Μετρήσεις και σφάλματα
(Για τους μαθητές)

Κάθε μέτρηση είναι η σύγκριση ενός μεγέθους με κάποιο άλλο που παίρνουμε ως μονάδα. Η διαδικασία της μέτρησης εμπεριέχει πάντοτε ένα σφάλμα. Με άλλα λόγια **ποτέ** δεν μπορούμε να μετρήσουμε ένα μέγεθος με απόλυτη ακρίβεια. Αυτό το γεγονός είναι δυνατό να το αντιληφθούμε καλύτερα αν θεωρήσουμε ότι όλα τα μεγέθη που θέλουμε να μετρήσουμε είναι **άρρητοι** αριθμοί. Δηλαδή αριθμοί με άπειρα και μη περιοδικά ψηφία. Έτσι όταν δίνουμε το αποτέλεσμα μιας μέτρησης, αυτό είναι πάντα μια προσέγγιση της πραγματικής τιμής. Το πόσο κοντά είναι αυτή η προσέγγιση στο πραγματικό μέγεθος με το συγκεκριμένο πείραμα, εξαρτάται τόσο από την ακρίβεια των οργάνων που χρησιμοποιούμε όσο και από τις δεξιότητες του πειραματιστή.

Σε κάθε μέτρηση μεγάλο ρόλο παίζει να γνωρίζουμε την ακρίβεια με την οποία μετράμε. Γιατί η έλλειψη αυτής της γνώσης μπορεί να οδηγήσει σε λάθος συμπεράσματα. Π.χ Ας πούμε ότι σε ένα πείραμα μετρήσαμε τη μάζα και τον όγκο από ορισμένες ποσότητες πλαστελίνης με σκοπό να υπολογίσουμε την πυκνότητα της πλαστελίνης. Οι μετρήσεις που πήραμε δίνονται από τον παρακάτω πίνακα.

	Μάζα σε g	**Όγκος σε cm^3**	**Πυκνότητα σε g/cm^3**
1	23,7	11	2,1545
2	32,4	15,2	2,16
3	39,2	18,14	2,1777
4	45,71	21	2,1809
5	53	24	2,208

Από τις παραπάνω μετρήσεις ένας μαθητής λογικά θα έβγαζε το συμπέρασμα ότι η πυκνότητα της πλαστελίνης αυξάνεται όσο αυξάνεται η μάζα ή και ο όγκος της πλαστελίνης. Γιατί όμως αυτό το συμπέρασμα είναι λάθος; Εδώ θα πρέπει να μιλήσουμε λίγο για τα σημαντικά ψηφία.
Σημαντικά είναι τα ψηφία ενός δεκαδικού αριθμού, αν δεν λάβουμε υπόψη τα αριστερά μηδενικά από το ψηφίο που είναι διάφορο του μηδενός και λάβουμε όμως υπόψη τα δεξιά μηδενικά είτε αυτά βρίσκονται πριν είτε μετά την υποδιαστολή. Παραδείγματα.

3,16 3 σημαντικά ψηφία
0,002 1 σημαντικό ψηφίο
2,300 4 σημαντικά ψηφία
2,30 3 σημαντικά ψηφία
0,1 1 σημαντικό ψηφίο

1ος ΚΑΝΟΝΑΣ
Η μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους με το ίδιο όργανο έχει πάντα τον ίδιο αριθμό **δεκαδικών** ψηφίων τα οποία και θα πρέπει να αναγράφονται, αφού καθορίζουν και την ακρίβεια της μέτρησης.

2ος ΚΑΝΟΝΑΣ
Μετά από έναν πολλαπλασιασμό ή μια διαίρεση δύο φυσικών μεγεθών κρατάμε τόσα σημαντικά ψηφία όσα είναι τα λιγότερα των δύο αριθμών που πολλαπλασιάζουμε ή

διαιρούμε. Όταν όμως προσθέτουμε ή αφαιρούμε δύο φυσικά μεγέθη κρατάμε τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία και όχι τα λιγότερα σημαντικά.

