ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

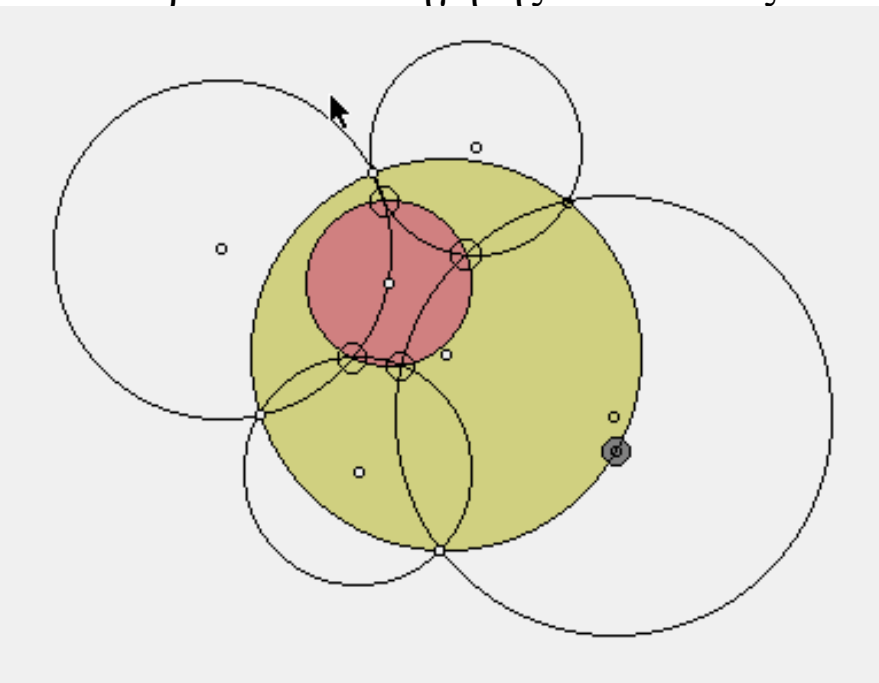
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Διπλωματική Εργασία

Η Γεωμετρία της Αντιστροφής: Ιστορική Αναδρομή, Διδακτικές προεκτάσεις και Εφαρμογές

Κακούρης Μιχαήλ Α.Μ 200508
Επιβλέπων Καθηγητής: Δ. Λάππας



Αθήνα 2008

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεπταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Λάππας Διονύσιος (επιβλέπων Καθηγητής)	……	……
2) Γιαννακούλιας Ευστάθιος	……	……
3) Σπύρου Παναγιώτης	……	……

Αφιερώνεται
στον

Γιαννάκη

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ θερμά τα μέλη της τριμελούς επιτροπής και ιδιαίτερα τον επιβλέποντα καθηγητή Δ. Λάππα γιατί με τον πλούτο των γνώσεων του και τις προτάσεις του ήταν για μένα πολύτιμη βοήθειά στην επιλογή του θέματος της διπλωματικής μου εργασίας αλλά και στην υλοποίησή της.
Η παρακολούθηση των διαλέξεών του μου άνοιξε νέους δρόμους και μου ενέπνευσε ένα διαφορετικό ενδιαφέρον για μελέτη.
Πραγματικά απόλαυσα την συνεργασία μαζί του και θα θυμάμαι με νοσταλγία τις παραδόσεις του.
Επίσης θα ευχαριστήσω όλους τους διδάσκοντες του μεταπτυχιακού προγράμματος κάνοντας ιδιαίτερη μνεία στον καθηγητή Σ. Νεγρεπόντη ο οποίος με την εμπνευσμένη του διδασκαλία μου έδειξε τι σημαίνει *"ψάχνω"*.

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεπταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Σύντομη περίληψη

Στην παρούσα εργασία ασχολούμαστε με την γεωμετρία της αντιστροφής. Ξεκινώντας κάνουμε μια ιστορική αναδρομή μέσω της οποίας προσπαθούμε να σκιαγραφήσουμε την διαδικασία της γέννησης, της εξέλιξης και της μορφοποίησης της σε θεωρία.

Αναφέρουμε τις απόψεις του F. Klein για το πώς πρέπει να αναπτυχθεί η γεωμετρία της αντιστροφής ως ξεχωριστή γεωμετρία και διατυπώνουμε τα κυριότερα σημεία της προσπάθειας που έκανε ο M. Pieri για την Αξιωματική θεμελίωση της.

Στην συνέχεια, αναπτύσσουμε με την βοήθεια αναλυτικής γεωμετρίας αλλά και μιγαδικών αριθμών, αρκετά βασικά θεωρήματα και προτάσεις της γεωμετρίας αυτής. Σκιαγραφούμε την ανάπτυξη της γεωμετρίας αυτής σύμφωνα με τις απόψεις του F. Klein (γεωμετρία ως η μελέτη των ιδιοτήτων που μένουν αναλλοίωτες κάτω από μια ομάδα μετασχηματισμών).

Εισάγουμε και επεξεργαζόμαστε τους μετασχηματισμούς Möbius, ορίζουμε τους μετασχηματισμούς αντιστροφής και αποδεικνύουμε ότι κάθε μετασχηματισμός αντιστροφής είναι ένας Möbius ή αντι-Möbius μετασχηματισμός.

Αποδεικνύουμε το θεώρημα του Καραθεοδωρή (μια απεικόνιση 1-1 που απεικονίζει το επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο στον εαυτό του έτσι ώστε κάθε κύκλος ή ευθεία να απεικονίζεται σε έναν κύκλο ή ευθεία γραμμή είναι υποχρεωτικά ένας Möbius ή αντι-Möbius μετασχηματισμός) αποδεικνύουμε το Θεώρημα των Cauchy Riemann και φτάνουμε μέχρι το θεώρημα του Liouville (Αν f είναι μια ένα προς ένα κλάσης C^4 σύμμορφη απεικόνιση ενός ανοιχτού συνόλου $U \subseteq \mathbb{R}^3$ επί του $f(U)$ και ας υποθέσουμε ότι $n \geq 3$. Τότε η f είναι σύνθεση αντιστροφών και ομοιοτήτων).

Στο δεύτερο μέρος της εργασίας μας διαπραγματευόμαστε αρκετά ιστορικά προβλήματα, με εργαλείο πάντα την γεωμετρία της αντιστροφής. Τα πιο σημαντικά προβλήματα με τα οποία ασχολούμαστε είναι κάποια προβλήματα που έχουν σχέση με την άρβηλο του Αρχιμήδη, την αλυσίδα του Πάππου καθώς και κάποιες άλλες αλυσίδες που σχηματίζονται μέσα στην άρβηλο. Διαπραγματευόμαστε την 10η

περίπτωση του προβλήματος των επαφών του Απολλώνιου και παρουσιάζουμε ανάμεσα σε άλλα την λύση που έδωσε ο Gergonne. Αναπτύσσουμε το πρόβλημα του Malffati και δίνουμε μια λύση που είναι αρκετά κοντά στο πνεύμα της λύσης που έδωσε ο Steiner. Επεξεργαζόμαστε το πρόβλημα του *hexlet* του Soddy, το θεώρημα του Feuerbach, το Θεώρημα του Miquel, του Πτολεμαίου το πρόβλημα του Fermat το πόρισμα του Steiner και παρουσιάζουμε την απόσταση αντιστροφής του Coxeter, την οποία συνδέουμε ανάμεσα σε άλλα και με την γωνία παραλληλίας στην Υπερβολική γεωμετρία. Παρουσιάζουμε επίσης το θεώρημα του Descartes το οποίο δίνει την σχέση που συνδέει τις ακτίνες τεσσάρων εφαπτόμενων μεταξύ τους κύκλων (ειδική περίπτωση του $10^{ου}$ προβλήματος των επαφών), τον αντιστροφέα του Hart και την συνδεσμολογία του Peaucellier.
Τελειώνουμε παρουσιάζοντας διάφορα προβλήματα από Διεθνείς μαθηματικούς διαγωνισμούς τα οποία και λύνουμε με την βοήθεια της αντιστροφής.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο	Σελίδα
Εισαγωγή	1
Μια συνοπτική περιήγηση στην γεωμετρική αντιστροφή	1
Ιστορική Αναδρομή της Γεωμετρικής Αντιστροφής	6
Οι Πρωτεργάτες	7
Γεωμετρία της αντιστροφής και Πρόγραμμα Erlanger (Felix Klein)	19
Mario Pieri και θεμελίωση της γεωμετρίας της αντιστροφής	21
Άλλες προσπάθειες αξιωματικοποίησης της Γεωμετρίας της αντιστροφής	23
Ευκλείδεια γεωμετρία –Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί- Άποψη του F. Klein για την ανάπτυξη της Γεωμετρίας	25
Τι είναι γεωμετρία;	25
Βασικοί γεωμετρικοί μετασχηματισμοί του επιπέδου	28
Ισομετρίες	28
Μεταφορά	28
α) Συμμετρία ως προς κέντρο(Half Turn) β) στροφή (rotation)	29
α) Συμμετρία ως προς κέντρο (ημιστροφή)	29
β) Στροφή	31
Συμμετρία ως προς ευθεία –ανάκλαση ως προς ευθεία.	35
Μετασχηματισμοί ομοιότητας- ομοιοθεσία	39
Ομοιοθεσία	40
Ομοιότητα	42
Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί και μιγαδικοί αριθμοί –Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί και πίνακες	44

Μια σύντομη επανάληψη στους Μιγαδικούς Αριθμούς 44

Μιγαδικοί αριθμοί και στερεές κινήσεις. 45

Μιγαδικοί αριθμοί και ομοιότητα 47

Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί και πίνακες 48

Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα 55

Γεωμετρική ερμηνεία των ιδιοδιανυσμάτων 56

Γεωμετρική αντιστροφή- Γεωμετρία της Αντιστροφής κατά F. Klein- Μετασχηματισμοί Möbious 57

Η αντιστροφή ως γενίκευση της ανάκλασης 58

Ορισμός αντιστροφής 59

Το αποτέλεσμα ενός μετασχηματισμού αντιστροφής στις ευθείες και τους κύκλους. 61

Γεωμετρική αντιστροφή και μιγαδικοί αριθμοί 67

Διατήρηση των γωνιών 72

Διατήρηση της συμμετρίας 76

Παραδείγματα σχετικά με την διατήρηση των γωνιών 76

Αντιστροφή, γραμμικές συναρτήσεις, μιγαδική αντιστροφή 78

Το επεκτεταμένο επίπεδο 81

Αντιστροφή ως προς σφαίρα 87

Η σφαίρα του Riemann - Στερεογραφική προβολή-θεωρήματα 90

Σφαίρα του Riemann και αντιστροφή 97

Μεταφέροντας τις μιγαδικές συναρτήσεις στη σφαίρα του Riemann 98

Συμπεριφορά των συναρτήσεων στο άπειρο 100

Γεωμετρία της αντιστροφής κατά Klein 102

Σχέση της γεωμετρίας της Αντιστροφής με άλλες γεωμετρίες 104

Μετασχηματισμοί του Möbius 106

Αναπαράσταση μετασχηματισμών Möbius με χρήση πινάκων 110

Σύνθεση μετασχηματισμών Möbius 113

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα 117

Αντιστροφή των μετασχηματισμών Möbius 118

Η ομάδα αντιστροφής (inversive group) και οι μετασχηματισμοί Möbius 120

Εικόνες των γενικευμένων κύκλων 122

Σύγκριση της ομοπαραλληλικής γεωμετρίας (affine geometry) με την γεωμετρία της αντιστροφής 123

Θεμελιώδη θεωρήματα της ομοπαραλληλικής γεωμετρίας και της γεωμετρίας της αντιστροφής,. Διπλός λόγος τεσσάρων σημείων 125

Τυποποίηση της διαδικασίας M: $z_1, z_2, z_3 \to 0, 1, \infty$ 127

Σταθερά σημεία 131

Μια διαφορετική απόδειξη *της μοναδικότητας* στο θεμελιώδες θεώρημα η οποία στηρίζεται στην ιδέα των σταθερών σημείων 133

Κύκλοι διερχόμενοι από τέσσερα σημεία 133

Συμφωνία (congruence) γενικευμένων κύκλων 134

Ομοαξονικοί κύκλοι (coaxal circles) 135

Θεώρημα: (Απολλώνιοι κύκλοι) 135

Οικογένειες κύκλων 139

Δύο κύκλοι καθορίζουν μια οικογένεια ομοαξονικών κύκλων. 144

Ταξινόμηση των μετασχηματισμών Möbius-Οπτικοποίηση 147

Ελλειπτικοί υπερβολικοί και λοξοδρομικοί μετασχηματισμοί 149

Τοπική γεωμετρική ερμηνεία του πολλαπλασιαστή. 151

Παραβολικοί μετασχηματισμοί 152

Υπολογισμός του πολλαπλασιαστή 154

Ερμηνεία του πολλαπλασιαστή μέσω ιδιοτιμών 156

Ανάλυση σε δύο ή τέσσερις ανακλάσεις 158

Ελλειπτική περίπτωση 158

Περίπτωση Υπερβολικού μετασχηματισμού Möbius 160

Παραβολική περίπτωση 162

Κάποιοι πολύ σημαντικοί μετασχηματισμοί Möbius 163

Τύπος μέσω της αρχής της συμμετρίας 164

Μια διαφορετική προσέγγιση των αυτομορφισμών του μοναδιαίου δίσκου είναι η εξής: 167

Ο γενικότερος μετασχηματισμός που απεικονίζει το άνω ημιεπίπεδο {z/Imz≥0} στον μοναδιαίο δίσκο $\{w/|w|\leq 1\}$. 167

Η γενικότερη απεικόνιση του άνω ημιεπιπέδου στον εαυτό του 168

Θεώρημα Καραθεοδωρή 169

Ανώτερη ανάλυση και σύμμορφες απεικονίσεις 171

Επανάληψη κάποιων στοιχείων από τον Απειροστικό Λογισμό – Γραμμική Άλγεβρα 171

Μήκος τόξου μιας καμπύλης 174

Εσωτερικά γινόμενα 175

Θεώρημα (εξισώσεις του Cauchy Riemann) 178

Θεώρημα (σχέση συμμορφικότητας και ολομορφικότητας - αντιολομορφικότητας) 179

Θεώρημα (Riemann) 181

Θεώρημα Liouville 181

Αντιστροφή ως προς σφαίρα στον $\mathbb{R}^n$ 181

Θεώρημα (Η αντιστροφή ως προς μια σφαίρα στον $\mathbb{R}^n$ είναι ένας σύμμορφος μετασχηματισμός) 182

Θεώρημα (για την αντιστροφή ως προς σφαίρα στον $\mathbb{R}^n$) 183

Πόρισμα: Η αντιστροφή ως προς σφαίρα στον $\mathbb{R}^n$ απεικονίζει κύκλους και ευθείες σε κύκλους και ευθείες 183

Αν δύο αντιστροφές g_1, g_2 έχουν το ίδιο κέντρο τότε η σύνθεσή τους είναι ομοιοθεσία 184

Αν δύο αντιστροφές g_1, g_2 έχουν κέντρα $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0$ αντίστοιχα και αν $g_2 \circ g_1$ είναι μια ομοιότητα τότε $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{y}_0$. 184

Σύμμορφες απεικονίσεις στο Ευκλείδειο επίπεδο 184

Λήμμα: Ας υποθέσουμε ότι f είναι μια σύμμορφη απεικόνιση με χαρακτηριστική συνάρτηση $e^{\sigma(x)}$. Αν σ δεν είναι σταθερή τότε $d^2\left(e^{-\sigma}\right)_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = a\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle$ για κάποια σταθερά a. 184

Το βασικό θεώρημα 186

Μετασχηματισμοί που διατηρούν τις σφαίρες 188

Άρβηλος 189

Ιστορικά στοιχεία-Βιβλίο των λημμάτων 189

Προτάσεις 5 και 6 του βιβλίου των λημμάτων - Liber Assumptorum 191

Αλυσίδα του Πάππου και η απόδειξη που παρατίθεται στην συναγωγή 194

Απόδειξη του Αρχαίου θεωρήματος με χρήση της γεωμετρικής αντιστροφής. Πως μπορούμε να κατασκευάσουμε την αλυσίδα του Πάππου με χρήση της γεωμετρικής αντιστροφής 210

Απόδειξη της πρότασης 6 του βιβλίου των λημμάτων με την βοήθεια της γεωμετρικής αντιστροφής 215

Τύπος του Αρχιμήδη – Πρόταση 6 του βιβλίου των Λημμάτων 216

Προβλήματα σχετικά με την άρβηλο – Λύση αυτών μέσω γεωμετρικής αντιστροφής 218

Ομοκυκλικά σημεία 222

Συγγραμμικά σημεία 223

Δίδυμοι κύκλοι του Αρχιμήδη: 225

Κύκλοι που έχουν ιδιαίτερη σημασία για την Άρβηλο 228
Γεωμετρική κατασκευή των γνωστότερων αλυσίδων της αρβήλου

Μεσόκυκλοι και άρβηλος 245
Αντιστροφές που αλλάζουν αμοιβαία την θέση δύο κύκλων

Κάποιοι επιπλέον αξιοσημείωτοι κύκλοι που ανήκουν στην ίδια δέσμη 264

Πρόβλημα του Απολλώνιου 270

Ιστορικά στοιχεία 270

Ο Joseph –Diaz Gergonne και το πρόβλημα του Απολλώνιου 275

Κατασκευή Gergonne 278

Μια άλλη λύση του προβλήματος του απολλώνιου με χρήση Γεωμετρικής Αντιστροφής 281

Λύση του προβλήματος του απολλώνιου μέσω της τροποποίησης της ακτίνας των τριών δοσμένων κύκλων και την βοήθεια των μετασχηματισμών Möbius 284

Εξάσφαιρο του Soddy (Soddy's Hexlet) 294

Πρόβλημα Malfatti Steiner 304

Απόσταση αντιστροφής 317

Πόρισμα του Steiner 322

Απόσταση αντιστροφής και κοινές εφαπτόμενες 328

Απόσταση αντιστροφής και χαρακτηριστικοί κύκλοι ενός τριγώνου 329

Υπερβολική γεωμετρία 331

Η γωνία παραλληλίας 332

Το θεώρημα του Feuerbach 332

Θεώρημα του Miquel 337

Θεώρημα Πτολεμαίου 342

Πρόβλημα Fermat 343

Γεωμετρία του διαβήτη 343

Peaucellier Linkage 347

Αντιστροφέας του Hart 348

Μια ειδική περίπτωση του προβλήματος του Απολλώνιου (θεώρημα Descartes) 349

Διεθνείς μαθηματικοί διαγωνισμοί –Μαθηματικές ολυμπιάδες – εφαρμογή της Γεωμετρικής Αντιστροφής στην λύση προβλημάτων της Λυκειακής Γεωμετρίας 355

Βιβλιογραφία 406

Εισαγωγή

Μια συνοπτική περιήγηση στην γεωμετρική αντιστροφή

Στην εισαγωγή αυτή, θα κάνουμε μια συνοπτική περιήγηση στην γεωμετρία της αντιστροφής και πολλά από αυτά που θα αναφέρουμε με συντομία στο παρόν κεφάλαιο, θα τα αναπτύξουμε με αρκετές λεπτομέρειες σε επόμενα κεφάλαια της εργασίας αυτής.
Η Ευκλείδεια Γεωμετρία διαπραγματεύεται τις σχέσεις μεταξύ σημείων και ευθειών και ο βασικότερος μετασχηματισμός της γεωμετρίας αυτής είναι η ανάκλαση ως προς μια ευθεία, όταν φυσικά η διαπραγμάτευση γίνεται στο επίπεδο, ενώ στο χώρο η ανάκλαση γίνεται ως προς ένα επίπεδο αντί για ευθεία. Ο μετασχηματισμός αυτός, αφήνει αναλλοίωτα τα σημεία τα οποία βρίσκονται πάνω στην ευθεία ως προς την οποία γίνεται η ανάκλαση, ενώ κάθε ζεύγος συμμετρικών σημείων τα οποία δεν ανήκουν στην ευθεία, ανήκουν σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς αυτήν και αλλάζουν θέση αμοιβαία με την ανάκλαση.
Όλες οι άλλες ισομετρίες μπορούν να εκφραστούν ως ανακλάσεις.
Ανάλογα η γεωμετρία αντιστροφής διαπραγματεύεται ευθείες και κύκλους. Στην γεωμετρία αυτή, θα θεωρήσουμε ως αρχικές έννοιες τα σημεία και τους κύκλους.
Ο βασικός μετασχηματισμός της είναι η αντιστροφή, η οποία αφήνει σταθερά όλα τα σημεία τα οποία ανήκουν σε έναν κύκλο και αλλάζει αμοιβαία την θέση του εσωτερικού με το εξωτερικό του κύκλου της αντιστροφής.
Όλοι οι άλλοι μετασχηματισμοί του επιπέδου που διατηρούν τους κύκλους (συμπεριλαμβανομένης και της ομοιότητας ως ειδικής περίπτωσης) μπορούν να εκφραστούν με όρους αντιστροφής.
Αυτό το είδος γεωμετρίας αξίζει προσοχής όχι μόνο για λόγους σχετικούς με τη ομορφιά που υπάρχει σε αυτήν, αλλά και διότι είναι στην ουσία η γεωμετρία των μιγαδικών αριθμών καθώς επίσης και γιατί τα ζεύγη σημείων και οι κύκλοι του πραγματικού επιπέδου αντιστροφής δίνουν ένα ισόμορφο μοντέλο των ευθειών και των επιπέδων του Υπερβολικού - μη Ευκλείδειου - χώρου.
Από το Ευκλείδειο επίπεδο μπορεί να παραχθεί το επίπεδο της αντιστροφής (inversive plane), θεωρώντας τις ευθείες γραμμές ως κύκλους που διέρχονται από ένα ειδικό ιδεατό σημείο, που καλείται σημείο στο άπειρο. Το Ευκλείδειο επίπεδο με την προσθήκη του σημείου αυτού δίνει το επίπεδο της αντιστροφής (inversive plane). Αυτό το επιπλέον σημείο μας επιτρέπει να θέσουμε το πιο κάτω αξίωμα :

<u>Αξίωμα 1: κάθε τρία διαφορετικά μεταξύ τους σημεία ανήκουν σε ένα και μόνο ένα κύκλο.</u>
Αν τα τρία αυτά σημεία είναι συγγραμμικά τότε ο κύκλος αυτός είναι μια ευθεία γραμμή.

Η ιδέα να προστεθεί ένα επιπλέον σημείο στο ευκλείδειο επίπεδο (σημείο στο άπειρο -point at infinity – με σύμβολο το ∞) για να δημιουργήσουμε το προβολικό επίπεδο, αποδίδεται στον Desargues (1639). Ήταν μόλις το 1914 όταν ο M. Bôcher πρώτος αυτός, είδε εντελώς ξεκάθαρα ότι η ιδέα της πρόσθεσης ενός επιπλέον ιδεατού σημείου στο ευκλείδειο επίπεδο (ώστε να γίνει το επίπεδο αντιστροφής), είναι εντελώς ανάλογη με αυτά που έκανε ο Desargues .
Όπως θα δούμε στο κεφάλαιο που αναφέρεται στην ιστορική αναδρομή, ο M. Pieri ήταν αυτός που έδωσε αρχικά ένα ικανοποιητικό σύνολο αξιωμάτων για την προβολική γεωμετρία (την παραστατική γεωμετρία του Cayley) το 1899 και κατόπιν, έκανε το ίδιο για την γεωμετρία της αντιστροφής το 1912.
Μεταγενέστεροι ερευνητές κατάφεραν να βελτιώσουν τα αποτελέσματα στα οποία κατέληξε ο M.Pieri και να συμπυκνώσουν τελικά, τον αριθμό των αξιωμάτων του Pieri που αναφέρονται στις σχέσεις πρόσπτωσης σημείων και κύκλων σε τέσσερα:

<u>Α.1</u> Τρία διαφορετικά μεταξύ τους σημεία βρίσκονται σε έναν και μόνο έναν κύκλο. Σε κάθε κύκλο υπάρχουν τουλάχιστον τρία διαφορετικά μεταξύ τους σημεία.

<u>Α.2</u> Αν Ρ είναι ένα σημείο πάνω σε έναν κύκλο Α και Q είναι ένα σημείο που δεν ανήκει στον κύκλο Α τότε υπάρχει μοναδικός κύκλος που διέρχεται από τα Ρ και Q ο οποίος έχει κοινό σημείο με τον κύκλο Α μόνο το σημείο Ρ (εφαπτόμενος κύκλος του κύκλου Α).

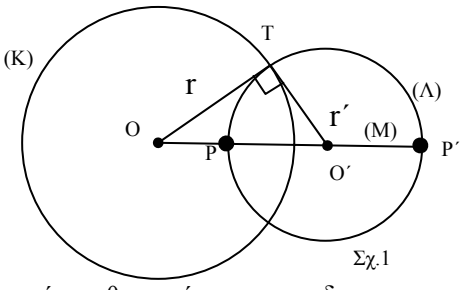
<u>Α.3</u> Υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο και ένας κύκλος που δεν προσπίπτουν.

<u>Α.4</u> Έστω C_1,C_2,C_3,C_4 είναι τέσσερις κύκλοι οι οποίοι δεν διέρχονται ανά τρεις από το ίδιο σημείο. Ας υποθέσουμε ότι οι κύκλοι C_1,C_2 τέμνονται στα σημεία Ρ και Ρ΄, οι C_2,C_3 τέμνονται στα σημεία Q και Q΄, οι C_3,C_4 τέμνονται στα σημεία R και R΄ και οι κύκλοι C_1,C_4 τέμνονται στα σημεία S και S΄. Τα σημεία Ρ,Q,R,S είναι ομοκυκλικά αν και μόνο αν τα σημεία Ρ΄,Q΄,R΄,S΄ είναι ομοκυκλικά (θεώρημα του Miquel).

Το επίπεδο αντιστροφής θα καλείται περιττό όταν ικανοποιεί το πιο κάτω αξίωμα:

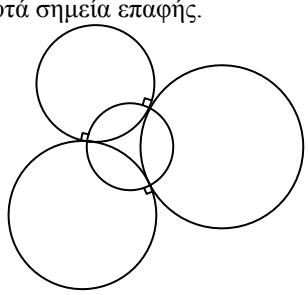
<u>Α.5</u> Υπάρχουν τέσσερις κύκλοι που οποιοιδήποτε δύο από αυτούς είναι μεταξύ τους εφαπτόμενοι και τέτοιοι ώστε, τα έξι σημεία επαφής να είναι μεταξύ τους διαφορετικά. Κανείς άλλος κύκλος που να διέρχεται από ένα από αυτά τα σημεία δεν μπορεί να είναι εφαπτόμενος σε τρεις από τους τέσσερις αρχικούς κύκλους.

