

ΟΙ ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ

1. Τι είναι αλήθεια οι δυναμικές γραμμές;
2. Είναι φυσικό μέγεθος;
3. Και αν δεν είναι γιατί τις χρησιμοποιούμε στην εκπαιδευτική διαδικασία;
4. Πόσες δυναμικές γραμμές ξεκινάνε από ένα φορτίο;
5. Γιατί αφήνοντας ένα φορτίο δεν κινείται κατά μήκος των δυναμικών γραμμών;

Αυτές τις ερωτήσεις και άλλες πολλές γύρω από τις δυναμικές γραμμές θα προσπαθήσουμε ν' απαντήσουμε σ' αυτό το άρθρο. Θα πρέπει να γνωρίζουμε ότι τις δυναμικές γραμμές τις εισήγαγε για πρώτη φορά ο Faraday, θέλοντας με αυτό το τρόπο να περιγράψει ένα διανυσματικό πεδίο. Η περιγραφή ενός διανυσματικού πεδίου γίνεται καθαρά μαθηματικά από μια διανυσματική συνάρτηση πχ $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z)$ η οποία μπορεί να αναλυθεί σε τρεις συναρτήσεις στις τρεις συνιστώσες του διανύσματος. Ο Faraday όμως, επιστήμονας καθαρά πειραματικός με ελάχιστες γνώσεις θεωρίας, δεν μπορούσε με τον καθαρά μαθηματικό τρόπο που περιγράψαμε προηγούμενα, να αντιληφθεί ένα ηλεκτρικό πεδίο. Γι' αυτό εισήγαγε τις δυναμικές γραμμές. Πίστευε μάλιστα την υλική υπόσταση των δυναμικών γραμμών. Θεωρούσε ότι οι δυναμικές γραμμές υπάρχουν όπως υπάρχουν και τα φορτία. Ο ορισμός των δυναμικών γραμμών (δηλαδή οι οδηγίες για τη σωστή σχεδιάσή τους) είναι ο ακόλουθος:

1. η εφαπτόμενη μιας δυναμικής γραμμής σε οποιοδήποτε σημείο της, δίνει τη διεύθυνση της έντασης στο σημείο αυτό.
2. οι δυναμικές γραμμές σχεδιάζονται έτσι που ο αριθμός τους σε κάθε μονάδα εμβαδού σε μια κάθετη διατομή, να είναι ανάλογος του μέτρου της έντασης. Έτσι εκεί που οι δυναμικές γραμμές είναι πυκνές το μέτρο της έντασης είναι μεγάλο, ενώ εκεί που είναι αραιές, το μέτρο της έντασης είναι μικρό.

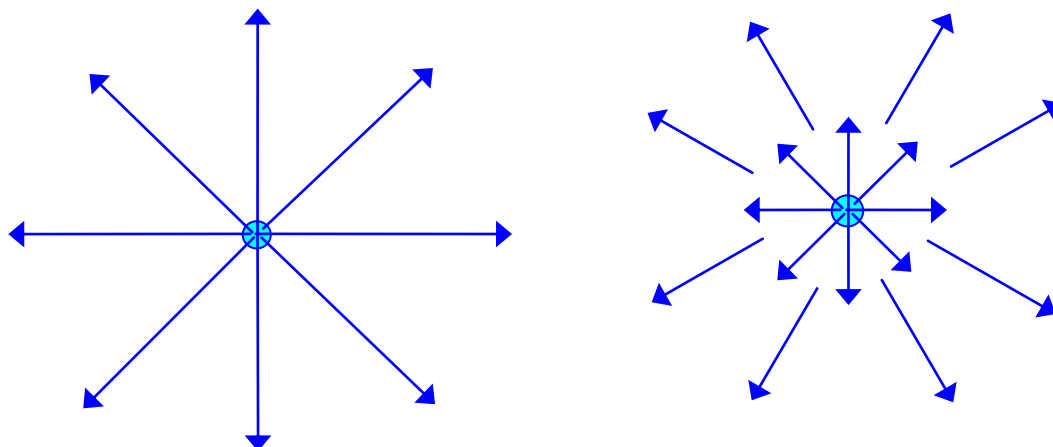
Τώρα μπορούμε να αρχίσουμε τις παρατηρήσεις. Κατ' αρχήν πρέπει να επισημάνουμε ότι οι δυναμικές γραμμές δεν αποτελούν φυσικό μέγεθος, με την έννοια ότι δεν είναι δυνατό να μετρηθούν. Ο αριθμός των δυναμικών γραμμών που σχεδιάζουμε είναι αυθαίρετος. Βέβαια όσο περισσότερες δυναμικές γραμμές σχεδιάζουμε τόσο περισσότερο προσεγγίζουμε το πεδίο, με την έννοια ότι τόσο με μεγαλύτερη λεπτομέρεια μπορούμε να γνωρίζουμε τα χαρακτηριστικά του διανύσματος της έντασης στα διάφορα σημεία του χώρου. Υπάρχει όμως ένα φυσικό μέγεθος, η ηλεκτρική ροή, η οποία ορίζεται ως :

