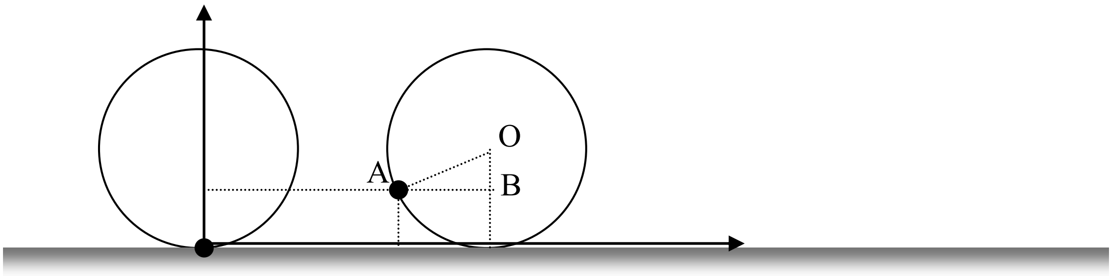
ΚΥΚΛΟΕΙΔΗΣ ΚΑΜΠΥΛΗ – ΜΙΑ ΚΑΜΠΥΛΗ ΜΕ ΥΠΕΡΟΧΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Εύρεση ταχύτητας και επιτάχυνσης ενός σημείου της περιφέρειας τροχού που κυλίεται.



Έστω ότι ο τροχός έχει κυλήσει στρεφόμενος κατά γωνία φ. τότε το σημείο Α που στην αρχή του χρόνου είχε συντεταγμένες (0,0) τώρα θα έχει συντεταγμένες

$$\begin{aligned} x &= u \cdot t - AB = u \cdot t - R\sin\phi = u \cdot t - R\sin\omega t \\ y &= R - OB = R - R\cos\phi = R - R\cos\omega t \end{aligned} \qquad (1)$$

στην κύλιση γνωρίζουμε ότι ισχύει η σχέση $u_{\mu\varepsilon\tau} = u_{\pi\varepsilon\rho} \rightarrow u = \omega \cdot R$ (2)

Για να βρούμε τις εξισώσεις των ταχυτήτων παραγωγίζουμε τις σχέσεις (1). Με τη βοήθεια της σχέσης (2) έχουμε:

$$\begin{aligned} u_x &= \omega \cdot R - \omega \cdot R\cos\omega t \\ u_y &= \omega \cdot R\sin\omega t \end{aligned} \qquad (3)$$

από τις σχέσεις (3) μπορούμε να προσδιορίσουμε το μέτρο της ταχύτητας

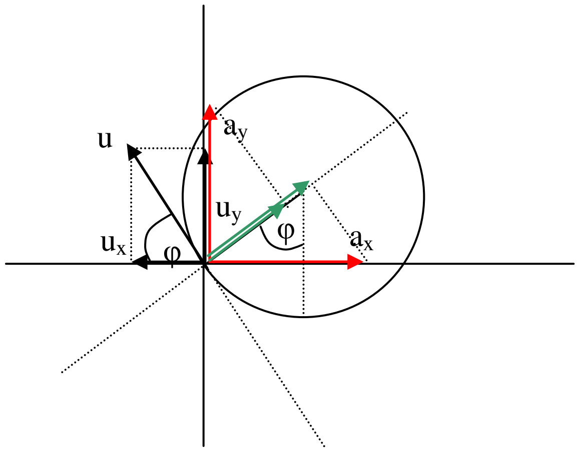
$$u = \sqrt{u_x^{\,2} + u_y^{\,2}} \rightarrow u = \omega \cdot R\sqrt{2 - 2\cos\omega t} = 2\omega \cdot R\sin\frac{\omega t}{2} \qquad (4)$$

με την παραγώγιση των σχέσεων (3) μπορούμε να βρούμε τις επιταχύνσεις καθώς και την ολική επιτάχυνση.

$$\begin{aligned} a_x &= \omega^2 \cdot R\sin\omega t \\ a_y &= \omega^2 \cdot R\cos\omega t \end{aligned} \qquad (5)$$

$$a = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2}} = \omega^2 \cdot R \qquad (6)$$

Για να βρούμε την κεντρομόλα επιτάχυνση πρέπει να κάνουμε ένα σχήμα.