Δύο κύκλοι, θα λέμε ότι είναι τεμνόμενοι ή εφαπτόμενοι ή μη τεμνόμενοι αν έχουν δύο κοινά ή ένα κοινό ή κανένα κοινό σημείο αντίστοιχα. Ας σημειωθεί ότι στην διατύπωση των αξιωμάτων δεν κάναμε χρήση της έννοιας της απόστασης. Η μόνη σχέση που χρησιμοποιείται είναι η σχέση της πρόσπωσης (σχέση του ανήκειν), που μας επιτρέπει να κάνουμε χρήση φράσεων όπως: «ένα σημείο Ρ είναι σημείο του κύκλου *α* » ή « δύο κύκλοι έχουν ένα ζεύγος κοινών σημείων».
Όπως μερικές γεωμετρίες ερευνούν «non Desarguesian» προβολικά επίπεδα δηλαδή επίπεδα που δεν ικανοποιούν το θεώρημα του Desargues, έτσι και στην περίπτωση της γεωμετρίας της αντιστροφής υπάρχουν ερευνητικές προσπάθειες που οδηγούν σε γεωμετρίες της αντιστροφής «non Miquelian» που ερευνούν επίπεδα αντιστροφής (inversive planes) που δεν ικανοποιούν το 4° αξίωμα που είναι το θεώρημα του Miquel.
Θα λέμε ότι δύο κύκλοι είναι μεταξύ τους ορθογώνιοι[1] αν οι εφαπτόμενές τους στα κοινά τους σημεία είναι μεταξύ τους κάθετες.
Γενικά δύο σημεία Ρ, Ρ΄ είναι αντίστροφα μεταξύ τους ως προς έναν κύκλο ω, αν και μόνο αν ο ω είναι ορθογώνιος με δύο κύκλους α και β που διέρχονται από τα Ρ και Ρ΄. Αν συμβαίνει αυτό τότε ο κύκλος ω είναι ορθογώνιος με κάθε μέλος της δέσμης αβ των κύκλων α,β. Κάθε σημείο του ω είναι αντίστροφο του εαυτού του, ενώ το κέντρο του κύκλου ω θεωρούμε ότι είναι αντίστροφο του σημείου στο άπειρο.
Η ανάκλαση (reflection) ως προς την ευθεία L, μπορεί να θεωρηθεί ως αντιστροφή (inversion) ως προς την L



Σχ.1

[1] Ορισμός ορθογωνιότητας που δεν χρησιμοποιεί την έννοια της καθετότητας (ούτε και κάποιο συνώνυμο αυτής): Δύο κύκλοι είναι μεταξύ τους ορθογώνιοι αν ο ένας από αυτούς ανήκει σε μια τριάδα εφαπτόμενων μεταξύ τους κύκλων σε τρία διαφορετικά σημεία και ο δεύτερος είναι ο κύκλος που διέρχεται από τα τρία αυτά σημεία επαφής.



όταν η L θεωρηθεί ως κύκλος στο επεκτεταμένο επίπεδο που διέρχεται από το σημείο στο άπειρο και μην ξεχνάμε ότι στο μη επεκτεταμένο επίπεδο δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία P και P΄, είναι συμμετρικά ως προς μια ευθεία L, αν και μόνο αν κάθε κύκλος που διέρχεται από τα σημεία αυτά, είναι ορθογώνιος ως προς την L.
Στο σχήμα 1 ο ένας από τους δύο ορθογώνιους κύκλους είναι η ευθεία (M) (γενικευμένος κύκλος) και ο άλλος είναι ο (Λ) ο οποίος έχει το κέντρο του πάνω στην ευθεία αυτή. Η αντιστροφή μας προμηθεύει με ένα κριτήριο ορθογωνιότητας: δύο κύκλοι είναι μεταξύ τους ορθογώνιοι αν ο ένας από αυτούς διέρχεται από δύο σημεία τα οποία είναι αντίστροφα ως προς τον άλλο. Δύο τυχαίοι κύκλοι α και β προσδιορίζουν μια δέσμη A κύκλων ορθογώνιων σε αυτούς. Η δέσμη αυτή αποτελείται από όλους τους κύκλους (PP_1P_2) όπου P είναι ένα μεταβλητό σημείο και P_1,P_2 είναι τα αντίστροφα σημεία του P ως προς τους κύκλους α και β αντίστοιχα. Αν δύο τέτοιοι κύκλοι είναι οι γ,δ τότε η δέσμη A΄ των κύκλων που είναι ορθογώνιοι σε αυτούς τους δυο κύκλους περιλαμβάνει και τους δύο κύκλους α,β. Η δέσμη A΄ θεωρούμε ότι προκύπτει από τους κύκλους α και β και συχνά την συμβολίσουμε με αβ. Οι κύκλοι που διέρχονται από δυο συγκεκριμένα σημεία L και L΄, σχηματίζουν μια δέσμη A τεμνόμενων κύκλων, οι οποίοι είναι ορθογώνιοι στους κύκλους μιας δέσμης B, αποτελούμενης από μη τεμνόμενους μεταξύ τους κύκλους. Τα L και L΄ είναι αντίστροφα μεταξύ τους σημεία ως προς κάθε μέλος της δέσμης B των μη τεμνόμενων κύκλων. Τα σημεία L και L΄ καλούνται οριακά σημεία της δέσμης B. Αν οι κύκλοι α και β είναι εφαπτόμενοι μεταξύ τους, τότε η δέσμη αβ είναι μια εφαπτόμενη δέσμη και οι ορθογώνιοι κύκλοι που διέρχονται από το σημείο επαφής των κύκλων της δέσμης αυτής, σχηματίζουν μια άλλη δέσμη η οποία είναι και πάλι μια εφαπτόμενη δέσμη. Ελλειπτική δέσμη κύκλων είναι η δέσμη που αποτελείται από όλους τους κύκλους οι οποίοι διέρχονται από δύο συγκεκριμένα σημεία. Το σύνολο όλων των κύκλων που είναι ορθογώνιοι στους κύκλους μιας ελλειπτικής δέσμης, αποτελεί επίσης μια δέσμη που ονομάζεται υπερβολική δέσμη.
Τέλος, το σύνολο όλων των κύκλων που εφάπτονται σε έναν κύκλο C σε ένα συγκεκριμένο σημείο του P μαζί με τον κύκλο αυτό, αποτελούν μια παραβολική δέσμη.
Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια δέσμη κύκλων οι οποίοι διέρχονται από δύο σημεία K, K΄. Όταν το σημείο K΄ είναι το σημείο στο άπειρο τότε αυτή η δέσμη είναι η δέσμη των ευθειών που διέρχονται από το σημείο K.
Κάθε δύο τεμνόμενοι κύκλοι μπορούν να αντιστραφούν σε τεμνόμενες ευθείες και δύο οποιοιδήποτε μη τεμνόμενοι κύκλοι μπορούν να αντιστραφούν σε ομόκεντρους κύκλους.
Δύο εφαπτόμενες δέσμες, ορθογώνιες μεταξύ τους, μπορούν να μετασχηματιστούν σε δύο ορθογώνιες μεταξύ τους δέσμες παραλλήλων ευθειών (παράλληλες ευθείες είναι εφαπτόμενοι γενικευμένοι κύκλοι με σημείο επαφής το σημείο στο άπειρο).
Τρεις ή περισσότεροι κύκλοι οι οποίοι ανήκουν σε μια δέσμη λέμε ότι είναι ομοαξονικοί (coaxal).
Ευκλείδεια προσέγγιση: Αντίθετα με την προβολική γεωμετρία που αναπτύσσεται εύκολα από τα αξιώματά της, η επεξεργασία των λεπτομερειών της γεωμετρίας της αντιστροφής απαιτεί πολύ προσπάθεια κυρίως στο να προσδιοριστεί το σημείο στο άπειρο. Αν αυτό γίνει, τότε το επόμενο βήμα είναι η χρήση του πολύ δυνατού εργαλείου της Ευκλείδειας γεωμετρίας. Με άλλα λόγια για να λυθεί ένα πρόβλημα της γεωμετρίας της αντιστροφής που περιλαμβάνει κάποιους κύκλους, πρώτα προσπαθούμε να απλοποιήσουμε το σχήμα αντιστρέφοντας ως προς έναν κύκλο ο οποίος έχει κέντρο πάνω σε έναν ή περισσότερους κύκλους του αρχικού σχήματος ώστε να γίνει μετασχηματισμός του κύκλου αυτού (ή των κύκλων αυτών) σε ευθείες (δηλαδή πρώτα γίνεται ο προσδιορισμός του σημείου στο άπειρο) και κατόπιν αντιμετωπίζουμε το μετασχηματισμένο αυτό πρόβλημα με Ευκλείδεια γεωμετρία. Θα κατανοηθεί καλύτερα κάτι τέτοιο όταν θα αντιμετωπίσουμε κάποια προβλήματα από διεθνείς μαθηματικές ολυμπιάδες - I.M.O - σε ιδιαίτερο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας).
Αν προχωρήσουμε εφαρμόζοντας ένα από τα θεωρήματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας στο σχήμα 1 (πιο πάνω), οπότε θα έχουμε: $\underline{(OP)(OP') = OO'^2 - O'T^2 = OT^2}$ (δεν ξεχνάμε ότι οι κύκλοι του σχήματος 1 είναι μεταξύ τους ορθογώνιοι). Αυτή η παρατήρηση μας δίνει το δικαίωμα να προχωρήσουμε στον επόμενο ορισμό:

Δοθέντος ενός κύκλου (ή μιας σφαίρας) *K* με κέντρο Ο και ακτίνα r κάθε σημείο P≠O συνδέεται με ένα σημείο P΄ το οποίο βρίσκεται πάνω στην ημιευθεία OP και με τέτοιον τρόπο ώστε να ικανοποιείται η σχέση :

$$(OP)(OP') = r^2$$

Το σημείο P΄ είναι το αντίστροφο (inverse) του P ως προς τον κύκλο (ή την σφαίρα *K)*.
Η αντιστοιχία είναι ενειλικτική (involutoric). Πρόκειται δηλαδή για έναν μετασχηματισμό ο οποίος ταυτίζεται με τον αντίστροφό του, πράγμα που σημαίνει ότι για κάθε P΄≠O έχουμε (P΄)΄=P.
Τα αντίστροφα σημεία των σημείων ενός σχήματος *f* συνθέτουν ένα άλλο σχήμα *f΄* το οποίο καλείται αντίστροφο (inverse) του σχήματος *f*. Το αντίστροφο του εσωτερικού ενός κύκλου *K* είναι το εξωτερικό του και αντίστροφα.
Η αντιστροφή (inversion) είναι πολύ χρήσιμη διότι κάποιες ιδιότητες των σχημάτων *f* και *f΄*παραμένουν σταθερές (αναλλοίωτες) και έτσι κατοχυρώνεται πολλές φορές μέσω μιας διαδικασίας μελέτης κάποιας ιδιότητας του σχήματος *f*, η ισχύς της αντίστοιχης ιδιότητας του αντίστροφου σχήματος *f΄*.
Στο επίπεδο οι καρτεσιανές συντεταγμένες (x,y) ενός σημείου P και οι συντεταγμένες (x΄,y΄) του αντίστροφου (inverse) σημείου P΄ με κύκλο αντιστροφής τον μοναδιαίο κύκλο *K* ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\left\{\begin{array}{l} x' = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ y' = \dfrac{y}{x^2+y^2} \end{array}\right\} \quad \textit{και} \quad \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{x'}{x'^2+y'^2} \\ y = \dfrac{y'}{x'^2+y'^2} \end{array}\right\}$$

Εξισώσεις με παρόμοια δομή ισχύουν και για την αντιστροφή ως προς άλλους κύκλους. Αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την μετατροπή μιας εξίσωσης που περιγράφει ένα σχήμα *f*, σε μια εξίσωση που περιγράφει το αντίστροφο σχήμα του *f*, δηλαδή το *f΄*.
Εκτός από την περίπτωση που αλγεβρική απλούστευση είναι εφικτή, για παράδειγμα όταν η *f* είναι κύκλος, γενικά η αντιστροφή μετασχηματίζει μια αλγεβρική καμπύλη *f* τάξης n σε μια άλλη τάξεως 2n. Αυτές οι εξισώσεις είναι χρήσιμες για την παραγωγή πολύ σημαντικών προτάσεων, οι οποίες συνδέουν κάποια επίπεδα σχήματα και τις εικόνες τους μέσω της αντιστροφής (inversion) ως προς κάποιον κύκλο *K*.
Ακολουθούν μερικές προτάσεις της γεωμετρίας της αντιστροφής που θα αναφέρουμε με συνοπτικό τρόπο στο παρόν εισαγωγικό κεφάλαιο, όμως πολλές από αυτές θα τις μελετήσουμε διεξοδικά σε επόμενα κεφάλαια.
Βασικές προτάσεις της γεωμετρίας της αντιστροφής:
Ο κύκλος K είναι ο κύκλος ως προς τον οποίο αντιστρέφουμε. Το σημείο O είναι το κέντρο του και ρ είναι η ακτίνα του.

- Αν *f* είναι μια ευθεία που διέρχεται από το κέντρο O του κύκλου αντιστροφής τότε *f΄=f*.
- Αν *f* είναι ένας κύκλος που δεν διέρχεται από το O (κέντρο του κύκλου αντιστροφής) τότε *f΄* είναι ένας κύκλος που δεν διέρχεται από το O.
- Αν *f* είναι μια ευθεία που δεν διέρχεται από το O τότε *f΄* είναι ένας κύκλος που διέρχεται από το O και αντιστρόφως
- Αν κάθε ένα από τα σχήματα *f* και g είναι ευθεία ή κύκλος και έχουν ένα κοινό σημείο P ≠O (O κέντρο του κύκλου αντιστροφής) τότε η γωνία που σχηματίζει το σχήμα *f* με το g και η οποία έχει κορυφή το P ισούται ως προς το μέτρο με την γωνία του *f΄* με το g΄ και με κορυφή το P΄ (αντίστροφο σημείο του P).
- Η αντιστροφή (inversion) ως προς τον κύκλο *K* με κέντρο το O μπορούμε να θεωρήσουμε ότι απεικονίζει το O στο ∞ και αντίστροφα

Η παρουσίαση της επίπεδης γεωμετρίας αντιστροφής (plane inversive geometry) απλοποιείται κατά πολύ με την χρήση της στερεογραφικής προβολής. Βασικά στοιχεία της στερεογραφικής προβολής είναι ένα επίπεδο E και μια σφαίρα S η οποία εφάπτεται στο επίπεδο E σε ένα σημείο του O. Εναλλακτικά το επίπεδο E μπορεί να διέρχεται από το

κέντρο της σφαίρας. Με αυτήν την τελευταία μορφή της στερεογραφικής προβολής θα ασχοληθούμε εκτενώς στο αντίστοιχο κεφάλαιο.

Με την στερεογραφική προβολή ως προς το αντιδιαμετρικό σημείο U του σημείου O οι ευθείες και οι κύκλοι του E απεικονίζονται με μια επί (bijective) απεικόνιση σε κύκλους πάνω στην σφαίρα S. Το U λέγεται και αντίποδας του O.

Οι ευθείες του E, απεικονίζονται στις τομές της σφαίρας με επίπεδα τα οποία διέρχονται από το U και από τις ευθείες αυτές, ενώ οι κύκλοι του E απεικονίζονται στις τομές της σφαίρας S με κώνους των οποίων η κορυφή είναι το σημείο U. Οι κύκλοι της σφαίρας οι οποίοι είναι εικόνες των ευθειών του επιπέδου E διέρχονται από το U αλλά κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει με τις εικόνες των κύκλων του επιπέδου E.

Όπως αναφέραμε και πιο πάνω το επίπεδο E επεκτείνεται με το σημείο στο άπειρο (point at infinity) το οποίο με την χρήση της στερεογραφικής προβολής θα το θεωρούμε ως την εικόνα του αντίποδα U.

Σχήματα πάνω στο επίπεδο περιγράφονται με όρους που χρησιμοποιούμε για τις εικόνες τους στην σφαίρα S .Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι ευθείες του επιπέδου E περιγράφονται ως κύκλοι που διέρχονται από το σημείο στο άπειρο (και έτσι στο επεκτεταμένο επίπεδο κάθε τρία σημεία κείνται σε έναν και μόνο έναν κύκλο). Μέσω αυτών των συμβάσεων οι πέντε αρχές που αναφέραμε πιο πάνω μπορούν να συμπυκνωθούν ως εξής:

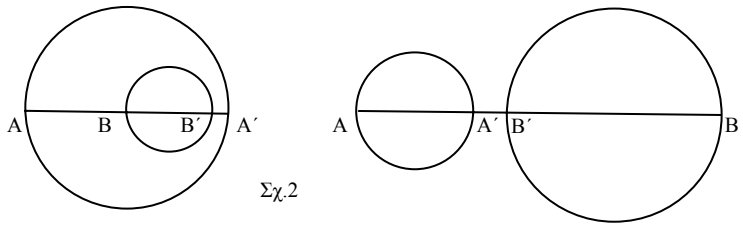
- Το σχήμα f είναι κύκλος του επεκτεταμένου επιπέδου αν και μόνο αν το f' είναι κύκλος.
- Αν οι κύκλοι f και g του επεκτεταμένου επιπέδου συναντώνται στο P τότε η γωνία των f και g με κορυφή το P ισούται ως προς το μέτρο με την γωνία των f' και g′ με κορυφή το P′ (αντίστροφο σημείο του P).

Μετασχηματισμοί που ικανοποιούν την τελευταία πρόταση και οι οποίοι διατηρούν αναλλοίωτο τον προσανατολισμό της γωνίας καλούντα σύμμορφοι (conformal).

Όπως είπαμε και πιο πάνω, δύο τεμνόμενοι ή εφαπτόμενοι ή μη τεμνόμενοι κύκλοι μπορεί να μετασχηματιστούν σε δύο τεμνόμενες ευθείες, σε δύο παράλληλες ευθείες ή σε δύο ομόκεντρους κύκλους αντίστοιχα. Όταν ένας κύκλος αντιστρέφεται σε μια ευθεία, η αντιστροφή ως προς τον κύκλο αυτόν μετασχηματίζεται σε ανάκλαση ως προς την ευθεία.

Έστω ότι αντιστρέφουμε δύο κύκλους α,β ως προς έναν κύκλο ω και το αποτέλεσμα είναι ο κύκλος α να απεικονίζεται στον β ενώ ο κύκλος β απεικονίζεται στον α. Ο κύκλος ω ως προς τον οποίο γίνεται μια τέτοια αντιστροφή, ονομάζεται μεσόκυκλος των κύκλων α,β.

Αν οι δύο κύκλοι α,β είναι συμπτώσιμοι, τότε μεσόκυκλος τους είναι ο ριζικός τους άξονας. Αν οι κύκλοι α,β τέμνονται, τότε τα κέντρα των μεσόκυκλων τους είναι τα σημεία τομής των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι δύο τεμνόμενοι κύκλοι α,β. Αν οι κύκλοι α,β εφάπτονται, ο μεσόκυκλος τους είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο τομής των δύο κοινών εξωτερικών εφαπτόμενων τους και διέρχεται από το κοινό τους σημείο.



Σχ.2

Έστω ότι οι κύκλοι α,β δεν τέμνονται, και ας υποθέσουμε ότι οι διάμετροι τους που βρίσκονται πάνω στην ευθεία της διακέντρου τους είναι οι AA′ και BB′ ενώ για τα σημεία A, B, A′, B′ έχουμε την εξής διάταξη: A, B, B′, A′ ή A, A′, B′, B όπως φαίνεται στο σχήμα 2. Τότε η διάμετρος του μεσόκυκλου τους σχηματίζεται από τα οριακά σημεία των μη τεμνόμενων κύκλων των οποίων οι διάμετροι είναι οι AB και A′B′ διότι αυτός ο κύκλος είναι ορθογώνιος στους κύκλους AB και A′B′ και αντιστρέφει το A στο B και το A′ στο B′.

Μια άλλη προσέγγιση του προβλήματος των μεσόκυκλων είναι η εξής: Έστω ότι δίνονται δύο κύκλοι α και β διαφορετικοί μεταξύ τους. Ας θεωρήσουμε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Π, όπου Π είναι το σημείο επαφής δύο κύκλων οι οποίοι εφάπτονται στους κύκλους α και β. Η αντιστροφή δείχνει ότι ο γεωμετρικός τόπος αποτελείται είτε από δύο ορθογώνιους μεταξύ τους κύκλους ή από έναν και μοναδικό κύκλο. Πιο συγκεκριμένα αν α και β

τέμνονται έχουμε δύο κύκλους που διχοτομούν τις παραπληρωματικές γωνίες των γωνιών που σχηματίζουν οι δύο τεμνόμενοι κύκλοι. Οι κύκλοι αυτοί ανήκουν στην δέσμη αβ. Αν α και β είναι δύο εφαπτόμενοι κύκλοι τότε έχουμε έναν κύκλο που ανήκει στην δέσμη αβ.
Η αντιστροφή ως προς έναν τέτοιο κύκλο αλλάζει τους κύκλους α και β μεταξύ τους. Δηλαδή ο αντίστροφος του α είναι ο β και το ανάποδο. Ένας τέτοιος κύκλος λοιπόν είναι μεσόκυκλος των α,β. Με επαναλαμβανόμενη εφαρμογή της κατασκευής μεσόκυκλων μπορούμε να βρούμε απεριόριστο αριθμό μελών της δέσμης αβ.
Δύο ζεύγη σημείων Α, Α΄ και Μ, Μ΄ λέγονται ορθοκυκλικά όταν υπάρχει ένας κύκλος ο οποίος διέρχεται από τα Α, Α΄ και ο οποίος αντιστρέφει το Μ στο Μ΄. Σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει επίσης ένας κύκλος που διέρχεται από τα Μ και Μ΄ και ο οποίος αντιστρέφει το Α στο Α΄. Πράγματι στην περίπτωση που τα Α, Α΄, Μ, Μ΄ δεν είναι ομοκυκλικά (η ομοκυκλική περίπτωση είναι τετριμμένη), ο κύκλος λ που διέρχεται από τα Α, Α΄ και αντιστρέφει το Μ στο Μ΄ είναι ορθογώνιος ως προς κάθε κύκλο που διέρχεται από τα Μ και Μ΄. Άρα ο λ θα είναι ορθογώνιος ως προς τους κύκλους ΜΜΆ και ΜΜΆ΄ καθώς ως προς τους μεσόκυκλους μ και μ΄ των κύκλων ΜΜ΄Α και ΜΜ΄Α΄ (οι μεσόκυκλοι δύο τεμνόμενων κύκλων διέρχονται από τα σημεία τομής τους). Οι αντιστροφές ως προς τους μ και μ΄ αφήνουν τον λ αναλλοίωτο (ως ορθογώνιο προς τους μ, μ΄) και αντιστρέφουν αμοιβαία τους ΜΜ΄Α και ΜΜΆ΄. Τα σημεία τομής δύο σχημάτων απεικονίζονται μέσω αντιστροφής στις τομές των εικόνων τους άρα οι αντιστροφές ως προς τους κύκλους μ, μ΄ επιτυγχάνουν το ζητούμενο δηλαδή απεικονίζουν το Α στο Α΄ και αντίστροφα.

Ιστορική Αναδρομή της Γεωμετρικής Αντιστροφής

Η γεωμετρία της αντιστροφής μπορεί να παρουσιαστεί και χωρίς την χρήση αριθμών. Μπορεί να παρουσιαστεί δηλαδή με εκείνα ακριβώς τα μέσα που είχαν στην διάθεσή τους οι αρχαίοι γεωμέτρες και υπάρχουν στοιχεία σήμερα που μας κάνουν να πιστεύουμε ότι η ιδέα της αντιστροφής (inversion) έρχεται από τους αρχαίους χρόνους. (Pappus, *Collectionis quae supersunt*, ed.by Hultsch, Berlin 1876, vol.I, pp.195ff., και vol. II, pp. 851-3. Επίσης Pappus, *Pappus d' Alexandrie, la collection mathematique,* trans. by V. Ecke , Bruges, 1932, vol.I, pp.177 ff. και vol. II p.657. Για περαιτέρω συζήτηση υπάρχει και το: Archibald, Raymond Clare, "Centres of Similitude of circles", American Math. Monthly, vol. XXII, 1915, 65.)
Η μαθηματικός Hilda Hudson (1927, 388) επίσης αναφέρει χρήση της αντιστροφής από τον Απολλώνιο τον Περγαίο.
Με το πέρασμα των αιώνων, οι γεωμέτρες σποραδικά συνήθιζαν να χρησιμοποιούν την αντιστροφή (inversion) για να λύσουν προβλήματα, τα οποία αναφέρονταν σε συγκεκριμένα σχήματα. Ποιος όμως και πότε, έκανε την πρώτη σαφή περιγραφή και συστηματική χρήση του μετασχηματισμού της αντιστροφής; Μια τέτοια σαφής περιγραφή εμφανίστηκε ξαφνικά στο προσκήνιο ή ήταν κάτι που ωρίμασε με την πάροδο του χρόνου; Ήταν αποτέλεσμα της δουλειάς ενός ανθρώπου ή ήταν περισσότεροι του ενός, αυτοί που έχουν την τιμή της συγκεκριμένης ανακάλυψης;
Ας πάρουμε τα πράγματα από την αρχή και ας δούμε κάποιες αναλογίες από την ιστορία των μαθηματικών σε σχέση πάντα με αυτό που ονομάζουμε μαθηματικές ανακαλύψεις.
Συχνά λέγεται ότι η ιστορία επαναλαμβάνεται. Είναι εξίσου αληθές όμως ότι η ιστορία κάποιες φορές γράφεται ταυτόχρονα και με τον ίδιο στην ουσία τρόπο σε διαφορετικά μέρη. Για να υποστηρίξουμε κάτι τέτοιο, θα αναφέρουμε μερικά παραδείγματα από την ιστορία των μαθηματικών, όπως την ταυτόχρονη ανακάλυψη του διαφορικού λογισμού από τους Newton και Leibnitz ή την σχεδόν ταυτόχρονη ανακάλυψη των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών από τον Ούγγρο Bolyai και το Ρώσο μαθηματικό Lobachevsky αφού όμως προηγήθηκε κατά μερικά χρόνια - όπως διαβάζουμε στην αλληλογραφία του - ο μεγάλος Gauss ο οποίος όμως δεν δημοσίευσε δυστυχώς τίποτα από τον φόβο κυρίως των Καντιανών. Οι ταυτόχρονες αυτές ανακαλύψεις είναι απλά σύμπτωση; Το πιθανότερο είναι πως όχι. Γιατί όμως να συμβαίνει κάτι τέτοιο; Η εξήγηση μάλλον είναι απλή και ικανοποιητική. Ανακαλύψεις σαν και αυτές δεν ξεπήδησαν από το μηδέν, ούτε εμφανίστηκαν τυχαία, αλλά μάλλον ως φυσικό αποτέλεσμα μιας μακράς σειράς γεγονότων και διαδικασιών που εξελίχθηκαν βαθμιαία και

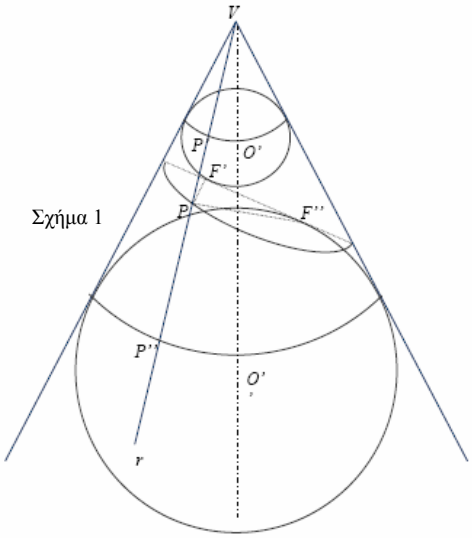
με αργούς ρυθμούς για πάρα πολλά χρόνια. Σε αυτήν την μακρά πορεία λοιπόν και αφού οι συνθήκες ωριμάσουν εμφανίζεται η ιδιοφυΐα εκείνη που θα κάνει το αποφασιστικό και κρίσιμο βήμα.
Αναφορικά με την ανακάλυψη του απειροστικού λογισμού από τον Newton, είναι αρκετά ενδιαφέρον να αναφέρουμε ότι πολλά βασικά στοιχεία αυτής της ανακάλυψης βρίσκουμε στο έργο του δάσκαλου του Newton και εξαιρετικού γεωμέτρη, Isaac Barrow. Αυτά τα στοιχεία όμως είναι τόσο καλά κρυμμένα πίσω από την γεωμετρική γλώσσα που χρησιμοποιεί ο Barrow, ώστε μόλις τον δέκατο ένατο αιώνα η επιστημονική έρευνα κατάφερε να τα φέρει στο φως.
Αν ο Newton είχε εκτιμήσει την αξία του έργου του δασκάλου του ή αν δεν ήταν σε θέση να κάνει κάτι τέτοιο, δεν είναι κάτι που έχει ιδιαίτερη σημασία. Αυτό που έχει σημασία για εμάς είναι το γεγονός ότι ο δάσκαλος Barrow κινούνταν στην ίδια γραμμή σκέψης η οποία οδήγησε τον Newton στην μεγάλη ανακάλυψη. Στο παράδειγμα πάλι των μη Ευκλείδειων γεωμετριών έχουμε προσπάθειες που κράτησαν πάνω από δύο χιλιάδες χρόνια για να αποδειχθεί το πέμπτο αίτημα του Ευκλείδη, προσπάθειες που οδήγησαν ανάμεσα σε άλλους τον Sacceri έναν σχεδόν αιώνα πριν τον Bolyai στο κατώφλι της ανακάλυψης των μη Ευκλείδειων γεωμετριών κάτι που δυστυχώς όμως δεν κατάφερε να κάνει.
Αυτό ακριβώς συνέβη και με την γεωμετρία της αντιστροφής.
Όταν κάποιος προσπαθήσει να βρει ποιον πρέπει να πιστώσει με την ανακάλυψη της γεωμετρίας αυτής, έρχεται τελικά αντιμέτωπος με πολύ μικρές υποσημειώσεις και αναφορές οι οποίες, τις περισσότερες φορές είναι αλληλοσυγκρουόμενες μεταξύ τους. Για παράδειγμα ο Chasles στο έργο του: Rapport sur les Progrés de la Géometrié, Paris,1870,pp. 140,351 αναφέρει τους Quételet και τον Bellavitis ως τους πρώτους που έκαναν χρήση της μεθόδου αυτού του μετασχηματισμού, αλλά μάλλον αισθάνεται όχι και τόσο σίγουρος για αυτά που ισχυρίζεται μια και σε άλλα σημεία του έργου του ομολογεί πως δεν είναι ενήμερος για το τι έχουν κάνει οι Γερμανοί, αφού δεν είναι γνώστης της γλώσσας τους. Από την άλλη μεριά ο Bützberger υποστηρίζοντας ότι η τιμή της ανακάλυψης ανήκει στον Steiner, δεν αναφέρει τίποτα για το αν είχαν κάνει κάποια πράγματα πάνω στο ίδιο θέμα οι Quételet και Dandelin που ήταν σύγχρονοι του Steiner παρόλο που είναι πολύ προσεκτικός ώστε να μην παραλείψει να τονίσει πως ο Steiner, είχε προηγηθεί κατά δέκα με είκοσι χρόνια σε σχέση με όλους τους άλλους που αναφέρει. Στόχος μας στην παρούσα ιστορική αναδρομή είναι να παρουσιάσουμε τα γεγονότα όπως ακριβώς προκύπτουν μέσα από την μελέτη των πηγών και πιστεύουμε πως κάτι τέτοιο θα μπορούσαμε να το καταφέρουμε ακολουθώντας την όσο το δυνατόν πιστότερη και ακριβέστερη χρονολογική παρουσίαση του έργου του κάθε ενός από τους ερευνητές εκείνους που δικαιούνται να έχουν μερίδιο σε αυτήν την ανακάλυψη.