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (1)$$

Η φυσική σημασία αυτού του μεγέθους σύμφωνα με τη δεύτερη συνθήκη του ορισμού των δυναμικών γραμμών, θα είναι ανάλογη του πλήθους των δυναμικών γραμμών που περνάνε από μια επιφάνεια. Έτσι αφού η ηλεκτρική ροή αποτελεί ένα φυσικό μέγεθος (αφού μπορεί να μετρηθεί σε κάθε περιοχή του χώρου) γιατί ισχυριζόμαστε ότι οι δυναμικές γραμμές δεν αποτελούν φυσικό μέγεθος;. Η απάντηση στο ερώτημα βρίσκεται στον ισχυρισμό ότι η ηλεκτρική ροή είναι ανάλογη του πλήθους των δυναμικών γραμμών που περνάνε από μια επιφάνεια. Ο ισχυρισμός αυτός είναι λανθασμένος, αφού έτσι το μέγεθος της ηλεκτρικής ροής θα έπρεπε να είναι κβαντισμένο μέγεθος αφού το πλήθος των δυναμικών γραμμών είναι πάντα ακέραιος αριθμός. Η σταθερά αναλογίας, είναι δική μας επιλογή και όσο μεγαλύτερη είναι με τόσο μεγαλύτερη ακρίβεια περιγράφουμε το πεδίο.

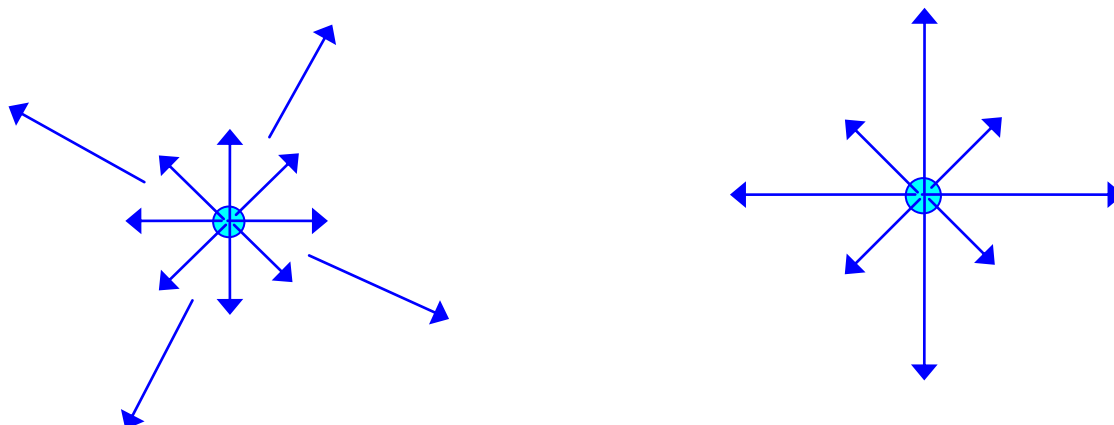
Άρα οι δυναμικές γραμμές δεν αποτελούν φυσικό μέγεθος γιατί η ηλεκτρική ροή δεν είναι κβαντισμένο μέγεθος. Απλά αποτελούν μια προσεγγιστική γραφική αναπαράσταση του πεδίου. Όσο μεγαλύτερη η σταθερά αναλογίας που επιλέγουμε, τόσο καλύτερη και η αναπαράσταση του πεδίου.

Από την άλλη θα αποδείξουμε ότι σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε, δεν μπορεί να είναι καν συνεχείς γραμμές. Συνεχείς γραμμές μπορεί να είναι μόνο στο πεδίο Coulomb που η ένταση είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης. Πράγματι έστω ένα σημειακό φορτίο q . Τότε οι δυναμικές γραμμές του πεδίου που δημιουργεί το φορτίο, μπορούν να σχεδιαστούν όπως και παρακάτω, χωρίς αυτός ο σχεδιασμός να αντιβαίνει στον ορισμό των δυναμικών γραμμών που δώσαμε αρχικά.



