτωση τίθεται ως εξής:

Το πρόβλημα:

Δίνεται τυχαίο κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να βρεθεί σημείο Φ στο εσωτερικό του τέτοιο ώστε ΦΑ+ΦΒ+ΦΓ+ΦΔ=ελάχιστο.



Η λύση:

Με την ίδια λογική που δουλέψαμε και για το τρίγωνο, θα πρέπει το ζητούμενο σημείο να είναι κάποιο σημείο που η συνολική δύναμη του πεδίου που δημιουργείται από τις 4 πηγές που βρίσκονται στα σημεία Α, Β, Γ και Δ να είναι μηδέν. Επειδή το πεδίο όπως προαναφέραμε είναι τέτοιο ώστε η κάθε πηγή να δημιουργεί μία σταθερού μέτρου δύναμη με φορά προς την πηγή, θα πρέπει τα 4 μοναδιαία διανύσματα στο σημείο Φ να έχουν συνισταμένη μηδέν. Το σημείο τομής των διαγωνίων ικανοποιεί αυτή την απαίτηση, αφού τα μοναδιαία διανύσματα σ’ αυτό το σημείο θα είναι ανά δύο αντίθετα. Άρα η απάντηση είναι ότι το ζητούμενο σημείο Φ είναι το σημείο τομής των διαγωνίων.

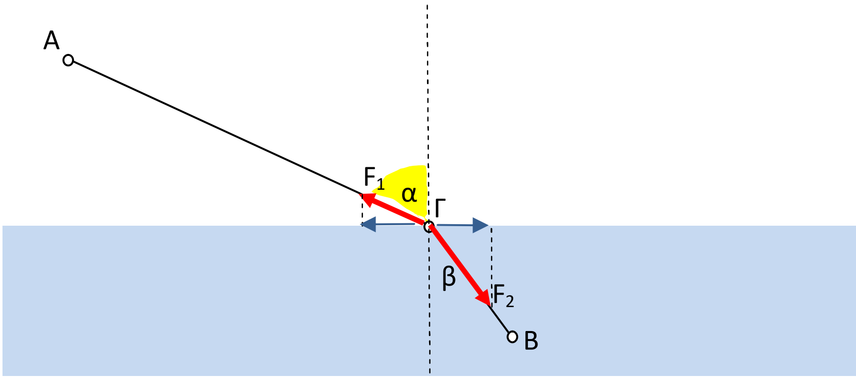
Για την επέκταση του προβλήματος σε πεντάπλευρο και γενικότερα, παραπέμπω στην παρακάτω διατριβή:

https://www.didaktorika.gr/eadd/handle/10442/35153

Μία προσομοίωση της ανίχνευσης της λύσης του προβλήματος στο πεντάπλευρο με τη μεθοδολογία που αναπτύξαμε με εργαλείο το geogebra

https://www.geogebra.org/classic/n5vxqsy4

Από την αρχή του Fermat στο νόμο του Snell με τη βοήθεια της ελαχιστοποίησης της δυναμικής ενέργειας



Το πρόβλημα είναι να βρούμε ένα σημείο Γ πάνω στην διαχωριστική επιφάνεια, έτσι ώστε ο χρόνος μεταβίβασης από το Α στο σημείο Β να γίνει ελάχιστος. Δηλαδή ψάχνουμε ένα σημείο Γ τέτοιο ώστε:

$$t = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{c_1} + \frac{\mathrm{B\Gamma}}{c_2} = \min$$

Θεωρούμε ότι τα σημεία Α και Β είναι πηγές δυναμικών πεδίων που η κάθε πηγή δημιουργεί πεδίο. Αν σε κάποιο σημείο Γ της διαχωριστικής επιφάνειας τοποθετήσουμε μοναδιαίο υπόθεμα, τότε αυτό θέλουμε να έχει δυναμική ενέργεια από τα πεδία:

$U = \frac{r_1}{c_1} + \frac{r_2}{c_2}$ αφού αυτή η ποσότητα θέλουμε να πάρει την ελάχιστη τιμή.

Έτσι λόγω της σχέσης που συνδέει τη δύναμη με τη δυναμική ενέργεια θα έχουμε:

$$W^F{}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = U_{\mathrm{A}} - U_{\mathrm{B}} \to \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F} d\vec{r} = \frac{r_{\mathrm{A}}}{c} - \frac{r_{\mathrm{B}}}{c} \to \vec{F} = -\frac{\hat{r}}{c}$$

Οπότε σε κάποιο σημείο Γ της διαχωριστικής επιφάνειας που βρίσκεται ένα μοναδιαίο υπόθεμα θα ασκούνται από τις δύο πηγές οι δυνάμεις F_1 και F_2 του σχήματος με μέτρα $1/c_1$ και $1/c_2$ αντίστοιχα. Επειδή θέλουμε την ελαχιστοποίηση της δυναμικής ενέργειας για τη θέση Γ της διαχωριστικής επιφάνειας, θα πρέπει η θέση αυτή να είναι και θέση ισορροπίας. Άρα η συνολική δύναμη κατά μήκος της διαχωριστικής επιφάνειας θα πρέπει να μηδενίζεται. Έτσι θα έχουμε:

$$F_1 \eta\mu\alpha = F_2 \eta\mu\beta \to \frac{1}{c_1}\eta\mu\alpha = \frac{1}{c_2}\eta\mu\beta \to \frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\beta} = \frac{c_1}{c_2} = n(\sigma\tau\alpha\theta)$$

Η τελευταία σχέση είναι ο νόμος του Snell   Ο.Ε.Δ

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε και το νόμο της ανάκλασης.