Οι πρωτεργάτες

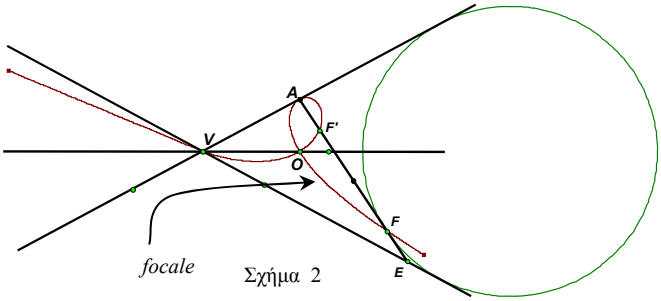
Dandelin 1794-1847

Θα αρχίσουμε την παρουσίαση μας με τον Dandelin (1794-1847).
Στον δεύτερο τόμο των Nouveaux Mémoires της Ακαδημίας των Βρυξελλών για το έτος 1816 βρίσκουμε μια σημείωση στην οποία αναφέρεται ότι ο Quetelet (που εκλέχθηκε μέλος της το 1820) είχε παρουσιάσει μια εργασία με τον τίτλο “sur quelques nouvelles propriétés de la focale et sur autres courbes”.

Σχήμα 1

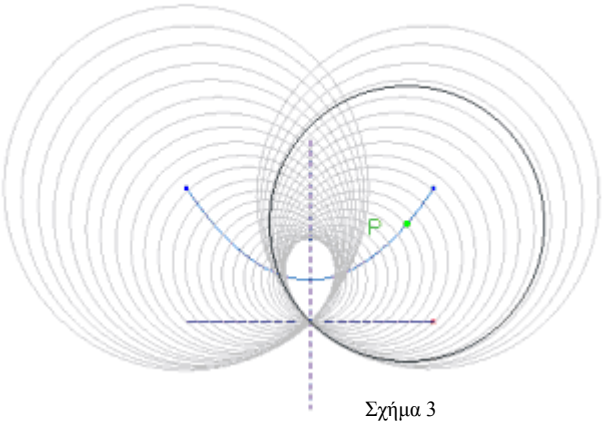


Στην εργασία αυτή, κατέληγε σε κάποια οριστικά αποτελέσματα σε σχέση με κάποιες παλαιότερες μελέτες του που αφορούσαν την όπως την ονόμαζε focale, μια καμπύλη η οποία όπως είχε ανακαλύψει, μοιράζονταν πολλές κοινές ιδιότητες με άλλες γνωστές καμπύλες. Αυτή η εργασία ωστόσο δεν εκδόθηκε ποτέ και ο Quetelet απέσυρε το ενδιαφέρον του για αυτήν, από την στιγμή που έμαθε πως ο φίλος του Dandelin ερευνούσε το ίδιο αντικείμενο. Η εργασία του Dandelin "Mémoires sur quelques propriétés remarquables de la focale parabolique" που ανακοινώθηκε στην συνεδρία της 1ης Απριλίου του 1822 αξίζει να μνημονευθεί, διότι περιέχει την πρώτη ανακοίνωση των αποτελεσμάτων των ερευνών του σχετικά με τις εστιακές σφαίρες ενός κώνου:



Σχήμα 2

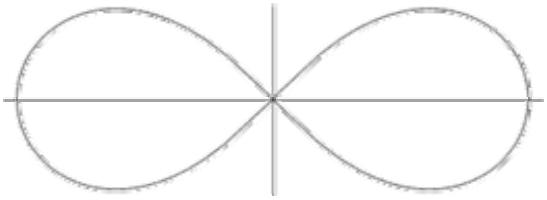
Ένα επίπεδο Ε τέμνει έναν ορθό κυκλικό κώνο κατά μια κωνική τομή. Οι δύο σφαίρες που είναι εγγεγραμμένες σε αυτόν τον κώνο και εφάπτονται με το επίπεδο Ε, έχουν σαν σημεία επαφής με το επίπεδο Ε, τις εστίες της κωνικής τομής (σχήμα 1). Αν το επίπεδο Ε κινείται διερχόμενο πάντα από ένα σταθερό σημείο Α, το οποίο βρίσκεται πάνω στον κώνο και ταυτόχρονα είναι κάθετο προς το επίπεδο που ορίζεται από το σημείο Α και τον άξονα του κώνου, τότε οι εστίες τη κωνικής τομής που σχηματίζεται με αυτόν τον τρόπο διαγράφουν την focale του Quetelet (σχήμα 2). Ο Dandelin προχωρεί δίνοντας αρκετούς τρόπους παραγωγής της focale και αποδεικνύει: ότι αυτή είναι η περιβάλλουσα ενός συστήματος κύκλων, των οποίων τα κέντρα βρίσκονται σε μια παραβολή και περνάνε από ένα σταθερό σημείο της διευθετούσας της παραβολής.



Σχήμα 3

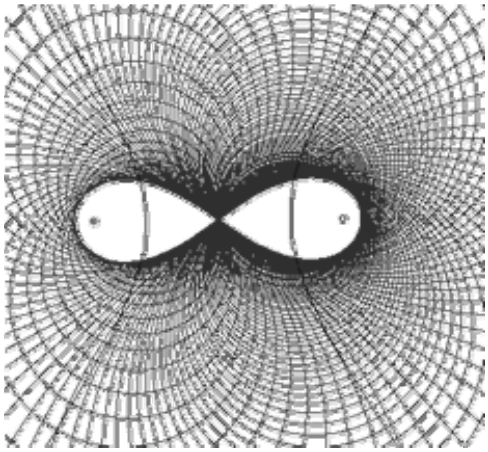
Για μια καλύτερη κατανόηση μπορούμε να μελετήσουμε το διπλανό σχήμα 3.

Μέσω στερεογραφικής προβολής η οποία προβάλει κύκλους σε κύκλους, η focale προβάλλεται σε ένα σύστημα κύκλων πάνω στην σφαίρα, το οποίο ο Dandelin ονόμασε spheri –focale. Με μια δεύτερη στερεογραφική προβολή, από την σφαίρα προς ένα δεύτερο επίπεδο με κέντρο της στερεογραφικής προβολής το γωνιακό σημείο της spheri- focale, δίνει ως προβολή μια κωνική. Η κωνική αυτή είναι υπερβολή της οποίας το σημείο στο άπειρο είναι η στερεογραφική προβολή του γωνιακού σημείου της spheri –focale. Με λίγα λόγια αυτή ήταν η μέθοδος προσέγγισης του Dandelin. Όμως το πιο ενδιαφέρον κομμάτι της προσέγγισης του δεν έχει αναφερθεί ακόμα. Αυτό είναι ένας πίνακας σύγκρισης των ιδιοτήτων της υπερβολής, της focale και της spheri –focale. Αυτός ο πίνακας, είναι στην ουσία μια αναδιατύπωση μέσω αντιστροφής, κάποιων ιδιοτήτων της ισοσκελούς υπερβολής. Τα στοιχεία του πίνακα αυτού που αφορούν την focale, είναι στην ουσία τα ίδια με εκείνα που αφορούν την spheri –focale.



Η μελέτη της στερεογραφικής προβολής, μοιάζει να είναι πολύ δημοφιλής εκείνη την εποχή και το γεγονός ότι είναι μια ειδική περίπτωση της αντιστροφής του χώρου, είναι κάτι το πολύ σημαντικό. Μια δεύτερη εργασία του Dandelin που μπορούμε να βρούμε στο Nouveaux Mėmoires, t.IV και η οποία

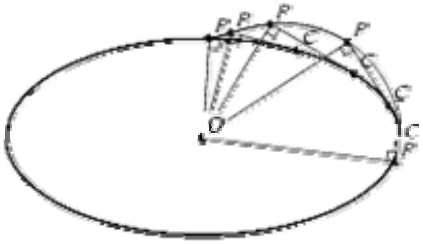
ανακοινώθηκε στην συνεδρία της 7ης Μαΐου του 1825 με τον τίτλο " Mėmoire sur l' employ des projections stereographiques en géométrie," αναφέρεται σε μια λύση του προβλήματος του Απολλώνιου (κατασκευή ενός κύκλου ο οποίος εφάπτεται σε τρεις δεδομένους κύκλους), με την μέθοδο της στερεογραφικής προβολής.
Η τελευταία και πιο σημαντική αναφορά στον Dandelin, είναι η εργασία του με τίτλο "Sur les intersections de la sphere et d' un cone du second degré" η οποία ανακοινώθηκε στις 4 Ιουνίου του 1825. Σε αυτήν την εργασία του ο Dandelin αναφέρει ότι η ποδική καμπύλη[2] μιας παραβολής ή έλλειψης ή υπερβολής είναι μια focale καμπύλη ή μια κογχοειδής[3] καμπύλη ή ένας λημνίσκος[4] και υιοθετεί το όνομα λημνίσκος για όλες τις ποδικές καμπύλες των κωνικών.



Οι λημνίσκοι, είναι γενικά περιβάλλουσες[5] ενός κινούμενου κύκλου του οποίου το κέντρο κείται πάνω σε μια κωνική, και ο οποίος διέρχεται από ένα σταθερό σημείο.
Χωρίς να μπούμε σε λεπτομέρειες, θα αναφέρουμε ότι σε αυτήν την εργασία του ο Dandelin κάνει εκτεταμένη χρήση της στερεογραφικής προβολής. Θα δώσουμε αρχικά τον ορισμό της καυστικής καμπύλης (caustic curve). Αν δοθεί μια καμπύλη C και μια σημειακή πηγή φωτός τότε η περιβάλλουσα των ακτινών μετά την ανάκλασή τους στην C λέγεται καυστική καμπύλη της C. Ο Dandelin ανακάλυψε ένα θεώρημα που αναφέρονταν στους λημνίσκους ως ενειλιγμένες των καυστικών καμπυλών των κωνικών.
Θεωρώντας τον λημνίσκο ως μια περιβάλλουσα ενός συστήματος κύκλων, τον προβάλλει πάνω στην σφαίρα της στερεογραφικής προβολής και έτσι παίρνει μια καμπύλη πάνω στην σφαίρα, που έχει τις ίδιες ιδιότητες ως προς τους κύκλους και τις τομές, όπως και ο λημνίσκος (συμμορφικότητα). Το σχήμα που προκύπτει πάνω στην σφαίρα, το ονομάζει σφαιρικό λημνίσκο. Αποδεικνύει επίσης ότι ο σφαιρικός λημνίσκος είναι η τομή της σφαίρας ως προς την οποία γίνεται η στερεογραφική προβολή, με έναν κώνο δευτέρου βαθμού του οποίου η κορυφή βρίσκεται πάνω στην σφαίρα αυτή. Ένα άλλο αποτέλεσμα στο οποίο οδηγείται είναι και η κατασκευή λημνίσκων με την βοήθεια δύο διαδοχικών στερεογραφικών προβολών ως προς μια σφαίρα με κέντρο ένα σημείο A, τυχαία ακτίνα R και αντίστοιχο επίπεδο της στερεογραφικής προβολής το επίπεδο του εν λόγω λημνίσκου. Σε αυτήν την κατασκευή, έχουμε σαφή χρήση του τύπου $AD \cdot AB = R^2$ (τύπος γεωμετρικής αντιστροφής), όπου D είναι το τυχαίο σημείο του λημνίσκου και B σημείο της κωνικής η οποία είναι το αντίστροφο σχήμα του λημνίσκου ως προς τον κύκλο που βρίσκεται στο επίπεδο του λημνίσκου και ο οποίος έχει κέντρο το A και ακτίνα R .
Συνεχίζοντας την ιστορική αυτή αναδρομή θα αναφερθούμε στον Quetelet (1796-1874).

---

[2] Ποδική καμπύλη μιας καμπύλης C ως προς ένα σημείο O είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων τα οποία είναι τα ίχνη των καθέτων από το O προς τις εφαπτόμενες ευθείες της καμπύλης



[3] Conchoid –καμπύλη με εξίσωση: $(x - b)^2(x^2 + y^2) - a^2x^2 = 0$
[4] lemniscate-καμπύλη με εξίσωση: $[(x-c)^2+y^2]\,[(x+c)^2+y^2]=c^4$
[5] περιβάλλουσα είναι η καμπύλη στην οποία εφάπτεται κάθε καμπύλη μιας οικογένειας καμπυλών.

Το θεώρημα του Dandelin που αναφέρονταν στους λημνίσκους ως ενειλιγμένες των καυστικών καμπυλών δεν ήταν ένα αποτέλεσμα το οποίο προέκυψε αρχικά από αυτόν. Ο Quetelet στην εργασία του "Mémoire sur une nouvelle maniére de considerer les caustiques, produites, soit par réflexion siot par réfraction" κατάφερε να αποδείξει αρκετές προτάσεις για την σχέση των λημνίσκων με τις καυστικές καμπύλες με χρήση της στερεογραφικής προβολής. Αυτή η εργασία παρουσιάστηκε στην Ακαδημία των Βρυξελλών στις 3 Φεβρουαρίου του 1823, αλλά αφού κρίθηκε αναγκαία από τον Quetelet η προσθήκη κάποιων επιπλέον πραγμάτων και η διόρθωση κάποιων άλλων, η εργασία αυτή παρουσιάστηκε στην τελική της μορφή τον Φεβρουάριο του 1825. Είναι πολύ σημαντικό ότι ο ίδιος αναφέρει πως με μεγάλη του χαρά, ανακάλυψε ανάλογα συμπεράσματα και στις εργασίες του Sturm (μερικά από τα συμπεράσματα του Sturm μπορούν να βρεθούν στους τόμους 14-17 των GERGONNE'S Annales de Mathématiques pures et appliqués). Από τις ημερομηνίες που παρατίθενται πιο πάνω, μπορεί να βγει το συμπέρασμα ότι οι Quetelet και Sturm προηγήθηκαν του Dandelin. Σχεδόν όλη η δουλεία του Dandelin πάνω στο συγκεκριμένο αντικείμενο, μπορεί να βρεθεί με το ένα ή τον άλλο τρόπο σε προηγούμενες εργασίες. Υπάρχει μια εξαίρεση όμως, και αυτή είναι η κατασκευή που αυτός δίνει του λημνίσκου από τις κωνικές και αντίστροφα, μέσω του τύπου $AD \cdot AB = R^2$ που αναφέραμε πιο πάνω. Αυτό μας βάζει σε σκέψεις. Ίσως ο Dandelin δεν θεωρούσε αυτήν την κατασκευή μέσω αντιστροφής του λημνίσκου ως ένα τυχαίο και απλό συμπέρασμα όσο φαίνεται να είναι. Πιθανόν λοιπόν να παρουσίασε όλα αυτά τα συμπεράσματα, που όπως είπαμε με το ένα ή τον άλλο τρόπο εμφανίζονται σε προηγούμενες εργασίες (και που σίγουρα ήταν κάτι που αναγνώριζε και ο ίδιος), απλά για να στρώσει τον δρόμο ώστε να θεμελιώσει την σχέση αντιστροφής που συνδέει τους λημνίσκους με τις αντίστοιχες κωνικές.

Quetelet (1796-1874)

Στις 5 Νοέμβριου του 1825 ο Quetelet παρουσίασε μια εργασία στην Ακαδημία των Βρυξελλών με τον τίτλο "Résumé d'une nouvelle théorie des caustiques, etc." Στην εισαγωγή αυτής της εργασίας, αναφέρει πως αναζητώντας μια μέθοδο για να απλοποιήσει τον ορισμό των καυστικών καμπυλών, έχει οδηγηθεί σε μια πολύ απλή αρχή η βάση της οποίας βρίσκεται στην θεώρηση των καυστικών γενικά ως εξειλιγμένες άλλων καμπυλών που είναι πιο εύκολο να βρεθούν είτε αναλυτικά ή με γεωμετρική κατασκευή. Και αυτές οι καμπύλες με τις οποίες ελπίζει να αντικαταστήσει τις καυστικές μπορούν να παραχθούν με έναν ενιαίο τρόπο. Σε προηγούμενες εργασίες του έχει αναχθεί η θεωρία των καυστικών σε θεωρία περιβαλλουσών και εξειλιγμένων και παρατήρησε ότι 1. η πηγή του φωτός 2. η καμπύλη ανάκλασης 3. η καυστική και 4. η ενειλιγμένη της (η δεύτερη καυστική) συνδέονται με τέτοιο τρόπο μεταξύ τους ώστε αν γνωρίζουμε δύο από αυτά τα τέσσερα να μπορούμε να πάρουμε τα δύο άλλα με τον περιορισμό όμως πως αυτά που γνωρίζουμε δεν είναι τα δύο τελευταία μαζί. Ο Quetelet συνεχίζει θεμελιώνοντας την θεωρία του και ένα από τα συμπεράσματα στα οποία καταλήγει είναι και το εξής: Η πολική μιας καμπύλης έχει για αντίστροφή της μια καμπύλη όμοια με την δεύτερη καυστική της δοθείσης καμπύλης. Αυτό σε συνδυασμό με το θεώρημα που λέει πως η πολική μιας επίπεδης καμπύλης μετά από δύο στερεογραφικές προβολές γίνεται όμοια με την αντίστροφή της, δίνει την σχέση μεταξύ δύο διαδοχικών στερεογραφικών προβολών και της αντιστροφής. Ο Quetelet δεν σταμάτησε εδώ. Σε μια σημείωση του αποδεικνύει ότι η αντίστροφη μια καμπύλης f(x,y)=0 μέσω της αντιστροφής ως προς τον κύκλο $x^2 + y^2 = r^2$ είναι μια καμπύλη G(x΄,y΄)=0 της οποίας οι συντεταγμένες (x', y') συνδέονται με τις συντεταγμένες της f(x,y)=0 με τους τύπους $x = \dfrac{x' r^2}{x'^2 + y'^2}, y = \dfrac{y' r^2}{x'^2 + y'^2}$ και τις

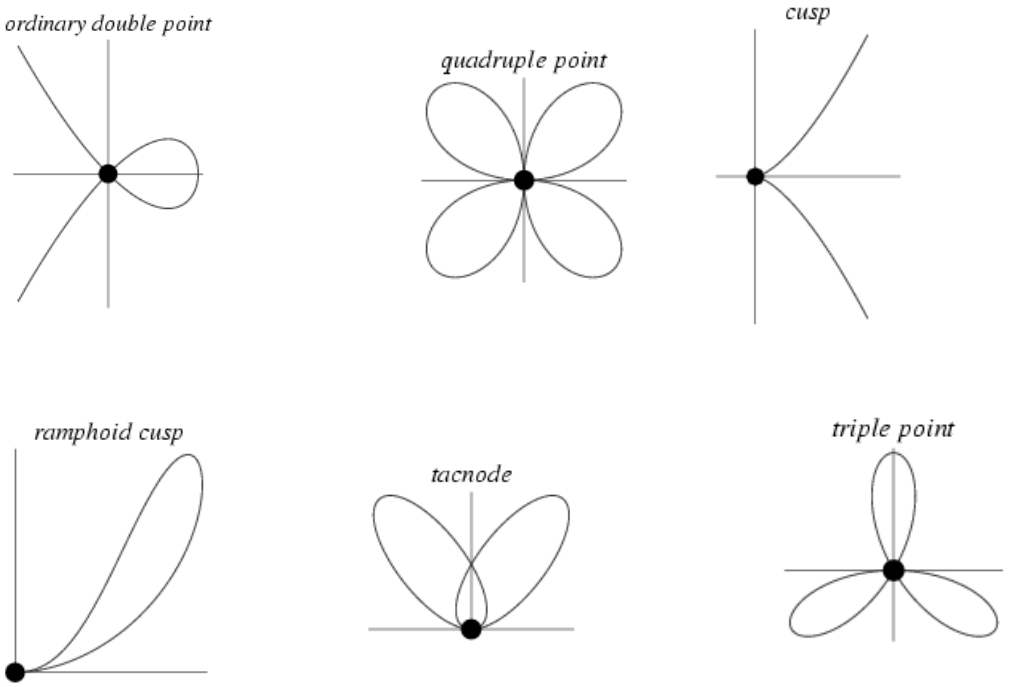
χρησιμοποιεί για πάρει την εξίσωση της πολικής καμπύλης από την εξίσωση της ποδικής αφού οι δύο αυτές καμπύλες είναι αντίστροφες.
Σε αυτό το σημείο τελειώνουμε την αναφορά μας στον Quetelet και συνεχίζουμε με τον Jakob Steiner (1796-1863).
Οι εργασίες του Jakob Steiner γύρω στο 1820 που είναι σε μεγάλο μέρος τους αδημοσίευτες, δείχνουν μια εξαιρετική γνώση της αντιστροφής και ιδιαίτερη άνεση στην χρήση της, όμως δεν δείχνουν μια συνεκτική και συγκροτημένη θεωρία σε σχέση με αυτόν τον μετασχηματισμό.
Μετά τον θάνατο του Jacob Steiner το 1863 τα αδημοσίευτα χειρόγραφα, γράμματα και διάφορες επιστημονικές εργασίες του, αποθηκεύτηκαν στην Δημοτική Βιβλιοθήκη της Βέρνης (Bern) όπου τριάντα χρόνια μετά, ο καθηγητής Graf κατάφερε να τα διασώσει από την λησμονιά και να τα φέρει πάλι στην επιφάνεια..
Ο Graf τα παρέδωσε στον καθηγητή Bützberger ο οποίος θα έκανε μια κριτική μελέτη και θα φρόντιζε για την τελική τους δημοσίευση.

Jakob Steiner (1796-1863)

Γύρω στο 1826 ο Jakob Steiner είχε σχεδόν τελειώσει ένα χειρόγραφο, το οποίο αποτελείτο από περίπου 360 σελίδες. Το χειρόγραφο αυτό διαπραγματεύονταν την: "Allgemeine Theorie des Berührens und Schneidens der Kreise auf der Kugelfläche mit vielen neuen Sätzen und Untersuchungen in einem systematischen Entwicklungsgange dargestellt". Ο καθηγητής Bützberger θεωρεί πως μετά την δημοσίευση αυτής της εργασίας του Steiner, καθώς και την σαφή διατύπωση της αρχής της αντιστροφής σε ένα χειρόγραφό του που έχει ημερομηνία 8 Φεβρουαρίου 1824, δεν μένει καμία αμφιβολία ότι ήταν ο Jakob Steiner αυτός που θεμελίωσε και εφάρμοσε ότι ο Liouville ονόμασε "the transformation of reciprocal radii".Το αδημοσίευτο αυτό χειρόγραφο του Steiner με ημερομηνία 8 Φεβρουαρίου 1824 περιέχεται σε μια μονογραφία του καθηγητή Bützberger με τίτλο: "Űber Bizentrische Polygone Steinersche Kreis-und Kugelreihen und die Erfindung der Inversion" την οποία δημοσίευσε το 1913. Σε αυτό το χειρόγραφο φαίνεται η σκέψη του Steiner και ο τρόπος που εργαζόταν την εποχή που ανακάλυψε την αντιστροφή. Επίσης περιέχει πάρα πολλά θεωρήματα καθώς και αποδείξεις που έχουν θεμελιακό χαρακτήρα ως προς την αντιστροφή. Θα αναφέρουμε μερικά από τα περιεχόμενα του χειρογράφου όπως τα περιέχει η μονογραφία του Bützberger:
Ο Steiner αρχίζει τις σημειώσεις του με την διατύπωση ενός θεωρήματος το οποίο έχει ως εξής: Θεωρούμε ότι δίνεται ένα σταθερό σημείο Σ και ένας κύκλος Μ με κέντρο C και ακτίνα R. Έστω μια οποιαδήποτε τέμνουσα L του κύκλου Μ η οποία περνάει από το Σ. Έστω επίσης δύο σημεία Δ, Ε που ανήκουν στην τέμνουσα L και τα οποία χωρίζουν τα τμήματα με άκρα το σημείο Σ και τα σημεία τομής Α και Β της τέμνουσας με τον κύκλο Μ σε σταθερό λόγο λ. Αποδεικνύεται ότι τα σημεία Δ,Ε ανήκουν σε έναν κύκλο ο οποίος έχει με τον κύκλο Μ το σημείο Σ ως εξωτερικό κέντρο ομοιότητας.
Κατόπιν αναφέρει ότι αν Q είναι το σημείο το οποίο διαιρεί την χορδή κάθε τέμνουσας του κύκλου (Μ) σε δεδομένο λόγο ο γεωμετρικός τόπος του Q είναι ένας κύκλος όταν το σημείο Σ βρίσκεται στην περιφέρεια του (Μ) ή όταν ο λόγος της διαίρεσης που προαναφέραμε είναι ίσος με 1/2. Σε κάθε άλλη περίπτωση το Q διαγράφει μια κλειστή καμπύλη (ο τύπος της οποίας ποικίλει αναλόγως με την θέση του σημείου Σ ως προς τον κύκλο (Μ)). Ας υποτεθεί τώρα ότι η ΣΝQP είναι μια τέμνουσα που διέρχεται από το σημείο Σ και η οποία τέμνει τον κύκλο (Μ) στο σημείο Ρ και της οποίας η χορδή διχοτομείται από το σημείο Ν. Το σημείο Q είναι το σημείο που διαιρεί την συγκεκριμένη χορδή σε δεδομένο λόγο έστω NQ/NP=m= σταθερό. Θέτοντας ΣC=α και ΣQ=ρ και την γωνία ∠CΣQ=φ έχουμε ότι το σημείο Q διαγράφει την καμπύλη της οποίας η πολική εξίσωση είναι $\rho = a\cos\phi \pm m\sqrt{R^2 - a^2\sin^2\phi}$.

