ΦΥΣΙΚΗ Β' Λυκείου

Μάθημα Προσανατολισμού

ΚΑΜΠΥΛΟΓΡΑΜΜΕΣ

Κινήσεις

ΟΜΑΛΗ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

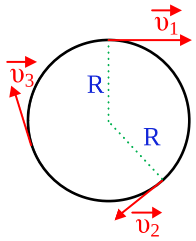
Η κίνηση του αυτοκινήτου γύρω από μια κυκλική πλατεία, της μπίλιας στη ρουλέτα που περιστρέφεται, των σημείων της επιφάνειας ενός μουσικού δίσκου που παίζει στο πικ-απ, είναι παραδείγματα κυκλικών κινήσεων.

Ένα σώμα γενικά πραγματοποιεί κυκλική κίνηση, όταν η τροχιά που διαγράφει είναι περιφέρεια κύκλου.

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε την απλούστερη από τις κυκλικές κινήσεις, την ομαλή κυκλική κίνηση.

Ομαλή κυκλική κίνηση ονομάζεται η κίνηση που πραγματοποιεί ένα σώμα σε περιφέρεια κύκλου με σταθερό μέτρο ταχύτητας.

Παρατηρήσεις



☞ Η ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ ονομάζεται γραμμική ταχύτητα και η κατεύθυνση της μεταβάλλεται, καθώς το σώμα κινείται κατά μήκος της κυκλικής τροχιάς.

Σε κάθε σημείο έχουμε ταχύτητες διαφορετικής διεύθυνσης και ίσου μέτρου.

$|\vec{\upsilon}_1|=|\vec{\upsilon}_2|=|\vec{\upsilon}_3|$

☞ Το διάνυσμα της γραμμικής ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ σε κάθε σημείο της τροχιάς του σώματος εφάπτεται στην τροχιά και είναι κάθετο στην ακτίνα r της κυκλικής κίνησης.

Περιοδική είναι κάθε κίνηση η οποία επαναλαμβάνεται με τον ίδιο τρόπο σε ίσα χρονικά διαστήματα.

Όπως κάθε περιοδική κίνηση έτσι και η ομαλή κυκλική κίνηση χαρακτηρίζεται από την περίοδο T και τη συχνότητα *f*.

Περίοδος T: είναι ο χρόνος που απαιτείται ώστε το σώμα να πραγματοποιήσει μια πλήρη περιστροφή.

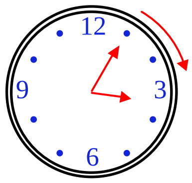
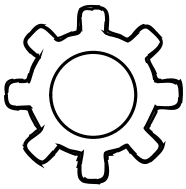
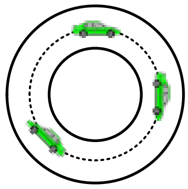
- Μονάδα της περιόδου στο S.I. είναι το 1s.

Συχνότητα *f*: είναι ο αριθμός των περιστροφών N που πραγματοποιεί το σώμα στη μονάδα του χρόνου t:

$$f = \frac{N}{t}$$

- Μονάδα συχνότητας στο S.I είναι η μία περιστροφή ανά δευτερόλεπτο (1 περιστροφή/s) που ονομάζεται 1 Hz (Hertz). Πολλαπλάσιες μονάδες συχνότητας είναι το 1 KHz = 10^3 Hz, 1 MHz = 10^6 Hz, 1 GHz = 10^9 Hz.

Παραδείγματα ομαλής κυκλικής κίνησης

		
κίνηση ωροδείκτη και λεπτοδείκτη	κυκλική κίνηση γραναζιού	αυτοκίνητο σε κυκλική πλατεία

Σχέση περιόδου - συχνότητας

Ένα σώμα που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, σε χρόνο μιας περιόδου πραγματοποιεί μια πλήρη περιστροφή:

$$f = \frac{N}{t} \xRightarrow[t=T]{N=1} \boldsymbol{f = \frac{1}{T}}$$

Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι η συχνότητα είναι το αντίστροφο φυσικό μέγεθος της περιόδου.

Γραμμική ταχύτητα

Στην ομαλή κυκλική κίνηση το σώμα περιστρέφεται με σταθερή κατά μέτρο ταχύτητα, της οποίας η κατεύθυνση συνεχώς μεταβάλλεται. Η ταχύτητα αυτή είναι η γραμμική ταχύτητα υ.

Γραμμική ονομάζεται η ταχύτητα που εκφράζει το ρυθμό με τον οποίο το σώμα διανύει διαστήματα (τόξα) κατά μήκος της κυκλικής τροχιάς και το μέτρο της ισούται με το πηλίκο του διαστήματος S που διανύει το σώμα σε χρόνο t, προς το χρόνο t: $\boldsymbol{\upsilon = \frac{S}{t}}$

Χαρακτηριστικά της γραμμικής ταχύτητας.

Η γραμμική ταχύτητα ενός σώματος που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση έχει:

α. σταθερό μέτρο,

β. διεύθυνση, τη διεύθυνση της εφαπτομένης ευθείας στο σημείο της τροχιάς που βρίσκεται το σώμα,

γ. φορά, που καθορίζεται από τη φορά περιστροφής του σώματος κατά μήκος της κυκλικής τροχιάς.

Επειδή το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας είναι σταθερό και δίνεται από τη σχέση $\upsilon = \frac{S}{t}$ είναι προφανές ότι το σώμα σε ίσους χρόνους διανύει ίσα διαστήματα (τόξα) κατά μήκος της κυκλικής τροχιάς.

Σε κάθε θέση του σώματος το διάνυσμα της γραμμικής ταχύτητας είναι κάθετο στην ακτίνα που συνδέει το σώμα με το κέντρο της τροχιάς του. Η ακτίνα αυτή ονομάζεται **επιβατική ακτίνα.**

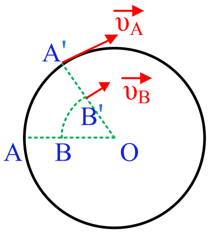
Σχέση γραμμικής ταχύτητας-περιόδου

Σε χρόνο μιας περιόδου T το σώμα που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση πραγματοποιεί μια πλήρη περιστροφή, δηλαδή διάστημα (τόξο) μήκους μια περιφέρειας 2πR. Από τη σχέση του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας:

$$\upsilon = \frac{S}{t} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon = \frac{2\pi R}{T}}$$

Γωνιακή ταχύτητα

Σε έναν κυκλικό δίσκο που περιστρέφεται, όλα τα σημεία του δεν έχουν την ίδια γραμμική ταχύτητα. Τα σημεία A, B βρίσκονται κάθε χρονική στιγμή στην ίδια επιβατική ακτίνα. Καθώς ο δίσκος περιστρέφεται, η επιβατική ακτίνα διαγράφει γωνία θ και τα σημεία A, B διανύουν τα τόξα AA' και BB' αντίστοιχα. Επειδή το τόξο AA' έχει μεγαλύτερο μήκος από το τόξο BB', συμπεραίνουμε ότι το σημείο A έχει μεγαλύτερη γραμμική ταχύτητα από το σημείο B: $\boldsymbol{\upsilon_A > \upsilon_B}$



Για την καλύτερη περιγραφή της περιστροφής του κυκλικού δίσκου ορίζουμε ένα νέο φυσικό μέγεθος που ονομάζεται γωνιακή ταχύτητα ω.

Γωνιακή ταχύτητα ονομάζεται η ταχύτητα που εκφράζει το ρυθμό με τον οποίο η επιβατική ακτίνα διαγράφει γωνίες (στρίβει) και το μέτρο της ισούται με το πηλίκο της γωνίας θ που διαγράφει η επιβατική ακτίνα σε χρόνο t, προς το χρόνο t: $\boldsymbol{\omega = \frac{\theta}{t}}$ **ή** $\boldsymbol{\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}}$

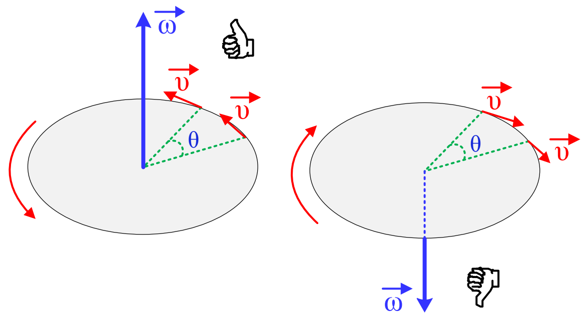
Χαρακτηριστικά της γωνιακής ταχύτητας

Η γωνιακή ταχύτητα ενός σώματος που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση έχει:

α. σταθερό μέτρο

β. διεύθυνση, τη διεύθυνση της ευθείας που είναι κάθετη στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς και διέρχεται από το κέντρο της.

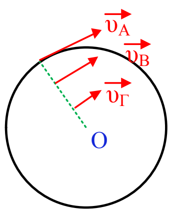
γ. φορά, που καθορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού: τα τέσσερα δάκτυλα πλην του αντίχειρα «ακολουθούν» τη φορά περιστροφής του σώματος κατά μήκος της τροχιάς και ο τεντωμένος αντίχειρας δείχνει τη φορά του διανύσματος $\vec{\omega}$.



Επειδή το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας είναι σταθερό και δίνεται από τη σχέση $\omega = \frac{\theta}{t}$, είναι προφανές ότι η επιβατική ακτίνα σε ίσους χρόνους διαγράφει ίσες γωνίες.

Όλα τα σημεία ενός περιστρεφόμενου κυκλικού δίσκου έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα, όχι όμως και την ίδια γραμμική:

Όσο πιο μακριά από το κέντρο ενός περιστρεφόμενου κυκλικού δίσκου βρίσκεται ένα σημείο του, τόσο μεγαλύτερη είναι η γραμμική του ταχύτητα.



Μονάδα γωνιακής ταχύτητας: μονάδα γωνιακής ταχύτητας στο **S.I.** είναι το **1 rad/s**.

Το 1 rad είναι η μονάδα γωνίας στο S.I. Άλλη μονάδα γωνίας είναι η μοίρα $(1°)$.
π rad = 180° , 1 rad ≈ 57,3°
Το rad είναι αδιάστατο μέγεθος (δηλαδή σε γινόμενο με άλλες μονάδες δε λαμβάνεται υπόψιν).

Σχέση γωνιακής ταχύτητας – περιόδου

Σε χρόνο μιας περιόδου Τ η επιβατική ακτίνα του σώματος που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση διαγράφει γωνία 360°, δηλαδή 2π rad. Από τη σχέση του μέτρου της γωνιακής ταχύτητας:

$$\omega = \frac{\theta}{t} \xRightarrow[T]{\theta=2\pi} \boldsymbol{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

Σχέση γραμμικής-γωνιακής ταχύτητας

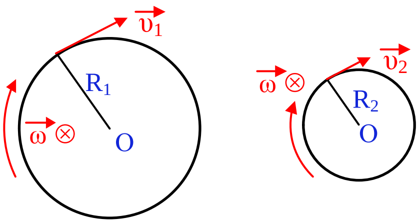
$$\upsilon = \frac{2\pi R}{T} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon = \omega \cdot R}$$

Η σχέση αυτή συνδέει το μέτρο της γραμμικής και το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ενός σώματος που εκτελεί κυκλική κίνηση.

Συμπέρασμα από τη σχέση υ = ωR

☞ Στην ομαλή κυκλική κίνηση η γωνιακή ταχύτητα είναι σταθερή, με αποτέλεσμα το σταθερό μέτρο της γραμμικής ταχύτητας υ να είναι τόσο μεγαλύτερο, όσο μεγαλύτερη είναι η ακτίνα R της κυκλικής τροχιάς.

$$\left.\begin{array}{l}\upsilon_1 = \omega R_1 \\ \upsilon_2 = \omega R_2\end{array}\right\} \xRightarrow{R_1>R_2} \upsilon_2 > \upsilon_1$$



Χρήσιμες σχέσεις στην ομαλή κυκλική κίνηση

1. Σχέση γραμμικής ταχύτητας – συχνότητας $\upsilon = \frac{2\pi R}{T} \overset{f=\frac{1}{T}}{\Rightarrow} \boldsymbol{\upsilon = 2\pi R f}$.

2. Σχέση γωνιακής ταχύτητας – συχνότητας $\omega = \frac{2\pi}{T} \overset{f=\frac{1}{T}}{\Rightarrow} \boldsymbol{\omega = 2\pi \cdot f}$.