Ένας τέτοιος σχεδιασμός των δυναμικών γραμμών μπορεί να μην είναι συνηθισμένος, αλλά δεν είναι λάθος. Συνήθως σχεδιάζουμε τις δυναμικές γραμμές συνεχείς, χωρίς να διερωτόμαστε, αν έχουμε το δικαίωμα πάντα για έναν τέτοιο σχεδιασμό.

Για να προσπαθήσουμε να σχεδιάσουμε τις δυναμικές γραμμές από ένα πεδίο με σφαιρική συμμετρία, του οποίου όμως η ένταση δεν είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης, αλλά απλά, αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης. Σ' αυτή την περίπτωση θα διαπιστώσουμε έκπληκτοι, ότι δεν μπορεί οι δυναμικές γραμμές να είναι συνεχείς. Πράγματι αν διπλασιάσουμε την ακτίνα μιας νοητής σφαίρας, τότε η ένταση θα γίνει η μισή. Έστω λοιπόν ότι οι δυναμικές γραμμές είναι συνεχείς. Από την άλλη, επειδή θα τετραπλασιαστεί το εμβαδόν της επιφάνειας της σφαίρας, η πυκνότητα των δυναμικών γραμμών θα γίνει 4 φορές μικρότερη, αφού θα περνάει ο ίδιος αριθμός δυναμικών γραμμών από τετραπλάσια επιφάνεια, άρα άτοπο. Σ' αυτή τη περίπτωση οι δυναμικές γραμμές δεν μπορεί να είναι συνεχείς. Με άλλα λόγια δεν μπορεί ένα τέτοιο πεδίο να αναπαρασταθεί με συνεχείς γραμμές. Σε αυτή την περίπτωση η ασυνέχεια των δυναμικών γραμμών είναι επιβεβλημένη είτε αν τις σχεδιάσουμε όπως στο σχήμα (α) είτε όπως στο σχήμα (β)



Παρόλο τον «μπακαλίστικο» όπως αποδείξαμε ρόλο των δυναμικών γραμμών, η εκπαιδευτική τους αξία είναι πολύ μεγάλη και γι' αυτό επιμένουμε να τις χρησιμοποιούμε ακόμη εδώ και 200 περίπου χρόνια. Την τεράστια εκπαιδευτική τους αξία θα την αποδείξουμε παρακάτω:.

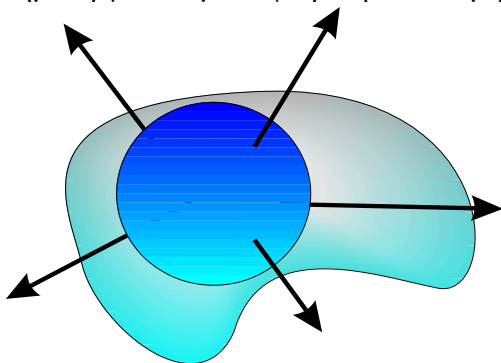
Έστω ότι θέλουμε να βρούμε τη ηλεκτρική ροή που διέρχεται από μια σφαιρική επιφάνεια στο κέντρο της οποίας βρίσκεται ένα σημειακό φορτίο q . Λόγω συμμετρίας, σε όλα τα σημεία της επιφάνειας η ένταση είναι η ίδια και ίση με:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$$

Χωρίζοντας την επιφάνεια της σφαίρας σε στοιχειώδεις (πολύ μικρές) επιφάνειες, στη κάθε τέτοια επιφάνεια η ένταση είναι κάθετη. Έτσι εφαρμόζοντας τον ορισμό της ηλεκτρικής ροής, έχουμε:.