Η καρτεσιανή εξίσωση της καμπύλης $(x^2+y^2-ax)^2=m^2[R^2x^2-(a^2-R^2)y^2]$ δείχνει ότι το σημείο Σ είναι ένα ιδιάζων σημείο (singular point[6]). Εδώ ο Steiner σταματάει την συζήτηση για την εν λόγω καμπύλη. Αλλά είναι άξιο παρατήρησης το ότι μια αντιστροφή ως προς το σημείο Σ (κέντρο της αντιστροφής) μετασχηματίζει αυτήν την τέταρτης τάξης καμπύλη σε μια κωνική. Η κωνική μπορεί να είναι έλλειψη , υπερβολή ,παραβολή ανάλογα με το αν η καμπύλη έχει ένα μεμονωμένο διπλό σημείο, ένα πραγματικό διπλό σημείο ή ένα ακιδωτό σημείο (cusp).
Ο Steiner συνεχίζοντας δίνει έναν ορισμό της αντιστροφής. Εδώ θα παρατηρήσουμε τα εξής: Ο Poncelet, όπως ο Bützberger παρατηρεί, είχε αναφερθεί σε δυο αντιστοιχίσεις ανάμεσα στα σημεία δύο κύκλων: Σε κάθε τέμνουσα που διέρχεται από το κέντρο ομοιότητας Σ των δύο κύκλων, υπάρχουν δύο ζεύγη σημείων Α, Α΄ και Β, Β΄ για τα οποία οι αντίστοιχες ακτίνες είναι παράλληλες. Την αντιστοιχία μεταξύ του σημείου Α του ενός κύκλου με το σημείο Α΄ του άλλου κύκλου και των οποίων οι αντίστοιχες ακτίνες είναι παράλληλες, ο Poncelet την ονόμασε ευθεία ομολογία (direct homology). Την αντιστοιχία που συνδέει το σημείο Α με το Β΄ των οποίων οι αντίστοιχες ακτίνες δεν είναι παράλληλες την ονόμασε αντίστροφη ομολογία (inverse homology). Στην δεύτερη αυτή περίπτωση όπως αυτός αποδεικνύει ισχύει η σχέση: $\Sigma A\cdot\Sigma B'=\Sigma B\cdot\Sigma A'=$ σταθερό. Ο Poncelet όμως ενδιαφέρεται για τον πρώτο μετασχηματισμό, αυτόν της ομοιότητας. Και είναι ο δεύτερος μετασχηματισμός για τον οποίο ενδιαφέρεται ο Steiner και τον οποίο αναφέρει στον ορισμό που δίνει στο χειρόγραφο του για την αντιστροφή. Αυτό που πρέπει να παρατηρήσουμε είναι ότι διαβάζοντας το συγκεκριμένο χειρόγραφο του Steiner, γίνεται αμέσως φανερό ότι επεξεργάζεται μια καινούργια ιδέα όπως και το ότι έχει πλήρη συνείδηση αυτού του γεγονότος, πράγμα μπορεί να συμπεράνει κανείς και από το ότι το εν λόγω χειρόγραφο είναι κάτι τελείως διαφορετικό από τα υπόλοιπα γραπτά του Steiner. Είναι ασύνδετο και του λείπει η ακρίβεια και η σαφήνεια που χαρακτηρίζει όλα τα γραπτά του Steiner. Αυτό που επίσης αξίζει να τονιστεί εδώ είναι ότι ο Steiner δεν περιορίστηκε στην αντιστροφή μόνο των κύκλων. Με σαφή τρόπο αναφέρει ότι η αντιστροφή μιας παραβολής δίνει μια κλειστή καμπύλη που διέρχεται από το κέντρο της αντιστροφής. Επίσης διαπιστώνει ότι η αντιστροφή μιας υπερβολής διέρχεται πάντα από το κέντρο της αντιστροφής ενώ οι ασύμπτωτες μετασχηματίζονται σε δύο ασυμπτωτικούς κύκλους. Αυτός κατόπιν θέτει την ερώτηση: ποια είναι η αντιστροφή της έλλειψης; Αν η έλλειψη διέρχεται από το κέντρο της

[6] Singular point=ένα σημείο σε μια καμπύλη το οποίο έχει ιδιάζουσα συμπεριφορά



αντιστροφής τότε ποια είναι η εικόνα της μέσω της αντιστροφής; Αν η κορυφή της υπερβολής ή της παραβολής διέρχεται από το κέντρο της αντιστροφής τότε ποια είναι η αντιστροφή τους; Οι παράλληλες ευθείες αντιστρέφονται σε εφαπτόμενους κύκλους; Σε τι αντιστρέφονται τότε ομόκεντροι κύκλοι; Ο Steiner δεν δίνει κάποιο στοιχείο που να δείχνει πώς έφτασε στην γνώση της αντίστροφης καμπύλης μιας παραβολής ή μιας υπερβολής.
Εδώ τελειώνουμε τα σχόλια πάνω στο κρίσιμο αυτό χειρόγραφο. Θα αναφέρουμε μόνο ότι στο υπόλοιπο της μονογραφίας του ο Bützberger, παρουσιάζει κάποια άλλα θέματα που διαπραγματεύθηκε ο Steiner, τα περισσότερα από τα οποία βρέθηκαν σε άλλα χειρόγραφα του στην βιβλιοθήκη της Βέρνης.
Είναι σημαντικό να πούμε επίσης ότι ο Bützberger αναφέρει μια εργασία η οποία έγινε από έναν μαθητή του Steiner πάνω στην στερεογραφική προβολή (η οποία γράφτηκε το 1826) κάνοντας έτσι την εικασία ότι ο Steiner έφτασε στην ανακάλυψη της αντιστροφής με τα ίδια μέσα με τα οποία οδηγήθηκαν σε αυτή οι δύο Βέλγοι που προαναφέραμε. Κάτι τέτοιο όμως δεν προκύπτει από την ανάγνωση του χειρογράφου του Steiner. Ο Bützberger πάλι είναι της γνώμης ότι ο Steiner επεξεργάστηκε την "Wiedergeburt und Auferstehung" του σε ένα χειρόγραφο με τίτλο "Abspiegelung" που θεωρείται χαμένο στις μέρες μας και το οποίο ο ίδιος ο Steiner αναφέρει σε κάποιο άλλο αδημοσίευτο χειρόγραφο του με ημερομηνία Δεκέμβριος 1824.
Εξ΄ αιτίας ενός μεγάλου αριθμού σημαντικών θεωρημάτων που δημοσιεύθηκαν από τον Jacob Steiner στα πρώτα τεύχη του *Crelle's Journal*, έγινε πολύ νωρίς σαφές ότι ήταν εξοικειωμένος με τον μετασχηματισμό της αντιστροφής και έκανε εκτεταμένη χρήση του. Το ότι ο Steiner πιθανόν να επεξεργάστηκε την θεωρία του για την αντιστροφή για αρκετό καιρό μπορεί να φανεί και από δύο δημοσιευμένες εργασίες του: την "Einige geometrische Betrachtungen" που γράφτηκε τον Μάρτιο του 1826 και την "Die geometrischen Constructionen ausgeführt mittelst der geralen Linie und eines festen Kreises" που εμφανίστηκε το 1833. Αυτές οι εργασίες περιέχουν πολλά που με σύγχρονο μάτι θα αναγνωρίζαμε ως αντιστροφή. Πιο συγκεκριμένα στην πρώτη από τις δύο εργασίες ο Steiner αναφέρεται σε δυο σημεία Χ, Υ δύο δεδομένων κύκλων που έχουν το σημείο Α εξωτερικό κέντρο ομοιότητας[7] έτσι ώστε τα Α, Χ, Υ να είναι συγγραμμικά και το γινόμενο $AX \cdot AY$ να ισούται με μια σταθερά την οποία πρωτύτερα ο Steiner είχε ορίσει ως κοινή δύναμη των δύο κύκλων. Στην δεύτερη εργασία του, αναφέρει ότι τα δύο σημεία Χ, Υ που αναφέραμε πιο πάνω δεν χρειάζεται να βρίσκονται στους δύο δοθέντες κύκλους αλλά αρκεί να βρίσκονται πάνω σε μια ημιευθεία, που έχει αρχή το εξωτερικό κέντρο ομοιότητας ώστε το γινόμενο $AX \cdot AY$ να ισούται με μια δοσμένη σταθερά.
Ο Bützberger είναι της γνώμης ότι ο Steiner όχι μόνο γνώριζε, αλλά έκανε εκτεταμένη χρήση και της συμμορφικότητας του μετασχηματισμού της αντιστροφής αφού πολλά συμπεράσματα του, που δημοσίευσε χωρίς αποδείξεις, είναι αποτέλεσμα ενός τέτοιου τρόπου σκέψης. Περιέργως και για έναν ανεξήγητο λόγο Steiner, κράτησε την ανακάλυψη του κρυφή. Ένα ακόμα από τα αδημοσίευτα χειρόγραφά του, με τίτλο "Allgemeine Theorie über das Berühren und Schneiden der Kreise und der Kugeln etc." το οποίο αναφέρεται στην γεωμετρία του κύκλου και της σφαίρας τοποθετεί τον Steiner ως έναν από τους πιο σημαντικούς ερευνητές σε αυτό το πεδίο. Είναι ένας ερευνητής, που πηγαίνει πολύ μακρύτερα από τους συγχρόνους του σε αυτό το πεδίο και ανακαλύπτει πράγματα, τα οποία γίνονται μετά από χρόνια γνωστά όταν ανακαλύπτονται εκ νέου από άλλους.
Ωστόσο ο Julius Plücker σε ένα άρθρο που δημοσιεύθηκε στο ίδιο περιοδικό που δημοσίευε συνήθως ο Steiner (δηλαδή το Crelle's Journal) και στο οποίο παρουσίασε μια αναλυτική απόδειξη για την διάσημη λύση που έδωσε ο Jacob Steiner πάνω στο πρόβλημα του Malfatti (πρόβλημα στο οποίο θα αναφερθούμε εκτενέστερα σε άλλο μέρος αυτής της εργασίας) καθώς και για την γενίκευσή του, υπαινισσόταν παράλληλα ότι ο Jacob Steiner πιθανόν να μην είχε απόδειξη για την κατασκευή αυτού του προβλήματος. Ο υπαινιγμός του όμως είναι

[7] Έστω ότι έχουμε δύο κύκλους (Μ), (Ν) με διαφορετικά κέντρα Κ,Λ. Γράφουμε τις παράλληλες ακτίνες ΚΠ και ΛΠ΄ οι οποίες έχουν την ίδια φορά. Φέρνουμε την ευθεία ΠΠ΄ η οποία τέμνει τη διάκεντρο των δύο κύκλων σε ένα σημείο Δ. Το σημείο Δ καλείται εξωτερικό κέντρο ομοιότητας των κύκλων (Μ), (Ν). Ισχύει επίσης: (ΔΚ/ΔΛ)=ακτίνα του (Μ)/ακτίνα του (Ν)

μάλλον άδικος και δείχνει ότι ο Julius Plücker δεν είχε αντιληφθεί και κατά συνέπεια δεν μπορούσε να εκτιμήσει, την δύναμη και την αυθεντικότητα των μεθόδων του Jacob Steiner.
Πάντως, η πρώτη σαφής περιγραφή της αντιστροφής (inversion) ως μετασχηματισμού των σημείων τα οποία είναι διαφορετικά από το κέντρο του κύκλου της αντιστροφής, δημοσιεύθηκε από τον Julius Plücker το 1831 (Julius Plücker 1831, 219).
Ο Jacob Steiner από την άλλη μεριά περιφρονούσε ως καρικατούρες, μερικές απλοϊκές εφαρμογές της αρχής της αντιστροφής που έκαναν ο Julius Plücker όπως επίσης και ο Magnus.
Θα συνεχίσουμε την αναφορά μας με τους αυτούς τους δύο, δηλαδή τον Magnus (1790-1861) και τον Plücker (1801-1868).
Σε προηγούμενο σημείο αναφερθήκαμε στην αντιστοιχία των ομολογικών σημείων (Homologous points) του Poncelet (ευθεία ή αντίστροφα.) τα οποία επεξεργάστηκε στο έργο του "Traité des Propriétés Projectives". Νωρίτερα στο ίδιο βιβλίο βρίσκουμε μια αναφορά για ένα μετασχηματισμό αντίστροφων σημείων (reciprocal points) ως προς ένα σύστημα ομοαξονικών κύκλων ή κωνικών. Μια δεκαετία αργότερα ο Magnus σε ένα άρθρο που είχε τον τίτλο "Nouvelle méthode pour découvrir des theorems de géométrie" δίνει μια αναλυτική ανάπτυξη αυτού του μετασχηματισμού. Είναι ενδιαφέρον για εμάς το ότι αναφέρει ως ειδική περίπτωση τον μετασχηματισμό της αντιστροφής.

Plücker.(1801-1868)

Ας θεωρήσουμε μια ένα προς ένα αντιστοιχία των σημείων (x,y) του επιπέδου p και των σημείων (t,u) του επιπέδου p΄ μέσω του μετασχηματισμού $\{At+Bu+C=0,\ A't+B'u+C'=0\}$ όπου A,B,C,A΄,B΄,C΄ είναι γραμμικές συναρτήσεις των x,y. Σε κάθε σημείο του επιπέδου p αντιστοιχίζεται ένα σημείο του επιπέδου p΄, σε μια ευθεία του p΄ μια κωνική του p που διέρχεται από τρία σταθερά σημεία κ.λ.π.
Ο Magnus αναπτύσσει αυτόν τον μετασχηματισμό σε αρκετά μεγάλη έκταση και δείχνει την σχέση που έχει με την θεωρία των πόλων και των πολικών. Προτείνει μια ειδική περίπτωση των εξισώσεων $\{At+Bu+C=0,\ A't+B'u+C'=0\}$ οι οποίες με μια συγκεκριμένη επιλογή συντελεστών γίνονται :

$$\{axt+byu+1=0,\quad yt-xu=0\}.$$

Οπότε και προκύπτει ότι :

$$t=\frac{-x}{ax^2+by^2}$$

$$u=\frac{-y}{ax^2+by^2}$$

Και στην ευθεία $u=gt+h$ του p΄ αντιστοιχεί μια κωνική του p και πιο συγκεκριμένα η: $ax^2+by^2+\frac{y}{h}-\frac{gx}{h}=0$ Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχουμε για τους g και h δηλαδή για οποιαδήποτε ευθεία του p΄ (που δεν περνάει από την αρχή) οι δύο πρώτοι όροι της $ax^2+by^2+\frac{y}{h}-\frac{gx}{h}=0$ δεν αλλάζουν οπότε στις ευθείες του p΄ αντιστοιχεί στο p ένα σύστημα κωνικών όμοιων και όμοια τοποθετημένων οι οποίες διέρχονται από την αρχή. Η αρχή είναι το ένα από τα τρία σταθερά σημεία του p. Μετά την αναφορά πολλών στοιχείων που αφορούν αυτόν τον ειδικό αυτό μετασχηματισμό ο Magnus επισημαίνει ότι αν πάρουμε a=b τότε έχουμε έναν μετασχηματισμό με τον οποίο κύκλοι αντιστοιχούν σε ευθείες και οι γωνίες διατηρούνται.
Στην εργασία του Steiner "Einige geometrische Betrachtungen" βρίσκουμε χωρίς απόδειξη μια κατασκευή του προβλήματος του Malfatti, το οποίο διαπραγματεύεται την εγγραφή σε ένα δοσμένο τρίγωνο, τριών κύκλων, οι οποίοι εφάπτονται ο ένας στον άλλο και κάθε ένας από αυτούς εφάπτεται σε δύο πλευρές του τριγώνου. Αναφέρει δε την κατασκευή αυτή ως

ένα παράδειγμα της γονιμότητας των θεωρημάτων που έχει παρουσιάσει σε προηγούμενο μέρος της εργασίας του. Το αποτέλεσμα ήταν να δαπανηθεί πάρα πολλή ενέργεια και χρόνος από άλλους μαθηματικούς για να αποδείξουν την κατασκευή που παρέθεσε ο Steiner. Ανάμεσα στις προσπάθειες αυτές και τις ποικίλες λύσεις που δόθηκαν, είναι και η λύση που έδωσε ο Plücker μέσω ενός άρθρου του που είχε τον τίτλο: "Analytisch-geometrischen Aphorismen".

Ο Plücker πράγματι έδωσε την λύση καθώς και μια γενίκευση με γεωμετρικές και αναλυτικές μεθόδους και συνοδεύει αυτήν την προσπάθεια με μια αναφορά της εργασίας του "neues Übertragungs-Princip", που είναι στην ουσία μια αναλυτική ανάπτυξη του μετασχηματισμού της αντιστροφής.

Ο Bützberger στην αναφορά του για την ανακάλυψη της αντιστροφής, υποστηρίζει ότι ο Plücker εκφράζει την υποψία ότι ο ίδιος ο Steiner δεν μπόρεσε να αποδείξει την κατασκευή που έδωσε πάνω στο πρόβλημα του Malfatti. Αυτό που μπορεί να ειπωθεί με σιγουριά είναι ότι ο Plücker αναφέρει ότι δεν μπορεί να δει πως το μέρος της εργασίας του Steiner που προηγείται της κατασκευής του προβλήματος του Malfatti, οδηγεί πράγματι στην κατασκευή αυτή και ως εκ τούτου για έναν άνθρωπο σαν και αυτόν (δηλαδή τον Plücker), το συμπέρασμα που βγαίνει είναι ότι η κατασκευή που δόθηκε από τον Steiner δεν μπορεί να αποδειχθεί. Ο Bützberger πάλι εκφράζει την άποψη ότι η μέθοδος του μετασχηματισμού που χρησιμοποίησε ο Plücker έχει διατυπωθεί νωρίτερα από τον Magnus στην εργασία του που αναφέραμε πιο πάνω και η οποία προηγήθηκε κατά δύο χρόνια σε σχέση με την εργασία του Plücker. Όμως έχουμε ήδη δει πόσο λίγη σημασία έδωσε ο Magnus σε αυτόν τον μετασχηματισμό και θα δούμε πιο κάτω πόσο μπροστά από όλους τους προηγούμενούς του (του Magnus συμπεριλαμβανομένου) προχώρησε με τις μελέτες του ο Plücker σχετικά με τον συγκεκριμένο μετασχηματισμό. Αυτό που πρέπει να πούμε στο συγκεκριμένο σημείο είναι ότι δεν μπορούμε με σιγουριά να ισχυριστούμε ότι ο Magnus προηγήθηκε του Plücker και αυτό γιατί παρόλο που η εργασία του Plücker εκδόθηκε το 1834 ενώ του Magnus το 1832 η εργασία του Plücker έχει την ημερομηνία: *Βόννη Οκτώβριος του 1831*. Επιπλέον οι απαρχές του μετασχηματισμού του Plücker μπορούν να ανιχνευθούν στο έργο του "Analytisch- Geometrische Entwicklungen" που δημοσιεύθηκε στην Έσση το 1828.

Η παρουσίαση της αντιστροφής από τον Plücker δίνεται στην ενότητα V της εργασίας του "Analytisch-geometrischen Aphorismen" (σελίδες 219-225) και κάτω από τον τίτλο "Über ein neues Übertragungs-Princip". Αυτός ορίζει τα αντίστροφα σημεία ως δύο σημεία τα οποία βρίσκονται σε μια ευθεία που διέρχεται από το κέντρο ενός δεδομένου κύκλου έτσι ώστε το κάθε ένα από αυτά να βρίσκεται στην πολική ευθεία του άλλου ως προς τον συγκεκριμένο κύκλο. Επιπλέον αναφέρει ότι ο γεωμετρικός τόπος των αντίστροφων σημείων ενός σημείου που κείται στην περιφέρεια ενός κύκλου είναι ένας άλλος κύκλος. Δύο κύκλοι οι οποίοι είναι αντίστροφοι ως προς έναν κύκλο έχουν κοινό ριζικό άξονα με τον κύκλο της αντιστροφής και το κέντρο του κύκλου της αντιστροφής είναι κέντρο ομοιότητας των δύο αντίστροφων μεταξύ τους κύκλων. Αν ένας κύκλος διέρχεται από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής τότε η αντίστροφή του είναι μια ευθεία γραμμή. Ο Plücker αναφέρει σε πολλά σημεία της εργασίας του ότι μέσω του γεωμετρικού αυτού μετασχηματισμού κάθε γεωμετρικό θεώρημα το οποίο αναφέρεται μόνο σε σχέσεις θέσης και γωνιών τυχαίων κύκλων και ευθειών παράγει ένα νέο θεώρημα που αναφέρεται στις ίδιες σχέσεις μεταξύ κάποιων άλλων κύκλων και κάποιων άλλων ευθειών που διέρχονται από ένα σταθερό σημείο. Προφανώς ήταν ενήμερος αναφορικά με την συμμορφικότητα του μετασχηματισμού.

Στην παράγραφο 5 της εργασίας του αποδεικνύει ότι ένα σύστημα ομόκεντρων κύκλων αντιστρέφεται σε ένα σύστημα ομοαξονικών κύκλων και ότι ο ριζικός άξονας του αντίστροφου συστήματος είναι ο ριζικός άξονας του κύκλου της αντιστροφής και του κύκλου του συστήματος των ομόκεντρων κύκλων ο οποίος διέρχεται από το κέντρο της αντιστροφής. Επιπλέον το σύστημα των αντίστροφων κύκλων έχει ένα χαρακτηριστικό ζεύγος αντίστροφων σημείων. Το ζεύγος αυτό αποτελείται από τα εξής σημεία: α) το αντίστροφο σημείο του κέντρου του συστήματος των ομόκεντρων κύκλων β) το κέντρο του κύκλου αντιστροφής[8]. Τελικά η παράγραφος 5 της εργασίας του Plücker δίνει μια πλήρη απάντηση

[8] Σε αυτήν την πρόταση θα αναφερθούμε με λεπτομέρειες σε επόμενο μέρος της εργασίας μας.

στο ερώτημα που είχε θέσει ο Steiner σχετικά με το ποια είναι η εικόνα, μέσω αντιστροφής ως προς κύκλο, ενός συστήματος ομόκεντρων κύκλων. Στο τέλος ο Plücker δίνει μια λύση στο πρόβλημα της αντιστροφής δύο δεδομένων κύκλων σε δύο κύκλους με ίση ακτίνα και κατόπιν λύνει το αντίστοιχο πρόβλημα με τρεις κύκλους καθώς και το πρόβλημα του Απολλώνιου. Σίγουρα ο Plücker, δεν ήταν τόσο πρωτοπόρος, σε σχέση με αυτά που ανακάλυψε, όσο ίσως πίστευε ο ίδιος. Το γεγονός όμως είναι ότι σίγουρα είχε να πει πολύ περισσότερα για αυτά τα πράγματα από αυτούς που προηγήθηκαν. Η κριτική που του ασκήθηκε από τον Bützberger ότι οι μέθοδοί του δεν ήταν καθαρά γεωμετρικές, είναι ίσως αρκετά ακριβής. Από την άλλη μεριά αν δούμε τα συμπεράσματά του, δεν θα πρέπει να σταθούμε και τόσο στην μέθοδο, αφού αυτή ήταν εκατό τοις εκατό έγκυρη από μαθηματικής απόψεως.

Χαρακτηριστικό στοιχείο όλων των εργασιών τις οποίες παραθέσαμε μέχρι τώρα είναι ότι καμία δεν περιέχει τίποτα περισσότερο από έναν ορισμό για την αντιστροφή και μερικές εφαρμογές πάνω σε αυτή και όλα αυτά δοσμένα με έναν πολύ αυστηρό τρόπο. Επιπλέον κοιτώντας πίσω, βλέπουμε ότι ο κάθε ένας από τους πρωτοπόρους της αντιστροφής έφτασε στην ανακάλυψή του από διαφορετικό δρόμο. Το συμπέρασμα αυτό βέβαια προκύπτει αποκλειστικά και μόνο από όσα ο συγκεκριμένος ερευνητής έχει γράψει. Οι Dandelin και Quetelet οδηγήθηκαν στην μορφοποίηση της αρχής της αντιστροφής από την μελέτη της στερεογραφικής προβολής. Ο Steiner μέσα από την θεωρία των ομοίων σχημάτων. Ο Magnus μέσα από την θεωρία των πόλων και των πολικών.

Κατά την διάρκεια των επόμενων δύο δεκαετιών, η αντιστροφή (inversion) "*ξαναανακαλύφτηκε"* από πολλούς μαθηματικούς και φυσικούς, οι οποίοι παρουσίαζαν συνήθως τα ιδιαίτερα εκείνα χαρακτηριστικά τα οποία απαιτούνταν για την διαπραγμάτευση των συγκεκριμένων προβλημάτων με τα οποία ασχολούνταν. Μερικές από τις θεωρήσεις τους ήταν περισσότερο γενικές και περιείχαν την αντιστροφή ως ιδιαίτερο χαρακτηριστικό. Ως παράδειγμα θα αναφέρουμε την δουλειά του Giusta Bellavitis (1836) και του J.R.Ingram (1842 και 1843). Αργότερα ο William Thomson (Lord Kelvin) εφάρμοσε την γεωμετρία της αντιστροφής για να υπολογίσει το αποτέλεσμα μιας σημειακής τάσης σε ένα γειτονικό αγωγό που αποτελείται από δύο τεμνόμενα επίπεδα. Θα αναφερθούμε στον Giusta Bellavitis όπως και σε κάποιους άλλους πιο σύγχρονούς χωρίς να μπούμε σε ιδιαίτερες λεπτομέρειες.

Ο Giusta Bellavitis (1803-1880) έγραψε αρκετά για την αντιστροφή. Το πρώτο από τα γραπτά του για το θέμα αυτό εμφανίσθηκε το 1836 και έχει τον τίτλο: "Teoria delle figure inverse e loro uso nella Geometria elementare". Στο έργο αυτό φαίνεται πως είναι αρκετά ενήμερος για το γεγονός ότι ο μετασχηματισμός αυτός είχε προταθεί και από πολλούς άλλους. Αν ανατρέξει κάποιος στο περιοδικό Bulletin Universel[9] θα δει ότι εκεί ο Bellavitis κάνει μια περιληπτική αναφορά στο έργο του Quetelet πάνω στις καυστικές καμπύλες. Σε αυτήν την περίληψη αναφέρεται επίσης ότι ο Dandelin καθώς και ο Sturm έχουν εργαστεί πάνω στο ίδιο αντικείμενο.

Στο πρώτο μέρος του έργου του "Teoria delle figure inverse e loro uso nella Geometria elementare" ο Bellavitis δεν αναφέρει κάτι σημαντικό. Στο δεύτερο μέρος αναφέρεται στην αντιστροφή στο χώρο. Εδώ η επεξεργασία γίνεται μέσω γεωμετρικών θεωρήσεων και το πιο σημαντικό αποτέλεσμα στο οποίο καταλήγει είναι ότι η στερεογραφική προβολή είναι μια αντιστροφή της σφαίρας πάνω στο επίπεδο με κέντρο της αντιστροφής ένα σημείο πάνω στην σφαίρα. Στο τρίτο μέρος της εργασίας του αναφέρεται στις αντιστροφές των κωνικών τομών. Συνδέει την επεξεργασία του με την θεωρία των καυστικών καμπυλών (caustic curves) και σε μεγάλο βαθμό ακολουθεί την ίδια πορεία με την πορεία που ακολούθησε ο Quetelet. Τις καμπύλες που ο Quetelet ονόμασε δεύτερες καυστικές (secondary caustics) ο Bellavitis τις ονόμασε ενειλιγμένες καυστικές (involute caustics). Κατόπιν ασχολείται με την μελέτη των αντιστροφών των ελλείψεων, των υπερβολών και των παραβολών, και για όλες αυτές συνάγει μια σειρά από ιδιότητες, που παράγονται μέσω αντιστροφής από τις γνωστές ιδιότητες των κωνικών αυτών. Η εργασία τελειώνει με μια αναλυτικής φύσης αναφορά στις εξισώσεις των αντιστροφών των κωνικών τομών.

