

## Πώς ο Ερατοσθένης μέτρησε την ακτίνα της Γης;

*« Μία διαφορετική άποψη σε σχέση με τα δεδομένα, τον τρόπο εργασίας και τα συμπεράσματα του προβλήματος από τον Ερατοσθένη »*

Το θέμα ίσως να φαίνεται τετριμμένο και χλιοειπωμένο. Στην ιστορία όμως της επιστήμης τίποτα δεν είναι δεδομένο και τελεσίδικο. Από τα αρχαία κείμενα που έχουν διασωθεί είναι γνωστά δύο πράγματα. Ότι η ακριβής μέθοδος που χρησιμοποίησε ο Ερατοσθένης (276-194 π.χ) για την μέτρηση της ακτίνας της γης δεν είναι γνωστή, αφού στο βιβλίο στο οποίο την είχε γράψει «*Μέτρηση της γης*» δεν έχει διασωθεί. Η μέθοδος περιγράφεται από τον Κλεομήδη περίπου το 200μ.χ δηλαδή 400 χρόνια μετά τον Ερατοσθένη. Εξάλλου η ακτίνα της γης είχε προσδιορισθεί με άλλες μεθόδους και από αρκετούς άλλους αρχαίους φιλοσόφους. Αλλά και το αποτέλεσμα που αναφέρει ο Κλεομήδης τα 4000 στάδια, αμφισβητείται αφού δεν γνωρίζουμε αν τα στάδια που ανέφερε ο Ερατοσθένης ήταν Αττικά ή Αιγυπτιακά. Αν ήταν Αττικά το λάθος της μέτρησης ήταν περίπου 16% ενώ αν ήταν Αιγυπτιακά (που είναι και το πιο πιθανό) το λάθος ήταν μόνο 1%. Είναι γνωστό επίσης ότι ο Ερατοσθένης εκτός από την ακτίνα της γης είχε μετρήσει και την κλίση του άξονα της γης δίνοντας την τιμή των 23 μοιρών. Λόγω των παραπάνω στοιχείων, σε αυτό το άρθρο θα υπερασπισθούμε την ιδέα ότι τόσο τα δεδομένα του προβλήματος, όσο και η μεθοδολογία που ακολούθησε ο Ερατοσθένης ήταν διαφορετική από αυτή που αποδίδεται σε αυτόν από τον Κλεομήδη.

Την εποχή που ο Ερατοσθένης ήταν διευθυντής της βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας, ο αυτοκράτορας Πτολεμαίος ο Γ' ο ευεργέτης είχε εκδώσει διάταγμα βάσει του οποίου όποιο πλοίο έπιανε λιμάνι στην Αλεξάνδρεια και είχε κάποιους πάπυρους, αυτοί θα έπρεπε να αντιγραφούν ώστε να προσκομισθούν στην βιβλιοθήκη. Εκεί οι πάπυροι μελετιόντουσαν από τους υπαλλήλους της βιβλιοθήκης και ταξινομούσαν. Κάποια μέρα σε έναν τέτοιο πάπυρο, ο Ερατοσθένης διάβασε το εξής: **Στη πόλη Συήνη, μία φορά το χρόνο, ο ήλιος καθεπτριζόταν ακόμη και στα βαθύτερα πηγάδια. Ο Ερατοσθένης γνώριζε πολύ καλά ότι τέτοιο αντίστοιχο φαινόμενο δεν συμβαίνει ποτέ στην πόλη του.** Έτσι προσπάθησε να λύσει το γρίφο. Γιατί δηλαδή αυτό να συμβαίνει στη Συήνη μία φορά το χρόνο και να μην συμβαίνει ποτέ στην Αλεξάνδρεια;. Το γρίφο τον έλυσε και σαν πόρισμα μπόρεσε ακόμη. Να μετρήσει την κλίση του άξονα της γης, το γεωγραφικό πλάτος της Αλεξάνδρειας καθώς και την ακτίνα της γης.

Αυτό που ισχυριζόμαστε είναι ότι ο Ερατοσθένης **δεν** γνώριζε την ημερομηνία που συνέβαινε το φαινόμενο αυτό στη Συήνη ή και αν γνώριζε, η πληροφορία αυτή του ήταν περιττή. Η βασική πληροφορία ήταν ότι συμβαίνει μόνο μία φορά το χρόνο.