Λόγω του δεύτερου κανόνα παρατηρούμε ότι ο πίνακας είναι γραμμένος λάθος. Αν θέλουμε να τον διορθώσουμε θα πρέπει να γράψουμε τις δύο πρώτες στήλες με τον ίδιο αριθμό δεκαδικών ψηφίων και την τρίτη στήλη να την γράψουμε με δύο σημαντικά ψηφία, αφού ο όγκος μετριέται με ακρίβεια δύο σημαντικών ψηφίων.

	Μάζα σε g	**Όγκος σε cm^3**	**Πυκνότητα σε g/cm^3**
1	23,7	11	2,2
2	32,4	15	2,2
3	39,2	18	2.2
4	45,7	21	2.2
5	53,0	24	2,2

Μετά τη σωστή αναγραφή του πίνακα μετρήσεων παρατηρούμε ότι το συμπέρασμα που βγαίνει είναι ότι η πυκνότητα της πλαστελίνης είναι σταθερή και ανεξάρτητη της μάζας της.

Και μία λεπτομέρεια για το τέλος.

Ας πούμε ότι μετρήσαμε το μήκος του θρανίου μας και το βρήκαμε 123,3cm. Ένα αμαξάκι διάνυσε όλο το θρανίο σε χρόνο 3 s. Πόση είναι η μέση ταχύτητα του αμαξιδίου;.

Αν κάνουμε τη διαίρεση θα βρούμε: 41,1cm/s. Αυτό το αποτέλεσμα όμως δεν είναι σωστά γραμμένο σύμφωνα με όσα είπαμε παραπάνω, αφού ο αριθμός 123,3 του μήκους, έχει τέσσερα σημαντικά ψηφία ενώ ο αριθμός 3 του χρόνου έχει ένα σημαντικό ψηφίο. Άρα θα πρέπει το πηλίκο να έχει και αυτό ένα σημαντικό ψηφίο. Πως μπορούμε όμως να γράψουμε τον αριθμό 41,1 ώστε να έχει ένα σημαντικό ψηφίο;. Σε αυτή την περίπτωση επικαλούμαστε τη χρήση των δυνάμεων του δέκα. Δηλαδή τον αριθμό 41,1 τον γράφουμε $4x10^1$ έτσι ώστε να έχει ένα σημαντικό ψηφίο. Άρα η σωστή γραφή της ταχύτητας είναι $4x10^1$cm/s

Ένα άλλο παράδειγμα. Έστω ότι μετράμε τη μάζα ενός σώματος κα τη βρίσκουμε 0,0124Kg (3 σημαντικά ψηφία) ενώ τον όγκο του τον βρίσκουμε 2mL (1 σημαντικό ψηφίο). Η πυκνότητα του σώματος δεν θα πρέπει να γραφεί ως 0,0062Kg/mL (2 σημαντικά ψηφία) αλλά με μορφή δύναμης του δέκα, ως $6x10^{-3}$Kg/ mL (1 σημαντικό ψηφίο)

<u>3ος ΚΑΝΟΝΑΣ</u> (Και τελευταίος)
Οι δυνάμεις του δέκα είτε θετικές είτε αρνητικές δεν λαμβάνονται υπόψη στον υπολογισμό των σημαντικών ψηφίων. Παραδείγματα:

23×10^3 2 σημαντικά ψηφία
123×10^{-2} 3 σημαντικά ψηφία
12×10^4 2 σημαντικά ψηφία
3×10^5 1 σημαντικό ψηφίο

© Πάνος Μουρούζης

Σφάλματα και γραφικές παραστάσεις

(για καθηγητές)