---

[9] " Bulletin des sciences Mathèmatiques, première section du Bulletin Universel, t. 12 (1829), No 117,p 193)"

Ξεκινώντας την ιστορική μας αναδρομή σχετικά με την καταγωγή της γεωμετρικής αρχής της αντιστροφής από το Βέλγιο, περάσαμε στην Γερμανία, κατόπιν στην Ιταλία και θα κλείσουμε αυτόν τον κύκλο στο Δουβλίνο. Στο ένα και μοναδικό τεύχος του περιοδικού Transactions of the Dublin Philosophical Society (1842) και συγκεκριμένα στην σελίδα 145, βρίσκουμε ένα άρθρο με τίτλο: ”On the application of a new Principle to the geometry of curves and curved surfaces” το οποίο είχε γράψει ο J. W. Stubbs. Η νέα αρχή, για την οποία μιλάει ο τίτλος, είναι η αρχή της αντιστροφής. Ο Stubbs δεν κάνει σε κανένα σημείο του άρθρου λόγο για προηγούμενες έρευνες σχετικά με αυτήν την αρχή, εκτός από μια αναφορά στον Ingram, ο οποίος κατά τον Stubbs, ανακάλυψε την αρχή αυτή ταυτόχρονα και ανεξάρτητα από αυτόν και επιπλέον πρότεινε τον όρο inverse, για να εκφράσει την σχέση μεταξύ των αντιστοίχων καμπυλών. Στη σελίδα 58 του ίδιου περιοδικού, βρίσκουμε ένα άρθρο του ίδιου του Ingram με τον τίτλο: “Geometrical properties of certain Surfaces”, που είναι το άρθρο το οποίο έχει στο μυαλό του ο Stubbs όταν μιλάει για τον Ingram. Στο άρθρο αυτό ο Ingram εισάγει την αντιστροφή κατά την διαπραγμάτευση ενός προβλήματος πάνω σε μια συγκεκριμένη επιφάνεια. Από το γενικότερο πλαίσιο βγαίνει το συμπέρασμα ότι το άρθρο αυτό προηγείται του άρθρου του Stubbs. Στην σελίδα 159 βρίσκουμε ένα δεύτερο άρθρο του Ingram με τίτλο “On the properties of inverse Curves and Surfaces” στο οποίο γίνεται αναφορά στα δύο άρθρα για τα οποία μιλήσαμε προηγουμένως, ενώ ο Stubbs από την άλλη μεριά, επεξεργάζεται την θεωρία του σε δύο εργασίες που δημοσιεύθηκαν το 1843 και το 1844.

Είναι πάρα πολύ περίεργο να βρίσκει κανείς τόσες πολλές «ανεξάρτητες» ανακαλύψεις για την αρχή της αντιστροφής.

Ο W. Thomson έστειλε από το Cambridge αρκετά γράμματα στον Liouville (το πρώτο με ημερομηνία 8 Οκτωβρίου του 1845) στα οποία συζητάει την λύση ενός συγκεκριμένου προβλήματος ηλεκτρισμού μέσω της αρχής των εικόνων (Principle of images), ή για να το πούμε αλλιώς, μέσω της αρχής των αντίστροφων σημείων (Principle of reciprocal points), τα οποία είναι ακριβώς τα αντίστροφα σημεία μέσω της αντιστροφής ως προς μια σφαίρα.

Ο Liouville επισυνάπτει μια σημείωση σε ένα από τα γράμματα του προς στον W. Thomson στην οποία διαπραγματεύεται αναλυτικά την θεωρία του Thomson και παράλληλα της δίνει το όνομα: *Transformation par rayons réciproques*. Επιπλέον αποδεικνύει την συμμορφικότητα του μετασχηματισμού και τον χρησιμοποιεί για να βρει τις γραμμές καμπυλότητας της περιβάλλουσας μιας σφαίρας που εφάπτεται σε τρεις δοθείσες σφαίρες - ένα πρόβλημα που είχε διαπραγματευθεί προηγουμένως ο Dupin.

Η κορύφωση όμως, όλων αυτών των μορφοποιήσεων της αρχής της αντιστροφής, ήρθε το 1855 με το έργο “Theorie der Kreisverwandschaften in rein geometrischer Darstellung” του F. Möbius. Η εν λόγω εργασία, ήταν η συνέχεια μιας προηγούμενης εργασίας του με τίτλο: “Ueber eine neue Verwandschaft zwischen ebenen Figuren” στην οποία αναπτύσσει τα βασικά στοιχεία της θεωρίας του. Σύμφωνα με τον γεωμέτρη Julian L. Coolidge η εργασία αυτή (F. Möbius-1855) είναι η πρώτη σαφής γεωμετρική θεωρία της γεωμετρίας της αντιστροφής.

Μετά τον F. Möbius η γεωμετρία της αντιστροφής ουσιαστικά γίνεται μια πάρα πολύ γνωστή θεωρία. Αξίζει λοιπόν να δούμε πιο αναλυτικά την συνεισφορά του F. Möbius.

Πριν προχωρήσουμε στην ουσία αλλά και στα παράγωγα της προσφοράς του Möbius, αξίζει να πούμε ότι ο Mario Pieri[10] προκειμένου να θέσει τις βάσεις της δικής του αξιωματικής θεμελίωσης της γεωμετρίας της αντιστροφής, από την μια μεριά κάνει αναφορές στον Steiner (1826) και στον Bellavitis (1836) για την ανάπτυξη της ιστορικής πλευράς του ζητήματος, ενώ από την άλλη θεωρεί ως βασική πηγή του την οποία και χρησιμοποιεί στην εργασία του, την δουλειά του Möbius (1855) καθώς και την εργασία του Theodor Reye (1879).

---

[10] Ο Mario Pieri ήταν ένας από αυτούς που ανέπτυξαν αυτήν την γεωμετρία αξιωματικά σε δύο εργασίες: 1911d και 1912c, *New principles of the geometry of inversion*.

Ο Möbius έδειξε (όχι με αυτήν την διατύπωση) ότι κάθε συνεχής μετασχηματισμός του επεκτεταμένου επιπέδου ο οποίος απεικονίζει κύκλους σε κύκλους είναι μια ομοιότητα - σύνθεση μιας στερεάς κίνησης και μιας ομοιοθεσίας (αλλαγής κλίμακας) - ή σύνθεση μιας ομοιότητας και μιας αντιστροφής (inversion). Αργότερα όμως ο Gaston Darboux βρήκε ότι η υπόθεση της συνέχειας δεν ήταν απαραίτητη για την ισχύ αυτού του επιχειρήματος. Στην ουσία οι ομοιότητες είναι οι μετασχηματισμοί οι οποίοι απεικονίζουν συνευθειακά σημεία σε συνευθειακά σημεία (collineations) καθώς και πεπερασμένους (finite) κύκλους σε πεπερασμένους κύκλους. Οι στερεές κινήσεις του επιπέδου είναι ανακλάσεις σε ευθείες ή συνθέσεις δύο ή τριών ανακλάσεων και οι αλλαγές κλίμακας είναι συνθέσεις αντιστροφών (inversions) ως προς δύο ομόκεντρους κύκλους. Έτσι ένας μετασχηματισμός του επεκτεταμένου επιπέδου ο οποίος απεικονίζει κύκλους σε κύκλους είναι υποχρεωτικά αντιστροφή (inversion) ή σύνθεση αντιστροφών (inversions) το πλήθος των οποίων είναι μέχρι τέσσερις. Αυτοί οι μετασχηματισμοί συχνά καλούνται μετασχηματισμοί Möbius ή Kreisverwandtschaften και συνθέτουν την ομάδα αντιστροφής (inversive group) του επιπέδου.

Στο πρόγραμμα Erlanger ο Felix Klein[11] περιέγραψε την επίπεδη γεωμετρία αντιστροφής (plane inversive geometry), περιεκτικά και περιληπτικά, ως την μελέτη των ιδιοτήτων του επεκτεταμένου επιπέδου που μένουν αναλλοίωτες κάτω από την ομάδα αντιστροφής (ο Felix Klein θεώρησε ως ομάδα αντιστροφής την ομάδα των μετασχηματισμών Möbius). (Möbius 1855, section 5; Darboux 1880,60-61; Coolidge 1916, chapter 8; Klein 1872, section 6; Carathéodory 1937, reprinted in Blair 2000, section 2.6).

Είναι σαφές ότι οι μετασχηματισμοί του Möbius αντιστοιχούν ισομορφικά στους μετασχηματισμούς της σφαίρας S οι οποίοι απεικονίζουν κύκλους σε κύκλους.

Κάθε κύκλος πάνω στην S είναι η τομή της σφαίρας S με ένα επίπεδο το οποίο την τέμνει. Αυτή η αντιστοιχία μεταξύ των κύκλων της σφαίρας και των επιπέδων τα οποία την τέμνουν είναι επί (bijective). Επιπλέον οι μετασχηματισμοί της σφαίρας S που διατηρούν το σύνολο των κύκλων της αντιστοιχούν ισομορφικά με τους μετασχηματισμούς του χώρου που διατηρούν το σύνολο των επιπέδων τα οποία τέμνουν την σφαίρα S. Αυτοί είναι οι προβολικοί μετασχηματισμοί του χώρου οι οποίοι διατηρούν το σύνολο σημείων S. Αν εξοπλίσουμε το χώρο με ένα σύστημα ομογενών συντεταγμένων[12] (homogeneous coordinates) τότε η σφαίρα S είναι το σύνολο των σημείων που οι συντεταγμένες τους ικανοποιούν κάποια δευτεροβάθμια εξίσωση *E*. Έτσι η ομάδα αντιστροφής (inversive group) είναι ισομορφική με την ομάδα των προβολών (projectivities) του χώρου που διατηρούν το σύνολο των λύσεων της δευτεροβάθμιας εξίσωσης *E*. Μέσω της πιο πάνω περιγραφής μπορούμε να αντικαταστήσουμε την *E* με οποιαδήποτε δευτεροβάθμια εξίσωση προβολικά ισοδύναμη με αυτήν της σφαίρας. Έτσι η γεωμετρία αντιστροφής περιγράφεται πολλές φορές σαν την γεωμετρία των επίπεδων τομών μιας δευτεροβάθμιας επιφάνειας (geometry of plane sections of a quadric surface).

Όλα τα χαρακτηριστικά της επίπεδης γεωμετρίας της αντιστροφής που μόλις περιγράψαμε έχουν αναλογίες στην αντίστοιχη γεωμετρία του χώρου. Η αντιστροφή ως προς μια σφαίρα έχει ιδιότητες ανάλογες με τις ιδιότητες της αντιστροφής ως προς έναν κύκλο.

Ο τρισδιάστατος χώρος επεκτείνεται με ένα επιπλέον σημείο στο άπειρο (∞) και τα επίπεδα θεωρούνται ως σφαίρες που διέρχονται από αυτό το σημείο (δηλαδή από το σημείο στο

---

[11] Πολλά σημεία του προγράμματος Erlanger του Felix Klein, τα οποία αναφέρονται στην γεωμετρία της αντιστροφής αλλά και γενικότερα στις διάφορες γεωμετρίες, θα σχολιαστούν στην πορεία αυτής της εργασίας.

[12] Ομογενείς συντεταγμένες: Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σημείο (x,y) στο Ευκλείδειο Επίπεδο. Για να παραστήσουμε το σημείο αυτό στο προβολικό επίπεδο αντικαθιστούμε το ζεύγος (x,y) με το ζεύγος (x,y,1). Το (x,y,1) είναι το ίδιο με το ζεύγος (ax,ay,a1) για οποιοδήποτε $a\neq 0$. Με άλλα λόγια το $(X,Y,W)=(aX,aY,aW)$ με οποιοδήποτε $a\neq 0$. Οι συντεταγμένες (X,Y,W) καλούνται ομογενείς συντεταγμένες του σημείου. Χωρίς να υπεισέλθουμε σε επιπλέον λεπτομέρειες θα αναφέρουμε ότι μια από τις χρήσεις των ομογενών συντεταγμένων είναι η περιγραφή της έννοιας του απείρου, έννοια που στο σύστημα των Ευκλείδειων συντεταγμένων δεν μπορεί να περιγραφεί.

άπειρο) έτσι ώστε κάθε 4 μη ομοκυκλικά σημεία να κείνται πάνω σε μοναδική σφαίρα. Η ανάκλαση ως προς ένα επίπεδο μπορεί να θεωρηθεί ως αντιστροφή (inversion) ως προς μια σφαίρα η οποία διέρχεται από το κατ΄ εκδοχήν σημείο δηλαδή από το σημείο στο άπειρο.
Η αναλογία επεκτείνεται και στον ορισμό της ομάδας της αντιστροφής (inversive group) καθώς και στον χαρακτήρα της ομάδας αυτής όπως αυτός διαμορφώνεται μέσα από την οπτική γωνία που δίνουν οι Möbious και Darboux όπως επίσης και στην ισομορφικότητα με την ομάδα των προβολών του τετραδιάστατου χώρου που διατηρεί το σύνολο λύσεων μιας δοθείσης δευτεροβάθμιας εξίσωσης.
Υπερχώροι (hyperspaces) διάστασης μεγαλύτερης του τρία μπορούν να επεκταθούν με τον ίδιο τρόπο και ανάλογοι ορισμοί και θεωρήματα μπορούν να παρουσιαστούν για ανακλάσεις (reflections) ως προς υπερεπίπεδα (hyperplanes) και για αντιστροφές (inversions) ως προς υπερσφαίρες (hyperspheres) καθώς και για ομάδες αντιστροφής ως προς διαστάσεις μεγαλύτερες.
Παρ' όλα αυτά δεν είναι ίδια όλα τα χαρακτηριστικά για μεγαλύτερες διαστάσεις. Σύμφωνα με το διάσημο θεώρημα του Joseph Liouville για το οποίο μιλήσαμε και πιο πάνω η συμμορφικότητα (conformality) καθώς και κάποια συνθήκη παραγωγισιμότητας είναι επαρκή στοιχεία για να μας βεβαιώσουν ότι ένας μετασχηματισμός ανήκει στην ομάδα αντιστροφής με διάσταση 3. Το αποτέλεσμα στο οποίο ο Liouville κατέληξε έχει προσφάτως επεκταθεί και για διαστάσεις μεγαλύτερες από τρία.
Η κατάσταση είναι διαφορετική για τις δύο διαστάσεις. Το επεκτεταμένο επίπεδο εισάγεται μέσω της ίδιας κατασκευής με τη σφαίρα του Riemann η οποία είναι αρκετά γνωστή στους μελετητές της μιγαδικής ανάλυσης (complex analysis). Η άλγεβρα των μιγαδικών αριθμών μπορεί να χρησιμοποιηθεί αντί των καρτεσιανών συντεταγμένων για να περιγραφεί η γεωμετρία της αντιστροφής και έτσι έχουμε το πλεονέκτημα της στενής σχέσης ανάμεσα στην γεωμετρία αυτή και στην μιγαδική ανάλυση. Για παράδειγμα όλες οι ένα προς ένα (injective) ολομορφικές[13] (holomorphic) συναρτήσεις είναι σύμμορφοι (conformal) μετασχηματισμοί του επεκτεταμένου επιπέδου και το θεώρημα του Riemann (Riemann mapping theorem) δίνει την γκάμα των μετασχηματισμών αυτών οι οποίοι δεν είναι μετασχηματισμοί Möbius.

Γεωμετρία της αντιστροφής και Πρόγραμμα Erlanger (Felix Klein)

Ο Felix Klein στο πρόγραμμά του για την γεωμετρία το οποίο είχε τον τίτλο *A comparative review of recent researches in geometry*[14] έδωσε μια πολύ γενική περιγραφή για το τι θα πρέπει να θεωρούμε ότι είναι μια γεωμετρία. Με δυο λόγια ο Klein είδε την γεωμετρία ως την μελέτη των αναλλοίωτων κάτω από μια ομάδα μετασχηματισμών. Στην εισήγησή του που έγινε το 1872 στο Πανεπιστήμιο του Erlangen και συγκεκριμένα στο κεφάλαιο 6 αναφέρεται στην γεωμετρία της αντιστροφής με έναν περιεκτικό και συνοπτικό τρόπο.
Το κεφάλαιο αυτό έχει τίτλο "*The geometry of reciprocal radii. Interpretation of* $x + iy$".
Στο σημείο αυτό θα αναφερθούμε περιληπτικά στο κεφάλαιο 6 του προγράμματος του Felix Klein. Εδώ ο Klein ισχυρίζεται ότι η έρευνα που γίνεται πάνω στις γεωμετρίες στις οποίες ο μετασχηματισμός της γεωμετρικής αντιστροφής παίζει πρωτεύοντα ρόλο κινείται από πολλές

---

[13] Έστω C το σύνολο των μιγαδικών αριθμών. Αν U είναι ένα υποσύνολο του C και $F:U\to C$ μια μιγαδική συνάρτηση από το U στο C τότε θα λέμε ότι αυτή ή συνάρτηση είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη (complex differentiable) σε ένα σημείο $z_0 \in U$ αν και μόνο αν:

$$f'(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Το όριο εδώ παίρνεται θεωρώντας ότι κάθε ακολουθία μιγαδικών αριθμών τείνει στο z_0, και όχι μόνο ως προς μια διεύθυνση αλλά ως προς κάθε διεύθυνση.
Οι ολομορφικές συναρτήσεις είναι κεντρικό σημείο στην μιγαδική ανάλυση. Είναι συναρτήσεις οι οποίες είναι μιγαδικά παραγωγίσιμες (complex differentiable) σε κάθε σημείο z του U.

[14] Translated by Dr. M. W. HASKELL, Assistant Professor of Mathematics in the University of California. Published in Bull. New York Math. Soc. 2, (1892-1893), 215-249.

απόψεις σε ένα πνεύμα παράλληλο με το πνεύμα που διαπνέει τις διαδικασίες εκείνες που έχουν σχέση με την προβολική γεωμετρία. Εδώ μάλιστα ο Klein κρατάει τον όρο reciprocal radii για την αντιστροφή τον οποίο είχε εισάγει ο Liouiville το 1847.
Συνεχίζοντας ο Klein την αναφορά του στη γεωμετρία της αντιστροφής, διαπιστώνει ότι στις αντίστοιχες έρευνες περιλαμβάνονται και εκείνες πάνω σε κάποιες αναλλαγματικές επιφάνειες, πάνω στην γενική θεωρία των ορθογωνίων συστημάτων κ.λ.π Ισχυρίζεται δε πως είναι αλήθεια ότι οι διαδικασίες που εμπλέκονται εδώ δεν έχουν ακόμα ενοποιηθεί σε μια σαφώς καθορισμένη και συγκεκριμένη γεωμετρία της οποίας η θεμελιώδης ομάδα θα είναι το σύνολο των μετασχηματισμών που προκύπτουν ως αποτέλεσμα ενός συνδυασμού της πρωταρχικής ομάδας (Principal group[15]) με την γεωμετρική αντιστροφή (geometric inversion) πράγμα που έχει γίνει για την προβολική γεωμετρία. Αυτό, ισχυρίζεται ο Klein, θα μπορούσε να αποδοθεί στο γεγονός ότι οι θεωρίες που αναφέρθηκαν πιο πάνω δεν έχουν μέχρι τώρα τύχει μιας συνεκτικής διαπραγμάτευσης. Ωστόσο θεωρεί ότι μια τέτοια συνεκτική αντίληψη δεν είναι κάτι το ξένο για τους ερευνητές που εργάζονται ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο σε αυτές τις περιοχές των μαθηματικών.
Επειδή -όπως θεωρεί ο Klein- η παραλληλία ανάμεσα στην προβολική γεωμετρία και την γεωμετρία της αντιστροφής (geometry of reciprocal radii) γίνεται προφανής αμέσως μόλις τεθεί το ερώτημα, κρίνεται λοιπόν απαραίτητο να δοθεί με έναν γενικό τρόπο σημασία στα ακόλουθα σημεία:
Στην προβολική γεωμετρία οι στοιχειώδεις έννοιες είναι το σημείο η ευθεία και το επίπεδο. Ο κύκλος και η σφαίρα δεν είναι παρά ειδικές περιπτώσεις κωνικής τομής και δευτεροβάθμιας επιφάνειας (quadric surface) . Η περιοχή στο άπειρο της βασικής γεωμετρίας (elementary geometry) εμφανίζεται ως επίπεδο. Η θεμελιώδης διαμόρφωση στην οποία η βασική γεωμετρία αναφέρεται είναι μια φανταστική κωνική στο άπειρο[16].
Στη γεωμετρία της αντιστροφής (geometry of Reciprocal radii) οι στοιχειώδεις έννοιες είναι το σημείο ο κύκλος και η σφαίρα. Η ευθεία και το επίπεδο είναι ειδικές περιπτώσεις των δύο τελευταίων που χαρακτηρίζονται από την ιδιότητα ότι αυτά περιέχουν ένα σημείο το οποίο δεν έχει καμία επιπλέον ειδικότερη σημασία στην ανάπτυξη της θεωρίας και το οποίο ονομάζουμε σημείο στο άπειρο.
Αν δεχθούμε το σημείο αυτό ως σταθερό αυτό που προκύπτει είναι η βασική γεωμετρία.
Η γεωμετρία της αντιστροφής (geometry of Reciprocal radii) μπορεί να διατυπωθεί σε μια μορφή η οποία να την τοποθετεί παράλληλα με την θεωρία των δυαδικών μορφών (the theory of binary forms[17]) και της line geometry αν η τελευταία αντιμετωπιστεί με τον τρόπο που υποδεικνύεται στο προηγούμενο κεφάλαιο του προγράμματος .
Στην παρούσα φάση -συνεχίζει ο Klein στην εισήγηση του- θα περιορίσουμε τις παρατηρήσεις μας στην επίπεδη γεωμετρία και ως εκ τούτου στην γεωμετρία αντιστροφής του επιπέδου.
Έχουμε κιόλας αναφερθεί -λέει ο Klein (και εννοεί το κεφάλαιο 4 της εισήγησής του το οποίο έχει τον τίτλο μεταφορά ιδιοτήτων μέσω αναπαραστάσεων (abbildung), όπου εκεί ανάμεσα σε άλλα κάνει λόγο και για την σύνδεση του επίπέδου με την δευτεροβάθμια επιφάνεια μέσω στερεογραφικής προβολής) - στην σύνδεση ανάμεσα στη βασική επίπεδη γεωμετρία και την προβολική γεωμετρία της επιφάνειας δευτέρου βαθμού με ένα χαρακτηριστικό / ιδιάζων σημείο. Αν δεν λάβουμε υπ΄ όψιν μας αυτό το χαρακτηριστικό /ιδιάζων σημείο έχουμε μια αναπαράσταση της γεωμετρίας της αντιστροφής του επιπέδου. Έχουμε λοιπόν –συνεχίζει ο Klein- τελικά τα εξής:
Η γεωμετρία της αντιστροφής και στην θέση αυτής η προβολική γεωμετρία σε μια δευτεροβάθμια επιφάνεια είναι ένα και ταυτό, και παρομοίως:

---

[15] Η πρωταρχική ομάδα είναι συγκεκριμένη ομάδα μετασχηματισμών στην οποία ο Klein έχει περιγράψει εκτενώς σε προηγούμενη παράγραφο της αναφοράς του και περιλαμβάνει τους μετασχηματισμούς κίνησης ομοιότητας και συμμετρίας ως προς επίπεδο
[16] Ο Klein αναφέρεται σε αυτά με σαφή τρόπο στην παράγραφο του προγράμματός του που περιγράφει την προβολική γεωμετρία
[17] η προβολική γεωμετρία πάνω στην ευθεία γραμμή

Η γεωμετρία της αντιστροφής στο χώρο είναι ισοδύναμη με την προβολική διαπραγμάτευση μιας πολλαπλότητας που παριστάνεται από μια δευτεροβάθμια εξίσωση (quadratic equation) μεταξύ πέντε ομογενών μεταβλητών (homogeneous variables). Έτσι με μέσα της γεωμετρίας της αντιστροφής η γεωμετρία του χώρου συνδέεται με μια πολλαπλότητα τεσσάρων διαστάσεων ακριβώς με τον ίδιο τρόπο με τον οποίο συνδέεται μέσω της προβολικής γεωμετρίας με μια πολλαπλότητα πέντε διαστάσεων.
Η γεωμετρία της αντιστροφής του επιπέδου αν περιοριστούμε στους πραγματικούς μετασχηματισμούς επιδέχεται μια ενδιαφέρουσα ερμηνεία σε μια διαφορετική κατεύθυνση. Αναπαριστώντας την μιγαδική μεταβλητή x+yi του επιπέδου με το συνηθισμένο τρόπο, τότε στους γραμμικούς μετασχηματισμούς της, αντιστοιχεί η ομάδα της γεωμετρικής αντιστροφής με τον όρο να περιοριστούμε σε πραγματικούς μετασχηματισμούς. (σημείωση: η διατύπωση εδώ είναι ανακριβής. Στους γραμμικούς μετασχηματισμούς $z' = \frac{az+\beta}{\gamma z+\delta}$ όπου $z' = x' + iy', z = x + iy$ αντιστοιχούν μόνο εκείνες οι εφαρμογές της ομάδας της γεωμετρικής αντιστροφής στις οποίες καμία αντιστροφή του προσανατολισμού των γωνιών δεν λαμβάνει χώρα. Αν θέλουμε να συμπεριλάβουμε όλη την ομάδα της γεωμετρικής αντιστροφής τότε πρέπει επιπροσθέτως στους μετασχηματισμούς που αναφέραμε να συμπεριλάβουμε και τους μετασχηματισμούς που δίνονται από τους τύπους $z' = \frac{a\bar{z}+\beta}{\gamma\bar{z}+\delta}$ όπου $z' = x' + iy', z = x - iy$)
Όμως η μελέτη των συναρτήσεων μιας μιγαδικής μεταβλητής θεωρούμενες ως υποκείμενα των οποιοδήποτε γραμμικών μετασχηματισμών είναι αυτό που κάτω από ένα διαφορετικό τρόπο αναπαράστασης καλείται θεωρία των δυαδικών μορφών (theory of binary forms). Με άλλα λόγια η θεωρία των δυαδικών μορφών βρίσκει ερμηνεία στην γεωμετρία της αντιστροφής στο πραγματικό επίπεδο και συγκεκριμένα στον τρόπο που οι μιγαδικές τιμές των μεταβλητών αναπαρίστανται. Από το επίπεδο ανεβαίνουμε στην δευτεροβάθμια επιφάνεια για να επιστρέψουμε στο πιο οικείο σε εμάς σύνολο των εννοιών που έχουν σχέση με τους προβολικούς μετασχηματισμούς. Καθώς έχουμε λάβει υπ΄ όψιν μας μόνο τα πραγματικά στοιχεία του επιπέδου δεν είναι χωρίς ενδιαφέρον το πώς η επιφάνεια επιλέγεται. Δεν μπορεί κατά οριστικό τρόπο να είναι μια επιφάνεια που από κάθε σημείο της να διέρχεται ευθεία η οποία να κείται ολόκληρη στην επιφάνεια (ruled surface) και πιο συγκεκριμένα πρέπει να θεωρήσουμε μια σφαιρική επιφάνεια -όπως είναι σύνηθες για την ερμηνεία μιας μιγαδικής μεταβλητής- και έτσι να οδηγηθούμε στο εξής θεώρημα: Η θεωρία των δυαδικών μορφών μιας μιγαδικής μεταβλητής βρίσκει τρόπο αναπαράστασης στην προβολική γεωμετρία της πραγματικής σφαιρικής επιφάνειας.