Σύμφωνα με τον ορισμό της κεντρομόλας επιτάχυνσης η οποία είναι η συνιστώσα της ολικής επιτάχυνσης πάνω σε έναν άξονα κάθετο στον άξονα της ταχύτητας, έχουμε:

$$a_{\kappa\varepsilon\nu\tau} = \alpha_y \cos\phi + a_x \sin\phi = \frac{-a_y u_x + a_x u_y}{u} = \frac{\omega^3 \cdot R^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t - \cos\omega t)}{2\omega R \sin\frac{\omega t}{2}}$$

$$\rightarrow a_{\kappa\varepsilon\nu\tau} = \omega^2 R \sin\frac{\omega t}{2}$$

πρόβλημα 2^o

πόσο διάστημα θα έχει διανύσει το σημείο Α όταν ο τροχός έχει κάνει μια πλήρη περιστροφή κυλώντας;

$$ds = udt \rightarrow ds = 2\omega R \sin\frac{\omega t}{2} \cdot dt \rightarrow ds = 2R\sin\frac{\varphi}{2} d\varphi = 4R(\sin\frac{\varphi}{2})\frac{d\varphi}{2}$$

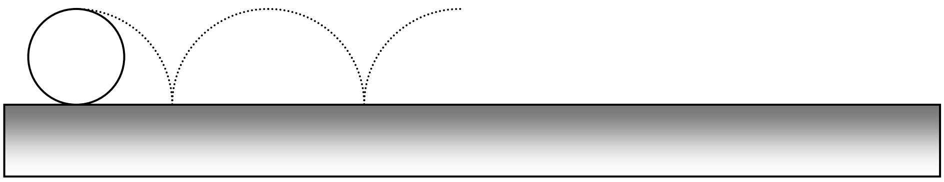
για να βρούμε το διάστημα που διάνυσε το σώμα σε μια πλήρη περιστροφή αρκεί να ολοκληρώσουμε την παραπάνω σχέση από 0 έως 360 μοίρες ή από 0 έως 2π.

$$s = \int_0^{2\pi} 4R\sin(\frac{\varphi}{2}) d\frac{\varphi}{2} = 4R\int_0^{\pi} \sin\theta \cdot d\theta = 4R(-\cos\theta)_0^{\pi} = 8R$$

Άρα ένα σημείο της περιφέρειας σε έναν κύκλο διανύει απόσταση 4 φορές τη διάμετρο ενώ το κέντρο του κύκλου διανύει απόσταση π φορές τη διάμετρο.

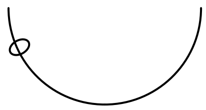
ΚΥΚΛΟΕΙΔΗΣ ΚΑΜΠΥΛΗ

Η Κυκλοειδής καμπύλη είναι η καμπύλη που διαγράφει ένα σημείο της περιφέρειας ενός κύκλου, ο οποίος κυλίεται σε οριζόντιο δάπεδο.

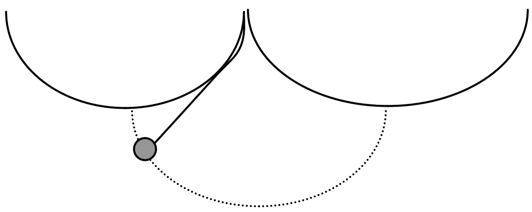


Η κυκλοειδής καμπύλη έχει μερικές πολύ εντυπωσιακές και ωραίες ιδιότητες όπως.

1. *Αν αντιστρέψουμε την κυκλοειδή καμπύλη και τοποθετήσουμε ένα δακτυλίδι το οποίο κινείται πάνω στην κυκλοειδή καμπύλη, η περίοδος του δακτυλιδιού είναι ανεξάρτητη από το σημείο που το αφήνουμε.*



2. *αν βάλουμε δύο κυκλοειδείς καμπύλες όπως η προηγούμενη και ένα εκκρεμές στο σημείο τομής τους τότε το σωμάτιο του εκκρεμούς διαγράφει και αυτό κυκλοειδή καμπύλη.*