$$\Phi_e = \sum E \Delta S \cos\varphi = \sum E \Delta S = \sum \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \Delta S = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \sum \Delta S = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Ο υπολογισμός της ροής εδώ έγινε σχετικά εύκολα. Αν όμως μας ζητούσαν να υπολογίσουμε τη ροή που περνάει από μια τυχαία κλειστή επιφάνεια που περιβάλλει το φορτίο q , τότε τα πράγματα αυτομάτως γίνονται πολύ πιο δύσκολα. Τότε χωρίζοντας την επιφάνεια σε στοιχειώδεις επιφάνειες, η ένταση δεν είναι πλέον η ίδια σε κάθε μια από αυτές, ούτε και κάθετη στην κάθε στοιχειώδη επιφάνεια. Τα πράγματα γίνονται τόσο δύσκολα που φαίνεται σχεδόν αδύνατο να μπορούμε να υπολογίσουμε την ηλεκτρική ροή από αυτή την επιφάνεια. Αν όμως σκεφτούμε ότι η ροή είναι ανάλογη του αριθμού των δυναμικών γραμμών και δούμε ότι αφού υπάρχει μόνο ένα ηλεκτρικό φορτίο, όλες οι δυναμικές γραμμές θα πηγάζουν ή θα καταλήγουν σ' αυτό. Έτσι όσες δυναμικές γραμμές περνάνε από την σφαιρική επιφάνεια, τόσες θα περνάνε και από οποιαδήποτε επιφάνεια που περιβάλλει το σημειακό φορτίο. Ακόμη μπορούμε με τη βοήθεια των δυναμικών γραμμών να αντιληφθούμε αρκετά εύκολα, ότι όση ένταση δημιουργεί ένα σημειακό φορτίο σε απόσταση r από αυτό, τόση ακριβώς θα δημιουργεί και μια σφαιρική κατανομή φορτίων.



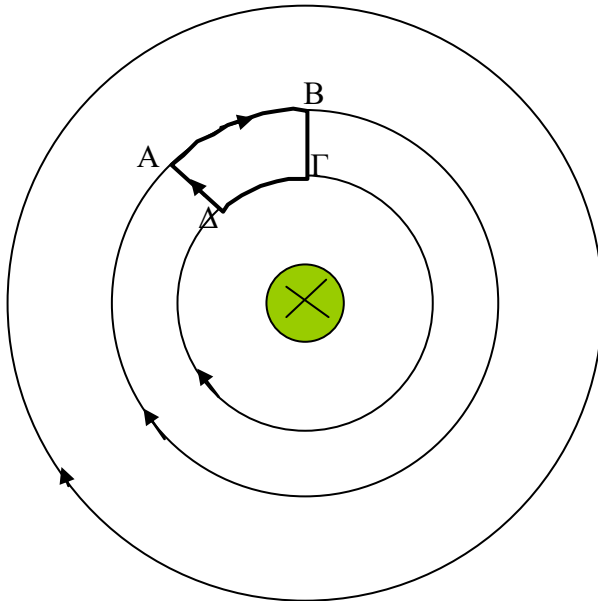
Αυτή η διαπίστωση είναι πολύ δύσκολο να αποδειχθεί αυστηρά μαθηματικά και το αντίστοιχο πρόβλημα για το βαρυτικό πεδίο, παίδεψε ακόμα και τον μεγάλο Νεύτωνα, όταν ήθελε να αποδείξει ότι η Γη έλκει τη Σελήνη με τόση ακριβώς δύναμη όσο θα την έλκυε μια σημειακή μάζα τοποθετημένη στο κέντρο της Γης με την ίδια μάζα που έχει η Γη.

ΜΕΡΙΚΕΣ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΑ ΚΑΙ ΜΗ ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ.

Ας αρχίσουμε με τον ορισμό ενός συντηρητικού πεδίου.

*Συντηρητικό ονομάζεται ένα πεδίο δυνάμεων όταν οι δυνάμεις που εμφανίζονται σ' αυτό είναι συντηρητικές. Συντηρητική ονομάζεται μια δύναμη όταν το έργο της για **οποιαδήποτε** κλειστή διαδρομή είναι μηδέν.*

Πολλά βιβλία δεν αναφέρουν το για οποιαδήποτε κλειστή διαδρομή. Αυτό είναι λάθος, αφού μπορούμε να βρούμε μια κλειστή διαδρομή για την οποία το έργο μιας δύναμης να είναι μηδέν, χωρίς αυτό όμως να σημαίνει ότι η δύναμη είναι συντηρητική, αφού μπορεί να υπάρχει κάποια άλλη κλειστή διαδρομή για την οποία το έργο είναι διάφορο του μηδενός. Ας αναφέρουμε ένα παράδειγμα. Έστω ένα μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο το οποίο περιορίζεται σε ένα κυλινδρικό χώρο. Γύρω από αυτό το πεδίο ως γνωστό, θα δημιουργηθεί