Πως σκέφτηκε άραγε ο Ερατοσθένης;. Πολύ πιθανό να πήρε ένα κομμάτι πάπυρου και να κόλλησε δύο ίδια ξυλαράκια πάνω στον πάπυρο και κάθετα σε αυτόν. Κρατώντας τον πάπυρο τεντωμένο και στρέφοντάς τον στον ήλιο διαπίστωσε ότι τα δύο ξυλαράκια αφήναν πάντα την ίδια σκιά. Αν τα έφερνε σε κάποια θέση που το ένα ξυλαράκι να μην αφήνει καθόλου σκιά τότε το ίδιο θα συνέβαινε και με το άλλο. Με άλλα λόγια διαπίστωσε αρκετά εύκολα και απλά, ότι αν η γη ήταν επίπεδη όπως ο τεντωμένος πάπυρος, δεν θα ήταν δυνατό να δημιουργηθεί το παραπάνω φαινόμενο. Όταν όμως κρατούσε τον πάπυρο χαλαρά ώστε να είναι καμπύλος, τότε όταν το ένα ξυλαράκι ήταν ακριβώς παράλληλο με τις ακτίνες του ήλιου και δεν άφηνε καθόλου σκιά, το άλλο άφηνε σκιά η οποία μάλιστα ήταν τόσο μεγαλύτερη όσο μεγαλύτερη η καμπυλότητα του πάπυρου που κρατούσε. Έτσι μάλλον θα διαπίστωσε ότι το φαινόμενο οφείλεται στο γεγονός ότι η γη είναι σφαιρική.

Γιατί όμως δεν συμβαίνει ποτέ στην Αλεξάνδρεια;. Γιατί δηλαδή δεν υπάρχει καμία μέρα του χρόνου που οι ακτίνες του ηλίου να πέφτουν ακριβώς κάθετα στο έδαφος της Αλεξάνδρειας όπως συμβαίνει στη Σύνη;

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να σκεφτούμε ποιες μπορεί να ήταν οι γνώσεις του Ερατοσθένη εκείνη την εποχή. Το βασικότερο όργανο της αστρονομίας είναι η αστρονομική ράβδος. Η αστρονομική ράβδος δεν είναι τίποτε άλλο παρά ένα ευθύγραμμο όσο το δυνατό μαστούνι γνωστού μήκους, τοποθετημένου κάθετα ακριβώς στο έδαφος. Η σκιά ενός τέτοιου μαστουνιού μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια της ημέρας. Η μικρότερη σκιά σχηματίζεται όταν ο ήλιος βρίσκεται στο ζενίθ του, δηλαδή στο υψηλότερο σημείο του ουρανού. Τότε έχουμε μεσημέρι. Το μήκος όμως της μικρότερης σκιάς, το μήκος δηλαδή της σκιάς της ράβδου το μεσημέρι, δεν παραμένει το ίδιο κατά τη διάρκεια του έτους. Το χειμώνα που ο ήλιος δεν ανεβαίνει πολύ ψηλά στον ορίζοντα, το μήκος της σκιάς είναι μεγάλο ενώ το καλοκαίρι είναι μικρότερο. Στην Αλεξάνδρεια, η ράβδος δημιουργεί κάποια σκιά το μεσημέρι, καθ' όλη τη διάρκεια του έτους. Όλα αυτά είναι πολύ πιθανό να τα γνώριζε ο Ερατοσθένης. Αυτό που ίσως να μην γνώριζε είναι ότι υπάρχουν μέρη στη γη που κάποιες φορές το χρόνο, η αστρονομική ράβδος δεν αφήνει καθόλου σκιά. Και αυτό γιατί είναι πολύ πιθανό να μην είχε ταξιδέψει σε μέρη νοτιότερα του γεωγραφικού πλάτους των  $23,5^{\circ}$ . Πιθανολογείται ότι είχε ταξιδέψει στην Αθήνα. Αλλά η Αθήνα είναι βορειότερα της Αιγύπτου και γι αυτό δεν υπάρχει ημέρα του χρόνου που να μηδενίζεται η σκιά της αστρονομικής ράβδου. Ίσως να πίστευε ότι δεν υπάρχει τόπος που να συμβαίνει κάτι τέτοιο. Φανταστείτε λοιπόν την έκπληξή του όταν πληροφορήθηκε ότι στη Σύνη μια φορά το χρόνο μηδενίζεται η σκιά της αστρονομικής ράβδου το μεσημέρι.