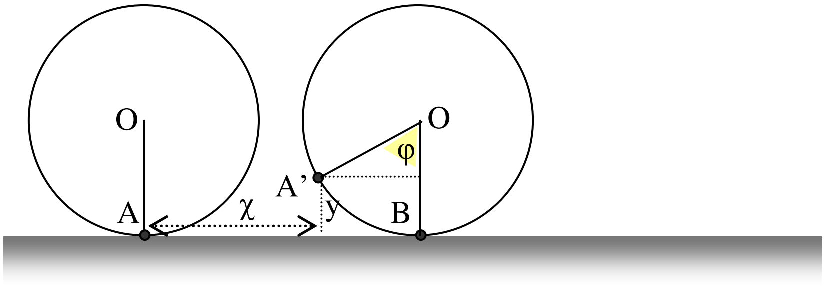
3. *η περίοδος του παραπάνω εκκρεμούς είναι ανεξάρτητη του πλάτους ταλάντωσης*

4. *αν έχουμε δύο σημεία Α και Β τα οποία συνδέονται με ένα σύρμα και ένα δακτυλίδι που κινείται ανάμεσα σε αυτό, για να φθάσει στον μικρότερο χρόνο από το Α στο Β θα πρέπει το σύρμα να είναι κυκλοειδής καμπύλη.*

5. *αν έχουμε ένα σταθερό ηλεκτρικό πεδίο κατά τον άξονα χ και ένα σταθερό μαγνητικό πεδίο κατά τον άξονα z και αφήσουμε ένα φορτίο στην αρχή των αξόνων, το φορτίο θα διαγράψει μια κυκλοειδή καμπύλη .*

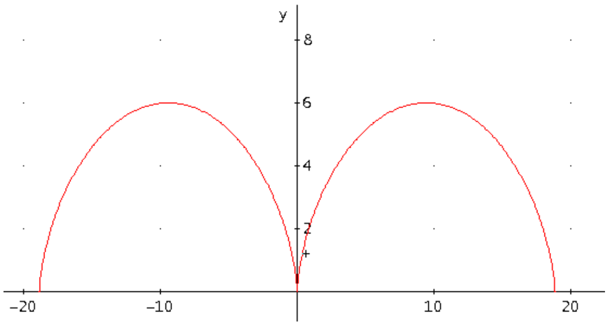
Εξισώσεις κυκλοειδούς καμπύλης

Έστω ότι έχουμε μια ρόδα που κυλίεται. Ένα σημείο της περιφέρειας της ρόδας διαγράφει μια καμπύλη που λέγεται κυκλοειδής. Η κίνηση της ρόδας είναι καθαρή κύλιση. Άρα όταν έχει μετακινηθεί στον άξονα χ κατά ΑΒ θα έχει στραφεί κατά γωνία φ τέτοια ώστε φ·R=AB



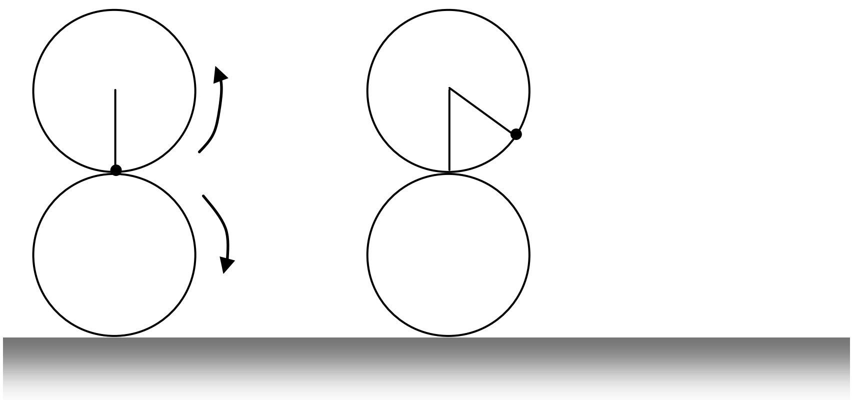
Οπότε θα έχουμε τις εξισώσεις

$$x = \phi \cdot R - R\sin\phi$$
$$y = R - R\cos\phi$$



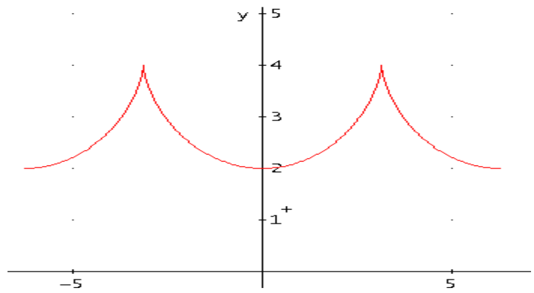
αυτές είναι οι παραμετρικές εξισώσεις της κυκλοειδούς καμπύλης.