Ένας φυσικός νόμος εκφράζει την αλληλοεξάρτηση διαφόρων φυσικών μεγεθών. Με το πείραμα συνήθως προσπαθούμε να επαληθεύσουμε ένα θεωρητικό μοντέλο. Δηλαδή έχουμε μία θεωρία η οποία καταλήγει στο συμπέρασμα ότι αν όλα τα άλλα φυσικά μεγέθη διατηρούνται σταθερά εκτός των x και y η σχέση που πρέπει να συνδέει τα x και y πρέπει να είναι της μορφής y=f(x). Κάνοντας το πείραμα επαληθεύουμε ή απορρίπτουμε το θεωρητικό μας μοντέλο. Γιαυτό σε κάθε πείραμα προσπαθούμε να διατηρήσουμε τα άλλα φυσικά μεγέθη που εμπλέκονται σταθερά, εκτός των x,y που μας ενδιαφέρουν.
Για παράδειγμα σε μία ελεύθερη πτώση το θεωρητικό μας μοντέλο καταλήγει στο συμπέρασμα ότι το διανυόμενο διάστημα και ο χρόνος θα πρέπει να συνδέονται με τη σχέση

$$y = \frac{1}{2}at^2$$

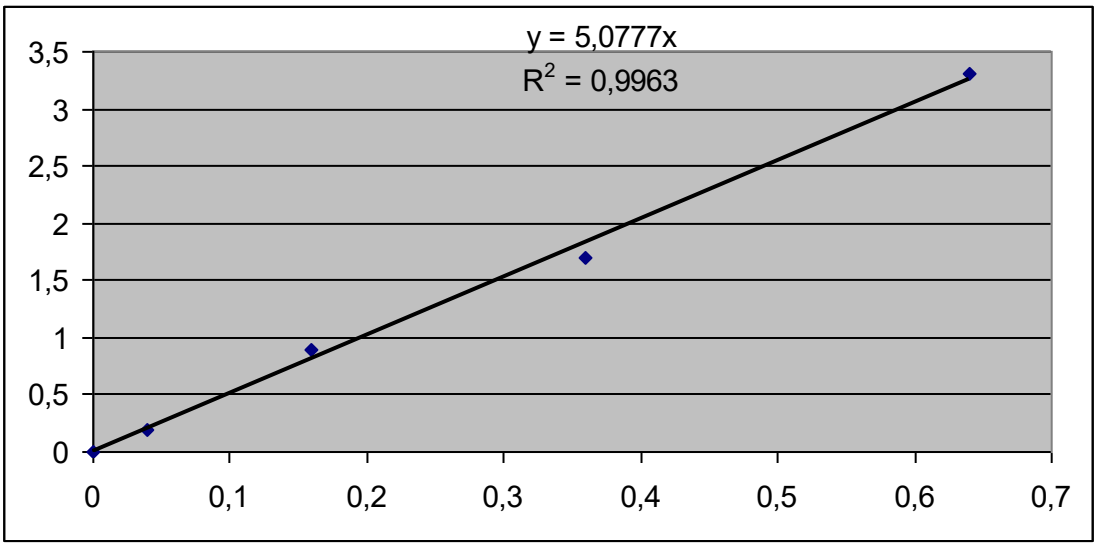
Από ένα σύνολο πειραματικών δεδομένων δεν είναι καθόλου εύκολο να διαπιστώσουμε αν όντως επαληθεύεται η σχέση ή όχι. Ακόμη και οπτικά, δεν είναι δυνατό να καταλάβουμε αν μία καμπύλη είναι ανάλογη του τετραγώνου ή της τρίτης δύναμης ή κάποιας ανώτερης. Γι' αυτό η τακτική που ακολουθείται συνήθως είναι να μετατρέπουμε τη σχέση σε γραμμική και αυτό γιατί είναι πολύ πιο εύκολο να διαπιστώσουμε αν ένα σύνολο πειραματικών δεδομένων συνδέεται ή όχι με μία γραμμική σχέση. Αν μπορούμε να χαράξουμε μία ευθεία που να αφήνει περίπου τα μισά πειραματικά σημεία από τη μια μεριά και τα μισά από την άλλη, τότε είναι πολύ πιθανό η σχέση που ψάχνουμε να είναι γραμμική. Όσο πιο κοντά είναι αυτά τα σημεία στην πειραματική ευθεία που χαράξαμε, τόσο αυξάνεται και η πιθανότητα η σχέση μας να είναι πράγματι γραμμική. Για να μετατρέψουμε τη σχέση (1) σε γραμμική αρκεί να κάνουμε τη γραφική παράσταση του $y\text{-}t^2$. Η κλίση αυτής της ευθείας θα ισούται με 1/2a. Η ύπαρξη ή όχι της αρχικής ταχύτητας προκύπτει από την εύρεση των a και b με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων που γίνεται αυτόματα στο excel με την προσθήκη γραμμής τάσης. Ο συντελεστής R^2 μας δείχνει πόσο καλά ταιριάζουν τα δεδομένα μας στο μοντέλο. Όσο πιο κοντά είναι το R^2 στη μονάδα, τόσο πιο πετυχημένο είναι το μοντέλο μας.