Κεντρομόλος επιτάχυνση

Σύμφωνα με τον ορισμό της επιτάχυνσης ένα σώμα επιταχύνεται όταν αλλάζει το μέτρο ή η κατεύθυνση της ταχύτητας του. **Στην ομαλή κυκλική κίνηση η γραμμική ταχύτητα του σώματος έχει σταθερό μέτρο αλλά η κατεύθυνση της συνεχώς μεταβάλλεται.** Το σώμα επομένως επιταχύνεται και η επιτάχυνση του ονομάζεται **κεντρομόλος επιτάχυνση α_κ**

Κεντρομόλος επιτάχυνση είναι η επιτάχυνση ενός σώματος που εκτελεί κυκλική κίνηση και το μέτρο της ορίζεται από το πηλίκο του τετραγώνου της γραμμικής ταχύτητας υ του σώματος, προς την ακτίνα R της κυκλικής τροχιάς του: $\boldsymbol{\alpha_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R}}$ **ή** $\alpha_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow \alpha_\kappa = \frac{(\omega \cdot R)^2}{R} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha_\kappa = \omega^2 R}$

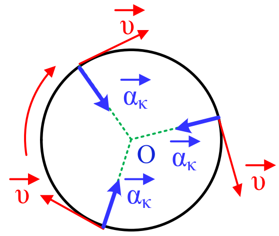
Χαρακτηριστικά της κεντρομόλου επιτάχυνσης

Η κεντρομόλος επιτάχυνση ενός σώματος που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση έχει:

α. σταθερό μέτρο,

β. διεύθυνση, τη διεύθυνση της επιβατικής ακτίνας στο σημείο της τροχιάς που βρίσκεται στο σώμα,

γ. φορά προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς.



Σε κάθε κυκλική κίνηση η κεντρομόλος επιτάχυνση $\vec{\alpha}_\kappa$ είναι κάθετη στη γραμμική ταχύτητα $\vec{\upsilon}$. Έτσι, αν μας πληροφορήσουν ότι η επιτάχυνση $\vec{\alpha}_\kappa$ ενός σώματος είναι συνεχώς κάθετη στην ταχύτητα του $\vec{\upsilon}$ συμπεραίνουμε ότι το σώμα εκτελεί κυκλική κίνηση.
Γενικότερα, όταν η επιτάχυνση και η ταχύτητα ενός σώματος δεν έχουν την ίδια διεύθυνση, η κίνηση του είναι καμπυλόγραμμη.

Κεντρομόλος δύναμη

Μελετώντας το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στην ευθύγραμμη κίνηση, είδαμε ότι η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σ' ένα σώμα και η επιτάχυνση που αυτό αποκτά έχουν σχέση αιτίου-αποτελέσματος, δηλαδή:

Δύναμη Επιτάχυνση
(Αίτιο) (Αποτέλεσμα)

Στην περίπτωση των κυκλικών κινήσεων, το αίτιο της κεντρομόλου επιτάχυνσης $\vec{\alpha}_\kappa$ είναι η κεντρομόλος δύναμη $\vec{F}_\kappa$.

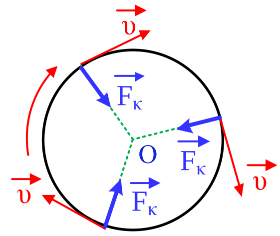
Κεντρομόλος δύναμη ονομάζεται η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα που εκτελεί κυκλική κίνηση και είναι η δύναμη που προκαλεί την κεντρομόλο επιτάχυνση, σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα: $F_\kappa = m\cdot\alpha_\kappa$

Συμπεράσματα

Η κεντρομόλος δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση έχει:

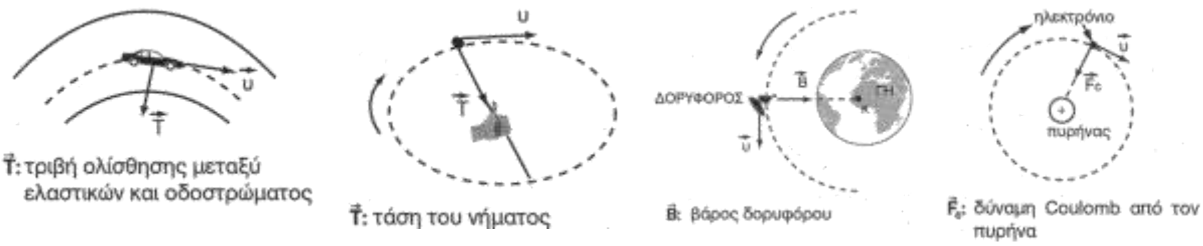
α. σταθερό μέτρο που δίνεται από τη σχέση: $F_\kappa = m\cdot\alpha_\kappa \Rightarrow F_\kappa = m\cdot\frac{\upsilon^2}{R}$

β. κατεύθυνση, την κατεύθυνση της κεντρομόλου επιτάχυνσης



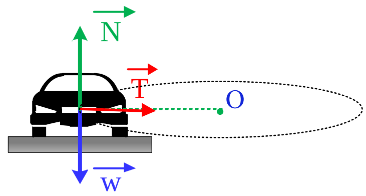
Σε κάθε κυκλική κίνηση η κεντρομόλος δύναμη $\vec{F}_\kappa$ είναι κάθετη στη γραμμική ταχύτητα $\vec{\upsilon}$.

Μερικά παραδείγματα κυκλικών κινήσεων στα οποία κάποια συγκεκριμένη δύναμη παίζει το ρόλο της κεντρομόλου, φαίνονται στις παρακάτω εικόνες:



Περιπτώσεις κεντρομόλου δύναμης

1. Κίνηση αυτοκινήτου σε οριζόντια κυκλική στροφή ακτίνας R:



Στο αυτοκίνητο ασκείται το βάρος του $\vec{w}$, η δύναμη στήριξης $\vec{N}$ από το οδόστρωμα και η στατική τριβή $\vec{T}$. Επειδή το αυτοκίνητο ισορροπεί στην κατακόρυφη διεύθυνση,

$\Sigma\vec{F}_y = 0 \Rightarrow \vec{N} = \vec{w} \Rightarrow \vec{N} = m\vec{g}$,

Στην οριζόντια διεύθυνση έχουμε: $\Sigma\vec{F}_x = \vec{T}$.

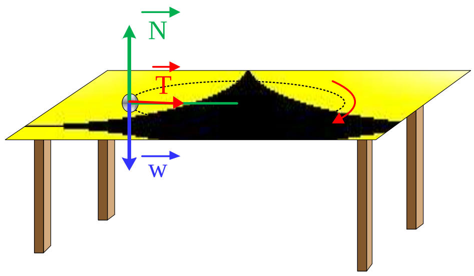
Αλλά επειδή το αυτοκίνητο εκτελεί κυκλική κίνηση ισχύει:

$$\Sigma\vec{F}_x = \vec{F}_\kappa \Rightarrow T = \frac{m\cdot\upsilon^2}{R} \Rightarrow \mu N = \frac{m\cdot\upsilon^2}{R} \Rightarrow \mu m g = \frac{m\cdot\upsilon^2}{R} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon = \sqrt{\mu g R}}$$

Η τελευταία σχέση δίνει τη μέγιστη γραμμική ταχύτητα με την οποία μπορεί να κινείται το αυτοκίνητο πάνω στη στροφή, ώστε να μην εκτρέπεται από την πορεία του.

Από τη σχέση $\upsilon = \sqrt{\mu g R}$ είναι φανερό ότι το αυτοκίνητο μπορεί να τρέξει τόσο περισσότερο πάνω στη στροφή, **όσο μεγαλύτερος είναι ο συντελεστής στατικής τριβής μ** μεταξύ ελαστικών και οδοστρώματος και **όσο μεγαλύτερη είναι η ακτίνα της στροφής R** (ανοικτή στροφή).

2. Ομαλή κυκλική κίνηση σφαίρας προσδεδεμένης στο άκρο νήματος που περιστρέφεται σε λείο οριζόντιο τραπέζι



Στη σφαίρα ασκείται το βάρος της $\vec{w}$, η δύναμη στήριξης $\vec{N}$ από το τραπέζι και η τάση του νήματος T.
Επειδή η σφαίρα ισορροπεί στην κατακόρυφη διεύθυνση,
$\Sigma\vec{F}_y = 0 \Rightarrow \vec{N} = \vec{w} \Rightarrow \vec{N} = m\vec{g}$, αλλά στην οριζόντια διεύθυνση

$$\Sigma\vec{F}_x = \vec{T} \Rightarrow \frac{m\upsilon^2}{\ell} = T \Rightarrow \boldsymbol{T = \frac{m\upsilon^2}{\ell}}.$$

Συμπεράσματα

α. Η τελευταία σχέση αποτελεί την ικανή και αναγκαία συνθήκη, ώστε η σφαίρα να εκτελεί κυκλική κίνηση.

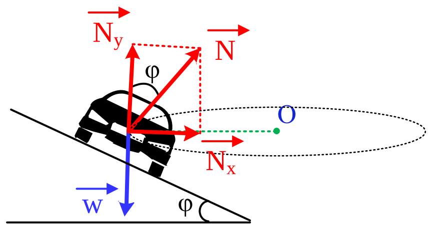
β. Η τάση του νήματος που παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης έχει τόσο μεγαλύτερο μέτρο, όσο μεγαλύτερη είναι η γραμμική ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ της σφαίρας και όσο μικρότερο είναι το μήκος ℓ του νήματος.

γ. Η σφαίρα συνεχίζει να εκτελεί κυκλική κίνηση, όσο το νήμα «αντέχει» στη δύναμη $\vec{T}'$ (αντίδραση της $\vec{T}$) που ασκεί η σφαίρα στο νήμα.

δ. Αν η δύναμη αυτή υπερβεί την τάση θραύσης $\vec{T}_{θρ}$ του νήματος, τότε το νήμα κόβεται και **η σφαίρα κινείται ευθύγραμμα και εφαπτομενικά της κυκλικής τροχιάς**, στο σημείο που κόπηκε το νήμα.

ε. Η μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή γραμμικής ταχύτητας $υ_{max}$, ώστε να μην κόβεται το νήμα, ικανοποιεί τη σχέση: $T \le T_{θρ} \Rightarrow \frac{mυ^2}{\ell} \le T_{θρ} \Rightarrow \boldsymbol{υ \le \sqrt{\frac{T_{θρ}\cdot \ell}{m}}}$ άρα λοιπόν $\boldsymbol{υ_{max} = \sqrt{\frac{T_{θρ}\cdot \ell}{m}}}$

3. Κίνηση αυτοκινήτου σε λεία κεκλιμένη κυκλική στροφή ακτίνας R:



Στο αυτοκίνητο ασκείται το βάρος του $\vec{w}$ και η δύναμη στήριξης $\vec{N}$ από το οδόστρωμα: Αναλύουμε τη δύναμη στήριξης $\vec{N}$ σε δύο συνιστώσες $\vec{N}_x$ και $\vec{N}_y$ στην οριζόντια και στην κατακόρυφη διεύθυνση αντίστοιχα με μέτρα:

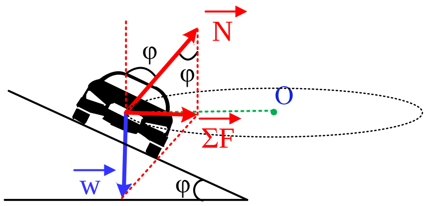
$N_x = Nημφ$ $\quad N_y = Nσυνφ$

Επειδή το αυτοκίνητο ισορροπεί στην κατακόρυφη διεύθυνση,

$$Σ\vec{F}_y = 0 \Rightarrow N_y = w \Rightarrow Nσυνφ = mg \Rightarrow N = \frac{mg}{συνφ}.$$

Η οριζόντια συνιστώσα έχει την κατεύθυνση της ακτίνας άρα:

$$Σ\vec{F}_x = \vec{F}_κ \Rightarrow N_x = F_κ \Rightarrow Nημφ = \frac{mυ^2}{R} \Rightarrow \frac{mg}{συνφ}ημφ = \frac{mυ^2}{R} \Rightarrow \boldsymbol{υ = \sqrt{g\cdot R\cdot εφφ}}$$



Στην ίδια σχέση μπορούμε να καταλήξουμε αν προσθέσουμε πρώτα, διανυσματικά τις δυνάμεις και μετά εφαρμόσουμε την συνθήκη της κεντρομόλου δύναμης

Σύμφωνα με το σχήμα

$$εφφ = \frac{ΣF}{w} \Rightarrow ΣF = εφφ\cdot w \Rightarrow \frac{mυ^2}{R} = εφφ\cdot mg \Rightarrow \boldsymbol{υ = \sqrt{g\cdot R\cdot εφφ}}$$

☞ Η τελευταία σχέση δίνει τη μέγιστη γραμμική ταχύτητα με την οποία μπορεί να κινείται το αυτοκίνητο πάνω στη στροφή, ώστε να μην εκτρέπεται από την πορεία του.