Αν πάρουμε μια ρόδα και από πάνω της μια άλλη που συνδέεται με γρανάζια με την κάτω, τότε ένα σημείο Α της πάνω ρόδας θα διαγράφει κυκλοειδή καμπύλη με εξισώσεις.



$$x = \phi \cdot R + R\sin\phi$$
$$y = 3R - R\cos\phi$$

που έχουν την παραπλεύρως γραφική παράσταση

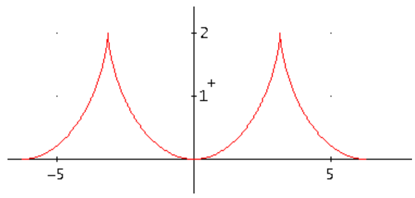


παρατηρούμε λοιπόν ότι και οι παραπάνω εξισώσεις είναι εξισώσεις κυκλοειδούς καμπύλης.

μετακινώντας την παραπάνω καμπύλη στον άξονα y προς τα κάτω ώστε να αρχίζει από την αρχή των αξόνων έχουμε την παραπάνω γραφική παράσταση με εξισώσεις

$$x = R\cdot\phi + R\sin\phi$$
$$y = R - R\cos\phi \qquad (1)$$

με R=1



θα δουλέψουμε με την τελευταία κυκλοειδή καμπύλη αποδεικνύοντας την πρώτη ιδιότητα:
έστω χάντρα που βρίσκεται στη θέση x,y
εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για τη χάντρα

$$mgy + \frac{1}{2}mu^2 = mg2R \rightarrow gR(1-\cos\phi) + \frac{1}{2}(u_x{}^2 + u_y{}^2) = g2R \qquad (2)$$

από τις παραμετρικές εξισώσεις (1) έχουμε:

$$u_x = \frac{dx}{dt} = R\frac{d\phi}{dt} + R\frac{d\phi}{dt}\cos\phi \rightarrow u_x{}^2 = (R\frac{d\phi}{dt})^2(1+\cos^2\phi + 2\cos\phi)$$
$$u_y = R\frac{d\phi}{dt}\cdot\sin\phi \rightarrow u_\upsilon{}^2 = (R\frac{d\phi}{dt})^2(\sin^2\phi) \qquad (3)$$

αντικαθιστώντας τις (3) στη (2) έχουμε:

$$gR(1-\cos\phi) + (R\frac{d\phi}{dt})^2(1+\cos\phi) = g2R \rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \sqrt{\frac{g}{R}} \rightarrow \phi = \sqrt{\frac{g}{R}}\cdot t + C$$

για t=0 έχουμε φ=0 οπότε C=0 και για φ=2π έχουμε t=T οπότε

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

Αυτή είναι η περίοδος της συνάρτησης. Η περίοδος του εκκρεμούς μας είναι η διπλάσια αφού το κινητό από την ακραία θέση πάει και έρχεται στην ίδια θέση. Άρα

$$T = 4\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

Απόδειξη 1[ης] ιδιότητας

αν αφήσουμε το σώμα από τυχαίο σημείο τότε θα καταλήξουμε στην εξίσωση

$gR(1-\cos\phi)+R^2\dot{\phi}^2(1+\cos\phi)=gy_0=gR(1-\cos\phi_0)$ παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση έχουμε

$$g\dot{\phi}\sin\phi - R\dot{\phi}\dot{\phi}^2\sin\phi + 2R\dot{\phi}\ddot{\phi}(1+\cos\phi)=0\rightarrow$$

$$g\sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2} - R\dot{\phi}^2\sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2} + 2R\ddot{\phi}\cos^2\frac{\phi}{2}=0\rightarrow$$

$$g\sin\frac{\phi}{2} - R\dot{\phi}^2\sin\frac{\phi}{2} + 2R\ddot{\phi}\cos\frac{\phi}{2}=0$$