Ο Ερατοσθένης μπορούσε εύκολα να παρατηρήσει ότι οι ακτίνες του ήλιου σε έναν τόπο είναι παράλληλες. Η ερμηνεία αυτού του γεγονότος ήταν αρκετά εύκολη για τον Ερατοσθένη αφού γνώριζε αρκετά καλά τη γεωμετρία του Ευκλείδη (325-265) ο οποίος έζησε στην ίδια πόλη, την Αλεξάνδρεια. Η παραλληλία των ακτίνων του ήλιου οφείλεται στην μεγάλη απόστασή του από τη γη σε σχέση με την ακτίνα της γης και γι αυτό το λόγο, οι ακτίνες θα είναι παράλληλες σε όλους τους τόπους της γης.

Αφού λοιπόν οι ακτίνες του ήλιου κτυπάνε πάντα τη γη παράλληλα, η μόνη ερμηνεία για το πρόβλημα που απασχολούσε τον Ερατοσθένη, ήταν ότι η διεύθυνση αυτών των ακτίνων δεν θα πρέπει να παραμένει σταθερή κατά τη διάρκεια του έτους αλλά θα πρέπει να αλλάζει. Πιο συγκεκριμένα θα πρέπει αυτή η αλλαγή να κυμαίνεται ανάμεσα σε κάποια όρια. Με άλλα λόγια οι ακτίνες του ήλιου και ο άξονας της γης θα πρέπει να σχηματίζουν κάποια γωνία που η γωνία αυτή να αλλάζει τιμή κατά τη διάρκεια του έτους από  $90^{\circ}+\kappa$  έως  $90^{\circ}-\kappa$ . Αν η υπόθεση αυτή είναι αληθής τότε όλοι οι τόποι που έχουν γεωγραφικό πλάτος βόρεια μεγαλύτερο του  $\kappa$  δεν θα υπάρχει ημέρα του έτους που να μηδενίζεται το μεσημέρι η σκιά της αστρονομικής ράβδου. Αντίθετα οι τόποι που είναι νοτιότερα από το γεωγραφικό πλάτος  $\kappa$  έως  $-\kappa$  η σκιά θα μηδενίζεται το μεσημέρι δύο φορές το χρόνο. Για τους τόπους με γεωγραφικό πλάτος ακριβώς ίσο με  $\kappa$  βόρεια ή νότια, το φαινόμενο αυτό θα συμβαίνει μία φορά το χρόνο. (κοίτα παρακάτω σχήματα). Φανταστείτε τη χαρά του Ερατοσθένη όταν έκανε αυτή τη σκέψη. Το επόμενο βήμα για την επαλήθευση της θεωρίας του, ήταν να διαπιστώσει αν υπάρχουν νοτιότερα από τη Σύνη πόλεις

στις οποίες το φαινόμενο μηδενισμού της σκιάς δεν συμβαίνει μία φορά το χρόνο, αλλά δύο. Μια τέτοια διαπίστωση θα επιβεβαίωνε τη θεωρία του

Πάμε τώρα σε ποσοτικούς υπολογισμούς. Αυτό που μπορούσε σίγουρα να κάνει ο Ερατοσθένης είναι να μετράει σε καθημερινή βάση το μήκος της σκιάς της αστρονομικής ράβδου το μεσημέρι. Δηλαδή το ημερήσιο ελάχιστο μήκος της σκιάς. Από τις μετρήσεις ενός έτους, θα μπορούσε να προσδιορίσει την κλίση της γης, αλλά και το γεωγραφικό πλάτος της Αλεξάνδρειας. Πράγματι: μετρώντας καθημερινά την ελάχιστη σκιά μπορούσε να προσδιορίσει τη γωνία των ηλιακών ακτίνων με την κατακόρυφη. Η ελάχιστη αυτή γωνία κατά τη διάρκεια του έτους έστω  $\alpha_{\min}$  ( που παρεμπιπτόντως αυτό συμβαίνει στις 22 Ιουνίου στο καλοκαιρινό ηλιοστάσιο, αλλά αυτό δεν μας χρησιμεύει πουθενά) ενώ η μέγιστη έστω  $\alpha_{\max}$  ( που συμβαίνει στο χειμερινό ηλιοστάσιο στις 22 Δεκεμβρίου, αλλά ούτε και αυτή η πληροφορία είναι χρήσιμη στους υπολογισμούς μας. ).