Είναι λάθος να χρησιμοποιήσουμε τους ορισμούς της ταχύτητας και της επιτάχυνσης αφού αν για παράδειγμα το σφάλμα στη μέτρηση του y είναι δy, αν χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της ταχύτητας $u = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y_2 - y_1}{\tau}$ το σφάλμα θα είναι 2δy/τ αφού κατά την αφαίρεση τα σφάλματα προστίθενται. Κατά τον υπολογισμό της επιτάχυνσης το σφάλμα θα γίνει $4\delta y/\tau^2$ με αποτέλεσμα μπορεί να γίνει τόσο μεγάλο ώστε να είναι συγκρίσιμο με την τιμή της επιτάχυνσης, οπότε είναι αδύνατον να συμπεράνουμε αν η επιτάχυνση είναι σταθερή ή όχι. Με άλλα λόγια να αποφανθούμε αν η κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη.

Για να γίνουμε πιο κατανοητοί ας κάνουμε ένα παράδειγμα. Σε ένα πείραμα ελεύθερης πτώσης ελήφθησαν οι παρακάτω τιμές. Συμπληρώνοντας τις δύο επόμενες στήλες βρίσκουμε την ταχύτητα και την επιτάχυνση

Χρόνος Σε s	**Διάστημα Σε m**	**u=Δy/Δt**	**a=Δu/Δt**
0	0		
0,2	0,2	1	
0,4	0,9	3,5	12,5
0,6	1,7	4	2,5
0,8	3,3	8	20

Είναι προφανές ότι δεν είναι δυνατό από την τελευταία στήλη που δίνει την επιτάχυνση να συμπεράνουμε ότι η κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη. Ούτε μπορούμε να υπολογίσουμε την επιτάχυνση βρίσκοντας το μέσο όρο της $3^{ης}$ στήλης, αφού η απόκλιση είναι περίπου ίση με το μέσο όρο. Παρόλα αυτά αυτή η μεθοδολογία χρησιμοποιείται τόσο στον επίσημο εργαστηριακό οδηγό, όσο και σε αντίστοιχο παράδειγμα στις καλές πρακτικές του Μείζονος Προγράμματος Επιμόρφωσης.
Η σωστή μεθοδολογία είναι να κάνουμε τη γραφική παράσταση του $y\text{-}t^2$ που είναι η παρακάτω.



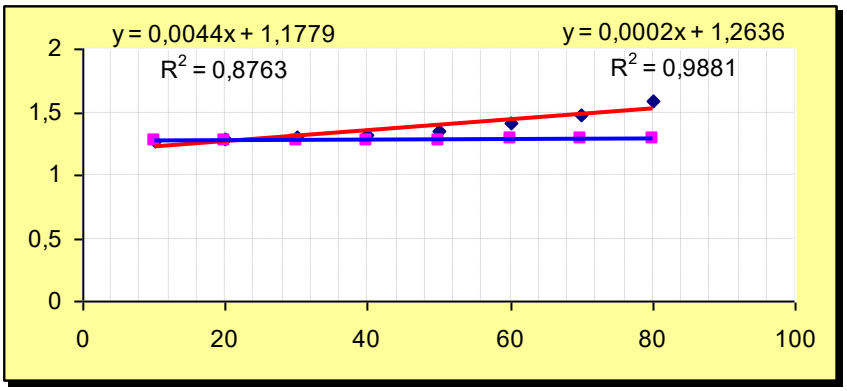
Προσθέτουμε τη γραμμή τάσης, τσεκάρουμε να περνάει από το μηδέν, καθώς και να εμφανίζεται η εξίσωση και το R^2 Διαπιστώνουμε τότε, ότι η τιμή του R^2 είναι πολύ κοντά στη μονάδα, άρα με μεγάλη ακρίβεια η κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη και η επιτάχυνση είναι σταθερή και ίση με 2*5,0777