☞ Από τη σχέση $υ = \sqrt{g\cdot R\cdot εφφ}$ είναι φανερό ότι το αυτοκίνητο μπορεί να τρέξει τόσο περισσότερο πάνω στη στροφή, όσο μεγαλύτερη είναι η γωνία κλίσης φ του επικλινούς δρόμου ($φ_1 > φ_2 \Rightarrow εφφ_1 > εφφ_2$) και όσο μεγαλύτερη είναι η ακτίνα της στροφής R.

☞ Στην περίπτωση που υπάρχει τριβή μεταξύ των ελαστικών του αυτοκινήτου και του οδοστρώματος, αποδεικνύεται ότι η μέγιστη γραμμική ταχύτητα με την οποία μπορεί να κινείται το αυτοκίνητο πάνω στη στροφή ώστε να μην εκτρέπεται από την πορεία του, δίνεται από τη σχέση:

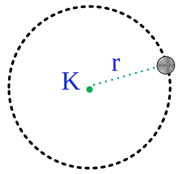
$$υ = \sqrt{g\cdot R\cdot εφφ\left(\frac{1+μ\cdot σφφ}{1-μ\cdot εφφ}\right)}$$

όπου μ ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ ελαστικών και οδοστρώματος.

Λυμένα παραδείγματα

Με ένα κινητό εφαρμογή των τύπων κυκλικής κίνησης

Παράδειγμα 1. Η σφαίρα του διπλανού σχήματος εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας r = 0,2 m και διαγράφει 10 κύκλους κάθε 2 s κινούμενη αριστερόστροφα.



α. Να υπολογίσετε τη συχνότητα f και την περίοδο T της κυκλικής κίνησης.

β. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας το διπλανό σχήμα και να σχεδιάσετε το διάνυσμα της γραμμικής ταχύτητας στο σημείο όπου βρίσκεται η μικρή σφαίρα.

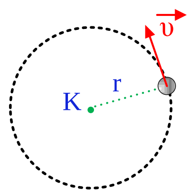
γ. Να υπολογίσετε το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας που σχεδιάσατε.

Λύση

α. Γνωρίζουμε τον αριθμό των περιφορών που εκτελεί η σφαίρα (N = 10) και τη χρονική διάρκεια που χρειάστηκε για τις περιφορές αυτές (Δt = 2 s). Η συχνότητα στην ομαλή κυκλική κίνηση υπολογίζεται από τον τύπο: $f = \frac{N}{\Delta t} \Rightarrow f = \frac{10}{2}\,\text{Hz} \Rightarrow \mathbf{f = 5\,Hz}$

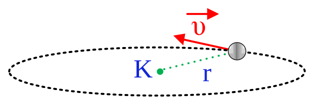
Αφού γνωρίζουμε τη συχνότητα f, μπορούμε να βρούμε την περίοδο T χρησιμοποιώντας τον τύπο που συνδέει τα δύο αυτά μεγέθη. Είναι: $f = \frac{1}{T} \Rightarrow T = \frac{1}{f} \Rightarrow T = \frac{1}{5}\,\text{s} \Rightarrow \mathbf{T = 0,2\,s}$

β. Το διάνυσμα της γραμμικής ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ είναι εφαπτόμενο στην κυκλική τροχιά στο σημείο όπου βρίσκεται κάθε φορά η σφαίρα που εκτελεί την κυκλική κίνηση. Αφού η σφαίρα κινείται αριστερόστροφα, δηλαδή αντίθετα από τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού, το διάνυσμα της γραμμικής ταχύτητας της σφαίρας θα είναι όπως στο σχήμα.



γ. Για τον υπολογισμό του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο: $\upsilon = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow \upsilon = \frac{2\pi \cdot 0,2}{0,2}\frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon = 2\pi\frac{m}{s}}$ ή την σχέση $\upsilon = 2\pi r f \Rightarrow \upsilon = 2\pi \cdot 0,2 \cdot 5\frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon = 2\pi\frac{m}{s}}$.

Παράδειγμα 2. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται μια σφαίρα που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας r = 1,2 m και η επιβατική της ακτίνα διαγράφει γωνία 60° σε χρονική διάρκεια 2s.



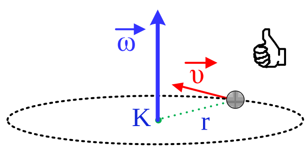
α. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας το σχήμα και να σχεδιάσετε το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας της σφαίρας.

β. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας καθώς και το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας της σφαίρας.

γ. Αν τη χρονική στιγμή t = 0 η σφαίρα διέρχεται από σημείο Α της τροχιάς της, να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή t_2 που η σφαίρα διέρχεται για πέμπτη φορά μετά την t = 0 από σημείο Β της τροχιάς της το οποίο είναι αντιδιαμετρικό του σημείου Α.

Λύση

α. Το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας της σφαίρας έχει σημείο εφαρμογής το κέντρο της κυκλικής τροχιάς και είναι κάθετο στο επίπεδό της. Η φορά της βρίσκεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού (ο αντίχειρας δείχνει τη φορά της γωνιακής ταχύτητας). Με βάση τα παραπάνω, το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}$ είναι όπως στο σχήμα.



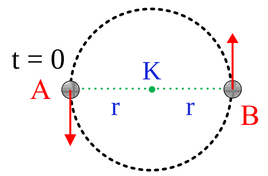
β. Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας υπολογίζεται από τη σχέση: $\omega = \frac{\theta}{\Delta t}$ όπου θ η επίκεντρη γωνία που διαγράφει η επιβατική ακτίνα σε χρονική διάρκεια Δt.
Η γωνία θ στον παραπάνω τύπο αντικαθίσταται σε μονάδες rad (ακτίνια).

Γνωρίζουμε ότι π rad = 180^o οπότε $60° = \frac{\pi}{3}\,\text{rad}$.

Συνεπώς: $\omega = \frac{\theta}{\Delta t} \Rightarrow \omega = \frac{\frac{\pi}{3}}{2}\frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = \frac{\pi}{6}\frac{rad}{s}}$

Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο: υ = ωr ⇒ **υ = 0,2π m/s**

γ. Για να μεταβεί η σφαίρα από το σημείο Α στο σημείο Β για πρώτη φορά, πρέπει να διανύσει μισό κύκλο. Αυτό σημαίνει ότι θα χρειαστεί χρόνο μισής περιόδου. Συνεπώς για πρώτη φορά περνά από το σημείο Β τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{T}{2}$. Για να ξαναπεράσει από το σημείο Β, θα χρειαστεί να διαγράψει, ξεκινώντας από το σημείο αυτό, έναν πλήρη κύκλο. Άρα θα περάσει για πέμπτη φορά μετά την t = 0 από το σημείο Β τη χρονική στιγμή: $t_2 = t_1 + 4T \Rightarrow t_2 = \frac{T}{2} + 4T \Rightarrow t_2 = \frac{9T}{2}$



Ισχύει: $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}}\text{s} \Rightarrow \mathbf{T = 12s}$ Συνεπώς: $t_2 = \frac{9T}{2} \Rightarrow t_2 = \frac{9 \cdot 12}{2} \Rightarrow \mathbf{t_2 = 54s}$

Παράδειγμα 3. Ένα σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με γραμμική ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ και διαγράφει το μήκος s = 0,2π m του μισού κύκλου της τροχιάς του σε χρονική διάρκεια Δt = 0,2 s. Να υπολογίσετε:
α. την απόσταση μεταξύ δύο αντιδιαμετρικών σημείων της τροχιάς του σώματος,
β. την περίοδο και τη συχνότητα της ομαλής κυκλικής κίνησης,
γ. το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας και το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του σώματος.

Λύση

α. Το μήκος τόξου s είναι το μήκος του μισού κύκλου. Άρα το μήκος ολόκληρου του κύκλου θα είναι:
s' = 2s ⇒ **s' = 0,4π m**.

Το μήκος του κύκλου δίνεται από τη σχέση $s' = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{s'}{2\pi} \Rightarrow r = \frac{0,4\pi}{2\pi}\text{m} \Rightarrow \mathbf{r = 0,2m}$.

Η απόσταση μεταξύ δύο αντιδιαμετρικών σημείων της τροχιάς του σώματος ισούται με τη διάμετρο του κύκλου. Άρα: d = 2r ⇒ **d = 0,4 m**

β. Σε χρονική διάρκεια Δt = 0,25 s το σώμα διέγραψε μισό κύκλο. Συνεπώς χρειάστηκε χρόνο ίσο με τη μισή περίοδο $\left(\frac{T}{2}\right)$. Δηλαδή ισχύει: $\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow T = 2 \cdot \Delta t \Rightarrow \mathbf{T = 0,4\ s}$

Διαφορετικά θα μπορούσαμε να βρούμε το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας:
$\upsilon = \frac{s}{\Delta t} \Rightarrow \upsilon = \frac{0,2\pi}{0,2}\frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon = \pi\frac{m}{s}}$

Αλλά ισχύει: $\upsilon = \dfrac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \dfrac{2\pi r}{\upsilon} \Rightarrow T = \dfrac{2\pi \cdot 0,2}{\pi} s \Rightarrow \mathbf{T = 0,4\,s}$

Αφού γνωρίζουμε την περίοδο, μπορούμε να υπολογίσουμε τη συχνότητα από τη σχέση:

$f = \dfrac{1}{T} \Rightarrow f = \dfrac{1}{0,4} Hz \Rightarrow \mathbf{f = 2,5\,Hz}$

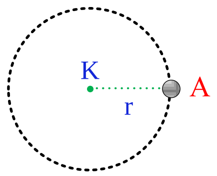
γ. Η γραμμική ταχύτητα έχει υπολογιστεί σε παραπάνω ερώτημα και είναι ίση με: $\upsilon = \pi$ m/s.

Για το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας έχουμε: $\upsilon = \omega r \Rightarrow \omega = \dfrac{\upsilon}{r} \Rightarrow \omega = \dfrac{\pi}{0,2}\dfrac{rad}{s} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 5\pi \dfrac{rad}{s}}$

Βέβαια για την απάντηση του ερωτήματος θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις $\omega = 2\pi f$ ή $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Κεντρομόλος δύναμη – κεντρομόλος επιτάχυνση.

Παράδειγμα 4. Μικρό σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας r και τη χρονική στιγμή t = 0 διέρχεται από σημείο A του κύκλου, ενώ τη χρονική στιγμή t_1 = 2,5 s διέρχεται από σημείο B του κύκλου που απέχει από το σημείο A απόσταση $d = 5\sqrt{2} m$. Η επιβατική ακτίνα του σώματος στη χρονική διάρκεια $\Delta t = t_1 - 0$ έχει διαγράψει γωνία 90°.



α. Να υπολογίσετε την ακτίνα r της κυκλικής τροχιάς.

β. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας το σχήμα της εκφώνησης και στη συνέχεια να σχεδιάσετε το διάνυσμα της κεντρομόλου επιτάχυνσης του σώματος όταν διέρχεται από τα σημεία A και B.

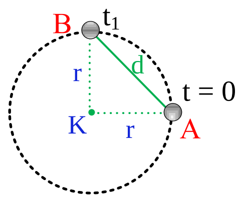
γ. Να βρείτε το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης.

δ. Το μέτρο της μεταβολής της ταχύτητας στην χρονική διάρκεια Δt

Δίνεται για τις πράξεις $\pi^2 = 10$.