Mario Pieri και θεμελίωση της γεωμετρίας της αντιστροφής

Σε δύο διατριβές (memoirs) με τίτλο New Principles of the Geometry of inversions, 1911d,1912c γραμμένες το 1910 ο Mario Pieri θεμελίωσε την γεωμετρία της αντιστροφής ως μια εξ΄ ολοκλήρου ανεξάρτητη ενότητα. Απέρριψε δε προηγούμενες προσεγγίσεις στην θεωρία για δύο κυρίως λόγους. Πριν από αυτόν κάποιοι ερευνητές στηρίχθηκαν σε έννοιες της ευκλείδειας γεωμετρίας που δεν ήταν αναλλοίωτες κάτω από όλους τους μετασχηματισμούς Möbius οπότε ήταν κάπως ξένες με την γεωμετρία αντιστροφής με την έννοια που της έδινε ο Felix Klein. Άλλοι ερευνητές θεώρησαν σωστό να προχωρήσουν με εργαλείο την αναλυτική προβολική γεωμετρία μεγαλύτερης διάστασης πράγμα που ο Pieri θεώρησε πως ήταν εργαλείο περισσότερο δυναμικό από όσο ήταν απαραίτητο για την διαπραγμάτευση του συγκεκριμένου προβλήματος.
Ο Mario Pieri αντίθετα πρότεινε την θεμελίωση της γεωμετρίας της αντιστροφής στην βάση μιας θεώρησης αυτής της γεωμετρίας σαν ένα αυτόνομο οικοδόμημα θεμελιωμένο πάνω σε βάσεις κατάλληλες και επαρκείς αποκλειστικά για αυτήν, και πιο συγκεκριμένα σε έννοιες ιδέες και προτάσεις αναλλοίωτες ως προς τις κυκλικές σχέσεις (circular affinities) αλλά όχι

και ως προς μια ευρύτερη ομάδα γεωμετρικών μετασχηματισμών. Με τον όρο circular affinities ο Mario Pieri εννοούσε τους μετασχηματισμούς Möbius.
Ο Mario Pieri κατασκεύασε το οικοδόμημα της γεωμετρίας της αντιστροφής ως ένα υποθετικό- επαγωγικό σύστημα εντελώς ανεξάρτητο από κάθε άλλη γεωμετρία και από κάθε άλλο αναλυτικό πλαίσιο.
Το σύστημα του βασίστηκε ακριβώς σε δύο πρωταρχικές έννοιες, την έννοια του σημείου και την έννοια του κύκλου. Τον κύκλο τον κατανοούσε σαν ένα σύνολο σημείων C το οποίο καθορίζεται ακριβώς από τρία από τα σημεία του.
Ο Mario Pieri παρουσίασε είκοσι αξιώματα για να θεμελιώσει την γεωμετρία αυτή. Απέδειξε δε ότι αυτά τα αξιώματα, ήταν επαρκή για την θεμελίωση και την ανάπτυξη της επίπεδης γεωμετρίας της αντιστροφής καθώς και αυτής του χώρου.
Όπως και στις προηγούμενες προσπάθειές του για την θεμελίωση της στοιχειώδους και της προβολικής γεωμετρίας έτσι και τώρα εισήγαγε αξιώματα μόνο όταν αυτό ήταν αναγκαίο.
Η πρώτη διατριβή, 1911d, αποτελείται από εφτά κεφάλαια. Εκεί εισάγει ορισμούς και θεωρήματα της αντιστροφής που αφορούν τις ιδιότητες εκείνες που δεν κάνουν χρήση της διάταξης καθώς και της συνέχειας.
Αυτά τα θεωρήματα ο Pieri τα παρήγαγε από τα πρώτα δεκαεφτά αξιώματα. Στα έξι κεφάλαια της δεύτερης διατριβής ,1912c, παρουσίασε τα υπόλοιπα τρία αξιώματα, ανέπτυξε τις ιδιότητες της κυκλικής διάταξης και εισήγαγε πραγματικές συντεταγμένες για τα σημεία πάνω σε έναν κύκλο. Αυτά τα τελευταία αξιώματα καθορίζουν μια μεταβατική ιδιότητα για την κυκλική διάταξη και κάποιες εκδοχές του Αξιώματος του Αρχιμήδη καθώς και του αξιώματος συνέχειας του Dedekind.
Η σφαίρα δεν είναι πρωταρχική έννοια σε αυτό το σύστημα. Τα αξιώματα II -IV του Pieri εγγυώνται την ύπαρξη ενός μοναδικού κύκλου ABC ο οποίος διέρχεται από τρία διαφορετικά μεταξύ τους σημεία A,B,C.
Η σφαίρα S που διέρχεται από τέσσερα μη ομοκυκλικά σημεία ορίζεται στην διατριβή του 1911d (παράγραφος 4) ως η ένωση όλων των κύκλων που διέρχονται από ένα από αυτά τα σημεία ας το ονομάσουμε Π και από δύο σημεία του κύκλου που διέρχεται από τα άλλα τρία.
Τα αξίωμα VII εγγυάται ότι η σφαίρα S δεν εξαρτάται από το ποιο σημείο θα ονομάσουμε Π.
Το αξίωμα X στο 1911d (παράγραφος 7) δηλώνει ότι όλα τα σημεία δεν ανήκουν σε μια και μόνο μια σφαίρα οπότε το σύστημα του Pieri έχει τουλάχιστον τρεις διαστάσεις.
Το αξίωμα XI στην 1991d (παράγραφος 8) λέει ότι αν δοθούν τέσσερα μη ομοκυκλικά σημεία Α,Β,Γ,Δ πάνω σε μια σφαίρα S και δύο διαφορετικά σημεία Ε και Φ που δεν ανήκουν στην σφαίρα S, τουλάχιστον ένας από τους κύκλους ΑΕΦ, ΒΕΦ, ΓΕΦ, ΔΕΦ τέμνει την σφαίρα σε δύο διαφορετικά σημεία. Με αυτό το αξίωμα περιορίζεται ο αριθμός των διαστάσεων σε τρεις.
Μια άλλη βασική έννοια αναφέρεται στο 1911d ,§14: Μια τετράδα από διαφορετικά μεταξύ τους σημεία Α,Β,Γ,Δ τα οποία ανήκουν σε έναν κύκλο C λέμε ότι είναι αρμονικά (harmonic) αν υπάρχουν σημεία Ε και Φ τα οποία δεν ανήκουν στον κύκλο C και Ε≠ Φ και τέτοια ώστε οι κύκλοι ΑΕΦ, ΒΕΦ να τέμνουν τον C μόνο στα σημεία Α και Β αντίστοιχα και τα Ε,Φ,Γ,Δ να είναι ομοκυκλικά. Αυτή η έννοια παίζει έναν ρόλο ανάλογο με αυτόν των αρμονικών σημείων πάνω σε μια ευθεία στην προβολική γεωμετρία.
Τα αξιώματα που έθεσε ο Pieri εξασφαλίζουν ότι το Δ καθορίζεται από τα τρία άλλα σημεία.
Στην 1911d § 26 όρισε το Δ ως το αντίστροφο του Γ ως προς το {A,B} (στη γεωμετρία της αντιστροφής ο κύκλος είναι το διάστασης 1 ανάλογο της σφαίρας . Το μηδενικής διάστασης ανάλογο είναι τα ζεύγη διαφορετικών μεταξύ τους σημείων).
Δοθέντος ενός κύκλου C και ενός σημείου A έδειξε στην 1911d §§ 29,33 ότι υπάρχει ένα μοναδικό σημείο B τέτοιο ώστε η αντιστροφή ως προς A και B να απεικονίζει τον κύκλο C στον εαυτό του. Στην 1911d §41 ονόμασε το B αντίστροφο του A ως προς τον κύκλο C. Ανάλογοι χειρισμοί στην 1911d §§51,54,60 οδηγούν στον ορισμό που αυτός έδωσε για το αντίστροφό ενός σημείου ως προς μια σφαίρα.
Από αυτά τα αξιώματα ο Pieri παρήγαγε και μελέτησε με λεπτομέρεια τις ιδιότητες αυτών των αντιστροφών. Επίσης απέδειξε με σαφή τρόπο στην διατριβή του 1912c §98 ότι κάθε μετασχηματισμός Möbius είναι μια αντιστροφή ή σύνθεση το πολύ τεσσάρων αντιστροφών. Αυτό μπορεί να έρχεται φαινομενικά σε αντίθεση μα αυτό που επιχείρησε ο Coolidge 1916

σελίδες 347 & 348, θεωρήματα 18,20 τα οποία λένε ότι πέντε αντιστροφές μπορεί να χρειάζονται όμως ο Coolidge επέτρεπε την χρήση αντιστροφών ως προς σφαίρες και μόνο σε αντίθεση με τον Pieri που επέτρεπε αντιστροφές και των τριών τύπων.
Η αξιωματικοποίηση του Pieri για την γεωμετρία της αντιστροφής εκπλήρωσε μια ανάγκη η οποία είχε διατυπωθεί από διακεκριμένους μαθηματικούς (πιο πάνω αναφέραμε τον F Klein (Klein [1872] 1892-1893, 227-228) και την παρατήρηση του που διατύπωσε στο πρόγραμμα του για την γεωμετρία (Erlanger):
Οι έρευνες για τους μετασχηματισμούς της αντιστροφής δεν έχουν οδηγήσει ακόμα σε μια ειδική γεωμετρία…πράγμα που πρέπει να αποδοθεί στο γεγονός ότι αυτοί οι μετασχηματισμοί δεν έλαβαν μέχρι τώρα μια συνεκτική διαπραγμάτευση.
Το 1904 σε μια ομιλία του ο μαθηματικός Edward Kasner (Kasner 1904-1905, 289-290) αναγνώρισε την ανάγκη μιας συστηματικής θεμελίωσης της γεωμετρίας της αντιστροφής:
Η έρευνα η σχετική με την λογική θεμελίωση έχει σχεδόν ολοκληρωτικά περιοριστεί στην Ευκλείδεια και στην προβολική γεωμετρία.
Είναι επιθυμητό όμως να μπορέσουμε να διαπραγματευτούμε με έναν παρόμοιο παραγωγικό τρόπο και άλλες γεωμετρικές θεωρίες. Πιο συγκεκριμένα ελπίζουμε ότι σύντομα θα μπορούσαμε να έχουμε μια πραγματικά συστηματική θεμελίωση της όπως αποκαλείται γεωμετρίας της αντιστροφής οργανώνοντας τις ιδιότητες εκείνες οι οποίες μένουν αναλλοίωτες κάτω από τους κυκλικούς μετασχηματισμούς. Αυτή η θεωρία είναι ενδιαφέρουσα όχι μόνο αυτή καθ΄ αυτή αλλά και για τις εφαρμογές της στην θεωρία συναρτήσεων αλλά και διότι η μελέτη της υπηρετεί την απελευθέρωση του πνεύματος από αυτό που θα μπορούσε να προκύψει αν δεν ασκηθεί κάποιος έλεγχος, την σκλαβιά δηλαδή στην οπτική γωνία της προβολικής άποψης.
Τέσσερα χρόνια αργότερα ο John Wesley Young (J.W.Young 1909, 48) παρατήρησε ότι το πρόβλημα της κατασκευής ενός αξιωματικού συστήματος για την γεωμετρία της αντιστροφής ήταν ακόμα ένα ανοιχτό πρόβλημα συνδεδεμένο με την δική του εργασία πάνω στην μιγαδική προβολική γεωμετρία (complex projective geometry) και η οποία αξιωματικοποίηση ήταν ένα πρόβλημα που η λύση του ήταν…*"greatly to be desired"* .
Το γεγονός ότι ο Pieri είχε πράγματι δώσει μια λύση είχε επιβεβαιωθεί από τον διακεκριμένο μαθηματικό H.S.M. Coxeter ο οποίος έκανε γνωστό ότι ο Pieri παρήγαγε το πρώτο ικανοποιητικό σύστημα αξιωμάτων *"the first satisfactory set of axioms"* για την γεωμετρία της αντιστροφής.
Η συνεισφορά του M. Pieri στην γεωμετρία της αντιστροφής μέσω των δύο μελετών του New principles of the geometry of Inversions, 1911d και 1912c προμήθευσαν την πρώτη αξιωματική κατασκευή μέσω της οποίας μπόρεσε να γίνει η αυστηρή ανάπτυξη της γεωμετρίας της αντιστροφής ως ανεξάρτητης ενότητας και για ένα τέταρτο του αιώνα ήταν η σημαντικότερη προσπάθεια ενώ παράλληλα έδειξε ότι υπάρχει το πεδίο για μεταγενέστερες έρευνες.
Όμως το μέγεθος αυτών που κατόρθωσε ο Pieri φαίνεται πως πέρασε απαρατήρητο από τους σύγχρόνους του. Ίσως ήταν αυτό που λέμε κακή συγκυρία: ο Pieri πέθανε από καρκίνο λίγο μετά από την δημοσίευση της δεύτερης διατριβής του και στο μεταξύ ο πρώτος παγκόσμιος πόλεμος ήταν προ των πυλών. Ακόμα και ύστερα από αυτά και παρά την ανάγκη η οποία επισημάνθηκε από τους F. Klein , Kasner και J.W. Young τα θεμέλια της γεωμετρίας της αντιστροφής δεν έλαβαν την ερευνητική προσοχή που θα τους άξιζε.

Άλλες προσπάθειες αξιωματικοποίησης της Γεωμετρίας της αντιστροφής.

Η σχολή του D. Hilbert στο Göttigen ξεκίνησε επίσης μια αξιωματικοποίηση της γεωμετρίας της αντιστροφής με τους B.L.Van Der Waerden και Lucas J. Smith το 1935.
Αναφέρουμε αυτήν την προσπάθεια για τον λόγο ότι προσπάθησε να μορφοποιήσει μια κατασκευή η οποία δίνει στο θεώρημα του Miquel το ρόλο αξιώματος της γεωμετρίας της

αντιστροφής ανάλογο με τον ρόλο που έχει το θεώρημα του Πάππου[18] στην προβολική γεωμετρία.
Οι συγγραφείς της προσπάθειας αυτής δεν αναφέρουν την δουλειά του M. Pieri. Αναφέρεται από αυτούς ότι οφείλουν πολλά στον D. Hilbert και στην εργασία του πάνω στα θεμέλια της γεωμετρίας (Hilbert [1899] 1971 the foundations of geometry).
Χρησιμοποίησαν αλγεβρικό περίγραμμα και πολλά αποτελέσματα των θεμελίων της γεωμετρίας που είχε αναπτυχθεί στο Πανεπιστήμιο του Göttigen από το 1900.
Δύο άλλες προσπάθειες αξιωματικοποίησης της γεωμετρίας της αντιστροφής έγιναν από τους Boyan L. Petkantschin και από τον Shinichi Izumi. Οι προσπάθειες αυτές εμφανίσθηκαν το 1940. Όπως ακριβώς και οι Van Der Waerden και Smid έτσι και ο Boyan L. Petkantschin περιόρισε την εργασία του στις δύο διαστάσεις. Αυτός παρουσιάζοντας την ιστορία της γεωμετρίας της αντιστροφής αναφέρθηκε και στην συνεισφορά του Pieri.
Ο Coxeter (1966, 219) αναφέρει ωστόσο ότι ο Petkantschin απέτυχε να διαπιστώσει πόσο εύκολα η κυκλική διάταξη μπορούσε να οριστεί με όρους σύμπτωσης (incidence) πράγμα που ήταν αξιοσημείωτο χαρακτηριστικό της δουλειάς του Pieri. Ο Shinichi Izumi το 1940 σκιαγράφησε μια αξιωματικοποίηση της γεωμετρίας της αντιστροφής οποιασδήποτε πεπερασμένης διάστασης και δίνει το πλαίσιο της *Lattice Theory* η οποία αναπτύσσεται με έντονους ρυθμούς από τότε. Ο δεύτερος παγκόσμιος πόλεμος καθυστέρησε κάθε περαιτέρω ανάπτυξη στο πεδίο αυτό.
Ο Alan Hoffman εξέδωσε την πρώτη μεταπολεμική μελέτη το 1951. Αυτός ισχυρίζονταν ότι : *"είναι μάλλον έκπληξη ότι η βιβλιογραφία περιέχει πολύ λίγες ερευνητικές προσπάθειες πάνω στην γεωμετρία αντιστροφής ως ένα αυτόνομο υποσύνολο"* .
Αναφέρει την δουλειά του M.Pieri και πιο συγκεκριμένα τα συμπεράσματά του πάνω στις αρμονικές τετράδες. Ο Alan Hoffman αναγνωρίζει μόνο τρεις μελέτες από την εποχή του Pieri και πιο συγκεκριμένα τις μελέτες που αναφέραμε ακριβώς πιο πάνω.
Η αξιωματικοποίηση του Hoffman που επίσης περιέχει το πλαίσιο της Lattice Theory είναι στις τρεις διαστάσεις αλλά μπορεί να επεκταθεί και σε μεγαλύτερες διαστάσεις.
Κάποιες περαιτέρω έρευνες πάνω στα θεμέλια της γεωμετρίας της αντιστροφής πηγάζουν από την προτροπή (γύρω στο 1950) του Robert Furch προς τους μαθητές του Günter Ewald και Walter Benz στο πανεπιστήμιο του Mainz να ασχοληθούν με την έρευνα στο πεδίο αυτό. Από τότε αυτοί και οι συνεργάτες τους έχουν πραγματοποιήσει ένα μεγάλο αριθμό ερευνών πάνω στην γεωμετρία της αντιστροφής αλλά και σε άλλες γεωμετρίες που έχουν σχέση με την γεωμετρία της αντιστροφής.
Σήμερα η γεωμετρία της αντιστροφής ακμάζει ως πεδίο έρευνας. Το πεδίο είναι ελκυστικό, έχει πολλές εφαρμογές στην ανάλυση και μελέτες πάνω στην θεμελίωση της, αποκαλύπτουν διασυνδέσεις μεταξύ διαφόρων γεωμετριών. Για παράδειγμα η γεωμετρία αντιστροφής και η υπερβολική γεωμετρία μπορεί να αναπτυχθούν παράλληλα και κατά τρόπο που βελτιώνει την κατανόηση και των δύο. Επιπλέον η έννοια της αλυσίδας που χρησιμοποιείται στην θεμελίωση της μιγαδικής προβολικής γεωμετρίας (complex projective geometry) μπορεί να επεκταθεί σε μεγαλύτερες διαστάσεις. Οι αλυσίδες είναι ανάλογες με τους κύκλους και οι αντίστοιχες με αυτές έννοιες μεγαλύτερης διάστασης μπορούν να μελετηθούν με γεωμετρία αντιστροφής.
Οι μελέτες πάνω στα θεμέλια της γεωμετρίας αντιστροφής έχουν επίσης σημαντικό αντίκτυπο πάνω στην προβολική γεωμετρία (Coxeter 1966 και 1978,390, Karzel, Kist και Kroll 1979, 88-89).

---

[18] Το θεώρημα του Πάππου για την επίπεδη προβολική γεωμετρία λέει ότι αν οι κορυφές ενός κλειστού εξαγώνου κείνται εναλλάξ πάνω σε δύο διαφορετικές ευθείες τότε οι τομές των τριών ζευγών αντικείμενων ακμών είναι σημεία συνευθειακά.
Το θεώρημα του Miquel για την επίπεδη γεωμετρία της αντιστροφής λέει ότι αν οκτώ διαφορετικά μεταξύ τους σημεία είναι έτι δοσμένα ώστε να συμπίπτουν με τις κορυφές ενός κύβου και πέντε από τις έξι τετράδες σημείων που αντιστοιχούν στις έδρες του είναι ομοκυκλικά τότε και η έκτη τετράδα είναι ομοκυκλική. (Waerden and Smid 1935, 753,760)

Ευκλείδεια γεωμετρία –Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί- Άποψη του F. Klein για την ανάπτυξη της Γεωμετρίας

Τι είναι γεωμετρία;

Ένας ορισμός για την Γεωμετρία που δίνεται σε κάποια βιβλία (της μέσης εκπαίδευσης) είναι ο εξής:

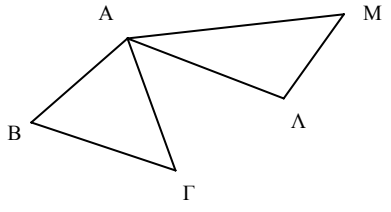
Γεωμετρία είναι εκείνη η επιστήμη που μελετάει τις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων.

Διαβάζοντας αυτόν τον ορισμό, μπορεί κανείς να μείνει με την εντύπωση ότι το ερώτημα που τέθηκε στον πιο πάνω τίτλο έχει απαντηθεί και δεν χρειάζεται να ασχοληθεί περισσότερο. Όμως είναι αρκετά λανθασμένη η εντύπωση ότι η φύση του ερωτήματος είναι τόσο απλή όσο φαίνεται. Ο πιο πάνω ορισμός δεν μπορεί να θεωρηθεί λανθασμένος παρ' όλα αυτά είναι κατά κάποιον τρόπο ελλιπής. Η λέξη ιδιότητα έχει έναν αρκετά γενικό χαρακτήρα και με κανέναν τρόπο όλες οι ιδιότητες των σχημάτων δεν εξετάζονται από την Γεωμετρία (π.χ το χρώμα με το οποίο έχουμε χαράξει κάποιο σχήμα δεν είναι ιδιότητα του σχήματος που θα πρέπει να γίνει αντικείμενο μελέτης της γεωμετρίας). Κάποιος βέβαια θα μπορούσε να παραθέσει έναν ακριβή μαθηματικό ορισμό σχετικά με το ποιες ιδιότητες των σχημάτων θεωρούνται αντικείμενο μελέτης της Γεωμετρίας. Όμως το αίσθημα της μη ικανοποίησης συνεχίζει να υπάρχει. Στην περίπτωση της απόστασης για παράδειγμα: γιατί να μελετάμε την απόσταση μιας κορυφής ενός τρίγωνου σχεδιασμένου στον πίνακα από κάποιες συγκεκριμένες ευθείες και όχι την απόσταση της κορυφής του τριγώνου από κάποιο από τα όρια του πίνακα σχεδίασης; Τέτοιες εξηγήσεις μάλλον δύσκολα μπορούν να δοθούν στα πλαίσια του πιο πάνω ορισμού για την Γεωμετρία. Πριν προχωρήσουμε είναι χρήσιμο να πούμε ότι ένας ορισμός όπως ο πιο πάνω, ίσως είναι ο μόνος που θα μπορούσε να δοθεί κατά τα πρώτα στάδια της διδασκαλίας του μαθήματος της Γεωμετρίας. Είναι χαρακτηριστικό το να πούμε ότι ενώ η ιστορία της Γεωμετρίας, ως θεωρητικής και όχι απλά ως πρακτικής επιστήμης, αρχίζει γύρω στο 600 π.Χ στην αρχαία Ελλάδα με πρώτο μεγάλο μαθηματικό τον Θαλή τον Μιλήσιο (όπως μαρτυρεί και ο κατάλογος των μαθηματικών του Πρόκλου) ένας επιστημονικός ορισμός αυτής, δόθηκε μόλις το 1872 από τον Γερμανό μαθηματικό F. Klein. Ήταν μετά την ανάδειξη των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών ως αντικείμενο μελέτης, που οι μαθηματικοί αναγνώρισαν την ανάγκη να υπάρξει ένας ακριβής ορισμός για το τι είναι αυτό με το οποίο πρέπει να ασχολείται η Γεωμετρία. Μόνο μετά από την ανάδειξη των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών έγινε πράγματι ξεκάθαρο ότι ο διαισθητικός τρόπος με τον οποίο αντιλαμβανόμασταν την έννοια του γεωμετρικού σχήματος και ο οποίος προϋπέθετε ότι δεν μπορεί να υπάρχουν πολλές Γεωμετρίες (θεωρώντας φυσικά την Ευκλείδεια Γεωμετρία ως την μόνη δυνατή Γεωμετρία) δεν μπορούσε να μας προμηθεύσει ένα επαρκές θεμέλιο, το οποίο θα μπορούσε να στηρίξει μια τόσο εκτεταμένη κατασκευή, όπως η επιστήμη της Γεωμετρίας. Ας επιστρέψουμε σε αυτό το σημείο, στην προσπάθεια να ξεκαθαρίσουμε ποιες ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων μελετώνται από την Γεωμετρία. Πιο πάνω έχουμε αναφέρει πως η εν λόγω επιστήμη δεν εξετάζει όλες τις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων αλλά μερικές από αυτές. Πριν προχωρήσουμε σε μια ακριβή περιγραφή των ιδιοτήτων που ανήκουν στο πεδίο της, θα δηλώσουμε απλά πως η Γεωμετρία μελετάει τις *γεωμετρικές ιδιότητες* των σχημάτων. Η προσθήκη αυτή δεν μπορούμε να πούμε ούτε και τώρα ότι συμπληρώνει τον ορισμό που αναφέραμε στην αρχή. Αντίθετα το βασικό ερώτημα που αναδεικνύεται σε αυτό το σημείο είναι το εξής: *Τι είναι γεωμετρικές ιδιότητες;* Αν απαντούσαμε σε τέτοια περίπτωση ότι γεωμετρικές ιδιότητες είναι εκείνες οι ιδιότητες που μελετώνται από την Γεωμετρία, το μόνο που θα καταφέρναμε είναι να πέσουμε σε έναν φαύλο κύκλο, αφού ορίζουμε έτσι ως Γεωμετρία την επιστήμη εκείνη που μελετάει τις γεωμετρικές ιδιότητες και ως γεωμετρική ιδιότητα ορίζουμε κάθε ιδιότητα που μελετάται από την Γεωμετρία. Με στόχο να σπάσουμε αυτόν τον φαύλο κύκλο, είναι αναγκαίο να ορίσουμε την έννοια γεωμετρική ιδιότητα χωρίς την χρήση του όρου "Γεωμετρία". Για να μπορέσουμε λοιπόν να μελετήσουμε τι είναι γεωμετρικές ιδιότητες, ας εξετάσουμε την ακόλουθη πολύ γνωστή μας πρόταση :