$$\alpha_{\min} = \varphi - \kappa \quad \alpha_{\max} = \varphi + \kappa$$

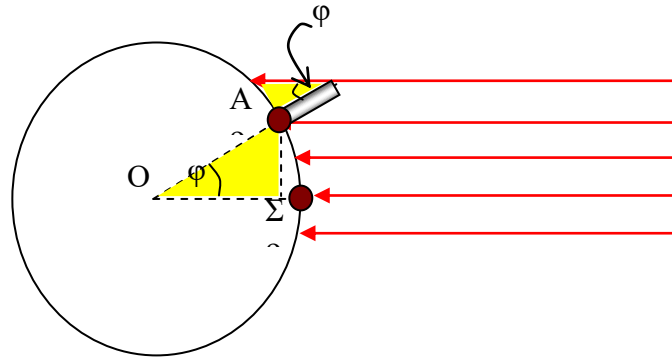
Όπου  $\varphi$  το γεωγραφικό πλάτος της Αλεξάνδρειας και  $\kappa$  η κλίση του άξονα της γης. Λύνοντας το σύστημα μπορούμε να προσδιορίσουμε και τους δύο αγνώστους, άρα με αυτό το σκεπτικό πολύ πιθανά ο Ερατοσθένης υπολόγισε το γεωγραφικό πλάτος της Αλεξάνδρειας αλλά και την κλίση της γης που αναφέρει ο Κλεομήδης, αλλά δεν αναφέρει τη μέθοδο με την οποία έκανε τον υπολογισμό.

Το επόμενο πόρισμα ήταν ο υπολογισμός της ακτίνας της γης. Για αυτό το βήμα ο Ερατοσθένης δεν χρειαζόταν να γνωρίζει τίποτα περί κύκλου, περί ισημεριών περί ημερομηνιών κλπ. Μόνο δύο πληροφορίες του ήταν απαραίτητες. Πρώτον ότι για να πάνε τα караβάνια από την Αλεξάνδρεια στη Σύνη θα έπρεπε να ταξιδεύουν συνεχώς νότια έχοντας στην πλάτη τους τον πολικό αστέρα. Και δεύτερον πόσες μέρες χρειαζόνταν ένα караβάνι για αυτό το ταξίδι. Γνωρίζοντας πόσα στάδια ταξιδεύει κατά μέσο όρο ένα караβάνι, θα ήταν δυνατό να προσδιορίσει τα στάδια που χώριζαν την Αλεξάνδρεια από τη Σύνη. Με τη γεωμετρία του Ευκλείδη που πιθανά να τον είχε γνωρίσει ( ο Ευκλείδης πέθανε όταν ο Ερατοσθένης ήταν 11 ετών) μπορούσε να προσδιορίσει την ακτίνα της γης με την εξής αναλογία. Αν πάρουμε την  $\alpha_{\min}$  για την Αλεξάνδρεια, δηλαδή υπολογίζοντας τη μικρότερη σκιά του έτους για την Αλεξάνδρεια, τότε **όσο μεγαλύτερο είναι το μήκος της αστρονομικής ράβδου από το μήκος της μικρότερης σκιάς του έτους, τόσο μεγαλύτερη θα είναι και η ακτίνα της γης από την απόσταση Αλεξάνδρειας-Σύνης**.

Ας εξηγήσουμε λίγο περισσότερο αυτό το συλλογισμό. Από την ανάλυση που κάναμε παραπάνω, είναι προφανές ότι όταν ο ήλιος δεν αφήνει σκιά στη Σύνη, τότε όλοι οι βορειότεροι τόποι από αυτήν αφήνουν τη μικρότερη σκιά του έτους. Και αυτό γιατί οι ακτίνες του ηλίου σχηματίζουν την μικρότερη γωνία με τον άξονα της γης. Οπότε η γωνίες τους σχήματος είναι ίσες ως εντός εναλλάξ.