ηλεκτρικό πεδίο του οποίου οι δυναμικές γραμμές λόγω συμμετρίας, είναι ομόκεντροι κύκλοι γύρω από το μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο όπως στο σχήμα. Εάν θελήσουμε να βρούμε το έργο γύρω από τη κλειστή διαδρομή ABΓΔ τότε θα διαπιστώσουμε ότι αυτό είναι μηδέν. Πράγματι:

$$W_{ολ} = W_{AB} + W_{B\Gamma} + W_{\Gamma\Delta} + W_{\Delta A} = W_{AB} + W_{\Gamma\Delta} = F_1 \cdot \widehat{AB} - F_2 \cdot \widehat{\Gamma\Delta} = q(E_1 \cdot R_1 \cdot \varphi - E_2 \cdot R_2 \cdot \varphi)$$

εφαρμόζοντας το τύπο που δίνει την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στη προκειμένη περίπτωση:

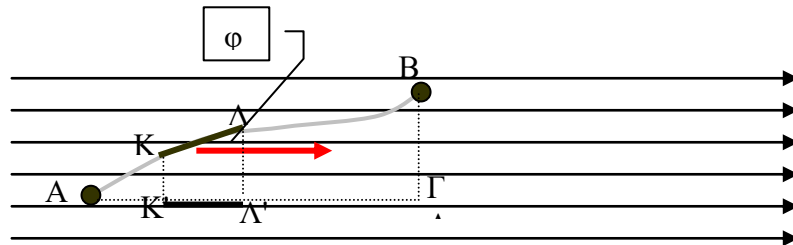
$$E = -\frac{1}{2\pi R} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

Συμπεραίνουμε ότι το συγκεκριμένο έργο είναι ίσο με μηδέν. Βέβαια από αυτό δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το πεδίο είναι συντηρητικό αφού επιλέγοντας μια άλλη κλειστή διαδρομή, όπως τη διαδρομή ενός κύκλου, δηλαδή μιας δυναμικής γραμμής, πολύ εύκολα αποδεικνύουμε ότι το έργο για αυτή τη διαδρομή είναι διάφορο του μηδενός.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1^Η:

Οποιοδήποτε ομογενές πεδίο είναι και συντηρητικό:

Οι δυναμικές γραμμές του ομογενούς πεδίου είναι ως γνωστό παράλληλες και ισαπέχουσες. Αν πάρουμε μια κλειστή γραμμή οποιοδήποτε σχήματος, εύκολα αποδεικνύεται ότι το έργο



είναι μηδέν. Ας αρχίσουμε με μια

ανοικτή γραμμή, έστω την AB. Για να βρούμε το έργο κατά μήκος αυτής της γραμμής τη χωρίζουμε σε στοιχειώδη τμήματα. Έστω ένα στοιχειώδες τμήμα από αυτά το ΚΛ. Το στοιχειώδες έργο σε αυτό το τμήμα θα είναι

$$\Delta W = F(K\Lambda) \cos \phi = F(K'\Lambda')$$

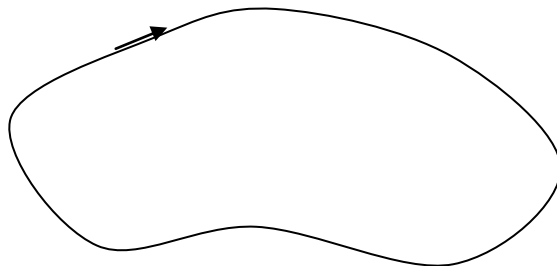
Έτσι το συνολικό έργο για τη διαδρομή AB θα είναι:

$$W_{ολ} = \sum F(K'\Lambda') = F \sum (K'\Lambda') = F(A\Gamma) = \text{Δύναμη επί τη προβολή της τροχιάς κατά μήκος των δυναμικών γραμμών.}$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι αν η τροχιά ήταν κλειστή, το έργο θα ήταν μηδέν (για οποιαδήποτε σχήμα της τροχιάς) και επομένως το ομογενές είναι συντηρητικό.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2^Η:

Οποιοδήποτε πεδίο με κλειστές δυναμικές γραμμές είναι μη συντηρητικό:

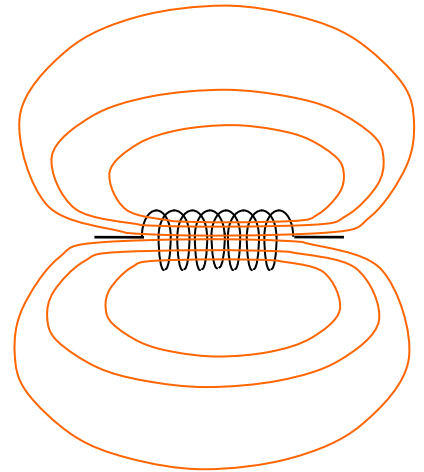


Πράγματι αν πάρουμε το έργο κατά μήκος μιας δυναμικής γραμμής, επειδή η δύναμη είναι εφαπτόμενη της γραμμής σε κάθε σημείο της, χωρίζοντας πάλι τη γραμμή σε στοιχειώδη τμήματα, για το κάθε τμήμα, το έργο θα είναι για όλη τη γραμμή είτε θετικό αν η δύναμη είναι ίδιας φοράς με τη μετατόπιση είτε αρνητικό αν συμβαίνει το αντίθετο. Έτσι και το συνολικό έργο θα προκύπτει στο τέλος είτε θετικό είτε αρνητικό. Σε καμία περίπτωση δεν θα βγαίνει μηδέν, άρα το πεδίο δεν θα είναι συντηρητικό.

Από αυτή τη πρόταση μπορούμε να συμπεράνουμε, ότι επειδή οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου είναι κλειστές (και αυτό συμβαίνει γιατί δεν υπάρχουν μαγνητικά μονόπολα ώστε ν' αποτελούν την αρχή ή το τέλος των δυναμικών γραμμών) γι' αυτό το μαγνητικό πεδίο γενικά είναι μη συντηρητικό. Μπορεί βέβαια κατά τόπους να είναι ομογενές, άρα και συντηρητικό, αλλά σε όλο το χώρο είναι πάντα μη συντηρητικό. Εδώ θα αναφέρουμε ένα ωραίο παράδειγμα για το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται από ένα σωληνοειδές.

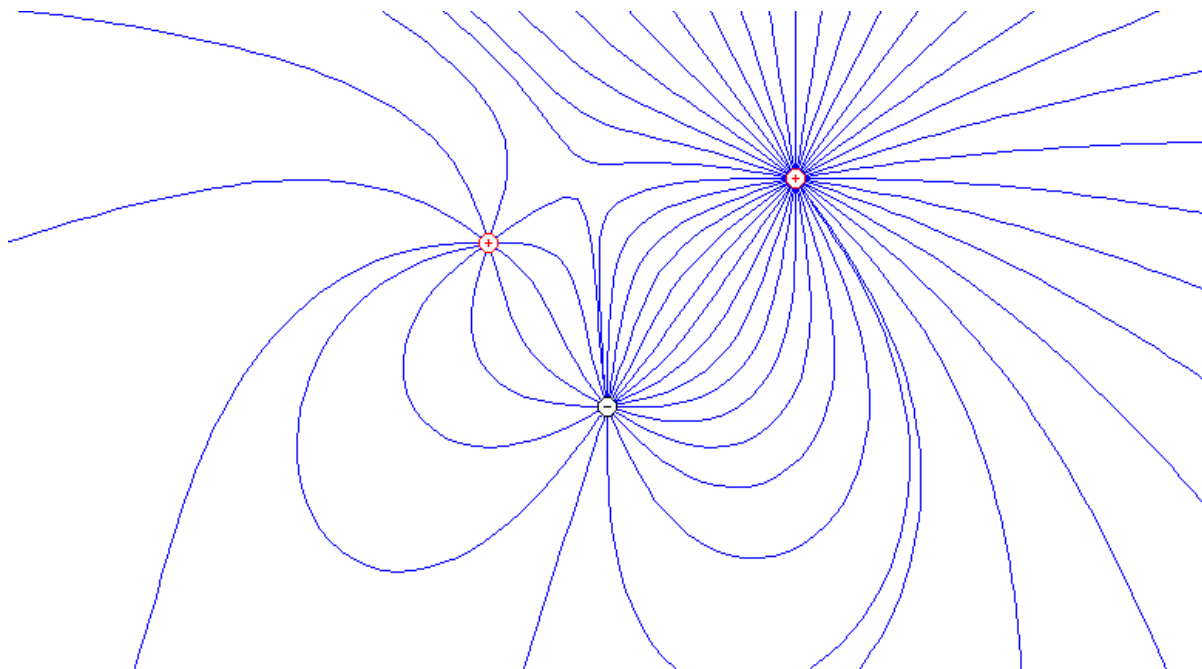
Στη περίπτωση αυτή το μαγνητικό πεδίο μέσα στο σωληνοειδές είναι ομογενές άρα και συντηρητικό. Έξω από το πηνίο το μαγνητικό πεδίο είναι ακριβώς το ίδιο με το ηλεκτρικό πεδίο ενός ηλεκτρικού διπόλου. Έτσι είναι και έξω συντηρητικό. Συνολικά όμως σε όλο το χώρο το μαγνητικό πεδίο δεν είναι συντηρητικό, αφού οι δυναμικές γραμμές είναι κλειστές.

