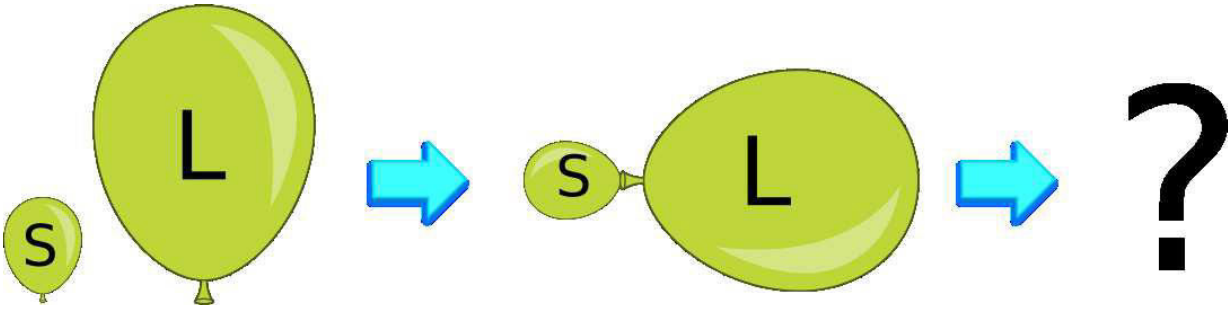
Το πρόβλημα των δύο μπαλονιών

Φουσκώνουμε δύο ίδια μπαλόνια το ένα πολύ και το άλλο λίγο. Στη συνέχεια τα συνδέουμε έτσι ώστε να μπορεί να μεταφερθεί αέρας από το ένα στο άλλο. Τι νομίζετε ότι θα συμβεί;

1. **Θα πάει αέρας από το πολύ φουσκωμένο μπαλόνι στο λιγότερο φουσκωμένο μέχρι να αποκτήσουν τον ίδιο όγκο.**
2. **Θα πάει ο αέρας από το λιγότερο φουσκωμένο μπαλόνι στο πολύ φουσκωμένο.**
3. **Το τι θα συμβεί εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες. Δηλαδή το πόσο φουσκωμένα είναι τα δύο μπαλόνια. Σε αρκετές περιπτώσεις μπορεί να ξεφουσκώσει το μικρότερο μπαλόνι.**

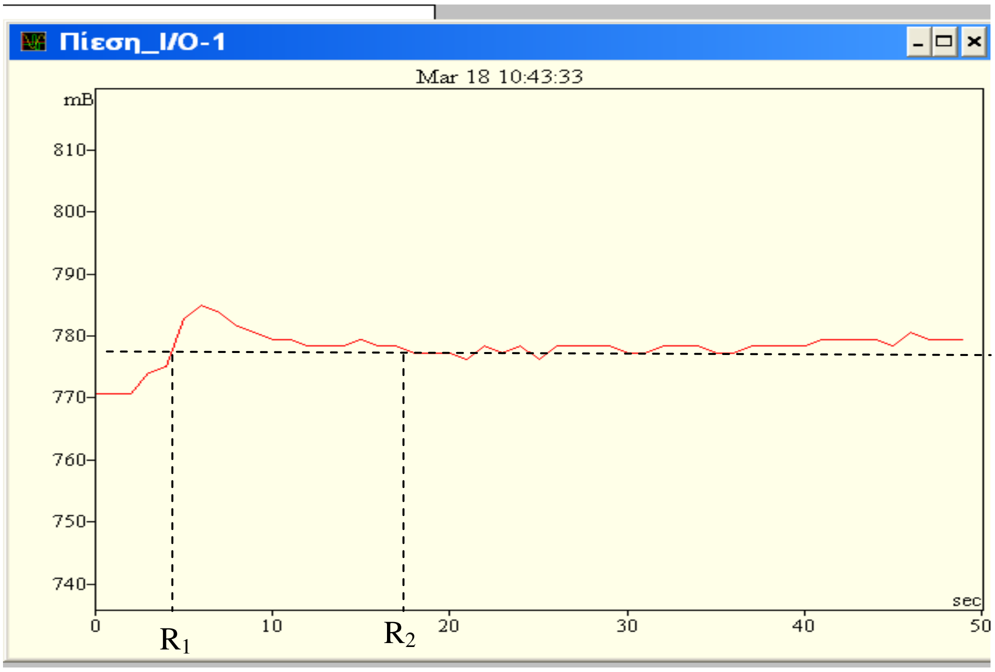


Το Πειραμα:

Εκτελώντας το πείραμα διαπιστώνουμε ότι σωστή απάντηση είναι η (3). Προς μεγάλη μας έκπληξη διαπιστώνουμε ότι ο αέρας μεταφέρεται συνήθως από το μικρό μπαλόνι στο μεγάλο και όχι αντιστρόφως όπως θα περιμέναμε. Ενίοτε όμως αν και τα δύο μπαλόνια είναι αρκετά φουσκωμένα, αποκαθιστώντας την επικοινωνία του αέρα μεταξύ τους, δεν παρατηρούμε τίποτα. Στη σπάνια περίπτωση που το ένα μπαλόνι είναι εντελώς ξεφούσκωτο, θα διαπιστώσουμε ότι με την επικοινωνία φουσκώνει πολύ λίγο. Πως εξηγείται αυτό το παράδοξο;

Προφανώς ο αέρας πάει πάντα από το μπαλόνι που έχει τη μεγαλύτερη πίεση σε αυτό που έχει τη μικρότερη. Άρα η ερμηνεία του φαινομένου ανάγεται στο να βρούμε πως μεταβάλλεται η πίεση σε ένα μπαλόνι σε σχέση με την ακτίνα του.

Απαντήσαμε σε αυτό το ερώτημα χρησιμοποιώντας το σύστημα multilog σύγχρονης λήψης και απεικόνισης. Πήραμε ένα μπαλόνι και βάλαμε σε αυτό τον αισθητήρα πίεσης. Φουσκώσαμε το μπαλόνι και πήραμε τη γραφική παράσταση της πίεσης με το χρόνο που αντιστοιχεί περίπου και στην εξάρτηση της πίεσης με την ακτίνα, αφού όσο φουσκώνουμε το μπαλόνι, τόσο μεγαλώνει η ακτίνα του.



Παρατηρούμε ότι στην αρχή παρουσιάζει ένα μέγιστο (και μάλιστα μετρήθηκε ότι το μέγιστο εμφανίζεται στο 1,4 της αρχικής διαμέτρου του μπαλονιού και μετά η πίεση παραμένει σχεδόν σταθερή αυξανόμενη στη συνέχεια αργά όταν παραφουσκώσουμε το μπαλόνι φθάνοντας κοντά στα όρια της θραύσης.

Τώρα είμαστε έτοιμοι να ερμηνεύσουμε τη συμπεριφορά των μπαλονιών.

- Αν και τα δύο μπαλόνια έχουν ακτίνα μεγαλύτερη από την R2 τότε όπως φαίνεται από το παραπάνω διάγραμμα έχουν την ίδια πίεση, άρα αποκαθιστώντας την επικοινωνία αέρα, δεν θα συμβεί τίποτα!
- Αν το μεγάλο μπαλόνι έχει ακτίνα μεγαλύτερη της R2 ενώ το μικρό μπαλόνι μικρότερη της R2 αλλά μεγαλύτερη της R1, τότε όπως φαίνεται από το παραπάνω

διάγραμμα το μικρότερο μπαλόνι έχει μεγαλύτερη πίεση, άρα αυτό που θα ξεφουσκώσει θα είναι το μικρότερο μπαλόνι!!!

- Αν το ένα από τα δύο μπαλόνια έχει ακτίνα μικρότερη από το R1 τότε αυτό θα φουσκώσει μέχρι να φθάσει η ακτίνα ίση με R1

ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Πως εξηγείται όμως μία τέτοια εξάρτηση της πίεσης ενός μπαλονιού σε σχέση με την ακτίνα του;

Ας αρχίσουμε με ένα απλοϊκό ενεργειακό μοντέλο:

Όταν φουσκώνουμε ένα μπαλόνι, το καουτσούκ από το οποίο αποτελείται τεντώνεται. Έτσι αυξάνεται η δυναμική ενέργεια του ελαστικού. Ας υποθέσουμε ότι η δύναμη του ελαστικού υπακούει στο νόμο του Hook. Τότε Η ενέργεια αυτή είναι ανάλογη της επιφάνειας του καουτσούκ, αφού το τέντωμα γίνεται στις δύο διαστάσεις, οπότε το x^2 της δυναμικής ενέργειας θα εκφράζει πλέον εμβαδόν επιφάνειας. Λόγω της αρχής της ελάχιστης ενέργειας, το μπαλόνι κάθε φορά θα θέλει να έχει με δεδομένο όγκο τη μικρότερη δυνατή επιφάνεια, αφού έτσι θα έχει και τη μικρότερη δυναμική ενέργεια. Γι αυτό είναι συνεχώς σφαιρικό αφού η σφαίρα είναι το στερεό που με δεδομένο όγκο έχει τη μικρότερη επιφάνεια.