Η μεθοδολογία αυτή εφαρμόζεται σε πολλές περιπτώσεις αφού συνήθως ένας φυσικός νόμος περιγράφεται από μία απλή πολυωνυμική σχέση. Δεν εφαρμόζεται όμως πάντα, αφού πολλοί φυσικοί νόμοι δεν είναι πολυωνυμικοί. Πχ παίρνουμε δεδομένα χρόνου και θέσης από μία ταλάντωση. Πως μπορούμε να αποφανθούμε αν αυτή είναι αρμονική ή όχι;. Πώς από τα δεδομένα μιας διάθλασης μπορούμε να καταλήξουμε στο νόμο του Snell; Σε αυτές τις περιπτώσεις προηγείται το μοντέλο. Το R^2 δίνει πάλι το κατά πόσο το μοντέλο μας ταιριάζει με τα πειραματικά μας δεδομένα. Δίνεται από τη σχέση:

$$R^2 = \left[\frac{\sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{\nu} (y_i - \bar{y})^2}} \right]^2$$

Ας αναφέρουμε ένα παράδειγμα από τη μελέτη του φαινομένου της διάθλασης.
Ας πούμε ότι πήραμε τις παρακάτω μετρήσεις και θέλουμε να μάθουμε αν τα πειραματικά δεδομένα ταιριάζουν περισσότερο στο μοντέλο του Snell από ότι στο μοντέλο του Πτολεμαίου.

γωνία α	γωνία β	α/β	ημα/ημβ
10	7,9	1,27	1,27
20	15,6	1,28	1,27
30	23,2	1,29	1,27
40	30,3	1,32	1,27
50	36,9	1,35	1,27
60	42,7	1,41	1,28
70	47,2	1,48	1,28
80	50,2	1,59	1,28



Από την τιμή του R^2 αλλά και με μια απλή οπτική παρατήρηση των σημείων, είναι σαφές ότι ο λόγος των ημιτόνων ταιριάζει περισσότερο στα πειραματικά δεδομένα από ότι ο απλός λόγος των γωνιών.

Η επαλήθευση ή η απόρριψη ενός φυσικού νόμου πρέπει πάντα να γίνεται μέσα στα όρια των πειραματικών σφαλμάτων που εξαρτώνται από την πειραματική διάταξη, την ακρίβεια των οργάνων καθώς και την δεξιότητα του πειραματιστή. Ας αναφέρουμε μερικά παραδείγματα.

<u>Παράδειγμα 1.</u>
Μελέτη μαθηματικού εκκρεμούς.
Σε λυκειακό επίπεδο, στόχος μας είναι για ένα εκκρεμές να επαληθεύσουμε τα παρακάτω.

1. η περίοδος είναι ανεξάρτητη της μάζας του σώματος
2. η περίοδος είναι ανεξάρτητη του σχήματος ή της πυκνότητας του σώματος
3. η περίοδος είναι ανεξάρτητη του πλάτους της ταλάντωσης
4. η περίοδος εξαρτάται από το μήκος του εκκρεμούς και μάλιστα ανάλογα της τετραγωνικής του ρίζας.