Το πρόβλημα της κατασκευής ενός τριγώνου με δεδομένες τις δύο πλευρές α, β και την περιεχόμενη σε αυτές τις πλευρές γωνία Γ έχει μία και μόνο μία λύση. Αν σταθούμε στην τελευταία φράση αυτής της πρότασης και αν σκεφτούμε προσεκτικά ίσως συμπεράνουμε ότι μάλλον είναι λανθασμένη: δεν είναι μόνο ένα τρίγωνο που έχει πλευρές τις α, β και περιεχόμενη γωνία σε αυτές τις πλευρές την γωνία Γ, αλλά αντίθετα υπάρχουν άπειρα τέτοια τρίγωνα, οπότε το πρόβλημα μας μάλλον δεν έχει μοναδική λύση αλλά άπειρες. Τι πραγματικά λοιπόν δηλώνεται στην πρόταση που διατυπώθηκε πιο πάνω με την έκφραση *μία και μόνο μία λύση;* Η πρόταση ότι με δεδομένες τις δύο πλευρές α, β και με δεδομένη επίσης την περιεχόμενη γωνία Γ σε αυτές τις πλευρές μόνο ένα τρίγωνο μπορεί να κατασκευαστεί, σημαίνει ξεκάθαρα ότι όλα τα τρίγωνα που έχουν πλευρές τις α, β και περιεχόμενη γωνία σε αυτές την γωνία Γ είναι μεταξύ τους *σύμφωνα*. Μιλώντας με μεγαλύτερη ακρίβεια, θα μπορούσαμε να πούμε ότι από δύο πλευρές και μια γωνία που λαμβάνεται ως περιεχόμενη σε αυτές τις πλευρές, μπορούμε να φτιάξουμε άπειρα τρίγωνα τα οποία είναι μεταξύ τους σύμφωνα. Έτσι όταν λέμε ότι υπάρχει μοναδικό τρίγωνο με πλευρές τις α, β και περιεχόμενη γωνία σε αυτές την γωνία Γ τότε όλα τα τρίγωνα που διαφέρουν μόνο ως προς την θέση δεν μπορούν να θεωρηθούν ως διαφορετικά. Αφού λοιπόν προσπαθούμε να δούμε την Γεωμετρία ως την επιστήμη εκείνη που μελετάει τις γεωμετρικές ιδιότητες των σχημάτων, θα μπορούσαμε να πούμε ότι μόνο σχήματα που έχουν τις ίδιες ακριβώς γεωμετρικές ιδιότητες είναι μεταξύ τους σύμφωνα και σχήματα τα οποία δεν έχουν τις ίδιες γεωμετρικές ιδιότητες δεν είναι μεταξύ τους σύμφωνα. Με αυτόν τον τρόπο έχουμε φτάσει στο σημείο να διατυπώσουμε έναν ορισμό για το τι είναι οι γεωμετρικές ιδιότητες των σχημάτων*: Γεωμετρικές ιδιότητες των σχημάτων είναι αυτές οι ιδιότητες οι οποίες είναι οι ίδιες (αναλλοίωτες) σε όλα τα σύμφωνα σχήματα.* Έχοντας καταλήξει λοιπόν σε έναν τέτοιο ορισμό, μπορούμε πλέον να δώσουμε μιαν ακριβή απάντηση γιατί η απόσταση μιας κορυφής από ένα από τα όρια του πίνακα σχεδίασης δεν είναι ιδιότητα η οποία μελετάται από την Γεωμετρία: Η απόσταση αυτή δεν είναι ιδιότητα που μελετάται από την Γεωμετρία διότι μπορεί να είναι διαφορετική για σύμφωνα μεταξύ τους τρίγωνα. Από την άλλη πλευρά το ύψος από μια κορυφή ενός τριγώνου προς την απέναντι πλευρά είναι γεωμετρική ιδιότητα αφού είναι πάντα το ίδιο για όλα τα σύμφωνα σχήματα. Σε αυτό το σημείο έχουμε έρθει αρκετά πιο κοντά στον ορισμό του *τι είναι Γεωμετρία*. Έχουμε δηλώσει ότι η γεωμετρία μελετάει τις γεωμετρικές ιδιότητες των σχημάτων δηλαδή εκείνες τις ιδιότητες που είναι οι ίδιες για τα σύμφωνα σχήματα οπότε αυτό που μένει να απαντηθεί είναι το ερώτημα τι είναι σύμφωνα γεωμετρικά σχήματα. Σε αυτό το σημείο θα μπορούσε κάποιος απογοητευμένος να πει ότι μέχρι τώρα δεν έχει γίνει απολύτως τίποτα και το μόνο που έχουμε κάνει είναι πως αλλάξαμε το ερώτημα μας με ένα άλλο το οποίο όμως είναι εξίσου δύσκολο να απαντηθεί. Κάτι τέτοιο είναι πολύ μακριά από την αλήθεια διότι η ερώτηση πότε δύο σχήματα είναι σύμφωνα είναι αρκετά εύκολο να απαντηθεί. Δίνουμε λοιπόν το ακόλουθο ορισμό για την συμφωνία δύο γεωμετρικών σχημάτων: *Δύο γεωμετρικά σχήματα είναι σύμφωνα όταν το ένα σχήμα μπορεί να μετατοπιστεί (να ολισθήσει ή να ολισθήσει αφού πρώτα αλλάξει προσανατολισμό) πάνω στο επίπεδο(ή στο χώρο) με τέτοιο τρόπο ώστε να συμπέσει με το δεύτερο σχήμα.* Με άλλα λόγια σύμφωνα σχήματα είναι εκείνα τα οποία ταυτίζονται μέσω *κίνησης* οπότε γεωμετρικές ιδιότητες των σχημάτων δηλαδή ιδιότητες κοινές για όλα τα σύμφωνα σχήματα είναι εκείνες οι ιδιότητες οι οποίες δεν μεταβάλλονται με την μετακίνηση των σχημάτων. Έτσι μπορούμε τελικά να φτάσουμε στον ακόλουθο ορισμό για την Γεωμετρία: *Γεωμετρία είναι η επιστήμη η οποία μελετάει εκείνες τις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων οι οποίες μένουν αναλλοίωτες με την μετακίνηση των σχημάτων*. Μια ενοχλητική κριτική που θα μπορούσε να γίνει στον πιο πάνω ορισμό είναι η απαίτηση (απόλυτα δικαιολογημένη) για ορισμό της έννοιας της κίνησης. Αυτή η απαίτηση θα μπορούσε να αντιμετωπιστεί με τον ακόλουθο τρόπο: *Μια κίνηση είναι ένας γεωμετρικός μετασχηματισμός του επιπέδου ή του χώρου που αντιστοιχίζει κάθε σημείο Α του επιπέδου σε ένα νέο σημείο έτσι ώστε η απόσταση μεταξύ δύο οποιονδήποτε σημείων Α και Β να ισούται με την απόσταση των σημείων Α΄ και Β΄ τα οποία είναι τα αντίστοιχα τους μέσω του εν λόγω μετασχηματισμού.*

Όλα τα παραπάνω περιγράφουν την ανάπτυξη της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο πνεύμα του προγράμματος του F. Klein. Βέβαια πρόκειται για μια απλή αναφορά χωρίς παράθεση κάποιων μαθηματικών λεπτομερειών και χωρίς μεγάλη εμμονή στο πνεύμα εκείνο της αυστηρότητας που θα έπρεπε κανονικά να χαρακτηρίζει μια τέτοια ανάπτυξη. Σε αυτό το σημείο θα περιγράψουμε εν συντομία το πρόγραμμα του F. Klein (πρόγραμμα Erlangen) το οποίο είναι πολύ ευρύτερο και δεν περιορίζεται στα στενά πλαίσια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Μια τέτοια αναφορά θα συμβάλει στην κατανόηση της χρήσης της γεωμετρίας Αντιστροφής (inversion Geometry) καθώς και των μετασχηματισμών Möbius για την διαπραγμάτευση προβλημάτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας πράγμα που αποτελεί έναν από τους κύριους στόχους της εργασίας μας. Στο πνεύμα του ορισμού του Klein για την γεωμετρία διαπιστώνει κανείς ότι δεν υπάρχει μια αλλά πολλές γεωμετρίες. Ο F. Klein λοιπόν θεωρεί ότι γεωμετρία είναι η μελέτη των ιδιοτήτων των σχημάτων ενός χώρου X που μένουν αναλλοίωτες κάτω από μια ομάδα μετασχηματισμών. Αυτό σημαίνει ότι αν g είναι ένας μετασχηματισμός και Σ_1 είναι ένα σχήμα το οποίο έχει την ιδιότητα I τότε και το $g(\Sigma_1)$ έχει την ιδιότητα I. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι έχουμε ένα μη κενό σύνολο X και έστω $Aut(X)=\{f:X\rightarrow X$ ώστε f 1-1 και επί$\}$ το σύνολο των αυτομορφισμών του X. Το σύνολο Aut(X) εφοδιασμένο με την πράξη ο της σύνθεσης αποτελεί ομάδα αφού η id_x (ταυτοτική απεικόνιση) ανήκει στο Aut(X) και για κάθε απεικόνιση $f \in Aut(X)$ υπάρχει η αντίστροφη απεικόνιση $f^{-1} \in Aut(X)$. Αρχικά λοιπόν υπάρχει το $X\neq\varnothing$ και οι αυτομορφισμοί του X, δηλαδή το Aut(X). Στην συνέχεια το σύνολο X εφοδιάζεται με μια ή περισσότερες ιδιότητες I (π.χ η I θα μπορούσε να είναι η γραμμικότητα). Κατόπιν ψάχνουμε εκείνη την ομάδα μετασχηματισμών G που διατηρεί αυτές τις ιδιότητες. Έστω λοιπόν G μια τέτοια υποομάδα του Aut(X) τότε θα λέμε πως μια Γεωμετρία Klein είναι το ζεύγος (G,X) (G υποομάδα). Η ισότητα δυο σχημάτων εξαρτάται από τις ιδιότητες I που έχουμε απαιτήσει να διατηρούνται κάτω από τη δράση της ομάδας G επί των σχημάτων του X . Έστω λοιπόν (G,X) μια Γεωμετρία Klein και τα σχήματα Σ_1 και Σ_2. Θα λέμε ότι τα σχήματα Σ_1 και Σ_2 είναι G-γεωμετρικά ίσα και θα γράφουμε $\Sigma_1 \underset{G}{\approx} \Sigma_2$ αν και μόνο αν υπάρχει $f \in Aut(X)$ και τέτοια ώστε $f(\Sigma_1) \underset{G}{\approx} \Sigma_2$. Η σχέση $\underset{G}{\approx}$ πρέπει να είναι μια σχέση ισοδυναμίας και έτσι μπορούμε να δικαιολογήσουμε την απαίτηση που έθεσε ο Klein: η G πρέπει να είναι ομάδα. Ας δούμε πολύ σύντομα ένα παράδειγμα: Έστω το R^2 το οποίο θεωρούμε ως γραμμικό χώρο και G η υποομάδα μετασχηματισμών του Aut(X) η οποία διατηρεί την γραμμικότητα. Η G αποτελείται από όλες τις αντιστρέψιμες γραμμικές απεικονίσεις (όλοι οι 2x2 πίνακες M με $\det M\neq 0$). Η ομάδα αυτή ονομάζεται γενική γραμμική ομάδα και συμβολίζεται με $GL(R^2)$. Διατήρηση της γραμμικότητας σημαίνει ότι αν τα διανύσματα α και β είναι παράλληλα το ίδιο θα συμβαίνει και για τα διανύσματα f(α) και f(β) για κάθε $f \in GL(R^2)$. Επίσης αν τα σημεία A και B και Γ είναι συγγραμμικά τότε το ίδιο συμβαίνει και για τα f(A) ,f(B), f(Γ). Επίσης αν υποθέσουμε πως έχουμε τις ευθείες ε_1 και ε_2 τότε και τα $f(\varepsilon_1)$, $f(\varepsilon_2)$ θα είναι ευθείες και αν οι ε_1 και ε_2 είναι μεταξύ τους παράλληλες τότε το ίδιο θα συμβαίνει και για τις $f(\varepsilon_1)$, $f(\varepsilon_2)$. Αναφορικά με την ισότητα ας περιοριστούμε στα τρίγωνα οπότε θα έχουμε τα εξής:

Έστω δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΛΜ



Θεωρώ τα διανύσματα

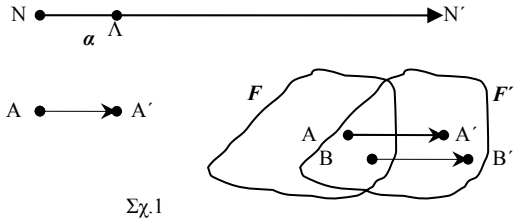
$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ $\vec{b}=\overrightarrow{A\Gamma}$ $\vec{c}=\overrightarrow{A\Lambda}$ $\vec{d}=\overrightarrow{AM}$

Τα $\vec{a}$, $\vec{b}$ καθώς και τα $\vec{c}$, $\vec{d}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα οπότε υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x,y,z,w τέτοιοι ώστε $\begin{matrix}\vec{c}=x\vec{\alpha}+y\vec{b}\\ \vec{d}=z\vec{\alpha}+w\vec{b}\end{matrix}$ με $\det\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\neq 0$

Η απεικόνιση f που αντιστοιχεί στον πίνακα $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ ανήκει στην ομάδα $GL(R^2)$ και ισχύει ότι $f(ΑΒΓ)=ΑΛΜ \Leftrightarrow ΑΒΓ \underset{G}{\approx} ΑΛΜ$. Το συμπέρασμα λοιπόν είναι: σε αυτήν την γεωμετρία όλα τα τρίγωνα είναι ίσα.

Βασικοί γεωμετρικοί μετασχηματισμοί του επιπέδου

Ισομετρίες



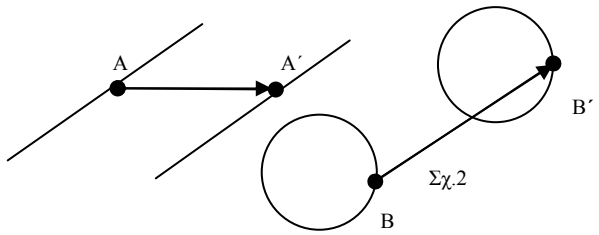
Σχ.1

Ισομετρίες ή στερεές κινήσεις είναι εκείνοι οι μετασχηματισμοί που διατηρούν την απόσταση μεταξύ δύο οποιοδήποτε σημείων. Θα περιοριστούμε στους μετασχηματισμούς του επιπέδου αφού δίνουν μια αρκετά καλή εικόνα και για τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς του χώρου.

1. Μεταφορά (Translation)

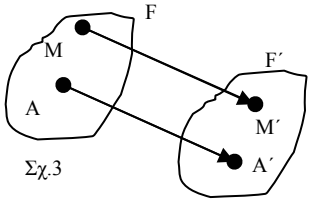
Ας επιλέξουμε μια κατεύθυνση ΝΝ΄ του επιπέδου (αυτό θα μπορούσε να επιτευχθεί για παράδειγμα επιλέγοντας μια ευθεία με ένα βέλος το οποίο δείχνει την φορά κίνησης). Επίσης ας θεωρήσουμε ότι δίνεται πάνω στην ευθεία ΝΝ΄ ένα ευθύγραμμο τμήμα ΝΛ μήκους α. Ας υποθέσουμε ότι Α είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου και έστω Α΄ το σημείο που λαμβάνουμε ως εξής: το ευθύγραμμο τμήμα ΑΑ΄ έχει την κατεύθυνση ΝΝ΄ και μήκος το α. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι το σημείο Α΄ λαμβάνεται από το σημείο Α με μεταφορά κατά την κατεύθυνση ΝΝ΄ και κατά μήκος α.

Οι μεταφορές περιγράφονται πολύ εύκολα με την βοήθεια διανυσμάτων τα οποία ως γνωστόν καθορίζουν ταυτόχρονα και την κατεύθυνση και το μήκος. Αν $\vec{\alpha}$ είναι ένα διάνυσμα το οποίο είναι παράλληλο με την ευθεία ΝΝ΄ και έχει φορά (κατεύθυνση) την φορά της ευθείας ΝΝ΄ και μέτρο $|\vec{\alpha}| = \alpha$ (α είναι το μήκος του ΝΛ) τότε θα λέμε ότι έχουμε μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{\alpha}$.



Σχ.2

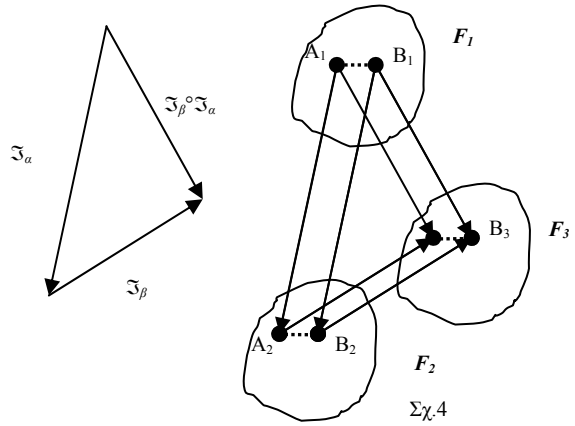
Ας συμβολίσουμε την μεταφορά αυτή με το σύμβολο $\mathfrak{I}_\alpha$. Το σημείο Α λοιπόν μεταφέρεται στο σημείο Α΄ μέσω της μεταφοράς $\mathfrak{I}_\alpha$. Τα σημεία ενός σχήματος F μεταφέρονται μέσω της $\mathfrak{I}_\alpha$ στα σημεία ενός σχήματος F΄. Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι το σχήμα F΄ προκύπτει από το σχήμα F μέσω της μεταφοράς $\mathfrak{I}_\alpha$.



Σχ.3

Οι μεταφορές απεικονίζουν ευθείες σε παράλληλες ευθείες και κύκλους σε ίσους κύκλους.

Κάθε μεταφορά $\mathfrak{I}_\alpha$ είναι ένα παράδειγμα μετασχηματισμού ο οποίος μεταφέρει κάθε σημείο Α του επιπέδου σε κάποιο άλλο σημείο Α΄ διαφορετικό από το Α. Όπως πολύ εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί κανένα σημείο δεν μένει σταθερό - δεν έχει δηλαδή ως εικόνα του το ίδιο το σημείο - με τον μετασχηματισμό $\mathfrak{I}_\alpha$.



Σχ.4

Αντίθετα υπάρχουν ευθείες γραμμές οι οποίες παραμένουν σταθερές με τον μετασχηματισμό $\mathfrak{I}_\alpha$. Οι ευθείες αυτές είναι οι ευθείες οι οποίες είναι παράλληλες προς την κατεύθυνση της μεταφοράς $\mathfrak{I}_\alpha$. Αν Α και Β είναι δύο οποιαδήποτε σημεία ενός σχήματος F και Α΄ , Β΄ τα αντίστοιχα σημεία του F΄ τα οποία είναι οι εικόνες των Α, Β μέσω της μεταφοράς $\mathfrak{I}_\alpha$ (Σχ.1) τότε θα είναι ΑΑ΄ // ΒΒ΄ και ΑΑ΄= ΒΒ΄ οπότε το ΑΑ΄ΒΒ΄ είναι παραλληλόγραμμο οπότε θα έχουμε και ΑΒ=Α΄Β΄. Αν λοιπόν δύο σχήματα F και F΄ συνδέονται μέσω μιας μεταφοράς $\mathfrak{I}_\alpha$ τότε τα αντίστοιχα ευθύγραμμα τμήματα που προκύπτουν μέσω της μεταφοράς $\mathfrak{I}_\alpha$ είναι μεταξύ τους παράλληλα, ίσα και έχουν την ίδια φορά δηλαδή: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$. Αντίστροφα αν σε οποιοδήποτε σημείο ενός σχήματος F αντιστοιχεί ένα σημείο ενός άλλου σχήματος F΄ έτσι ώστε το διάνυσμα που έχει άκρα δύο σημεία του F να είναι ίσο με το διάνυσμα που συνδέει τα αντίστοιχα σημεία του F΄ τότε τα σχήματα F και F΄ συνδέονται μέσω μιας μεταφοράς $\mathfrak{I}_\alpha$. Πράγματι ας πάρουμε ένα οποιοδήποτε ζεύγος αντίστοιχων σημείων Μ και Μ΄ και ας υποθέσουμε ότι Α και Α΄ είναι ένα δεύτερο ζεύγος αντίστοιχων σημεία των F και F΄. Επειδή (Σχ.3) $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{M'A'}$ άρα το ΜΜ΄Α΄Α είναι παραλληλόγραμμο οπότε $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{MM'}$ άρα το Α΄ προκύπτει από το Α με μεταφορά κατά το διάνυσμα $\overrightarrow{MM'}$. Όμως το ζεύγος των Α και Α΄ είναι τυχαίο οπότε το ζητούμενο έχει δειχθεί.

Ας δούμε τώρα την σύνθεση δύο μεταφορών $\mathfrak{I}_\alpha$, $\mathfrak{I}_\beta$.

Ας υποθέσουμε πως η πρώτη μεταφορά $\mathfrak{I}_\alpha$ απεικονίζει το πρώτο σχήμα F_1 στο σχήμα F_2 και η δεύτερη $\mathfrak{I}_\beta$ μεταφέρει το σχήμα F_2 στο σχήμα F_3.. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδική μεταφορά που απεικονίζει το σχήμα F_1 στο F_3.

Πράγματι αν η πρώτη μεταφορά $\mathfrak{I}_\alpha$ απεικονίζει το A_1B_1 του F_1 στο A_2B_2 του F_2 τότε $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{A_2B_2}$.

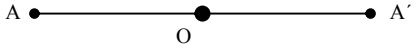
Ακριβώς με τον ίδιο τρόπο η δεύτερη μεταφορά $\mathfrak{I}_\beta$ απεικονίζει το A_2B_2 του F_2 στο A_3B_3 του F_3 οπότε $\overrightarrow{A_2B_2}=\overrightarrow{A_3B_3}$. Το άμεσο συμπέρασμα είναι ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_3B_3}$ τα οποία ανήκουν στα σχήματα F_1 και F_3 είναι ίσα. Άρα η $\mathfrak{I}_\beta \circ \mathfrak{I}_\alpha$ είναι μεταφορά και απεικονίζει το σχήμα F_1 στο F_3. Ας σημειώσουμε ότι δοθέντος ότι οι μεταφορές μπορούν να αποδοθούν με την βοήθεια διανυσμάτων η σύνθεση μεταφορών οδηγεί στην πρόσθεση διανυσμάτων. Πιο συγκεκριμένα αν το διάνυσμα μεταφοράς της $\mathfrak{I}_\alpha$ είναι το $\vec{t}_\alpha$ και το διάνυσμα μεταφοράς της $\mathfrak{I}_\beta$ είναι το $\vec{t}_\beta$ τότε το διάνυσμα μεταφοράς της $\mathfrak{I}_\beta \circ \mathfrak{I}_\alpha$ είναι το $\vec{t}_{\mathfrak{I}_\beta \circ \mathfrak{I}_\alpha} = \vec{t}_\beta + \vec{t}_\alpha$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός του μετασχηματισμού μεταφοράς $\mathfrak{I}_\alpha$ είναι η μεταφορά κατά το αντίθετο διάνυσμα $-\vec{\alpha}$ και συμβολίζεται $\mathfrak{I}_{-\alpha}$.Γράφουμε δε: $\mathfrak{I}_\alpha^{-1}=\mathfrak{I}_{-\alpha}$

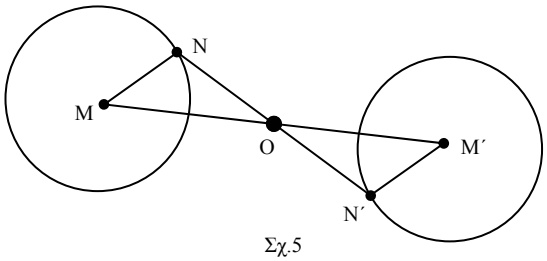
2. α) Συμμετρία ως προς κέντρο (Half Turn) και β) στροφή (rotation)

α) Συμμετρία ως προς κέντρο (ημιστροφή)

Το σημείο Α΄ λέμε ότι λαμβάνεται από το σημείο Α μέσω συμμετρίας ως προς κέντρο Ο αν το Ο είναι το μέσο του τμήματος ΑΑ΄.

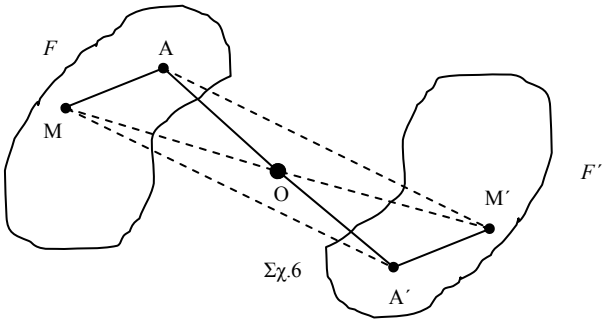


Προφανώς αν το Α΄ λαμβάνεται από το Α μέσω συμμετρίας ως προς κέντρο Ο (δηλαδή το Α΄ είναι το συμμετρικό του Α ως προς το Ο) τότε και αντίστροφα το Α λαμβάνεται μέσω συμμετρίας ως προς Ο από το Α΄ (το Α είναι το συμμετρικό του Α΄ ως προς το Ο).
Θα μπορούσαμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε την έκφραση: ότι το Α΄ προκύπτει από το Α με ανάκλαση (reflection) ως προς το σημείο Ο.
Το σύνολο όλων των σημείων που λαμβάνονται από ένα δεδομένο σχήμα F μέσω συμμετρίας ως προς κέντρο Ο μορφοποιούν ένα άλλο σχήμα το οποίο ας το ονομάσουμε F΄. Θα λέμε τότε ότι το F΄ προκύπτει από το F μέσω συμμετρίας ως προς κέντρο Ο και αντίστροφα το σχήμα F λαμβάνεται από το F΄ πάλι μέσω συμμετρίας ως προς κέντρο Ο. Μέσω συμμετρίας ως προς κέντρο Ο μία ευθεία απεικονίζεται σε μια παράλληλη ευθεία και ένας κύκλος σε έναν σύμφωνο με αυτόν κύκλο. (συμπεράσματα που διαπιστώνονται εύκολα αρκεί να συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΜΟΝ και Μ΄ΟΝ΄ (Σχ.5)).

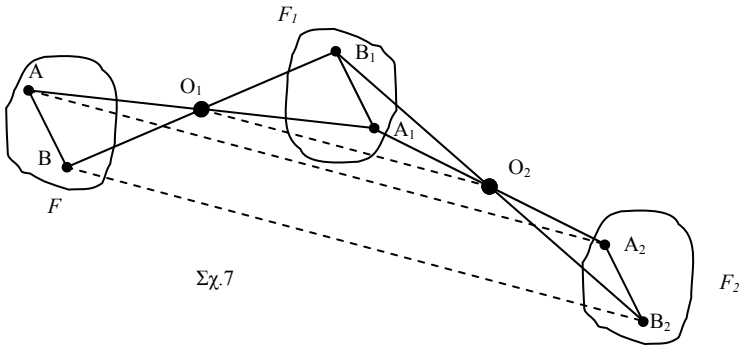


Σχ.5

Αν δύο σχήματα F και F΄ είναι συμμετρικά ως προς κέντρο Ο και αν τα ΑΒ και Α΄Β΄ είναι αντίστοιχα ευθύγραμμα τμήματα των δύο αυτών σχημάτων τότε το ΑΒΑ΄Β΄ είναι παραλληλόγραμμο (διαγώνιες διχοτομούνται) (Σχ.6). (Αντίστοιχα ευθύγραμμα τμήματα θα λέμε δύο τμήματα που έχουν άκρα συμμετρικά).
Από αυτό γίνεται φανερό ότι τα αντίστοιχα διανύσματα[19] $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}$ των δύο σχημάτων τα οποία είναι συμμετρικά ως προς κέντρο Ο είναι μεταξύ τους αντίθετα $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{A'B'}$.
Αντιστρόφως αν σε κάθε σημείο ενός σχήματος F μπορούμε να συσχετίσουμε ένα σημείο ενός σχήματος F΄ έτσι ώστε τα διανύσματα που σχηματίζονται με άκρα αντίστοιχα σημεία να είναι μεταξύ τους αντίθετα τότε τα σχήματα F και F΄ είναι συμμετρικά ως προς κάποιο κέντρο Ο. Πράγματι (Σχ.6) ας πάρουμε δύο αντίστοιχα σημεία Μ και Μ΄ των σχημάτων F και F΄ και έστω Ο το μέσο του ΜΜ΄. Ας υποθέσουμε ότι Α , Α΄ είναι ένα οποιοδήποτε ζεύγος αντίστοιχων σημείων των σχημάτων F και F΄.
Επειδή Α,Α΄ και Μ,Μ΄ είναι ζεύγη αντίστοιχων σημείων άρα $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AM'}$ οπότε ΑΜ//Μ΄Α΄ και ΑΜ=Μ΄Α΄ άρα το ΑΜΑ΄Μ΄ είναι παραλληλόγραμμο και έτσι το σημείο τομής των διαγωνίων του είναι το μέσο των ΑΑ΄ και ΜΜ΄ οπότε το Α΄ λαμβάνεται από το Α μέσω συμμετρίας ως προς κέντρο Ο. Επειδή τα Α και Α΄ είναι ένα αυθαίρετο ζεύγος αντίστοιχων σημείων; έχουμε ότι το σχήμα F΄ προκύπτει από το F μέσω συμμετρίας ως προς κέντρο Ο.



Σχ.6



Σχ.7

[19] Με άλλα λόγια τα αντίστοιχα τμήματα (δηλαδή τμήματα που έχουν άκρα συμμετρικά σημεία) δύο σχημάτων τα οποία είναι συμμετρικά ως προς κέντρο Ο είναι μεταξύ τους ίσα παράλληλα και αντίθετου προσανατολισμού

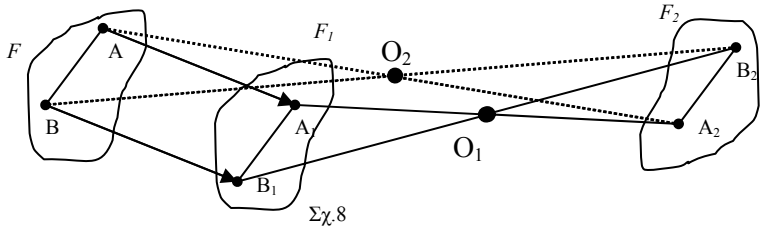
Ας θεωρήσουμε (Σχ.7) τρία σχήματα F, F_1 και F_2 για τα οποία έχουμε τα εξής: το σχήμα F_1 προκύπτει από το σχήμα F μέσω συμμετρίας ως προς κέντρο O_1 και το σχήμα F_2 προκύπτει από το F_1 μέσω συμμετρίας ως προς κέντρο O_2

Ας υποθέσουμε ότι A_1B_1 είναι ένα αυθαίρετο τμήμα του σχήματος F_1 και ας υποθέσουμε ότι AB και A_2B_2 είναι τα αντίστοιχα τμήματα των σχημάτων F και F_2 . Τότε τα διανύσματα $\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{AB}$ είναι αντίθετα. Τα διανύσματα $\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_2B_2}$ είναι επίσης αντίθετα οπότε συμπεράνουμε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_2B_2}$ είναι ίσα. Όμως όταν συμβαίνει κάτι τέτοιο (δηλαδή τα αντίστοιχα διανύσματα των σχημάτων F και F_2 είναι ίσα) τότε το F_2 προκύπτει από το F μέσω μεταφοράς.