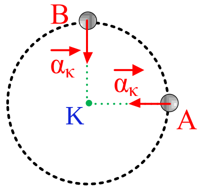
Λύση

α. Στη χρονική διάρκεια Δt η επιβατική ακτίνα του μικρού σώματος έχει διαγράψει γωνία 90° δηλαδή έχει διαγράψει ένα τεταρτοκύκλιο. Άρα τη χρονική στιγμή t_1 βρίσκεται στο σημείο B που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Ισχύει από το Πυθαγόρειο θεώρημα:



$r^2 + r^2 = d^2 \Rightarrow 2r^2 = d^2 \Rightarrow r^2 = \dfrac{d}{2} \Rightarrow r^2 = \dfrac{(5\sqrt{2})^2}{2} m^2 \Rightarrow \mathbf{r = 5\,m}$

β. Η κεντρομόλος επιτάχυνση έχει πάντοτε τη διεύθυνση της επιβατικής ακτίνας και φορά προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς. Το διάνυσμά της όταν το σώμα διέρχεται από τα σημεία A και B φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

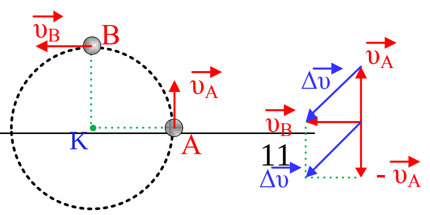


γ. Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης υπολογίζεται από τον τύπο: $\alpha_\kappa = \dfrac{\upsilon^2}{r}$ όπου υ το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σώματος.

Έχουμε: $\upsilon = \dfrac{s}{t_1} = \dfrac{r\theta}{t_1} \Rightarrow \upsilon = \dfrac{5 \cdot \frac{\pi}{2}}{2,5}\dfrac{m}{s} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon = \pi \dfrac{m}{s}}$ άρα $\alpha_\kappa = \dfrac{\upsilon^2}{r} \Rightarrow \alpha_\kappa = \dfrac{\pi^2}{5}\dfrac{m}{s^2} \Rightarrow$

$\boldsymbol{\alpha_\kappa = 2\dfrac{m}{s^2}}$

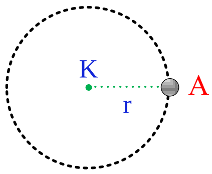
δ. Το διάνυσμα της ταχύτητας στα σημεία A και B φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Η μεταβολή θα βρεθεί από την διανυσματική αφαίρεση.

$$\Delta\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_B - \vec{\upsilon}_A \Rightarrow \Delta\upsilon = \sqrt{\upsilon_B^2 + \upsilon_A^2} = \sqrt{\upsilon^2 + \upsilon^2} \Rightarrow \Delta\upsilon = \sqrt{2}\upsilon \Rightarrow \mathbf{\Delta\upsilon = \pi\sqrt{2}\,\frac{m}{s}}$$

Παράδειγμα 5. Το σώμα μάζας m = 0,1 kg του διπλανού σχήματος εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω = 10 rad/s. Δύο σημεία Α και Β της κυκλικής τροχιάς απέχουν μεταξύ τους απόσταση d = 1 m και η κεντρομόλος δύναμη που δέχεται το σώμα όταν διέρχεται από το σημείο Α είναι αντίθετη της κεντρομόλου δύναμης που δέχεται όταν διέρχεται από το σημείο Β.



α. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας το διπλανό σχήμα και να σχεδιάσετε την κεντρομόλο δύναμη που δέχεται το σώμα όταν διέρχεται από τα σημεία Α και Β.

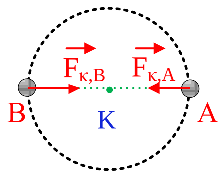
β. Να υπολογίσετε το μέτρο της κεντρομόλου δύναμης που δέχεται το σώμα.

γ. Αν το σώμα κατά τη διάρκεια της ομαλής κυκλικής του κίνησης δέχεται συνολικά δύο σταθερού μέτρου δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, από τις οποίες η $\vec{F}_1$ έχει μέτρο 12 N, βρίσκεται στη διεύθυνση της ακτίνας και έχει φορά προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς, να βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση της δύναμης $\vec{F}_2$.

Δίνεται για τις πράξεις $\pi^2 = 10$.

Λύση

α. Αφού η κεντρομόλος δύναμη $\vec{F}_{\kappa,A}$ που δέχεται το σώμα όταν διέρχεται από το σημείο Α είναι αντίθετη της κεντρομόλου δύναμης $\vec{F}_{\kappa,B}$ που δέχεται όταν διέρχεται από το σημείο Β, οι δύο αυτές δυνάμεις βρίσκονται στην ίδια διεύθυνση και έχουν αντίθετη φορά. Για να συμβαίνει αυτό, πρέπει τα δύο σημεία να είναι αντιδιαμετρικά. Τα ζητούμενα διανύσματα φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



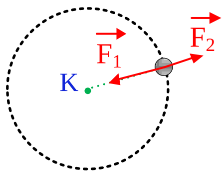
β. Για το μέτρο της κεντρομόλου δύναμης έχουμε: $F_\kappa = \dfrac{m\upsilon^2}{r}$ (1)

Τα σημεία Α και Β είναι αντιδιαμετρικά. Συνεπώς απέχουν μεταξύ τους d = 2r. Άρα: d = 2r = 1 m$\Rightarrow$ r = 0,5 m.

Για το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας έχουμε: $\upsilon = \omega r \Rightarrow \upsilon = 10 \cdot 0{,}5$ m/s $\Rightarrow$ **υ = 5 m/s**

Αντικαθιστώντας τις τιμές των μεγεθών στη σχέση (1) προκύπτει: $F_\kappa = \dfrac{0{,}1 \cdot 5^2}{0{,}5}\,\mathrm{N} \Rightarrow \mathbf{F_\kappa = 5\,N}$

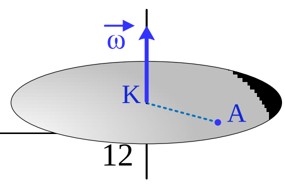
γ. Αφού το σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, η συνισταμένη των ακτινικών δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ ισούται με την κεντρομόλο δύναμη. Άρα: $\Sigma F = F_\kappa = 5$ N



Η δύναμη $\vec{F}_1$ έχει φορά προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς και παρατηρούμε ότι για το μέτρο της $\vec{F}_1$ ισχύει: $F_1 > F_\kappa$. Για να έχουμε κεντρομόλο δύναμη ίση με 5 N θα πρέπει η δύναμη $\vec{F}_2$ να έχει τη διεύθυνση της ακτίνας και φορά αντίθετη από αυτή της $\vec{F}_1$.

Συνεπώς είναι: $\Sigma F = F_1 - F_2 \Rightarrow F_2 = F_1 - \Sigma F \Rightarrow \mathbf{F_2 = 7\ N}$

Παράδειγμα 6. Ένας δίσκος ακτίνας R = 1,2 m περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ μέτρου 10 rad/s γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το



κέντρο του Κ και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Σημείο Α του δίσκου απέχει $d_1 = 0{,}2$ m από την περιφέρεια και σημείο Β που βρίσκεται πάνω στην ίδια διάμετρο με το Α και απέχει από αυτό απόσταση d = 1,8 m.

α. Να υπολογίσετε τη χρονική διάρκεια που απαιτείται ώστε το σημείο Β να διαγράψει ένα πλήρη κύκλο.

β. Να σχεδιάσετε το διάνυσμα της γραμμικής ταχύτητας του σημείου Α και να υπολογίσετε το μήκος του τόξου που διανύει το σημείο Α, καθώς και την αντίστοιχη επίκεντρη γωνία που διαγράφει η επιβατική του ακτίνα σε χρονική διάρκεια $\Delta t_1 = 5$ s.

γ. Να βρείτε το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης του σημείου Β.

Λύση

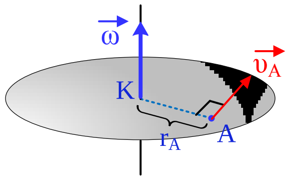
α. Όλα τα σημεία του δίσκου που κινούνται εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση με την ίδια γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$, την ίδια περίοδο Τ και την ίδια συχνότητα f. Πράγματι, και το σημείο Α αλλά και το σημείο Β ολοκληρώνουν έναν πλήρη κύκλο στην ίδια χρονική διάρκεια, ενώ η επιβατική τους ακτίνα διαγράφει την ίδια επίκεντρη γωνία στην ίδια χρονική διάρκεια. Είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 0{,}2\pi\,\text{s}$$

Άρα λοιπόν ο χρόνος για μία πλήρη περιστροφή είναι $\Delta t = T \Rightarrow \Delta t = 0{,}2\pi$ s.

Κάθε σημείο του δίσκου στον παραπάνω χρόνο θα έχει διαγράψει μία πλήρη περιστροφή άρα και το σημείο Β.

β. Επειδή το διάνυσμα $\vec{\omega}$ έχει φορά προς τα πάνω, σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού ο δίσκος περιστρέφεται αριστερόστροφα (αντίθετα από τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού). Συνεπώς η γραμμική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_A$ του σημείου Α είναι το διάνυσμα που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το σημείο Α εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας r_A. Εμείς γνωρίζουμε την απόσταση του σημείου Α από την περιφέρεια επομένως $r_A = R - d_1 \Rightarrow$ **$r_A = 1$ m**. Επομένως για το μέτρο της γραμμικής του ταχύτητας ισχύει: $\upsilon_A = \omega r_A \Rightarrow \upsilon_A = 10$ m/s



Όμως ισχύει ότι: $\upsilon_A = \dfrac{s_A}{\Delta t_1} \Rightarrow s_A = \upsilon_A \cdot \Delta t_1 \Rightarrow$ **$s_A = 50$ m**.

Για τον υπολογισμό της επίκεντρης γωνίας που διαγράφει η επιβατική ακτίνα του σημείου Α στη χρονική διάρκεια Δt_1 μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το μήκος του τόξου που βρήκαμε παραπάνω. Το μήκος του τόξου s_A και η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία θ_A συνδέονται με τη σχέση:

$$s_A = r_A\theta_A \Rightarrow \theta_A = \frac{s_A}{r_A} \Rightarrow \boldsymbol{\theta_A = 40\ \text{rad}}$$

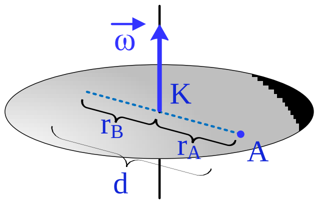
Στο ίδιο αποτέλεσμα μπορούσαμε να καταλήξουμε αν χρησιμοποιούσαμε τον τύπο του ορισμού της γωνιακής ταχύτητας $\omega = \dfrac{\theta}{\Delta t}$ Άρα για τη χρονική διάρκεια Δt_1 έχουμε: $\omega = \dfrac{\theta_A}{\Delta t_1} \Rightarrow \theta_A = \omega \cdot \Delta t_1 \Rightarrow$ **$\theta_A = 40$ rad**

Σχόλιο: Στον παραπάνω χρόνο γωνία 40 rad δεν έχει διαγράψει μόνο το σημείο Α, αλλά όλα τα σημεία του δίσκου, εκτός του κέντρου Κ που παραμένει συνεχώς ακίνητο. Δηλαδή τα μεγέθη που αφορούν την κυκλική κίνηση (γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$, γωνία θ, περίοδος Τ και συχνότητα f) είναι κοινά για όλα τα σημεία του δίσκου.

Ενώ τα μεγέθη γραμμική ταχύτητα $\vec{\upsilon}$, μήκος τόξου s, κεντρομόλος δύναμη $\vec{F}_\kappa$ και κεντρομόλος επιτάχυνση $\vec{\alpha}_\kappa$ εξαρτώνται από την απόσταση του κάθε σημείου από το κέντρο (δηλαδή την ακτίνα) και όσο μεγαλύτερη είναι η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς τόσο μεγαλύτερα είναι και τα παραπάνω μεγέθη.

γ. Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης του σημείου Β υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\alpha_{\kappa(B)} = \frac{\upsilon_B^2}{r_B} = \frac{(\omega r_B)^2}{r_B} \Rightarrow \alpha_{\kappa(B)} = \omega^2 r_B \;\; (1)$$



Το σημείο Β βρίσκεται στην διάμετρο που διέρχεται από τα σημεία Α και Κ και απέχει από το σημείο Α απόσταση d = 1,8 m > R.

Αυτό σημαίνει ότι: $r_B + r_A = d \Rightarrow r_B = 0{,}8$ m

Από τη σχέση (1) προκύπτει: $\boldsymbol{\alpha_{\kappa\,(B)} = 80\ m/s^2}$

Παράδειγμα 7. Ένα αυτοκίνητο κινείται σε οριζόντιο δρόμο με σταθερή ταχύτητα μέτρου υ_α = 54 km/h, με αποτέλεσμα η κάθε ρόδα του, που έχει ακτίνα R = 0,4 m, να εκτελεί ομαλή περιστροφική κίνηση γύρω από άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο της και είναι κάθετος σε αυτή.