Αν για παράδειγμα είχαμε έναν κύβο όγκου 1L και μία σφαίρα όγκου πάλι 1L, ο κύβος θα έχει επιφάνεια 600cm^2 ενώ η σφαίρα 484cm^2

Το ίδιο θα συμβεί και αν ενώσουμε τα δύο μπαλόνια με ακτίνες r_1 και r_2. Θα μετακινηθεί αέρας από το ένα στο άλλο ώστε να έχουμε τη μικρότερη συνολικά επιφάνεια. Αυτό θα συμβεί με το να μεταφερθεί ο αέρας από το μικρότερο στο μεγαλύτερο και το μικρότερο μπαλόνι να ξεφουσκώσει τελείως. Ας παίξουμε λίγο με τα μαθηματικά.

Έστω ο λόγος των ακτίνων $a=r_1/r_2$

Ο συνολικός όγκος των μπαλονιών είναι

$$V=\frac{4}{3}\pi\cdot r_1^3+\frac{4}{3}\pi\cdot r_2^3=\frac{4}{3}\pi\cdot r_1^3(1+a^3)\rightarrow r_1^2=(\frac{3V}{4\pi})^{2/3}(1+a^3)^{-2/3}$$

Η επιφάνεια των δύο μπαλονιών θα είναι:

$$S=4\pi r_1^2+4\pi r_2^2=4\pi r_1^2(1+a^2)=A\cdot(1+a^2)(1+a^3)^{-2/3}$$

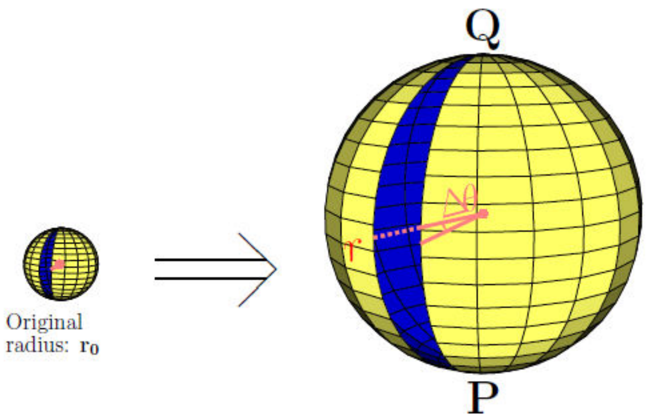
Παραγωγίζουμε την επιφάνεια ως προς α για να βρούμε τα ακρότατα της συνάρτησης. Η παράγωγος της επιφάνειας είναι:

$$S'=-2A\frac{a\cdot(a-1)}{(1+a^3)^{5/3}}$$

Άρα έχουμε δύο ακρότατα στο 0 και στο 1. Παίρνοντας τη δεύτερη παράγωγο και θέτοντας τις τιμές 0 και 1 διαπιστώνουμε ότι το 0 είναι ελάχιστη τιμή ενώ το 1 μέγιστη.

Άρα για να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό εμβαδό θα πρέπει το μικρό μπαλόνι να ξεφουσκώσει τελείως.

Ενεργειακά λοιπόν μπορούμε να ερμηνεύσουμε γιατί συνήθως ξεφουσκώνει το μικρότερο μπαλόνι. Αυτό όμως όπως είδαμε στο πείραμα δεν ισχύει πάντα. Ούτε βέβαια ερμηνεύει γιατί το μικρότερο μπαλόνι έχει μεγαλύτερη πίεση από το μεγαλύτερο.
Για να απαντήσουμε σ' αυτά τα ερωτήματα θα πρέπει να εξετάσουμε δυναμικά το πρόβλημα ώστε να ερμηνεύσουμε και θεωρητικά την πειραματική εξάρτηση της πίεσης με την ακτίνα που προσδιορίσαμε με το multilog