καλώ $u=\sin\frac{\phi}{2}$ οπότε $\frac{du}{dt}=\frac{1}{2}\dot{\phi}\cos\frac{\phi}{2}$ και $\frac{d^2u}{dt^2}=\frac{1}{2}\ddot{\phi}\cos\frac{\phi}{2}-\frac{1}{4}\dot{\phi}^2\sin\frac{\phi}{2}$

με τον παραπάνω μετασχηματισμό η εξίσωση μετατρέπεται στην

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{g}{4R}u=0\rightarrow u=c_1\sin\sqrt{\frac{g}{4R}}t+c_2\cos\sqrt{\frac{g}{4R}}t=\sin\frac{\phi}{2}$$

ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Για t=0 θα πρέπει $\varphi=\varphi_o$

$$c_2=\sin\frac{\phi_0}{2}$$

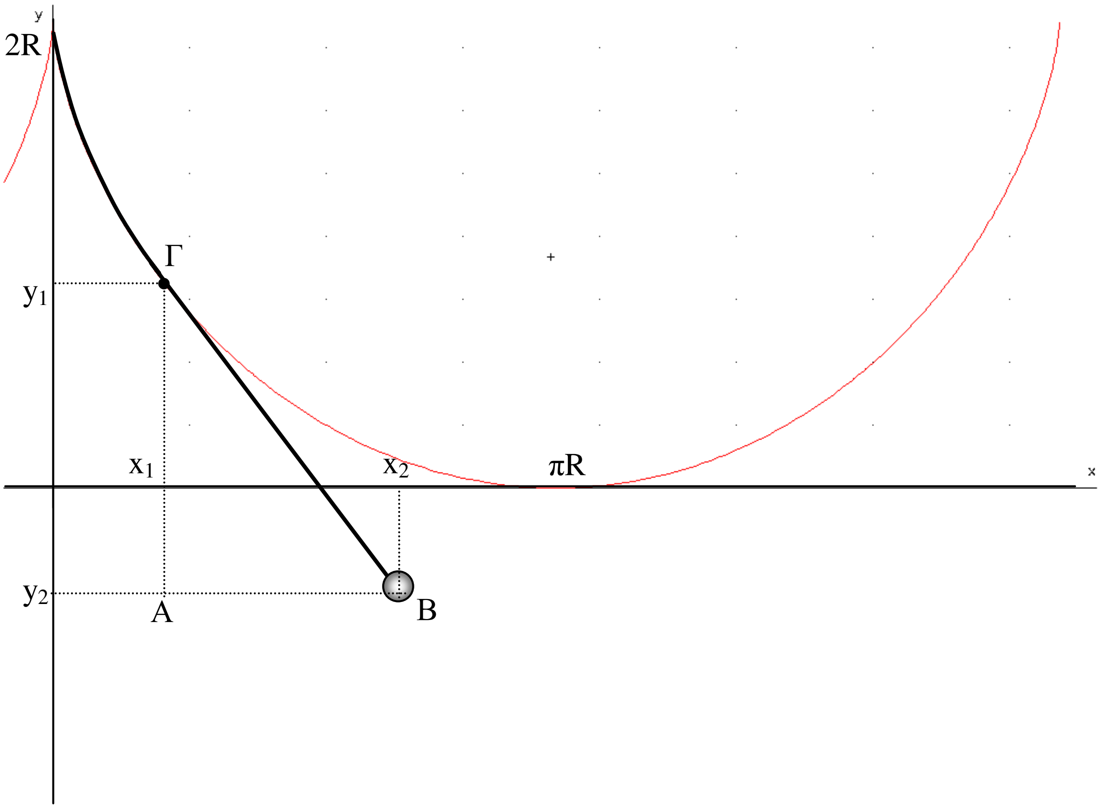
και dφ/dt=adu/dt=0

$$\sqrt{\frac{R}{4g}}(c_1\cos t-\sin\frac{\phi_0}{2}\sin t)\Big|_{t=0}=0\rightarrow c_1=0$$