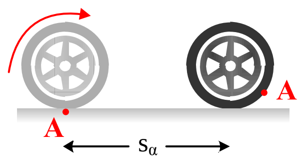
α. Να υπολογίσετε το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας της ομαλής κυκλικής κίνησης που εκτελούν τα σημεία της περιφέρειας κάθε ρόδας γύρω από το κέντρο της.

β. Να βρείτε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας κάθε ρόδας.

γ. Να υπολογίσετε τον αριθμό των περιστροφών που θα έχει εκτελέσει κάθε ρόδα όταν το αυτοκίνητο θα έχει διανύσει στον οριζόντιο δρόμο διάστημα s_1 = 60 m.

Λύση

α. Το αυτοκίνητο κινείται στον οριζόντιο δρόμο με σταθερή ταχύτητα μέτρου: υ_α = 54 km/h = 15 m/s.



Σε οποιαδήποτε χρονική διάρκεια Δt το μήκος που διανύει το αυτοκίνητο s_α στον οριζόντιο δρόμο ισούται με το μήκος του τόξου $s_{\pi\varepsilon\rho}$ που διαγράφει στον ίδιο χρόνο κάθε σημείο της περιφέρειας οποιουδήποτε από τους τέσσερις τροχούς του αυτοκίνητου. Άρα:

$s_{\pi\varepsilon\rho} = s_\alpha \Rightarrow \upsilon_{\pi\varepsilon\rho}\cdot\Delta t = \upsilon_\alpha\cdot\Delta t \Rightarrow \upsilon_{\pi\varepsilon\rho} = \upsilon_\alpha \Rightarrow \upsilon_{\pi\varepsilon\rho} = 15$ m/s

β. Για τα σημεία της περιφέρειας κάθε τροχού ισχύει: $\upsilon_{\pi\varepsilon\rho} = \omega R \Rightarrow \omega = \dfrac{\upsilon_{\pi\varepsilon\rho}}{R} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 37{,}5\dfrac{rad}{s}}$

γ. Το αυτοκίνητο έχει κινηθεί στον οριζόντιο δρόμο για χρονική διάρκεια Δt_1 και έχει διανύσει διάστημα s_1. Ισχύει: $\upsilon_\alpha = \dfrac{s_1}{\Delta t_1} \Rightarrow \Delta t_1 = \dfrac{s_1}{\upsilon_\alpha} \Rightarrow \boldsymbol{\Delta t_1 = 4\,s}$

Στη χρονική αυτή διάρκεια κάθε τροχός έχει στραφεί κατά γωνία θ_1. Είναι: $\theta_1 = \omega\cdot\Delta t_1 \Rightarrow \theta_1 = 150$ rad.

Αφού σε κάθε πλήρη περιστροφή της η ρόδα στρέφεται κατά γωνία 2π rad, ο αριθμός των περιστροφών που έχει εκτελέσει σε χρόνο Δt_1 υπολογίζεται από τον τύπο:

$$N = \frac{\theta_1}{2\pi} = \frac{150}{2\pi} \Rightarrow \boldsymbol{N = \frac{75}{\pi}}\ \textbf{\textit{περ.}}$$

Το ίδιο μπορεί να απαντηθεί και ως εξής: Κάθε σημείο της περιφέρειας του τροχού διανύει το ίδιο μήκος τόξου με το μήκος s_1 που διανύει το αυτοκίνητο στον οριζόντιο δρόμο για την ίδια χρονική διάρκεια. Άρα: $s_{\pi\varepsilon\rho} = s_1 \Rightarrow s_{\pi\varepsilon\rho} = 60$ m

Όμως το μήκος του τόξου για ένα σημείο της περιφέρειας που αντιστοιχεί σε μία περιστροφή του τροχού ισούται με 2πR. Συνεπώς: $N = \frac{s_{περ}}{2\pi R} = \frac{60}{2\pi \cdot 0,4} \Rightarrow N = \frac{75}{\pi}$ περ.

Παράδειγμα 8. Ένα αυτοκίνητο εισέρχεται σε μια κυκλική στροφή ακτίνας R = 180 m που είναι καλυμμένη με πάγο. Η μέγιστη επιτρεπόμενη ταχύτητα είναι για να πάρουμε την στροφή με ασφάλεια είναι 54 km/h. Ο δρόμος αυτός έχει τέτοια κλίση, ώστε ακόμη και να πιάσει πάγο το οδόστρωμα (μ = 0) το αυτοκίνητο να μπορεί να περάσει τη στροφή κινούμενο συνεχώς με τη μέγιστη επιτρεπόμενη ταχύτητα. Να υπολογίσετε:

α. τον χρόνο που απαιτείται ώστε το αυτοκίνητο κινούμενο με την μέγιστη επιτρεπόμενη ταχύτητα να εξέλθει από την στροφή, αν για την έξοδο από την κυκλική στροφή θα πρέπει να διαγράψει τόξο γωνίας $\theta = 120^o$,

β. την κλίση της στροφής.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\ m/s^2$.

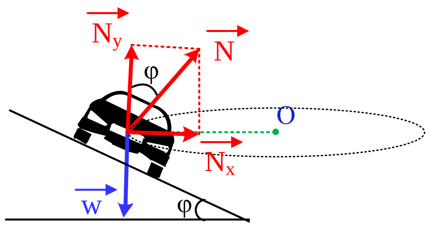
Λύση

α. Η μέγιστη ταχύτητα υ_{max} με την οποία μπορεί να κινείται το αυτοκίνητο καθώς διαγράφει τη στροφή ισούται με: $\upsilon_{max} = 54\ km/h = 15\ m/s$.

Η γωνία σε rad είναι: $\theta = 120° = 120° \frac{\pi}{180°} rad \Rightarrow \boldsymbol{\theta = \frac{2\pi}{3} rad}$

Το μήκος του τόξου που θα διανύσει πριν βγει από την στροφή είναι: $s_{τόξου} = R\theta = 180\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \boldsymbol{s_{τόξου} = 120\pi\ m}$.

Έχουμε: $\upsilon = \frac{s_{τόξου}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{s_{τόξου}}{\upsilon} \Rightarrow \Delta t = \frac{120\pi}{15} \Rightarrow \boldsymbol{\Delta t = 8\pi\ s}$

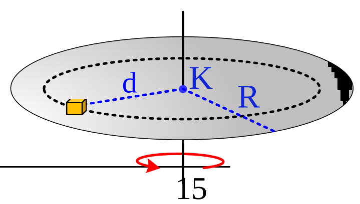


β. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις $\vec{N}$ και $\vec{w}$ που ασκούνται στο αυτοκίνητο κατά τη διάρκεια της κίνησης του στη στροφή. Αναλύουμε τη $\vec{N}$ σε άξονα xx′ που ταυτίζεται με την ακτίνα (οριζόντιος) και σε άξονα yy′ που είναι κάθετος σε αυτόν (κατακόρυφος).
Η γωνία κλίσης φ της στροφής ισούται με τη γωνία που σχηματίζουν οι δυνάμεις $\vec{N}_y$ και $\vec{N}$, διότι οι δύο αυτές γωνίες είναι οξείες με πλευρές κάθετες. Για τον κατακόρυφο άξονα έχουμε:

$$\Sigma\vec{F}_y = 0 \Rightarrow N_y = w \Rightarrow N\sigma\upsilon\nu\varphi = mg \Rightarrow \boldsymbol{N = \frac{mg}{\sigma\upsilon\nu\varphi}} \quad (1)$$

Η δύναμη $\vec{N}_x$ "λειτουργεί" ως κεντρομόλος. Συνεπώς:

$$\Sigma\vec{F}_R = \vec{F}_\kappa \Rightarrow N_x = \frac{m\upsilon^2}{R} \Rightarrow N\eta\mu\varphi = \frac{m\upsilon^2}{R} \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{mg}{\sigma\upsilon\nu\varphi}\eta\mu\varphi = \frac{m\upsilon^2}{R} \Rightarrow g \cdot \varepsilon\varphi\varphi = \frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi = \frac{\upsilon^2}{gR} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon\varphi\varphi = 0,125}$$



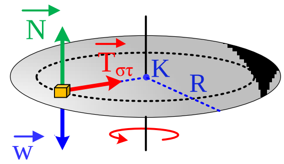
Παράδειγμα 9. Ένας οριζόντιος δίσκος ακτίνας R = 1,2 m περιστρέφεται με σταθερή συχνότητα γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του, έτσι ώστε τα σημεία της περιφέρειας του να κινούνται με γραμμική

ταχύτητα μέτρου υ = 4,8 m/s. Ένα μικρό σώμα μάζας m = 10 g βρίσκεται πάνω στο δίσκο σε απόσταση d = 0,8 m από τον άξονα περιστροφής του και δε μετακινείται εξαιτίας της στατικής τριβής που δέχεται από το δίσκο. Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ του δίσκου και του κέρματος ισούται με μ = 1,62.

α. Να βρείτε τη στατική τριβή που δέχεται το κέρμα.

β. Να υπολογίσετε τη μέγιστη συχνότητα περιστροφής του δίσκου ώστε το κέρμα να παραμένει στη θέση του. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\ m/s^2$.

Λύση



α. Τα σημεία της περιφέρειας του δίσκου εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση με γραμμική ταχύτητα μέτρου υ = 4,8 m/s. Είναι: $\upsilon = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{\upsilon}{R} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 4\frac{rad}{s}}$

Το σώμα δέχεται τις δυνάμεις $\vec{N}$, $\vec{w}$ και $\vec{T}_{στ}$. Η $\vec{T}_{στ}$ είναι η δύναμη που δρα ως κεντρομόλος και το εξαναγκάζει να εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας d = 0,8 m. Έχουμε:

$$\Sigma\vec{F}_R = \vec{F}_\kappa \Rightarrow T_{στ} = \frac{m\upsilon_1^2}{d} \Rightarrow T_{στ} = \frac{m(\omega d)^2}{d} \Rightarrow T_{στ} = m\omega^2 d \Rightarrow T_{στ} = 10\cdot10^{-3}\cdot4^2\cdot0{,}8 \Rightarrow \boldsymbol{T_{στ} = 0{,}128\,N}$$

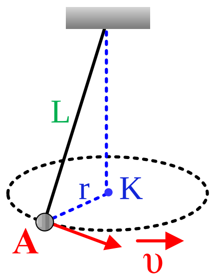
β. Για να παραμένει το σώμα στην θέση του θα πρέπει η στατική τριβή να μην ξεπερνά την μέγιστη τιμή της, άρα: $T_{στ} \le T_{στ,max} \Rightarrow m\omega^2 d \le \mu_{στ}N$ (1)

Ισχύει ότι $\Sigma\vec{F}_y = 0 \Rightarrow N = mg$. Συνεπώς:

$$(1) \Rightarrow m\omega^2 d \le \mu_{στ}mg \Rightarrow \omega^2 d \le \mu_{στ}g \Rightarrow \omega^2 \le \frac{\mu_{στ}g}{d} \Rightarrow \omega \le \sqrt{\frac{\mu_{στ}g}{d}} \Rightarrow \omega \le \sqrt{\frac{1{,}62\cdot10}{0{,}8}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega \le 4{,}5\frac{rad}{s}}$$

Άρα: $\omega_{max} = 2\pi f_{max} \Rightarrow f_{max} = \frac{\omega_{max}}{2\pi} \Rightarrow f_{max} = \frac{4{,}5}{2\pi}Hz \Rightarrow \boldsymbol{f_{max} = \frac{2{,}25}{\pi}Hz}$.

Παράδειγμα 10. Μια μικρή σφαίρα μάζας m = 200 g είναι δεμένη στο ένα άκρο αβαρούς και μη έκτατου νήματος μήκους L, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο στην οροφή. Η σφαίρα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας r = 0,8 m σε οριζόντιο επίπεδο, έτσι ώστε το νήμα να διαγράφει κωνική επιφάνεια (το σύστημα αυτό νήμα - μάζα ονομάζεται κωνικό εκκρεμές). Η σφαίρα διέρχεται από σημείο Α της τροχιάς της κάθε 0,5 s. Να υπολογίσετε:



α. το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της σφαίρας,

β. το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης της σφαίρας,

γ. το μήκος του νήματος και το μέτρο της τάσης του νήματος που δέχεται η σφαίρα.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\ m/s^2$ και για τις πράξεις $\pi^2 = 10$.

