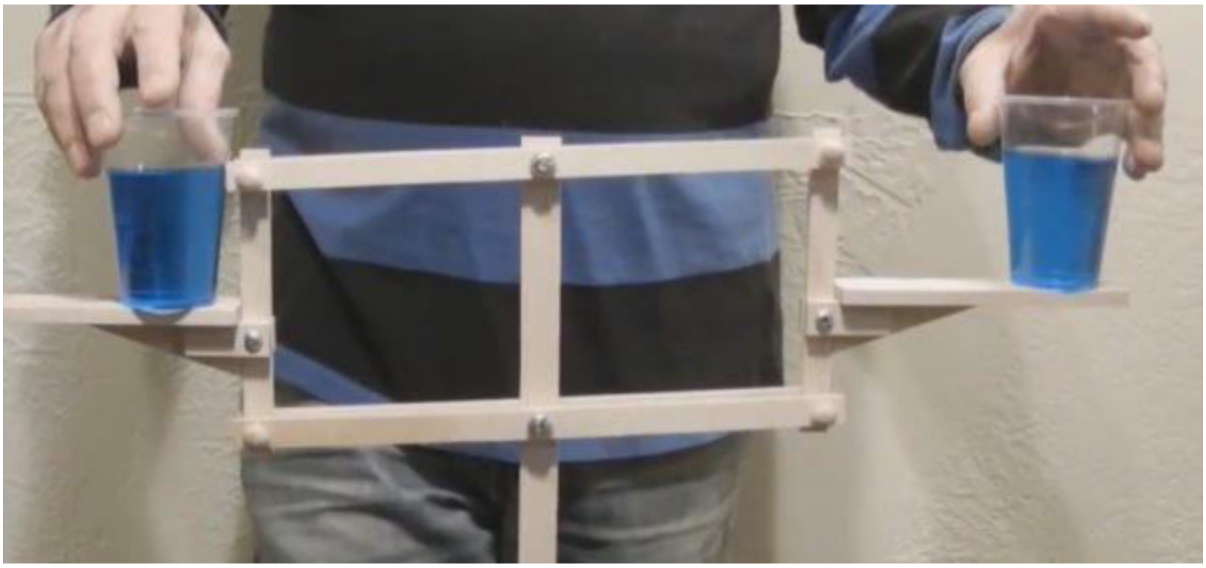
Ο ζυγός Roverbal ή
Προς τα πού θα γείρει;

Αιτία γραφής αυτού του άρθρου ήταν μία δημοσίευση του Γιάννη Κυριακόπουλου σχετική με το ζυγό Roverbal και το αντίστοιχο παράδοξο αφού μολονότι τοποθετούμε ίσα βάρη σε διαφορετικές αποστάσεις από τον άξονα του ζυγού, ο ζυγός ισορροπεί!!!