άρα $u=\sin\frac{\phi_0}{2}\cos\sqrt{\frac{g}{4R}}t$ ο χρόνος για να πάει από τη θέση φο στη θέση μηδέν είναι ανεξάρτητος της αρχικής θέσης αφού θα πρέπει το συνιμήτονο να γίνει μηδέν άρα η γωνία π/2 οπότε ο χρόνος θα είναι

$$t\sqrt{\frac{g}{4R}}=\frac{\pi}{2}\rightarrow t=\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

Απόδειξη 2ης ιδιότητας



Η εξίσωση της παραπάνω κυκλοειδούς καμπύλης είναι
x=Rφ-Rsinφ , y=R+Rcosφ

1. βρίσκω το μήκος της κυκλοειδούς καμπύλης μέχρι τη γωνία π ή αλλιώς μέχρι τη τιμή που μηδενίζεται η y για πρώτη φορά.

Από τις εξισώσεις της κυκλοειδούς

$dx = R\cdot d\phi - R\cdot d\phi\cdot cos\,\phi$ $\quad και \quad$ $dy = \text{-}R\cdot d\varphi\cdot sin\varphi$ άρα

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{sin\,\phi}{1-cos\,\phi} = -\frac{cos\,\phi/2}{sin\,\phi/2}$$

$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \rightarrow ds = \sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\cdot dx$ άρα

$s = \int_0^{\phi} 4R\,sin\frac{\phi}{2}\,d\frac{\phi}{2} = 4R(1-cos\frac{\phi}{2})$ οπότε αν φ=π το μήκος της κυκλοειδούς είναι 4R

Αν έχουμε τώρα ένα εκκρεμές μήκους 4R το οποίο είναι αναρτημένο στο σημείο (0,2R) σε μια τυχαία θέση του εκκρεμούς, το μήκος που θα ακουμπάει στην κυκλοειδή καμπύλη θα είναι $S_1 = 4R(1-cos\frac{\phi}{2})$ ενώ το μήκος που είναι ευθεία θα είναι $s_2 = 4R\,cos\frac{\phi}{2}$

Η κλίση αυτού του ευθύγραμμου τμήματος είναι $\kappa = tan\,\omega = \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{cos\frac{\phi}{2}}{sin\frac{\phi}{2}} = tan(\frac{\pi}{2}+\frac{\phi}{2})$ Άρα

$A\Gamma B = \phi / 2$

Οπότε οι συντεταγμένες της σφαίρας θα είναι:

$$x_2 = x_1 + s_2 \cdot sin\frac{\phi}{2} \to x_2 = R\phi - R\,sin\,\phi + 4R\,cos\frac{\phi}{2}sin\frac{\phi}{2} \to x_2 = R\phi - R\,sin\,\phi + 2R\,sin\,\phi$$

$$y_2 = y_1 - s_2\,cos\frac{\phi}{2} \to y_2 = R + R\,cos\,\phi - 4R\,cos\frac{\phi}{2}cos\frac{\phi}{2} = R + R\,cos\,\phi - 2R(1+cos\,\phi)$$

έτσι οι εξισώσεις που διαγράφει το σώμα είναι:

x=Rφ+Rsinφ   και   y=-R-Rcosφ   που είναι προφανώς εξισώσεις κυκλοειδούς καμπύλης

Απόδειξη 3ης ιδιότητας

Οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα είναι το βάρος της και η τάση του νήματος. Θα αποδείξουμε ότι η τάση του νήματος είναι κάθετη στην κυκλοειδή καμπύλη που διαγράφει το νήμα. Άρα έχουμε ακριβώς την ίδια δυναμική με το δακτυλίδι της πρώτης ιδιότητας. Οπότε θα ισχύει ότι και στην πρώτη ιδιότητα. Η περίοδος θα είναι ακριβώς η ίδια ανεξάρτητη από το σημείο από το οποίο αφήνουμε το σφαιρίδιο.