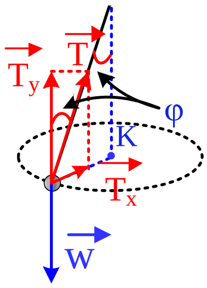
Λύση

α. Η σφαίρα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας r = 0,4 m. Αφού διέρχεται από ένα σημείο της τροχιάς της κάθε 0,5 s, η περίοδος της ομαλής κυκλικής κίνησης που εκτελεί ισούται με T = 1 s.

Για το μέτρο της γωνιακής της ταχύτητας έχουμε: $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 2\pi\frac{rad}{s}}$

β. Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης της σφαίρας υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\alpha_\kappa = \frac{\upsilon^2}{r} = \frac{(\omega r)^2}{r} \Rightarrow \alpha_\kappa = \omega^2 r \Rightarrow \alpha_\kappa = 4\pi^2\cdot0{,}8 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha_\kappa = 32\frac{m}{s^2}}$$



γ. Η σφαίρα δέχεται τις δυνάμεις: τάση του νήματος $\vec{T}$ και βάρος $\vec{w}$. Αναλύουμε την τάση του νήματος σε δύο συνιστώσες, από τις οποίες η μία έχει τη διεύθυνση της επιβατικής ακτίνας, ενώ η άλλη την κατακόρυφη διεύθυνση. Η γωνία φ που σχηματίζει το νήμα με την κατακόρυφη ισούται με τη γωνία που σχηματίζουν οι δυνάμεις $\vec{T}$ και $\vec{T}_y$. Για να υπολογίσουμε το μήκος του νήματος αρκεί να υπολογίσουμε την γωνία φ. Αφού η κίνηση γίνεται στο οριζόντιο επίπεδο, η συνισταμένη στον κατακόρυφο άξονα ισούται με μηδέν.

Έχουμε: $\Sigma\vec{F}_y = 0 \Rightarrow T_y - w = 0 \Rightarrow T\sigma\upsilon\nu\varphi = mg \quad (1)$

Στον άξονα της επιβατικής ακτίνας η συνιστώσα $\vec{T}_x$ παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Έχουμε:

$$\Sigma\vec{F}_y = \vec{F}_\kappa \Rightarrow T_x = \frac{m\upsilon^2}{r} \Rightarrow T\cdot\eta\mu\varphi = m\omega^2 r \quad (2)$$

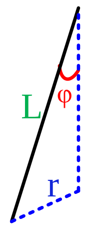
Διαιρούμε κατά μέλη την (2) προς την (1) και έχουμε:

$$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \frac{T\cdot\eta\mu\varphi}{T\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi} = \frac{m\omega^2 r}{mg} \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi = \frac{\omega^2 r}{g} \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi = \frac{1}{4}$$

Όμως ισχύει:

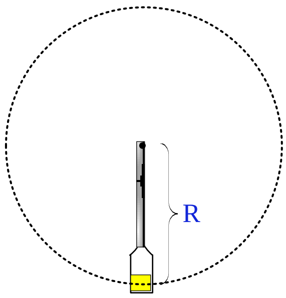
$$\eta\mu^2\varphi + \sigma\upsilon\nu^2\varphi = 1 \Rightarrow 1 + \frac{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}{\eta\mu^2\varphi} = \frac{1}{\eta\mu^2\varphi} \Rightarrow 1 + \frac{1}{\varepsilon\varphi^2\varphi} = \frac{1}{\eta\mu^2\varphi} \Rightarrow 1 + \frac{1}{16} = \frac{1}{\eta\mu^2\varphi} \Rightarrow \frac{5}{16} = \frac{1}{\eta\mu^2\varphi} \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{1}{\eta\mu\varphi} \Rightarrow \eta\mu\varphi = \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow \eta\mu = \frac{4\sqrt{5}}{5} = 0{,}8\sqrt{5}.$$



Σύμφωνα με το διπλανό σχήμα έχουμε: $\eta\mu\varphi = \frac{r}{L} \Rightarrow L = \frac{r}{\eta\mu\varphi} \Rightarrow L = \frac{0{,}8}{0{,}8\sqrt{5}}\,m \Rightarrow \mathbf{L = \frac{\sqrt{5}}{5}\,m}$

Από την σχέση (2) έχουμε: $(2) \Rightarrow T\cdot\eta\mu\varphi = m\omega^2 r \Rightarrow T = \frac{m\omega^2 r}{\eta\mu\varphi} \Rightarrow T = \frac{0{,}5\cdot 40\cdot 0{,}8}{0{,}8\sqrt{5}}\,N \Rightarrow \mathbf{T = 4\sqrt{5}\,N}$



Παράδειγμα 11. Στο διπλανό σχήμα ένας κουβάς είναι στερεωμένος σε άκαμπτη ράβδο και μέσα έχουμε τοποθετήσει σώμα με ελάχιστα μικρότερες διαστάσεις από τον κουβά. Το σύστημα μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, έτσι ώστε το σώμα να εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας R = 3 m φτάνοντας σε ελάχιστη περίοδο περιστροφής T = π s. Αν η μάζα του σώματος είναι m = 5 kg, να υπολογίσετε για την περίοδο αυτή:

α. το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος,

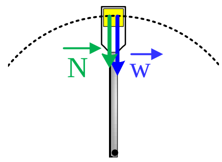
β. τη δύναμη την οποία δέχεται το σώμα από τον κουβά τις χρονικές στιγμές που διέρχεται από την ανώτερη και την κατώτερη θέση της τροχιάς του.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g = 10 m/s^2 και για τις πράξεις $\pi^2 = 10$.

Λύση

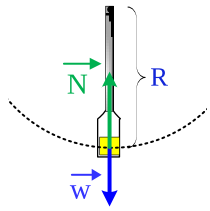
α. Όταν το σύστημα περιστρέφεται με περίοδο T το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του ισούται με: $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \mathbf{\omega = 2\,\frac{rad}{s}}$.

Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης του σώματος το οποίο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας R = 2 m υπολογίζεται από τον τύπο: $\alpha_\kappa = \dfrac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow \alpha_\kappa = \omega^2 R \Rightarrow \boldsymbol{\alpha_\kappa = 12\,\dfrac{m}{s^2}}$



β. Στην ανώτερη θέση της τροχιάς του το σώμα δέχεται το βάρος του $\vec{w}$ και τη δύναμη $\vec{N}$ από τον πάτο του κουβά. Οι δύο αυτές δυνάμεις είναι κατακόρυφες με φορά προς τα κάτω. Ισχύει για τη θέση αυτή:

$\Sigma\vec{F}_R = \vec{F}_\kappa \Rightarrow w + N = m\alpha_\kappa \Rightarrow N = m\alpha_\kappa - mg \Rightarrow \mathbf{N = 10\,N}$



Στην κατώτερη θέση της τροχιάς του το σώμα δέχεται και πάλι το βάρος του $\vec{w}$ και τη δύναμη $\vec{N}$ από τον πάτο. Οι δύο αυτές δυνάμεις είναι κατακόρυφες. Η δύναμη $\vec{N}$ έχει φορά προς τα πάνω, ενώ το βάρος $\vec{w}$ έχει φορά προς τα κάτω. Ισχύει για τη θέση αυτή:

$\Sigma\vec{F}_R = \vec{F}_\kappa \Rightarrow N - w = m\alpha_\kappa \Rightarrow N = m\alpha_\kappa + mg \Rightarrow \mathbf{N = 110\,N}$

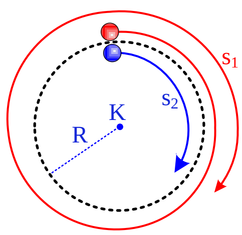
Συνάντηση δύο κινητών που εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση

Παράδειγμα 12. Δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση στην ίδια κυκλική τροχιά ακτίνας R = 1 m έχοντας ταχύτητες ίδιας φοράς και μέτρου υ_1 = 5 m/s και υ_2 = 3 m/s αντίστοιχα. Τη χρονική στιγμή t = 0 τα δύο σώματα διέρχονται από το ίδιο σημείο Α της τροχιάς τους. Να υπολογίσετε:

α. τη χρονική στιγμή t_1 που τα δύο σώματα συναντώνται για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή t = 0,

β. το μήκος του τόξου που έχει διανύσει κάθε σώμα στη χρονική διάρκεια $0 \rightarrow t_1$.

Λύση



α. Το σώμα Σ_1 κινείται με μεγαλύτερη γραμμική ταχύτητα. Συνεπώς, όταν τα δύο σώματα ξανασυναντηθούν, το σώμα Σ_1 θα έχει διαγράψει έναν κύκλο περισσότερο από το σώμα Σ_2. Αν s_1 είναι το μήκος τόξου που διαγράφει το σώμα Σ_1 μεταξύ δύο διαδοχικών συναντήσεων και s_2 είναι το αντίστοιχο μήκος τόξου που διαγράφει το σώμα Σ_2, τότε ισχύει:

$s_1 = s_2 + 2\pi R$ (2πR= το μήκος ενός κύκλου)

Όμως $s_1 = \upsilon_1 \cdot \Delta t$ και $s_2 = \upsilon_2 \cdot \Delta t$. Άρα:

$s_1 = s_2 + 2\pi R \Rightarrow \upsilon_1 \cdot \Delta t = \upsilon_2 \cdot \Delta t + 2\pi R \Rightarrow (\upsilon_1 - \upsilon_2)\Delta t = 2\pi R \Rightarrow \Delta t = \dfrac{2\pi R}{\upsilon_1 - \upsilon_2} \Rightarrow t_1 - 0 = \pi\ s \Rightarrow \mathbf{t_1 = \pi\,s}$

Στο ίδιο αποτέλεσμα μπορούμε να καταλήξουμε αν δουλεύαμε με τις γωνίες που διαγράφει κάθε σώμα αφού:

$s_1 = s_2 + 2\pi R \Rightarrow \upsilon_1 \cdot \Delta t = \upsilon_2 \cdot \Delta t + 2\pi R \Rightarrow \omega_1 R \cdot \Delta t = \omega_2 \cdot R\,\Delta t + 2\pi R \Rightarrow \omega_1 \cdot \Delta t = \omega_2 \cdot \Delta t + 2\pi$ και για την λύση αρκεί να βρούμε τις γωνιακές ταχύτητες ω_1 και ω_2 από τη σχέση $\upsilon = \omega R$.

Επίσης $s_1 = s_2 + 2\pi R \Rightarrow R\theta_1 = R\theta_2 + 2\pi R \Rightarrow \theta_1 = \theta_2 + 2\pi$

β. Για το μήκος του τόξου που διαγράφουν τα δύο σώματα μεταξύ δύο διαδοχικών συναντήσεων τους έχουμε:

$s_1 = \upsilon_1 \cdot \Delta t \Rightarrow \mathbf{s_1 = 5\pi\ m}$ και $s_2 = \upsilon_2 \cdot \Delta t \Rightarrow \mathbf{s_2 = 3\pi\ m}$

Παρατήρηση: Σε κάθε διαδοχική συνάντηση το σώμα που έχει μεγαλύτερη ταχύτητα διαγράφει έναν κύκλο παραπάνω. Συνεπώς, αν συναντηθούν για $N_{οστή}$ φορά, θα ισχύει: $s_1 - s_2 = N \cdot 2\pi r$ και $\varphi_1 - \varphi_2 = N \cdot 2\pi$ rad

Παράδειγμα 13. Δύο κινητά Σ_1 και Σ_2 κινούνται στον ίδιο κυκλικό δρόμο ακτίνας R = 0,5 m με γωνιακές ταχύτητες μέτρου ω_1 = 0,6π rad/s και ω_2 αντίστοιχα, τα διανύσματα των οποίων σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 180°. Τα δύο κινητά συναντώνται τη χρονική στιγμή t = 0 σε σημείο Α της τροχιάς τους και ξανασυναντώνται τη χρονική στιγμή t_1 = 2 s σε άλλο σημείο Β της τροχιάς τους. Να υπολογίσετε:

α. το μήκος του τόξου που διέγραψε το κινητό Σ_2 στη χρονική διάρκεια $0 \to t_1$

β. το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ω_2 του κινητού Σ_2.