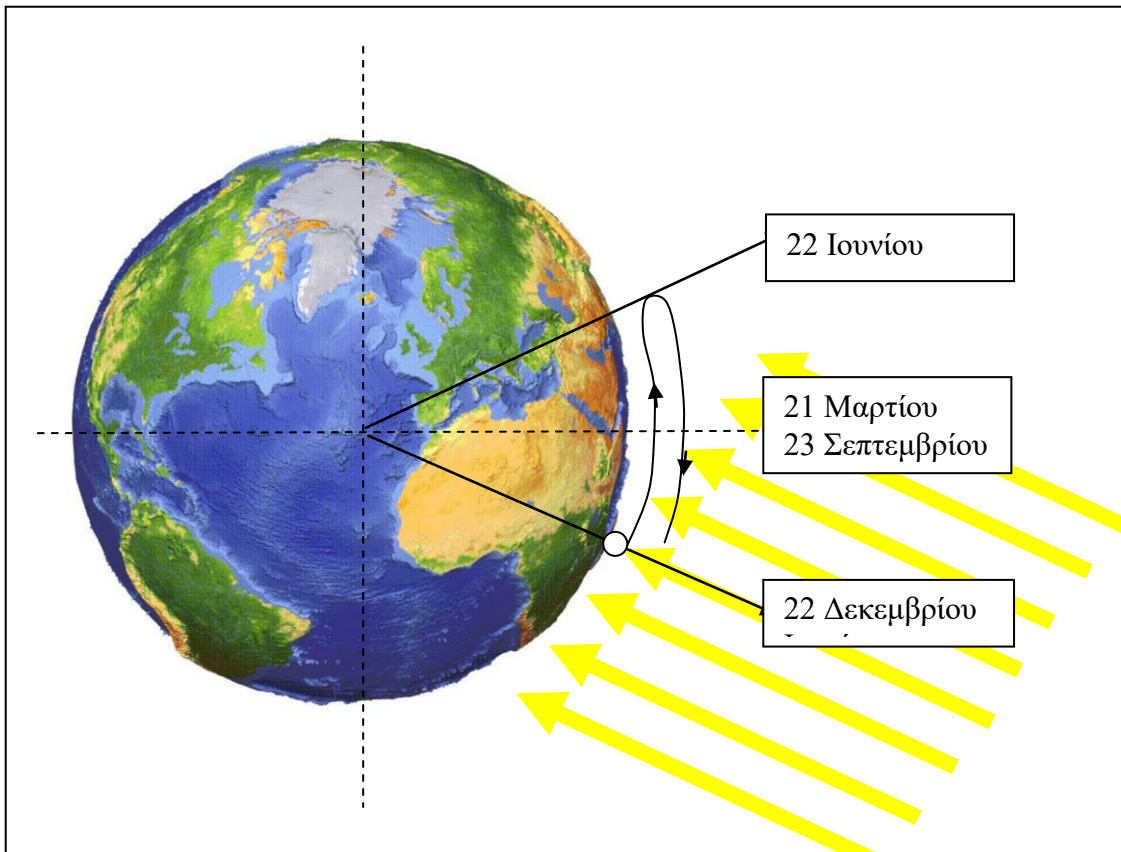
Λόγω της μικρής τιμής της γωνίας  $\varphi$  μπορούμε με πολύ καλή προσέγγιση να θεωρήσουμε ότι το τόξο ταυτίζεται με τη χορδή οπότε το μήκος Αλεξάνδρεια Σύνη θα είναι ίσο περίπου με το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΣ. Από την ομοιότητα των γραμμοσκιασμένων τριγώνων θα έχουμε :

$$\frac{\text{μήκος σκιάς}}{\text{μήκος ράβδου}} = \frac{ΑΣ}{ΟΣ} \approx \frac{\text{μήκος Αλεξάνδρειας - Σύνης}}{\text{ακτίνα της γης ( ΟΑ )}}$$