Η κλίση του νήματος είναι ίση με την κλίση της πρώτης κυκλοειδούς δηλαδή

$$\kappa = \frac{dy}{dx} = -\frac{cos\frac{\phi}{2}}{sin\frac{\phi}{2}}$$

από την κυκλοειδή πάνω στην οποία κινείται το σώμα με εξισώσεις
x=Rφ+Rsinφ   και   y=-R-Rcosφ   έχουμε:

$dx = Rd\phi + Rd\phi\,cos\,\phi$ και $dy = Rd\phi \cdot sin\,\phi$ άρα

$$\lambda = \frac{dy}{dx} = \frac{sin\,\phi}{(1+cos\,\phi)} = \frac{2\,sin\frac{\phi}{2}cos\frac{\phi}{2}}{2\,cos^2\frac{\phi}{2}} = \frac{sin\frac{\phi}{2}}{cos\frac{\phi}{2}}$$

παρατηρούμε ότι κ•λ=-1 άρα εδείχθη.

Απόδειξη 4ης ιδιότητας

Θεώρημα:

Ένα ολοκλήρωμα $I=\int_a^b F(x,y,y')dx$ έχει ακρότατο όταν $\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'})-\frac{\partial F}{\partial y}=0$

Απόδειξη:

Έστω ότι η συνάρτηση – καμπύλη που ελαχιστοποιεί το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι η
y=Y(x) με a ≤ x ≤ b
Μια γειτονική καμπύλη από αυτήν θα είναι η
y=Y(x)+ε•η(x) =Y+ε•η όπου ε ένας πολύ μικρός αριθμός:

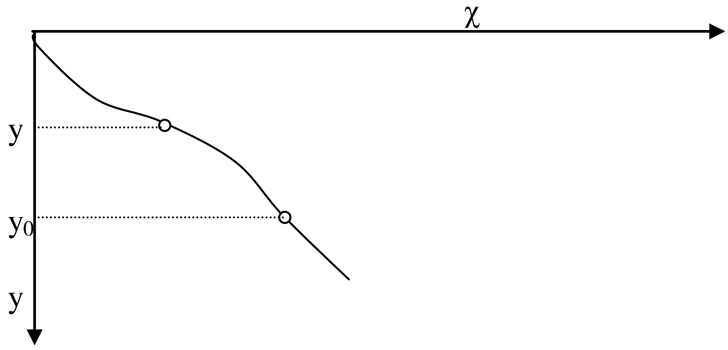
$$I(\varepsilon)=\int_a^b F(x,Y+\varepsilon\cdot\eta,Y'+\varepsilon\eta')dx$$

το ολοκλήρωμα αυτό για να έχει ακρότατο για ε=0 θα πρέπει να ισχύει $\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0$

άρα

$$\int_a^b(\frac{\partial F}{\partial y}\eta+\frac{\partial F}{\partial y'}\eta')dx=0\rightarrow\int_a^b\frac{\partial F}{\partial y}\eta dx+\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\eta\right|_a^b-\int_a^b\eta\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'})dx=0\rightarrow\int_a^b\eta\left\{\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'})\right\}dx=0$$

άρα εδείχθη.



Εφαρμόζοντας την Α.Δ.Μ.Ε για το σώμα που μετακινείται από τη θέση Α στη θέση Β λόγω του βάρους του έχουμε:

$$mgy_o=mg(y-y_o)+\frac{1}{2}m(\frac{ds}{dt})^2\rightarrow\frac{ds}{dt}=\sqrt{2gy}\rightarrow dt=\frac{ds}{\sqrt{2gy}}\rightarrow t=\int_0^{y_0}\frac{ds}{\sqrt{2gy}}\rightarrow t=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{y_0}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}$$

καλώ $F=\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$

σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα η συνάρτηση αυτή παρουσιάζει ελάχιστο όταν:
$\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'})-\frac{\partial F}{\partial y}=0$ αλλά

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = (1+y'^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot y' \cdot y^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{1}{2}(1+y'^2)^{\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{3}{2}}$$

παραγωγίζουμε την πρώτη ως προς χ και έχουμε:

$$\frac{dF}{dx}\left[(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot y' \cdot y^{-\frac{1}{2}}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}2y'y''(1+y'^2)^{-\frac{3}{2}}y'y^{-\frac{1}{2}} + (1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}y''y^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{2}}y'^2 - \frac{1}{2}(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{2}}$$

τελικά έχουμε $\quad 2yy'' + y'^2 + 1 = 0$

καλώ $y' = u$ οπότε $y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy}y' = u\frac{du}{dy}$ οπότε η παραπάνω διαφορική εξίσωση γίνεται

$$1 + u^2 + 2uy\frac{du}{dy} = 0 \to \frac{2udu}{1+u^2} + \frac{dy}{y} = 0 \to ln(1+u^2) + ln\, y = ln\, b \to (1+u^2)y = b$$