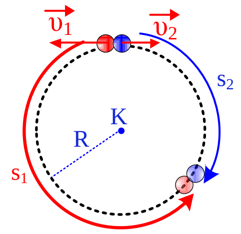
Λύση

α. Αφού τα διανύσματα των γωνιακών ταχυτήτων των δύο κινητών σχηματίζουν γωνία 180°, σημαίνει ότι τα δύο αυτά διανύσματα έχουν αντίθετη φορά. Άρα τα δύο κινητά κινούνται στην ίδια κυκλική τροχιά έχοντας αντίθετη φορά. Η επίκεντρη γωνία που διέγραψε το κινητό Σ_1 στη χρονική διάρκεια $0 \to t_1$ υπολογίζεται

από τη σχέση: $\omega_1 = \dfrac{\theta_1}{\Delta t} \Rightarrow \theta_1 = \omega_1 \cdot \Delta t \Rightarrow \boldsymbol{\theta_1 = 1{,}2\pi}$ **rad**

Το μήκος του τόξου s_1 και η επίκεντρη γωνία θ_1 που βαίνει στο τόξο αυτό ικανοποιούν τη σχέση: $s_l = R\theta_1 \Rightarrow \boldsymbol{s_1 = 0{,}6\pi}$ **m**

Επειδή η φορά κίνησης των δύο κινητών είναι αντίθετη, το άθροισμα των μηκών τόξου που διανύουν μεταξύ δύο διαδοχικών συναντήσεών τους ισούται με το μήκος ενός κύκλου.



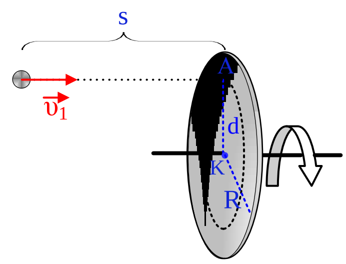
Δηλαδή: $s_1 + s_2 = 2\pi R \Rightarrow 0{,}6\pi + s_2 = \pi \Rightarrow \boldsymbol{s_2 = 0{,}4\pi}$ **m**

β. Για το κινητό Σ_2 έχουμε: $\upsilon_2 = \dfrac{s_2}{\Delta t} \Rightarrow \upsilon_2 = \dfrac{0{,}4\pi}{2} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_2 = 0{,}2\pi \dfrac{m}{s}}$

Όμως ισχύει: $\upsilon_2 = \omega_2 R \Rightarrow \omega_2 = \dfrac{\upsilon_2}{R} \Rightarrow \omega_2 = \dfrac{0{,}2\pi}{2} \Rightarrow \boldsymbol{\omega_2 = 0{,}1\pi \dfrac{rad}{s}}$

Συνάντηση δύο σωμάτων με το ένα να εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση και το άλλο ευθύγραμμη ομαλή.

Παράδειγμα 14. Μια σφαίρα μάζας m = 10 g κινείται με σταθερή οριζόντια ταχύτητα υ_1 και τη χρονική στιγμή t = 0 απέχει απόσταση s = 3 m από ένα δίσκο ακτίνας R, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Όταν η σφαίρα απέχει απόσταση s από τον δίσκο η ακτίνα που περνά από το σημείο Α είναι κατακόρυφη ενώ όταν η σφαίρα χτυπά τον δίσκο (στιγμή t_1) η ίδια ακτίνα έχει γίνει οριζόντια για πρώτη φορά. Το σημείο Α απέχει από το κέντρο Κ απόσταση d = 0,4 m. Ο δίσκος περιστρέφεται με σταθερή συχνότητα γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδο του, διαγράφοντας έναν πλήρη κύκλο κάθε 0,2 s. Να υπολογίσετε:



α. το μέτρο της κεντρομόλου δύναμης που δέχεται η σφαίρα μετά την κρούση με τον δίσκο,

β. την κινητική ενέργεια της σφαίρας πριν την κρούση με τον δίσκο.

Δίνεται για τις πράξεις π^2 = 10, η κρούση δεν επηρεάζει την συχνότητα περιστροφής του δίσκου .

Λύση

α. Η συχνότητα περιστροφής του δίσκου είναι ίση με: $f=\frac{N}{\Delta t}\Rightarrow f=\frac{1}{0,2}\,Hz\Rightarrow \mathbf{f=5\,Hz}$.

Η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου είναι ω = 2πf ⇒ **ω = 10π rad/s**.

Η κεντρομόλος δύναμη πάνω στην σφαίρα είναι ίση με:

$$F_\kappa=\frac{m\upsilon_2^2}{d}\Rightarrow F_\kappa=\frac{m\omega^2 d^2}{d}\Rightarrow F_\kappa=m\omega^2 d\Rightarrow F_\kappa=10^{-2}\cdot 100\pi^2\cdot 0,4\,N\Rightarrow \mathbf{F_\kappa=4\,N}$$

β. Η ακτίνα γίνεται οριζόντια για πρώτη φορά συνεπώς η γωνία που διαγράφει είναι $\theta=\frac{\pi}{4}\,rad$.

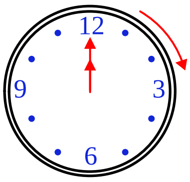
Ο χρόνος για την παραπάνω περιστροφή του δίσκου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\omega=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\Rightarrow\omega=\frac{\theta-0}{t_1-0}\Rightarrow t_1=\frac{\theta}{\omega}\Rightarrow t_1=\frac{\frac{\pi}{4}}{10\pi}\Rightarrow \mathbf{t_1=\frac{1}{40}\,s}$$

Στον ίδιο χρόνο η σφαίρα έχει διανύσει την απόσταση s. Άρα $\upsilon_1=\frac{s}{t_1}\Rightarrow\upsilon_1=\frac{3}{\frac{1}{40}}\frac{m}{s}\Rightarrow \mathbf{\upsilon_1=120\,\frac{m}{s}}$

Η περίπτωση του ρολογιού

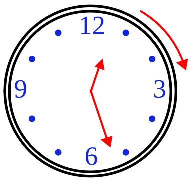
Παράδειγμα 15. Ένα ρολόι δείχνει 12 ακριβώς.



α. Τι ώρα θα δείχνει το ρολόι όταν ο λεπτοδείκτης και ο ωροδείκτης σχηματίζουν γωνία 11π/24 για πρώτη φορά;

β. Όταν η ώρα είναι 12 και 30' πόση θα είναι η γωνία που σχηματίζουν ο ωροδείκτης με το λεπτοδείκτη;

Λύση



α. Ο λεπτοδείκτης και ο ωροδείκτης διαγράφουν επίκεντρες γωνίες φ_Λ και φ_Ω. Θεωρούμε ως t_0 = 0 την χρονική στιγμή 12:00 οπότε $\Delta t = t - t_0 = t$ έτσι έχουμε:

$$\Delta\varphi=\varphi_\Lambda-\varphi_\Omega=\omega_\Lambda t-\omega_\Omega t=(\frac{2\pi}{T_\Lambda}-\frac{2\pi}{T_\Omega})t=2\pi\frac{T_\Omega-T_\Lambda}{T_\Omega\cdot T_\Lambda}t \quad (1)$$

Η περίοδος του ωροδείκτη σε ώρες είναι $\mathbf{T_\Omega = 12\ h}$ και του λεπτοδείκτη $\mathbf{T_\Lambda = 1\ h}$.

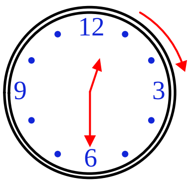
Αντικαταστούμε στην σχέση (1) και έχουμε:

$$(1)\Rightarrow\Delta\varphi=2\pi\frac{T_\Omega-T_\Lambda}{T_\Omega\cdot T_\Lambda}t\Rightarrow t=\frac{\Delta\varphi}{2\pi}\cdot\frac{T_\Omega\cdot T_\Lambda}{T_\Omega-T_\Lambda}\Rightarrow t=\frac{11\pi/24}{2\pi}\cdot\frac{12\cdot 1}{12-1}h\Rightarrow t=\frac{1}{4}h \text{ ή } \mathbf{t = 15\ min}.$$

Άρα, το ρολόι θα δείχνει 12 και 15'.

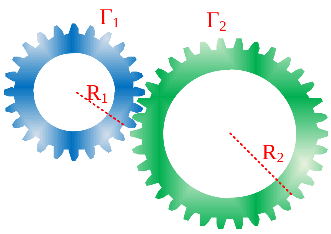
β. Τώρα ξέρουμε τον χρονικό διάστημα που έχει περάσει ώστε το ρολόι να δείχνει 12:30 άρα $\Delta t_1 = t_1 - 0 = t_1$

άρα t_1 = 0,5 h.



Από την σχέση (1) έχουμε: $\Delta\varphi=2\pi\frac{T_\Omega-T_\Lambda}{T_\Omega\cdot T_\Lambda}t_1\Rightarrow\Delta\varphi=2\pi\frac{11}{12}\cdot 0,5\,rad\Rightarrow \mathbf{\Delta\varphi=\frac{11\pi}{12}\,rad}$

Παράδειγμα 16. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα σύστημα δύο γραναζιών $Γ_1$ και $Γ_2$ τα οποία έχουν ακτίνες R_1 = 0,1 m και R_2 = 0,3 m αντίστοιχα. Τα δύο γρανάζια περιστρέφονται με σταθερή συχνότητα και χωρίς να "χάνουν" στροφές. Το γρανάζι Γ1 περιστρέφεται ωρολογιακά εκτελώντας 180 περιστροφές το λεπτό.



α. Να υπολογίσετε το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας των σημείων της περιφέρειας του γραναζιού $Γ_2$.

β. Να βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας του γραναζιού $Γ_2$.

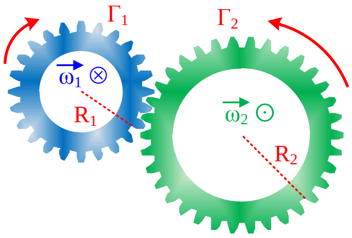
Λύση

α. Το γρανάζι $Γ_1$ εκτελεί N_1 = 180 περιστροφές σε χρονική διάρκεια $Δt$ = 60 s. Συνεπώς η συχνότητα περιστροφής του είναι: $f_1 = \frac{N_1}{Δt} \Rightarrow f_1 = \frac{180}{60} \Rightarrow \mathbf{f_1 = 3\,Hz}$

Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του γραναζιού $Γ_1$ υπολογίζεται από τον τύπο: $ω_1 = 2πf_1 \Rightarrow ω_1 = 6π$ rad/s

Για το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας των σημείων της περιφέρειας του γραναζιού $Γ_1$ έχουμε:
$υ_1 = ω_1R_1 \Rightarrow \mathbf{υ_1 = 0{,}6π\ m/s}$

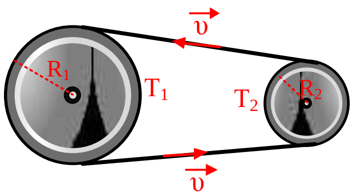
Επειδή τα δοντάκια του γραναζιού $Γ_1$ και του γραναζιού $Γ_2$ συμπλέκονται, κατά τη διάρκεια της περιστροφής τους τα κοινά σημεία της περιφέρειας των δύο τροχών έχουν την ίδια κατά μέτρο γραμμική ταχύτητα. Συνεπώς για τα σημεία της περιφέρειας του γραναζιού $Γ_2$ έχουμε: $υ_2 = υ_1 \Rightarrow \mathbf{υ_2 = 0{,}6π\ m/s}$



β. Για το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του γραναζιού $Γ_2$ έχουμε:
$υ_2 = ω_2R_2 \Rightarrow \mathbf{ω_2 = 2π\ rad/s}$

Επειδή το γρανάζι $Γ_1$ περιστρέφεται ωρολογιακά, δηλαδή δεξιόστροφα, το γρανάζι $Γ_2$ περιστρέφεται αριστερόστροφα. Το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας $\vec{ω}_2$ του γραναζιού $Γ_2$ είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζει ο τροχός και η φορά του, σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού, είναι από τον τροχό προς τον αναγνώστη.