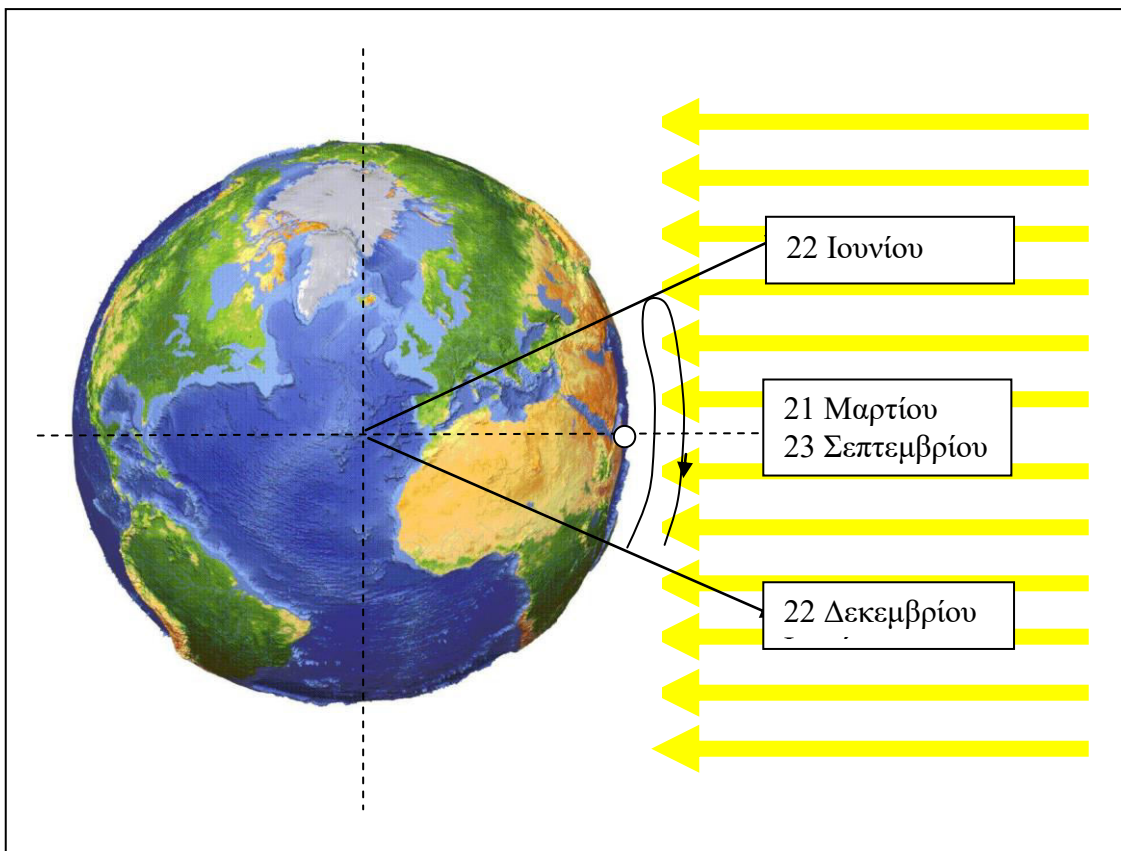


. Ο Ερατοσθένης στάθηκε τυχερός γιατί η Σύηνη είναι νότια της Αλεξάνδρειας (σχεδόν νότια) και έχει γεωγραφικό πλάτος 23 μοίρες όσο περίπου η κλίση του άξονα της γης. Αν δεν υπήρχε σε αυτή τη θέση αυτή η πόλη, θα έπρεπε για τον υπολογισμό της ακτίνας της γης να βρει μια άλλη πόλη νότια πάντα της Αλεξάνδρειας και νοτιότερα των 23 μοιρών. Σε μια τέτοια πόλη ο μηδενισμός της σκιάς της αστρονομικής ράβδου θα συνέβαινε δύο φορές το χρόνο. Σε αυτή την περίπτωση, ο Ερατοσθένης για τον υπολογισμό της ακτίνας της γης θα έπρεπε να γνωρίζει εκτός από την απόσταση της Αλεξάνδρειας από αυτή την πόλη και την ημερομηνία που συμβαίνει ο μηδενισμός της σκιάς, ώστε την ίδια ημέρα να μετρήσει τη σκιά της αστρονομικής ράβδου στην Αλεξάνδρεια. Το μήκος αυτό δεν θα ήταν το ελάχιστο του έτους. Με άλλα λόγια, αν πάρουμε μια πόλη νοτιότερα της Αλεξάνδρειας και με γεωγραφικό πλάτος μικρότερο των 23μοιρών, σε αυτή την πόλη ο μηδενισμός της σκιάς της αστρονομικής ράβδου, δεν συμβαίνει την ίδια μέρα με την ημέρα που έχουμε το ελάχιστο μήκος της σκιάς της αστρονομικής ράβδου στην Αλεξάνδρεια.