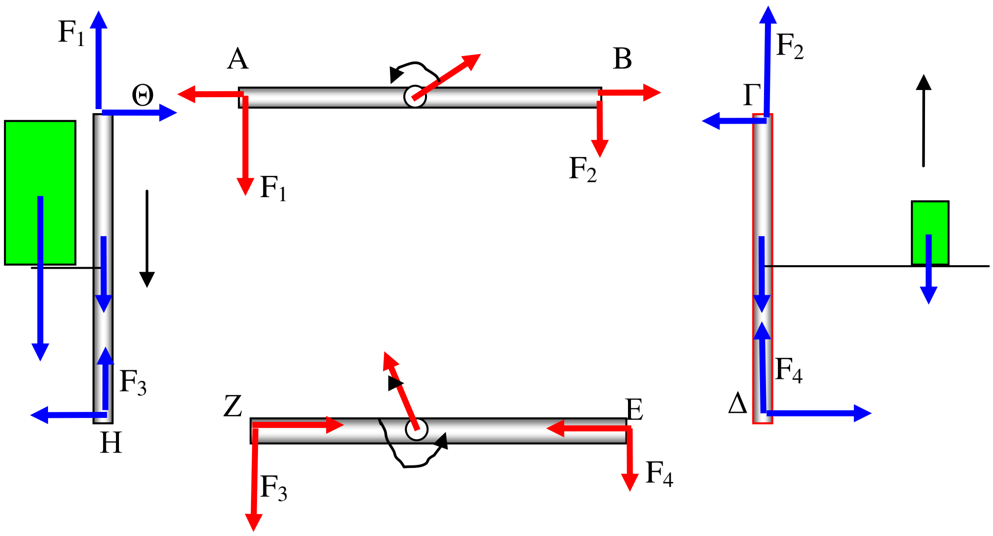


Ο ζυγός αυτός κατασκευάστηκε από τον Γάλλο μαθηματικό Gilles το 1669 ο οποίος ήταν από το Roverbal της Γαλλίας. Μολονότι ο ζυγός χρησιμοποιούνταν για χιλιάδες χρόνια, για πρώτη φορά φτιάχτηκε ένας ζυγός που ισορροπούσε όταν τοποθετούσε κάποιος ίσα βάρη, ανεξάρτητα σε ποια θέση τα τοποθετούσε!
Η ερμηνεία λειτουργίας του ζυγού είναι πολύ εύκολη αν δουλέψουμε ενεργειακά. Λόγω γεωμετρίας, η μετακίνηση του ζυγού γίνεται ώστε πάντα να έχουμε ένα παραλληλόγραμμο. Έτσι οι κατακόρυφες ράβδοι μένουν πάντα κατακόρυφοι! Έτσι τα οριζόντια στηρίγματα που έχουμε τοποθετήσει τα ποτήρια κινούνται πάντα οριζόντια. Όσο ανεβαίνει το ένα τόσο κατεβαίνει το άλλο. Έτσι αν οι μάζες είναι ίσες, όσο δυναμική ενέργεια κερδίζει το ένα ποτήρι ανεβαίνοντας, τόσο ακριβώς χάνει το άλλο. Έτσι ενεργειακά δεν υπάρχει κανένα κέρδος ή απώλεια δυναμικής ενέργειας από τη μετακίνηση των ποτηριών. Άρα το σύστημα θα ισορροπεί. Το θέμα είναι πως μπορούμε να δώσουμε μία δυναμική ερμηνεία στο παράδοξο.

Για την δυναμική ανάλυση της λειτουργίας του ζυγού έφτιαξα μία άσκηση. Δηλαδή έναν ζυγό Roverbal στον οποίο τοποθετούμε δύο διαφορετικές μάζες $m1$ και $m2$ σε διαφορετικές αποστάσεις και ζητάμε την επιτάχυνση των μαζών τη στιγμή $t=0$. Αν για $m1=m2$ η επιτάχυνση μηδενίζεται αυτό θα αποτελεί και μία δυναμική ερμηνεία του παραδόξου.

Για τη λύση θεώρησα ότι ο ζυγός αποτελείται από 4 διαφορετικά στερεά τα οποία τα θεώρησα ίδιες ακριβώς ομογενείς ράβδους μήκους L και μάζας M. Τις οριζόντιες AB και EZ και τις κατακόρυφες ΓΔ και HΘ. Τα οριζόντια στηρίγματα τα θεώρησα αβαρή. Για την κάθε ράβδο έγραψα το θεμελιώδη νόμο για τις μεταφορές και τις περιστροφές. Έτσι προκύπτει η παρακάτω ανάλυση.

ΑΝΑΛΥΣΗ



Λόγω της γεωμετρίας της κατασκευής, οι ράβδοι AB και EZ εκτελούν μόνο περιστροφική κίνηση. Άρα θα ισχύει

$$\Sigma F = 0$$

$$\Sigma \tau = I\alpha_\gamma$$

Για τη ράβδο AB η δεύτερη σχέση γίνεται

$$(F_1 - F_2)\frac{L}{2} = Ia_\gamma \rightarrow (F_1 - F_2)\frac{L}{2} = \frac{1}{12}ML^2 a_\gamma \rightarrow F_1 - F_2 = \frac{ML}{6}a_\gamma$$