Παράδειγμα 17. Δύο τροχοί $Τ_1$ και $Τ_2$ με ακτίνες R_1 = 0,8 m και R_2 = 0,2 m συνδέονται με ιμάντα όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Κάθε σημείο του ιμάντα κινείται με ταχύτητα μέτρου υ, με αποτέλεσμα οι δύο τροχοί να περιστρέφονται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, χωρίς ο ιμάντας να γλιστράει σε αυτούς. Τα σημεία της περιφέρειας του τροχού $Τ_1$ έχουν κεντρομόλο επιτάχυνση μέτρου 20 m/s^2. Να υπολογίσετε:



α. το μέτρο της ταχύτητας των σημείων της περιφέρειας του τροχού $Τ_2$,
β. το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης ενός σημείου της περιφέρειας του τροχού $Τ_2$,
γ. την περίοδο περιστροφής του τροχού $Τ_2$.

Λύση

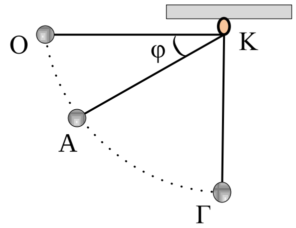
α. Επειδή ο ιμάντας δε γλιστράει σε σχέση με τους τροχούς, το μέτρο της ταχύτητας κάθε σημείου του ιμάντα είναι ίσο με το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας κάθε σημείου της περιφέρειας των δύο τροχών. Για σημείο της περιφέρειας του τροχού $Τ_1$ ισχύει: $α_{κ,1} = \frac{υ^2}{R_1} \Rightarrow υ = \sqrt{α_{κ,1} \cdot R_1} \Rightarrow \mathbf{υ = 4\frac{m}{s}}$

β. Για σημείο του τροχού $Τ_2$ έχουμε υ = 6 m/s. Συνεπώς: $α_{κ,2} = \frac{υ^2}{R_2} \Rightarrow α_{κ,2} = \frac{16}{0,2} \Rightarrow \mathbf{α_{κ,2} = 80\frac{m}{s^2}}$

γ. Για τον τροχό $Τ_2$ έχουμε: $υ = ω_2R_2 \Rightarrow ω_2 = \frac{υ}{R_2} \Rightarrow \mathbf{ω_2 = 20\frac{rad}{s}}$

Όμως: $ω_2 = \frac{2π}{T_2} \Rightarrow T_2 = \frac{2π}{ω_2} \Rightarrow \mathbf{T_2 = \frac{π}{10}s}$.

Κυκλική κίνηση, με το μέτρο της ταχύτητας να μεταβάλλεται.



Παράδειγμα 18. Το σώμα μάζας m = 2 kg του επόμενου σχήματος είναι δεμένο με αβαρές και μη εκτατό νήμα μήκους ℓ = 1,6 m, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο σε σημείο K. Εκτρέπουμε το σώμα ώστε το νήμα να γίνει οριζόντιο και στη συνέχεια το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί. Τη χρονική στιγμή t_1 που το σώμα διέρχεται από σημείο A της τροχιάς του το νήμα σχηματίζει με την αρχική του θέση γωνία φ = 30°.

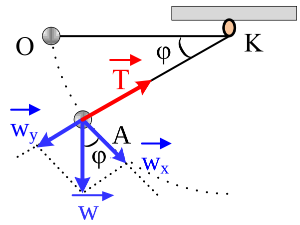
α. να υπολογίσετε την επιτάχυνση του σώματος κατά μήκος της τροχιάς σε συνάρτηση με την γωνία από την αρχική θέση, μέχρι το νήμα να γίνει κατακόρυφο και να γίνει η αντίστοιχη γραφική παράσταση

β. Να υπολογίσετε το μέτρο της τάσης του νήματος τη χρονική στιγμή t_1.

γ. Να βρείτε το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος εξαιτίας της αλλαγής του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας (επιτρόχιος επιτάχυνση) τη χρονική στιγμή t_1.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g = 10 m/s^2.

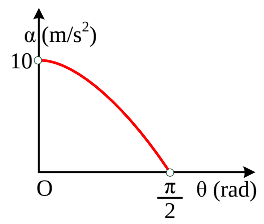
Λύση



α. Η τροχιά του σώματος είναι κυκλική. Οι δυνάμεις που δέχεται το σώμα είναι η τάση του νήματος $\vec{T}$ και το βάρος $\vec{w}$. Αναλύουμε το βάρος στις συνιστώσες $\vec{w}_x$ και $\vec{w}_y$ που φαίνονται στο σχήμα προκύπτουν τα εξής:

Η συνισταμένη των δυνάμεων $\vec{T}$ και $\vec{w}_y$ "λειτουργεί" ως κεντρομόλος και ο ρόλος της είναι να μεταβάλλει τη διεύθυνση της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ του σώματος (άρα το εξαναγκάζει να εκτελεί κυκλική κίνηση).

Η συνιστώσα $\vec{w}_x$ έχει τη διεύθυνση της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ του σώματος (εφαπτομενική στην τροχιά).



Αυτό σημαίνει ότι η δύναμη αυτή αλλάζει το μέτρο της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ και συγκεκριμένα το αυξάνει, αφού επιπλέον έχει φορά ίδια με τη φορά της ταχύτητας.

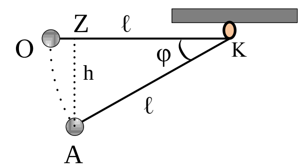
Έτσι λοιπόν μπορούμε σε μία τυχαία θέση να υπολογίσουμε την επιτάχυνση από τον 2^{ο} νόμο του Newton.

$$\Sigma\vec{F}_x = m\vec{\alpha} \Rightarrow w_x = m\alpha \Rightarrow mg\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi = m\alpha \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = 10\sigma\upsilon\nu\varphi\ (S.I.)} \quad (1)$$

Η γραφική παράσταση για $0 \le \varphi \le \pi/2$ rad φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

β. Τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει:

$$\Sigma\vec{F}_y = \vec{F}_\kappa \Rightarrow T - w_y = \frac{m\upsilon_1^2}{\ell} \Rightarrow T = mg\cdot\eta\mu 30 + \frac{m\upsilon_1^2}{\ell} \quad (2)$$



Από την σχέση (2) φαίνεται ότι μας χρειάζεται η ταχύτητα την στιγμή t_1. Η κατακόρυφη μετατόπιση του σώματος μπορεί να βρεθεί από το ημίτονο της γωνίας στο τρίγωνο AZK: $\eta\mu\varphi = \frac{h}{\ell} \Rightarrow h = \ell\cdot\eta\mu\varphi \Rightarrow \boldsymbol{h = 0,8\,m}$

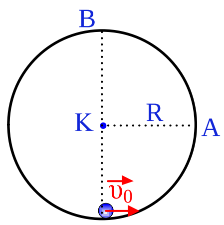
Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. από την αρχική θέση O ως την θέση A.

$$K_A - K_O = W_w \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = mgh \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{2gh} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_1 = 4\frac{m}{s}}$$

Από την (2) τελικά θα προκύψει: **T = 30 N.**

γ. Από την σχέση (1) που υπολογίσαμε στο α ερώτημα έχουμε:

$$(1) \Rightarrow \alpha_{t_1} = 10\sigma\upsilon\nu 30° \frac{m}{s^2} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha_{t_1} = 5\sqrt{3}\,\frac{m}{s^2}}$$



Παράδειγμα 19. Μικρή σφαίρα μάζας m = 0,9 kg εκτοξεύεται από το κατώτερο σημείο μιας λείας κυκλικής τροχιάς με ταχύτητα μέτρου υ_0 = 10 m/s. Η κυκλική τροχιά έχει ακτίνα r = 0,9 m και διέρχεται από το σημείο της Α όπου η ακτίνα ΚΑ είναι οριζόντια και από το σημείο Β όπου η ακτίνα ΚΒ είναι κατακόρυφη με ταχύτητες $\vec{\upsilon}_A$ και $\vec{\upsilon}_B$ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:

α. το μέτρο της δύναμης που δέχεται η σφαίρα από την κυκλική τροχιά όταν διέρχεται από τα σημεία Α, και Β,

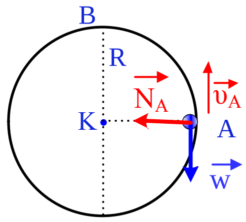
β. την ελάχιστη τιμή του μέτρου της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_0$, ώστε η σφαίρα να μη χάνει την επαφή της με την κυκλική τροχιά όταν διέρχεται από το σημείο Β.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g = 10 m/s^2. θεωρήστε αμελητέες τις διαστάσεις της σφαίρας.

Λύση

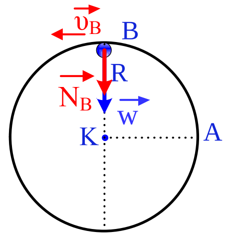
α. Στο σημείο Α η σφαίρα έχει διαγράψει τεταρτοκύκλιο και η ταχύτητα της έχει μέτρο υ_A που μπορεί να βρεθεί με εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε. από το σημείο Ο ως το Α.

$$K_A - K_O = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_A^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = -mgr \Rightarrow \upsilon_A^2 = \upsilon_0^2 - g2r \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_A = \sqrt{82}\,\frac{m}{s}}.$$



Στο σημείο Α μόνο η δύναμη από την σιδηροτροχιά βρίσκεται πάνω στην διεύθυνση της ακτίνας και ισχύει:

$$\Sigma\vec{F}_x = \vec{F}_\kappa \Rightarrow N_A = \frac{m\upsilon_A^2}{r} \Rightarrow N_A = \frac{0,9\cdot 82}{0,9}N \Rightarrow \boldsymbol{N_A = 82\,N}$$



Στο ανώτερο σημείο Β η μικρή σφαίρα δέχεται τη δύναμη $\vec{N}$ από τη σιδηροτροχιά και το βάρος της $\vec{w}$. Οι δύο αυτές δυνάμεις είναι κατακόρυφες και έχουν φορά προς τα κάτω. Αφού η σφαίρα εκτελεί κυκλική κίνηση, η συνισταμένη των δυνάμεων που δέχεται στη διεύθυνση της επιβατικής ακτίνας έχει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Συνεπώς για το σημείο Β ισχύει:

$$\Sigma\vec{F}_y = \vec{F}_\kappa \Rightarrow w + N_B = \frac{m\upsilon_B^2}{r} \Rightarrow N_B = \frac{m\upsilon_B^2}{r} - mg \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. από το σημείο Ο ως το Β:

$$K_B - K_O = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_B^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = -mg\cdot 2r \Rightarrow \upsilon_B^2 = \upsilon_0^2 - 4gr \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_B = 8\,\frac{m}{s}}$$

Οπότε: $(1) \Rightarrow N_B = (\frac{0,9\cdot 64}{0,9} - 9)N \Rightarrow \boldsymbol{N_B = 55\,N}$

β. Για το σημείο Β ισχύει: $\Sigma\vec{F}_y = \vec{F}_\kappa \Rightarrow w + N = \frac{m\upsilon_1^2}{r} \Rightarrow N = \frac{m\upsilon_1^2}{r} - mg \Rightarrow N = m\left(\frac{\upsilon_1^2}{r} - g\right)$ (2)

Παρατηρούμε από τη σχέση (2) ότι όσο πιο μικρό είναι το μέτρο της ταχύτητας υ_1, τόσο πιο μικρό είναι και το μέτρο της δύναμης $\vec{N}$ που δέχεται η σφαίρα από τη σιδηροτροχιά. Η πιο μικρή τιμή της ταχύτητας που μπορεί να έχει η σφαίρα όταν διέρχεται από το σημείο Β είναι αυτή για την οποία η δύναμη $\vec{N}$ τείνει να γίνει ίση με μηδέν (μόλις που να μη χάνεται η επαφή).

Για να έχουμε συνεχώς επαφή στο σημείο Β θα πρέπει η δύναμη $\vec{N}$ να έχει μέτρο $N \geq 0$

Από τη σχέση (2) έχουμε: $(2) \Rightarrow N \geq 0 \Rightarrow m\left(\frac{\upsilon_1^2}{r} - g\right) \geq 0 \Rightarrow \upsilon_1 \geq \sqrt{gr}$ άρα $\upsilon_{B,min} = \sqrt{gr}$ (3)

Επομένως για να φτάσει με τέτοια ταχύτητα στο ανώτερο σημείο θα πρέπει να εκτοξευτεί με ταχύτητα:

$$K_B - K_O = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_B^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = -mg \cdot 2r \Rightarrow \upsilon_B^2 + 4gr = \upsilon_0^2 \overset{(3)}{\Rightarrow} gr + 4gr = \upsilon_0^2 \Rightarrow \upsilon_0 = \sqrt{5gr} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_0 = 3\sqrt{5}\,\frac{m}{s}}$$

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Βασίλης Δουκατζής