άρα $u = y' = \sqrt{\frac{b-y}{y}} \to x = \int \sqrt{\frac{y}{b-y}}dy + c$

Καλώ $y = b\,sin^2\theta$ οπότε έχω

$$x = \int \sqrt{\frac{b\,sin^2\theta}{b\,cos^2\theta}} \cdot 2b\sin\theta\cos\theta \cdot d\theta + c = 2b\int sin^2\theta \cdot d\theta + c = \frac{1}{2}b(2\theta - \sin 2\theta) + c$$

θέλουμε για x=0 να έχουμε y=0. καλούμε φ=2θ και a=1/2b οπότε

$x = a(\phi - \sin\phi)$ και $y = a(1 - \cos\varphi)$

που είναι η εξίσωση κυκλοειδούς καμπύλης. Ο.Ε

Απόδειξη 5ης ιδιότητας

Έχουμε ένα σταθερό ηλεκτρικό πεδίο στον άξονα y και ένα σταθερό μαγνητικό πεδίο στον άξονα –z. Οπότε η δύναμη που ασκείται στο φορτίο θα είναι:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + q\vec{V} \times \vec{B})$$

που αναλυόμενη η παραπάνω σχέση στους δύο άξονες θα έχουμε

$F_x = qBV_y = qB\dfrac{dy}{dt}$ και $F_y = Eq - qBV_x = Eq - qB\dfrac{dx}{dt}$

εφαρμόζοντας τη θεμελιώδη εξίσωση της δυναμικής για τον κάθε άξονα έχουμε

$$qB\frac{dy}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{και} \quad Eq - qB\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

………………………………………………………………………………………………..

καλώ $\dfrac{dx}{dt} = u \;\; και \;\; \dfrac{dy}{dt} = v$ οπότε οι παραπάνω εξισώσεις γίνονται.

$$qBv = m\frac{du}{dt} \quad και \quad Eq - qBu = m\frac{dv}{dt}$$

από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει $-qB\dfrac{du}{dt} = m\dfrac{d^2v}{dt^2} \to \dfrac{du}{dt} = -\dfrac{m}{qB}\dfrac{d^2v}{dt^2}$ Οπότε

$\dfrac{m^2}{qB}\dfrac{d^2v}{dt^2} + qBv = 0 \to \dfrac{d^2v}{dt^2} + (\dfrac{qB}{m})^2 v = 0$ η διπλανή εξίσωση είναι μια κλασσική εξίσωση αρμονικής ταλάντωσης και έχει λύση την $v = A\sin(bt + \phi)$ όπου $b = \dfrac{qB}{m}$ οπότε

$$\frac{dy}{dt} = A\sin(bt + \phi) \to y = B - \frac{A}{b}\cos(bt + \phi)$$

οι αρχικές συνθήκες επιβάλουν ότι για t=0 θα πρέπει y=0 και dy/dt=0 άρα

Asin(φ)=0 οπότε φ=0 και B-A/b=0 οπότε B=A/b με αποτέλεσμα η λύση να είναι

$$y = \frac{A}{b}(1 - \cos bt)$$

αντίστοιχα για το χ θα έχουμε:

$$Eq - qB\frac{dx}{dt} = mAb\cos bt \to \frac{dx}{dt} = \frac{E}{B} - A\cos bt \to x = \frac{E}{B}t + \frac{A}{b}\sin bt + C$$

οι αρχικές συνθήκες επιβάλουν ότι για t=0 θα πρέπει χ=0 και dχ/dt=0 άρα C=0 και A=E/B

Οπότε αν καλέσουμε bt=qBt/m=φ και Em/qB^2=R Έχουμε

x=Rφ+Rsinφ, y=R(1-cosφ)

Σημ: Θέλω να εκφράσω θερμά τον Κο Γιάννη Χατσηλοΐζου από την Κύπρο που έκανε τον κόπο να διαβάσει ενδελεχώς την παραπάνω εργασία και να μου επισημάνει ορισμένα λάθη.