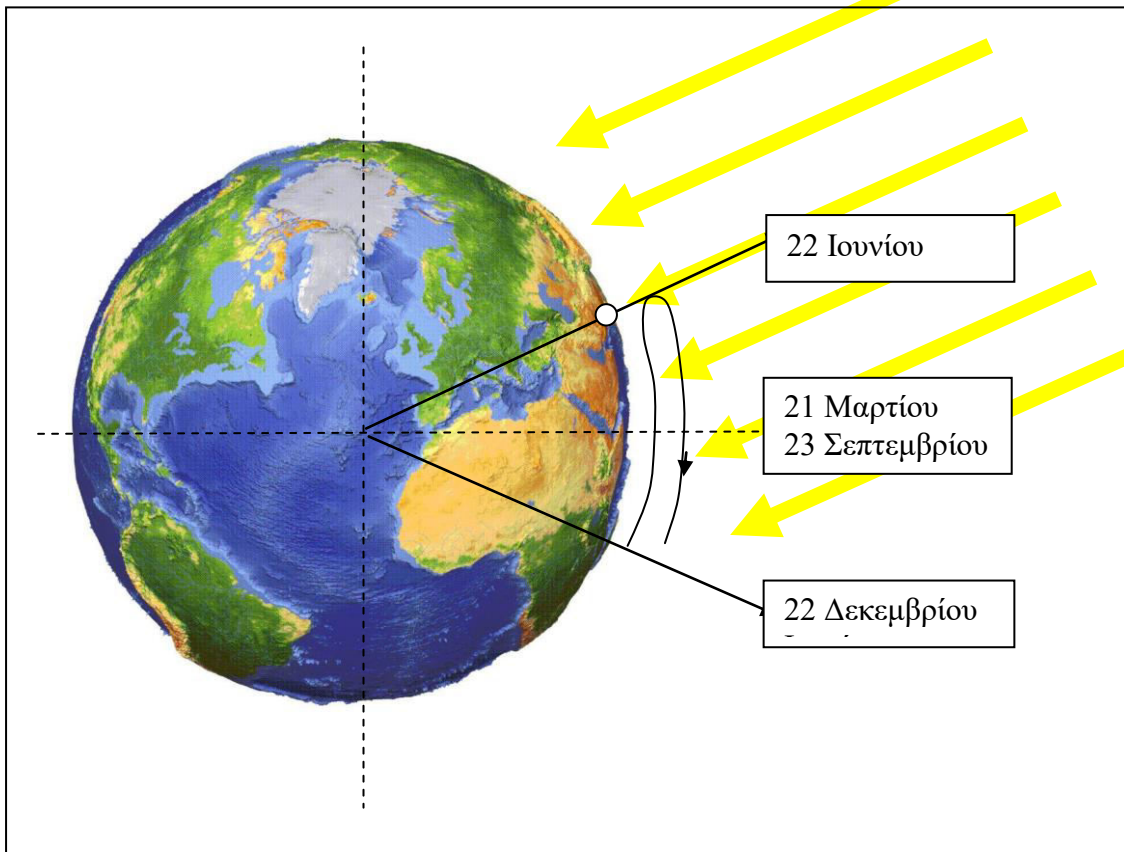
Όλα αυτά μπορεί να είναι μια υπόθεση μακριά από τον τρόπο που δούλεψε ο Ερατοσθένης. Μπορεί όμως να είναι και πιο κοντά από τον τρόπο που μας περιγράφει στα κείμενά του ο Κλεομήδης αφού η υπόθεση αυτή περιγράφει με έναν συνεπή τρόπο τις γεωγραφικές ανακαλύψεις του Ερατοσθένη ( μέτρηση της ακτίνας της γης, μέτρηση του γεωγραφικού πλάτους διαφόρων τόπων, μέτρηση της κλίσης του άξονα της γης) μέσα από το πρίσμα της προσπάθειας λύσης ενός και μόνο προβλήματος.