Πολλές φορές υποτιμάμε τα 1,2,3, και επικεντρωνόμαστε στο 4. Παρόλα αυτά η εύρεση μιας σταθεράς είναι πολύ πιο χρήσιμο και πολύτιμο συμπέρασμα από την εύρεση μιας εξάρτησης. Οι βασικές αρχές της φυσικής (ενέργεια, ορμή, στροφορμή, φορτίο κλπ) αναφέρονται σε ποσότητες που παραμένουν σταθερές και όχι σε εξαρτήσεις.
Όλα τα παραπάνω μπορούν να αποδειχτούν πειραματικά στο επίπεδο του Γυμνασίου και του Λυκείου αρκεί να μετράμε 10 περιόδους της ταλάντωσης με ακρίβεια δευτερολέπτου. Τότε η σταθερότητα του πλάτους της ταλάντωσης ισχύει ακόμη και για μεγάλα πλάτη όπως αυτά

των 40 μοιρών. Έτσι για τη μελέτη του εκκρεμούς ή θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε χρονόμετρο με ακρίβεια δευτερολέπτου, ή αν το χρονόμετρο έχει μεγαλύτερη ακρίβεια να το γράψουμε το αποτέλεσμα, πχ το χρόνο 10 πλήρων ταλαντώσεων με ακρίβεια δευτερολέπτου.
Η περίοδος του εκκρεμούς δίνεται από τη σχέση.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\{1 + (\frac{1}{2})^2 k^2 + (\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4})^2 k^4 + (\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6})^2 k^6 + ...\} \quad \text{όπου } \mathrm{k} = \sin\frac{\theta_0}{2}$$

Η γωνία μετρημένη σε ακτίνια
Έτσι ακόμη και για εκτροπή 45 μοιρών η περίοδος αλλάζει κατά (1+1/4*0,383^2+9/64*0,383^4+..)=(1+0,037+0,003)=1,04 άρα έχουμε μία μεταβολή της περιόδου κατά 3,8 τις εκατό. Έτσι αν μετρήσουμε τις 10 περιόδους που διαρκούν έστω 12 sec, μία αύξηση κατά 3,8% σημαίνει 12,48 sec μία μεταβολή που δεν θα φανεί αν η ακρίβειά μας είναι 1sec.

Παράδειγμα 2ο

Έστω ότι κάνουμε την άσκηση σύνδεση αντιστατών σε σειρά και θέλουμε να επαληθεύσουμε τη σχέση $V_{ολ}=V_1+V_2$. Αν μετρήσουμε τις τάσεις με μεγάλη ακρίβεια, τότε η σχέση δεν θα επαληθευτεί, αφού εισέρχονται και οι αντιστάσεις των καλωδίων, των οργάνων, συστηματικά σφάλματα των οργάνων κλπ. Αν όμως ελαττώσουμε την ακρίβεια μέτρησης μετακινώντας το δρομέα στη θέση 200V από τη θέση 20V, τότε η σχέση θα επαληθευτεί. Το ίδιο θα συμβεί και με το ρεύμα. Το ρεύμα στον κάθε κλάδο θα πρέπει να μετρηθεί το ίδιο. Αν το ρεύμα το μετρήσουμε στην κλίμακα των 20Α τότε ελαττώνεται η ακρίβεια μέτρησης και τα ρεύματα εμφανίζονται ίσα.

Εκθετικές σχέσεις

Σε κάποια φυσικά φαινόμενα που υποψιαζόμαστε ότι η σχέση που συνδέει τα μεγέθη είναι εκθετική, δηλαδή της μορφής $y=ax^b$ για να προσδιορίσουμε πειραματικά τις σταθερές a και b λογαριθμίζουμε τη σχέση και έχουμε $\log y=a+b\log x$. Έτσι αντί να κάνουμε τη γραφική παράσταση y=f(x) κάνουμε την logy=f(logx) η οποία σε αυτή την περίπτωση προκύπτει ευθεία. Η τιμή της τομής της ευθείας με τον άξονα y θα προσδιορίζει τη σταθερά a ενώ η κλίση της ευθείας θα δίνει τη τιμή της σταθεράς b.

© Πάνος Μουρούζης