Για τη ράβδο EZ η δεύτερη σχέση γίνεται

$$(F_3 - F_4)\frac{L}{2} = Ia_\gamma \rightarrow (F_3 - F_4)\frac{L}{2} = \frac{1}{12}ML^2 a_\gamma \rightarrow F_3 - F_4 = \frac{ML}{6}a_\gamma$$

Αντιθέτως οι ράβδοι μαζί με τα βάρη ΘH και ΓΔ εκτελούν μόνο μεταφορική κίνηση. Άρα θα ισχύει

$$\Sigma F = ma$$

$$\Sigma \tau = 0$$

Για το σώμα HΘ η πρώτη σχέση γίνεται:

$$B_1 + B - F_1 - F_3 = (m_1 + M)a \quad (1)$$

Για το σώμα ΓΔ η πρώτη σχέση γίνεται:

$$F_2 + F_4 - B_2 - B = (m_2 + M)a \qquad (2)$$

Προσθέτουμε στις παραπάνω σχέσεις και έχουμε
$B_1 - B_2 + F_2 - F_1 + F_4 - F_3 = (m_1 + m_2 + 2M)a$ (3)

Τα σημεία τα ζευγάρια των σημείων (Θ,Α) (Β,Γ) (Ε,Δ), (Η,Ζ) συνδέονται με άρθρωση. Άρα έχουν κάθε στιγμή την ίδια ταχύτητα και επιτάχυνση. Έτσι θα ισχύει η σχέση.

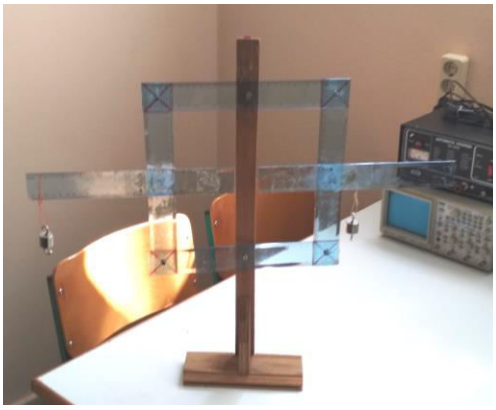
$$a = a_\gamma \frac{L}{2}$$

Έτσι η σχέση (3) γίνεται: $(m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2 + \frac{8M}{3})a \rightarrow a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{8}{3}M} g$

Παρατηρούμε ότι ανεξάρτητα που θα βάλουμε τις μάζες, αν αυτές είναι ίσες θα υπάρχει ισορροπία.

Μία υπόθεση που κάναμε και πρέπει να την αιτιολογήσουμε είναι ότι οριζόντιες δυνάμεις στα στερεά ΗΘ και ΓΔ έχουν συνισταμένη μηδέν. Αυτό αποδεικνύεται ως εξής: η κίνηση του c.m των στερεών αυτών είναι μία καμπύλη που για t=0 η εφαπτομένη σε αυτή την καμπύλη είναι κατακόρυφη. (η εξίσωση της καμπύλης μπορεί να βρεθεί αναλυτικά). Έτσι οι οριζόντιες δυνάμεις παίζουν το ρόλο της κεντρομόλας. Επειδή η κεντρομόλα είναι αρχικά μηδέν αφού η αρχική ταχύτητα είναι μηδέν, η συνισταμένη των οριζοντίων δυνάμεων θα είναι και αυτή μηδέν.

Οι παλιές ζυγαριές των μπακάληδων ήταν τελικά ζυγοί Roverbal αφού ζύγιζαν σωστά ανεξάρτητα που τοποθετούσε κάποιος το προϊόν από τη μία και τα σταθμά από την άλλη μέσα στους δίσκους. Ο ζυγός θα ισορροπούσε όταν το προϊόν ήταν ίσης μάζας με τα σταθμά. Αντίθετα το καντάρι λειτουργεί κλασσικά όπως ένας απλός ζυγός



Ο δικός μας ζυγός Roverbal