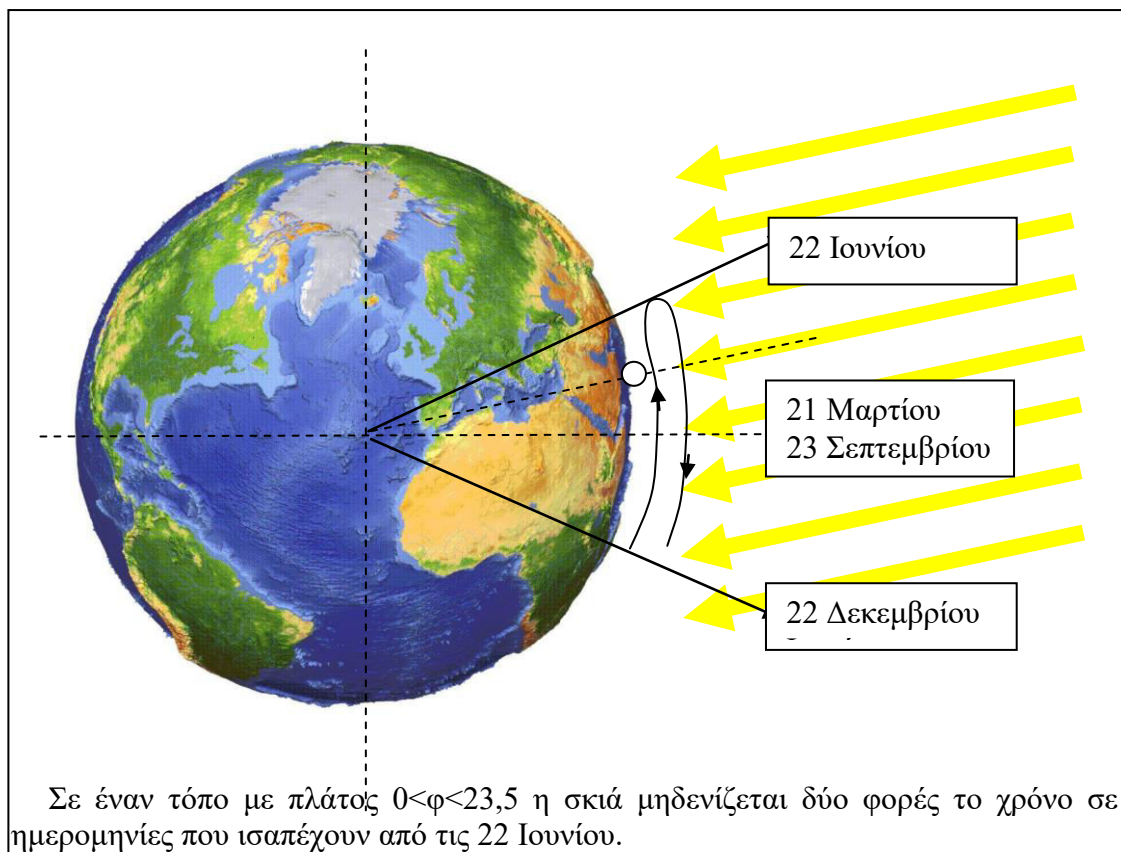
22 Δεκεμβρίου. Στον τόπο με γεωγραφικό πλάτος 23,5 νότια η σκιά είναι μηδενική



21 Μαρτίου-23 Σεπτεμβρίου. Στον ισημερινό η σκιά μηδενίζεται το μεσημέρι



22 Ιουνίου. Η σκιά μηδενίζεται στον τόπο με βόρειο γεωγραφικό πλάτος 23,5 μοίρες. Όλοι οι τόποι βορειότερα δίνουν τη μικρότερη σκιά του έτους.



Σε έναν τόπο με πλάτος  $0 < \phi < 23,5$  η σκιά μηδενίζεται δύο φορές το χρόνο σε ημερομηνίες που ισαπέχουν από τις 22 Ιουνίου.

Η ερμηνεία του γρίφου στην τελική ανάλυση έχει να κάνει με την κλίση του άξονα της γης σε σχέση με το επίπεδο κίνησης της γης γύρω από τον ήλιο. Δεν γνωρίζω αν ο Ερατοσθένης είχε καταλάβει ότι η τροχιά της γης βρίσκεται σε σταθερό επίπεδο και ότι ο άξονάς της παραμένει συνεχώς παράλληλος με τον εαυτό του σχηματίζοντας διαρκώς σταθερή γωνία με αυτό το επίπεδο της τροχιάς. Λόγω αυτού του γεγονότος δημιουργείται το φαινόμενο της αλλαγής του μήκους της ελάχιστης σκιάς κατά τη διάρκεια του έτους. Σίγουρα όμως, όπως προκύπτει από την παραπάνω ανάλυση, ο Ερατοσθένης είχε ανακαλύψει ότι η ελάχιστη σκιά της αστρονομικής ράβδου είναι διαφορετική την ίδια μέρα σε διαφορετικούς τόπους και ότι υπάρχουν τόποι που αυτή μηδενίζεται μία ή δύο φορές το χρόνο, ενώ σε άλλους τόπους όπως σε αυτόν της Αλεξάνδρειας, αυτό δεν συμβαίνει ποτέ.

*© Πάνος Μουρούζης 2011*