Ένα απλό δυναμικό μοντέλο:
Έστω ότι η δύναμη του ελαστικού υπακούει στο νόμο του Hook. Τότε η δύναμη που ασκείται σε δύο αντιδιαμετρικά σημεία PQ λόγω του τεντώματος μίας λωρίδας ελαστικού γωνίας δφ θα δίνεται από τη σχέση:

$F(r, d\phi)=\kappa(\pi r-\pi r_0)d\phi/\pi=\kappa(r-r_0)d\phi/2$

Αν φουσκώσουμε το μπαλόνι από ακτίνα r σε ακτίνα r+dr το έργο αυτής της δύναμης θα είναι

$$dW = F(r,d\phi)\pi \cdot dr = \frac{\pi}{2}k \cdot (r - r_o) \cdot d\phi \cdot dr$$

Ολοκληρώνουμε για γωνία από 0 έως 2π και έχουμε:

$$W = -\int_0^{2\pi} \frac{\pi}{2}k \cdot (r - r_o) \cdot d\phi \cdot dr = -\pi^2 k \cdot (r - r_o) \cdot dr$$

Το έργο της δύναμης του αέρα που φουσκώνουμε το μπαλόνι είναι ίσο με

$$dW = PdV = P \cdot (\frac{4}{3}\pi(r+dr)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3) \approx P \cdot 4\pi r^2 dr$$

Όταν φουσκώνουμε το μπαλόνι ασκούνται δύο δυνάμεις. Η δύναμη του αέρα προς τα έξω και η τάση ελαστικότητας του καουτσούκ προς τα μέσα. Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε για το μπαλόνι, θα πρέπει τα έργα αυτών των δύο δυνάμεων να είναι αντίθετα. Άρα θα πρέπει να ισχύει.

$$P \cdot 4\pi r^2 dr = \pi^2 k \cdot (r - r_o) \cdot dr \to P = \frac{\pi \cdot k}{4} \cdot \frac{r - r_0}{r^2}$$

Κάνοντας τη γραφική παράσταση της πίεσης σε συνάρτηση με την ακτίνα, παρατηρούμε ότι μέχρι μία τιμή $r_\mu = 2r_0$ της ακτίνας η πίεση στο μπαλόνι αυξάνεται, μετά όμως ελαττώνεται.

Μία βελτίωση του μοντέλου:
Το μοντέλο που περιγράψαμε δεν είναι ακριβές για πολλούς λόγους. Ένας βασικός λόγος είναι γιατί σε για μία λαστιχένια λωρίδα δεν ισχύει ο νόμος του Hook όπως αρχικά υποθέσαμε αλλά ένας άλλος πιο ακριβής, ο νόμος Guth-James που περιγράφεται από τη σχέση:

$$F = k \cdot \left(\frac{r}{r_0} - \frac{r_0^2}{r^2}\right)$$

Λαμβάνοντας υπόψη αυτό τον νόμο και με την κατάλληλη μαθηματική επεξεργασία καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $r_\mu = 1{,}38 r_0$ δηλαδή όταν φουσκώνουμε το μπαλόνι η πίεση αυξάνεται απότομα στην αρχή και μετά η πίεση μειώνεται αργά.
Στην πραγματικότητα βέβαια, όταν φουσκώσει αρκετά το μπαλόνι δεν ισχύει ούτε η παραπάνω εξίσωση Guth-James αφού πλέον μπαίνουμε στην περιοχή της μόνιμης παραμόρφωσης. Τότε η πίεση παραμένει σχεδόν σταθερή και αρχίζει να αυξάνεται με μικρό ρυθμό όταν φθάνουμε κοντά στο όριο της θραύσης.

Το συμπέρασμα από το παραπάνω πείραμα και την αντίστοιχη ανάλυση, είναι ότι η φυσική είναι πράγματι μια υπέροχη επιστήμη αφού ακόμη και στα πιο απλά φαινόμενα μπορεί να κρύβονται ευχάριστες εκπλήξεις.

Αναφορές από το διαδίκτυο:

https://www.youtube.com/watch?v=XTp-EFiY9T4
http://www.saferclimbing.org/sites/default/files/docdata/balloon_en.pdf
http://iyptmag.phy.ntnu.edu.tw/upload/journal/prog/bc280abb_20161107.pdf