Και στα μαθηματικά μια συνάρτηση μπορεί να είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $-\infty, 0$ γνησίως φθίνουσα στο $0, \infty$ και να μην είναι μονότονη στο διάστημα $-\infty, \infty$. Π.χ η συνάρτηση $y=1/x$



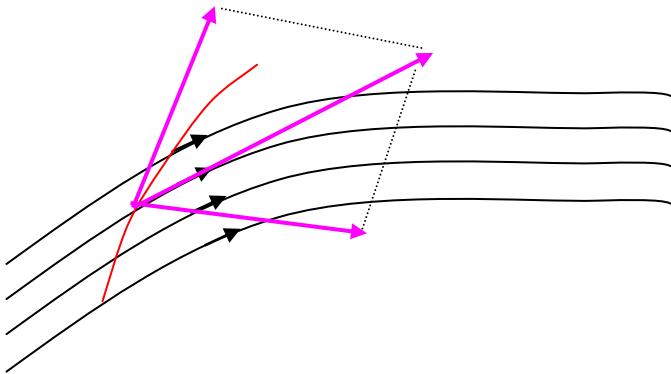
ΜΕΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ

Δυναμικές γραμμές που δημιουργούνται από τρία φορτία $q, 5q, -2q$



Γιατί αφήνοντας ένα φορτίο σ' ένα ηλεκτρικό πεδίο δεν ακολουθεί τη καμπύλη της δυναμικής γραμμής;

Η εξήγηση μπορεί να δοθεί με τη μέθοδο της απόπου επαγωγής. Δηλαδή ας υποθέσουμε ότι αφήνοντας ένα φορτίο πάνω σε μια δυναμική γραμμή, η τροχιά του ταυτίζεται με τη δυναμική γραμμή. Τότε προφανώς μετά από λίγο το φορτίο επιταχυνόμενο από την επιτρόχια δύναμη που ασκείται πάνω του, θα αποκτήσει κάποια ταχύτητα. Η συνολική δύναμη που ασκείται στο φορτίο είναι η δύναμη του πεδίου, η οποία είναι εφαπτόμενη της τροχιάς αφού η τροχιά ταυτίζεται με τη δυναμική γραμμή. Άρα αυτή η δύναμη θα παίζει το ρόλο της επιτρόχιας. Έτσι δεν θα υπάρχει η απαιτούμενη κεντρομόλα δύναμη ώστε το φορτίο να αλλάξει τη διεύθυνση της ταχύτητάς του. Εύκολα συμπεραίνουμε ότι το φορτίο ακολουθεί τη δυναμική γραμμή, μόνο στη περίπτωση που αυτή είναι ευθεία.



Αλήθεια τι μπορούμε να κάνουμε ώστε το φορτίο να ακολουθήσει τη δυναμική γραμμή;. Η απάντηση είναι να επιβάλουμε μια μεγάλη τριβή ανάλογη της ταχύτητας ή κάποιας δύναμης της ταχύτητας. Τότε όταν το φορτίο αποκτούσε κάποια πολύ μικρή ταχύτητα, η συνιστώσα του πεδίου πάνω στην τροχιά θα εξουδερενόταν από την τριβή και η επιτρόχια δύναμη θα μηδενιζόταν, κρατώντας έτσι τη ταχύτητα του σώματος πολύ μικρή. Τότε όμως η κεντρομόλα δύναμη θα ήταν και αυτή πολύ μικρή και έτσι η δύναμη του πεδίου θα ήταν εφαπτόμενη της τροχιάς. Το φορτίο σε αυτή τη περίπτωση θα ακολουθούσε σχεδόν τη δυναμική γραμμή.