Το συμπέρασμα λοιπόν που προκύπτει είναι ότι αν έχουμε δύο συμμετρίες $\wp_1$ και $\wp_2$ ως προς κέντρα O_1 και O_2 αντιστοίχως τότε η σύνθεση τους $\wp_2 \circ \wp_1$ είναι μια μεταφορά. Επίσης από το τρίγωνο AA_1A_2 προκύπτει ότι $AA_2=2O_1O_2$ καθώς και ότι $AA_2 // O_1O_2$ (αφού O_1 και O_2 είναι μέσα των πλευρών του τριγώνου AA_1A_2). Οπότε κάθε σημείο του F_2 προκύπτει από το αντίστοιχό του σχήματος F μέσω μεταφοράς κατά $2\overrightarrow{O_1O_2}$.

Εδώ αξίζει να τονιστεί ότι η σειρά με την οποία συνθέτουμε τις $\wp_2$ και $\wp_1$ έχει επίπτωση στην κατεύθυνση της μεταφοράς και αυτό είναι ένα χαρακτηριστικό γενικότερο των μετασχηματισμών: Η σύνθεση δύο μετασχηματισμών εξαρτάται από την σειρά με την οποία συνθέτουμε τους μετασχηματισμούς.

Επίσης εύκολα διαπιστώνεται (Σχ.8) ότι η σύνθεση μίας μεταφοράς και μίας συμμετρίας ως προς ένα κέντρο O_1 είναι συμμετρία ως προς ένα κέντρο O_2.

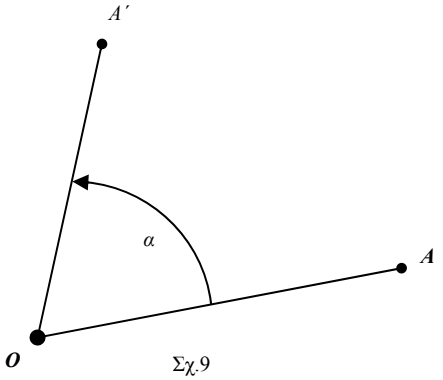


Σχ.8

Κάθε συμμετρία ως προς κέντρο O αφήνει σταθερό μόνο το κέντρο συμμετρίας O. Οι μόνες ευθείες δε που μένουν σταθερές, είναι αυτές που περνούν από το κέντρο O.

β) στροφή

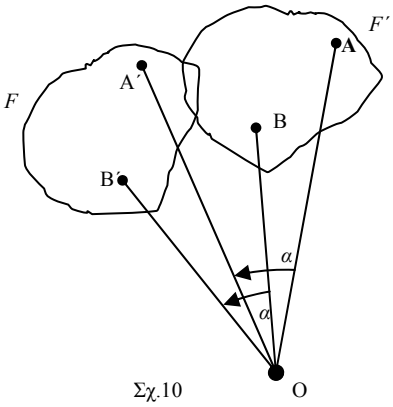
Ας επιλέξουμε ένα σημείο O πάνω στο επίπεδο, ας δεχθούμε ότι η θετική φορά διαγραφής των γωνιών είναι η αντίθετη της φοράς περιστροφής των δεικτών του ρολογιού και ας υποθέσουμε ότι $\hat{\alpha}$ είναι μια δεδομένη θετική γωνία . Έστω A είναι ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου και A΄ είναι το σημείο για το οποίο ισχύει ότι OA΄ =OA ενώ για την γωνία $\widehat{AOA'}$ ισχύει: $\widehat{AOA'} = \hat{\alpha}$ (οπότε όταν η ημιευθεία OA περιστραφεί κατά γωνία $\hat{\alpha}$ - κατά την θετική φορά - να συμπέσει με την ημιευθεία OA΄) (Σχ.9) . Τότε θα λέμε ότι το σημείο A΄ προκύπτει από το σημείο A μέσω μιας στροφής $\mathcal{R}_{(O,\hat{\alpha})}$ με κέντρο O και γωνία περιστροφής $\hat{\alpha}$ ή αλλιώς ότι το σημείο A μεταφέρεται στο σημείο A΄ μέσω της στροφής αυτής.



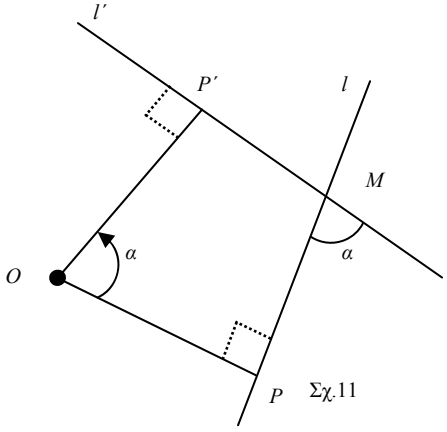
Σχ.9

Το σύνολο όλων των σημείων (Σχ.10) που προκύπτουν από τα σημεία ενός σχήματος F με στροφή $\mathcal{R}_{(O,\hat{\alpha})}$ γύρω από ένα σημείο O και κατά γωνία $\hat{\alpha}$ είναι ένα άλλο σχήμα F΄.

Μπορούμε να θεωρήσουμε επίσης ότι το σχήμα F΄ προκύπτει από την περιστροφή του σχήματος F ως ολότητα γύρω από το σημείο O και κατά γωνία $\hat{\alpha}$. Η έκφραση *ως ολότητα* σημαίνει ότι όλα τα σημεία του F κινούνται πάνω σε κύκλους οι οποίοι έχουν το ίδιο κέντρο O και ότι όλα τα σημεία διαγράφουν το ίδιο τόξο πάνω σε αυτούς τους κύκλους. Αν ένα σχήμα F΄ λαμβάνεται από ένα άλλο σχήμα F μέσω στροφής $\mathcal{R}_{(O,\hat{\alpha})}$ τότε και το F λαμβάνεται πάλι μέσω στροφής από το F΄ και η στροφή αυτή έχει το ίδιο κέντρο O και γωνία στροφής 360°-$\hat{\alpha}$ ($\mathcal{R}_{(O,360^o-\hat{\alpha})}$) και την ίδια φορά περιστροφής ή γωνία στροφής $\hat{\alpha}$ και αντίθετη φορά περιστροφής οπότε έχουμε την στροφή $\mathcal{R}_{(O,-\hat{\alpha})}$ και αυτό μας επιτρέπει να μιλάμε για ζεύγη σχημάτων που λαμβάνονται το ένα από το άλλο μέσω στροφής.

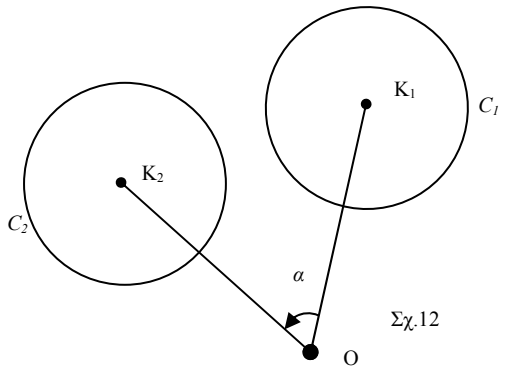


Σχ.10



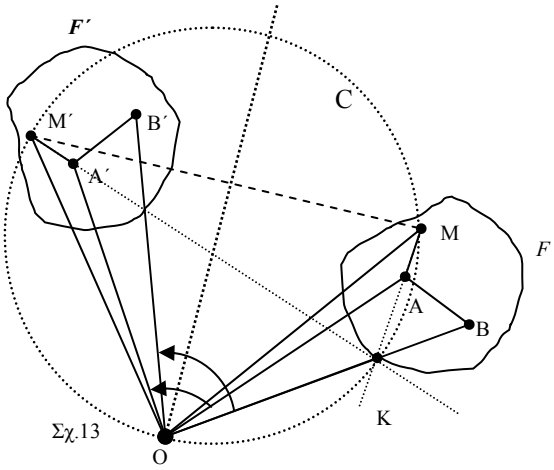
Σχ.11

Έστω (Σχ.11) μια ευθεία *l* που απεικονίζεται με μια στροφή ως προς το O σε μια καινούργια ευθεία *l΄*. Για να βρούμε την *l΄* αρκεί να στέψουμε το P το οποίο είναι το ίχνος της καθέτου από το O προς την *l* κατά την γωνία περιστροφής α και έστω P΄ το αντίστοιχο σημείο που παίρνουμε μέσω της περιστροφής. Από το σημείο P΄ φέρνουμε την κάθετη ευθεία *l΄* ως προς την OP΄. Προφανώς η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ των *l* και *l΄* ισούται με την γωνία α (γωνίες με κάθετες πλευρές). Παρόμοια (Σχ.12) το σχήμα που προκύπτει από την στροφή ενός κύκλου C_1 ως προς O είναι ένας κύκλος C_2 ο οποίος λαμβάνεται με στροφή του κέντρου K_1 ως προς το O παίρνοντας έτσι το K_2 και κατόπιν γράφοντας τον κύκλο με κέντρο το K_2 και ακτίνα την ακτίνα του C_1 .



Σχ.12

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια στροφή $\mathcal{R}_{(O,\hat{\alpha})}$ (σχήμα 13) με κέντρο το O και γωνία στροφής $\hat{\alpha}$ η οποία απεικονίζει το σχήμα F στο σχήμα F΄ και έστω ότι τα ευθύγραμμα τμήματα AB και A΄B΄ είναι δύο αντίστοιχα τμήματα των σχημάτων F και F΄ ως προς την στροφή. Τότε τα τρίγωνα OAB και OA΄B΄ είναι σύμφωνα (αφού OA=OA΄ OB=OB΄ και ∡AOB=∡A΄OB΄) οπότε τα τμήματα AB και A΄B΄ είναι μεταξύ τους ίσα. Η γωνία μεταξύ των τμημάτων AB και A΄B΄ είναι επίσης $\hat{\alpha}$ πράγμα που



Σχ.13

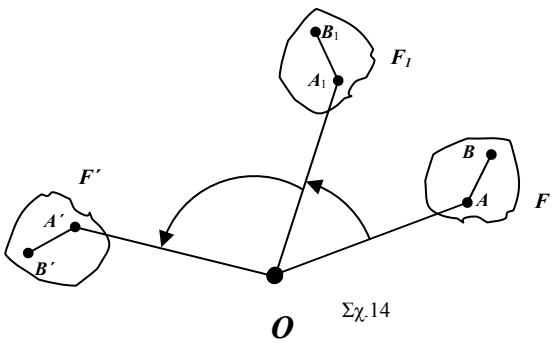
προκύπτει από το σχήμα 11: Αν l και l' είναι δύο ευθείες τέτοιες ώστε $\mathcal{R}_{(O,\hat{\alpha})}(l)=(l')$ τότε η γωνία που σχηματίζουν οι l και l' μεταξύ τους ισούται με την γωνία στροφής $\hat{\alpha}$.

Πρέπει λοιπόν να στέψουμε το $\overrightarrow{AB}$ κατά γωνία $\hat{\alpha}$ κατά την φορά της στροφής $\mathcal{R}_{(O,\hat{\alpha})}$ για να πάρουμε το $\overrightarrow{A'B'}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι αν το σχήμα F είναι εικόνα του σχήματος F΄ μέσω της στροφής $\mathcal{R}_{(O,\hat{\alpha})}$ τότε τα αντίστοιχα ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσα μεταξύ τους και σχηματίζουν γωνία $\hat{\alpha}$.

Θα δείξουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο: Αν σε κάθε σημείο ενός σχήματος F αντιστοιχίζεται ένα σημείο ενός άλλου σχήματος F' και τα σχήματα αυτά είναι τέτοια ώστε τα αντίστοιχα ευθύγραμμα τμήματα (δηλαδή τα τμήματα με άκρα αντίστοιχα σημεία) είναι ίσα και σχηματίζουν μεταξύ τους μία γωνία $\hat{\alpha}$ (έτσι ώστε τα τμήματα του σχήματος F να γίνονται παράλληλα με τα αντίστοιχα τμήματα του F΄ όταν αυτά περιστραφούν κατά γωνία $\hat{\alpha}$) τότε τα σχήματα F και F΄ συνδέονται μέσω ενός μετασχηματισμού στροφής $\mathcal{R}_{(O,\hat{\alpha})}$ κέντρου Ο και γωνίας $\hat{\alpha}$. Πράγματι (Σχ.13) αν υποθέσουμε ότι Μ και Μ΄ είναι δύο αντίστοιχα σημεία των σχημάτων F και F΄. Κατασκευάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΜΜ΄ και κυκλικό τόξο C το οποίο βλέπει το τμήμα ΜΜ΄ υπό γωνία $\hat{\alpha}$. Έστω ότι Ο είναι το σημείο τομής της κάθετης από το μέσο του ΜΜ΄ με το τόξο C. Επειδή ΟΜ=ΟΜ΄ και $\measuredangle$ ΜΟΜ΄=$\hat{\alpha}$ προκύπτει ότι η στροφή με κέντρο το Ο και γωνία $\hat{\alpha}$ μεταφέρει το σημείο Μ στο σημείο Μ΄. Επιπλέον έστω ότι είναι Α και Α΄ ένα οποιοδήποτε ζεύγος αντίστοιχων σημείων των σχημάτων F και F΄. Για τα τρίγωνα ΟΜΑ και ΟΜ΄Α΄ έχουμε: ΟΜ=ΟΜ΄, ΜΑ=ΜΑ΄ και $\measuredangle$ ΟΜΑ=$\measuredangle$ ΟΜΑ΄ [είναι $\measuredangle$ ΟΜΑ=$\measuredangle$ ΟΜΑ΄ διότι: η γωνία μεταξύ των ΟΜ και ΟΜ΄ είναι ίση με την γωνία μεταξύ των ΜΑ και Μ΄Α΄ (αυτή η ίση γωνία είναι η $\hat{\alpha}$) οπότε τα σημεία Μ Μ΄, Ο και Κ (Κ είναι το σημείο τομής των ΑΜ και Α΄Μ΄) κείνται στον ίδιο κύκλο διότι τα σημεία Κ και Ο βλέπουν το τμήμα ΜΜ΄ υπο ίση γωνία). Άρα οι εγγεγραμμένες γωνίες $\measuredangle$ ΟΜΑ και $\measuredangle$ ΟΜ΄Α΄ βαίνουν στο ίδιο τόξο (το $\overset{\frown}{OK}$)] . Τα τρίγωνα λοιπόν ΟΜΑ και ΟΜ΄Α΄ είναι σύμφωνα. Από αυτό προκύπτει ότι ΟΑ=ΟΑ΄ και επιπλέον ότι οι γωνίες $\measuredangle$ ΑΟΑ΄=$\measuredangle$ ΜΟΜ΄ =$\hat{\alpha}$ (διότι $\measuredangle$ Α΄ΟΜ΄= $\measuredangle$ ΑΟΜ). Άρα η διαδικασία αντιστοίχισης που απεικονίζει κάθε σημείο Α του σχήματος F στο αντίστοιχο σημείο Α΄ του σχήματος F΄ (με βάση την ισότητα των τμημάτων με άκρα αντίστοιχα σημεία και τον σχηματισμό μεταξύ τους γωνίας $\hat{\alpha}$) είναι στροφή $\mathcal{R}_{(O,\hat{\alpha})}$ με κέντρο Ο.

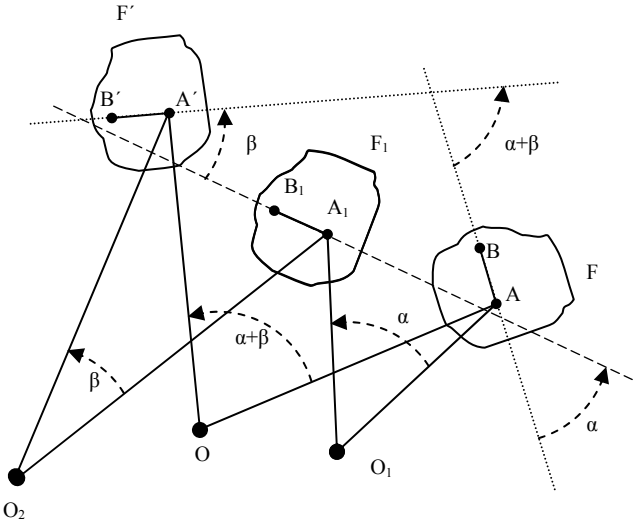
Αυτό που θα εξετάσουμε σε συντομία τώρα είναι το ερώτημα τι συμβαίνει όταν συνθέτουμε δύο στροφές. Πρώτα απ΄ όλα είναι ξεκάθαρο από τον ορισμό ότι η σύνθεση δύο στροφών (με την ίδια φορά) και κοινό κέντρο το Ο και γωνίες στροφής αντίστοιχα $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ είναι στροφή με κέντρο το Ο και γωνία στροφής $\hat{\alpha}+\hat{\beta}$ (Σχ.14).

Ας θεωρήσουμε τώρα την γενική περίπτωση (Σχ.15). Ας υποθέσουμε ότι το σχήμα F_1 προκύπτει από το F μέσω στροφής με κέντρο O_1 και γωνία $\hat{\alpha}$ και ότι το σχήμα F΄ προκύπτει από το F_1 μέσω στροφής κατά την ίδια φορά με την πρώτη στροφή, με κέντρο O_2 και γωνία στροφής, την γωνία $\hat{\beta}$. Αν η πρώτη στροφή μεταφέρει το τμήμα ΑΒ του σχήματος F στο σχήμα A_1B_1 του σχήματος F_1 και η δεύτερη στροφή μεταφέρει το τμήμα A_1B_1 στο τμήμα Α΄Β΄ του



Σχ.14

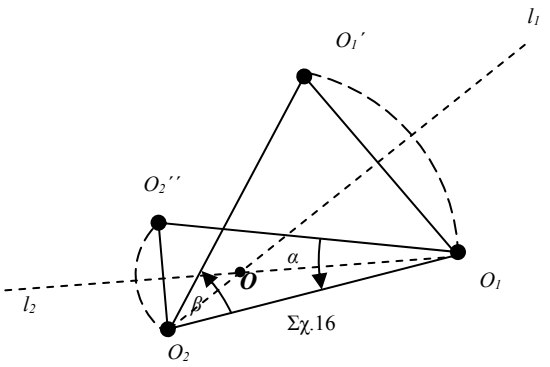
σχήματος F΄ τότε τα σχήματα ΑΒ και A_1B_1 είναι ίσα και σχηματίζουν μια γωνία $\hat{\alpha}$ Τα τμήματα A_1B_1 και Α΄Β΄ είναι ίσα και σχηματίζουν μια γωνία $\hat{\beta}$. Έτσι τα αντίστοιχα τμήματα ΑΒ και Α΄Β΄ των σχημάτων F και F΄ είναι ίσα και σχηματίζουν μια γωνία $\hat{\alpha}+\hat{\beta}$. Αν $\hat{\alpha}+\hat{\beta}$ =360° αυτό σημαίνει ότι τα αντίστοιχα τμήματα των σχημάτων F και F΄ είναι παράλληλα. Από τα πιο πάνω προκύπτει άμεσα ότι τα σχήματα F και F΄ συνδέονται με έναν μετασχηματισμό στροφής με γωνία $\hat{\alpha}+\hat{\beta}$ αν $\hat{\alpha}+\hat{\beta}$ ≠360° και με έναν μετασχηματισμό μεταφοράς αν $\hat{\alpha}+\hat{\beta}$ =360°.



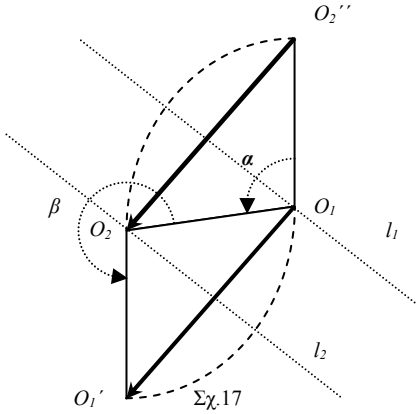
Σχ.15

Αν συνθέσουμε λοιπόν δύο στροφές $\mathfrak{R}_{(O,\hat{\alpha})}$ και $\mathfrak{R}_{(O,\hat{\beta})}$ με την ίδια φορά και κέντρα O_1 και O_2 και γωνίες α και β είναι μια στροφή γωνίας $\hat{\alpha}+\hat{\beta}$ αν $\hat{\alpha}+\hat{\beta}\neq 360^o$ ενώ αν $\hat{\alpha}+\hat{\beta}=360^o$ είναι μια μεταφορά. Επειδή όμως η στροφή κατά μια γωνία $\hat{\alpha}$ και κατά μια ορισμένη φορά είναι ισοδύναμη με στροφή κατά 360°-$\hat{\alpha}$ και κατά την αντίθετη φορά τότε το τελευταίο μέρος του θεωρήματος αυτού μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής: Η σύνθεση δύο στροφών $\mathfrak{R}_{(O,\hat{\alpha})}$ και $\mathfrak{R}_{(O,\hat{\beta})}$ είναι μεταφορά αν αυτές οι στροφές έχουν την ίδια, κατά το μέτρο της, γωνία στροφής αλλά αντίθετες φορές στροφής.

Ας δείξουμε τώρα (σχήμα 16) πώς από τα κέντρα O_1 και O_2 και από τις γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ δύο στροφών $\mathfrak{R}_{(O,\hat{\alpha})}$ και $\mathfrak{R}_{(O,\hat{\beta})}$ μπορούμε να βρούμε την στροφή ή την μεταφορά που προκύπτει από την σύνθεση τους. Ας υποθέσουμε πρώτα ότι $\hat{\alpha}+\hat{\beta}\neq 360^o$. Σε τέτοια περίπτωση η σύνθεση των δύο στροφών είναι στροφή γωνίας $\hat{\alpha}+\hat{\beta}$. Ας προσπαθήσουμε να βρούμε το κέντρο της σύνθεσης. Η σύνθεση των δύο στροφών απεικονίζει το κέντρο O_1 της πρώτης στο σημείο O_1΄ έτσι ώστε $O_1'O_2=O_1O_2$ και η γωνία $\angle O_1O_2O_1'=\hat{\beta}$ αφού η πρώτη στροφή αφήνει το O_1 σταθερό και η δεύτερη μεταφέρει το O_1 στο O_1΄. Η σύνθεση των δύο μετασχηματισμών στροφής μεταφέρει το σημείο O_2'' στο O_2 έτσι ώστε $O_2''O_1=O_2O_1$ και γωνία $\angle O_2''\,O_1O_2=\hat{\alpha}$ αφού και πάλι η πρώτη στροφή μεταφέρει το O_2'' στο O_2 και η δεύτερη αφήνει το O_2 σταθερό. Άρα το κέντρο Ο που ψάχνουμε βρίσκεται σε ίση απόσταση από τα O_2 και O_2'' και από τα O_1 και O_1'' οπότε το Ο μπορεί να βρεθεί ως το σημείο τομής των μεσοκαθέτων l_1 και l_2 των τμημάτων O_1O_1' και O_2O_2''. Το συμπέρασμα στο οποίο καταλήγουμε είναι ότι: (σχήμα 16) η l_1 διέρχεται από το O_2 και σχηματίζει γωνία $\measuredangle\, l_1O_2O_1=\frac{1}{2}\hat{\beta}$ και η l_2 διέρχεται από το O_1 και σχηματίζει γωνία $\measuredangle\, l_2O_1O_2=\frac{1}{2}\hat{\alpha}$. Αν $\hat{\alpha}+\hat{\beta}=360^o$ τότε η μεταφορά η οποία προκύπτει από την σύνθεση των δύο στροφών μπορεί να καθοριστεί από το ότι μεταφέρει το σημείο O_1 στο O_1΄ (ή το σημείο O_2'' στο O_2). ότι Τα σημεία O_1΄ και O_2'' μπορούν να καθοριστούν όπως και πριν.

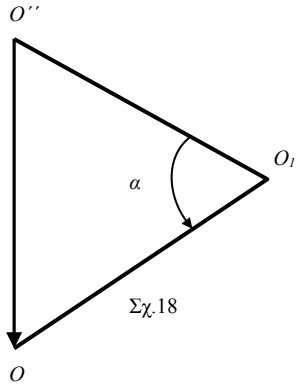


Σχ.16



Σχ.17

Τέλος με ανάλογες διαδικασίες μπορεί να δειχθεί ότι η σύνθεση μιας μεταφοράς με μια στροφή καθώς επίσης και μιας στροφής με μια μεταφορά είναι μια στροφή κατά γωνία ίση με την γωνία της στροφής αλλά με διαφορετικό κέντρο.



Σχ.18

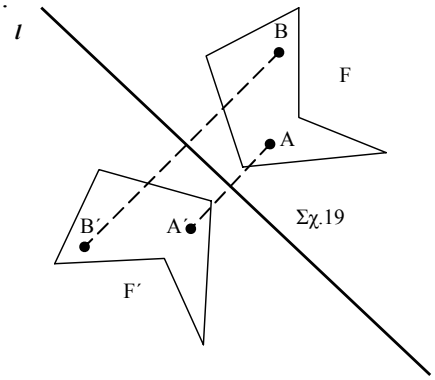
Το θεώρημα της σύνθεσης μιας μεταφοράς $\mathfrak{T}$ με μια στροφή $\mathfrak{R}$ μπορεί να αποδειχθεί με τον ακόλουθο τρόπο: Γνωρίζουμε ότι η σύνθεση δύο στροφών με ίδια γωνία αλλά με αντίθετη φορά είναι μεταφορά. Αντιστοιχεί δε στο O_2 (κέντρο της δεύτερης στροφής) ένα σημείο O_2'' τέτοιο ώστε $O_1O_2''=O_1O_2$ και γωνία $\angle O_2''O_1O_2=\hat{\alpha}$ (σχ.17).

Ας αντικαταστήσουμε την δοθείσα μεταφορά με την σύνθεση δύο στροφών $\mathfrak{R}_1$ και $\mathfrak{R}_2$ από τις οποίες η δεύτερη έχει το ίδιο κέντρο Ο και την ίδια γωνία $\hat{\alpha}$ αλλά αντίθετη φορά με την δοθείσα στροφή $\mathfrak{R}$. Το κέντρο O_1 της πρώτης στροφής $\mathfrak{R}_1$ καθορίζεται από τις συνθήκες $O_1O''=O_1O$ και από την γωνία $\angle O''O_1O=\hat{\alpha}$ όπου O'' είναι ένα σημείο το οποίο μεταφέρεται στο σημείο Ο μέσω της δοθείσας μεταφοράς $\mathfrak{T}$. Έτσι η σύνθεση της μεταφοράς και της στροφής έχει αντικατασταθεί από την σύνθεση τριών στροφών. Όμως οι δύο τελευταίες από τις στροφές είναι αντίστροφες οπότε μένει μία μόνο στροφή, αυτή με κέντρο το O_1.

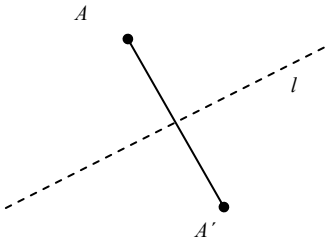
Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε και το θεώρημα της σύνθεσης μιας στροφής με μια μεταφορά.

3. Συμμετρία ως προς ευθεία –ανάκλαση ως προς ευθεία.

Ένα σημείο Α΄ λέμε ότι είναι η εικόνα ενός σημείου Α μέσω ανάκλασης ως προς μια ευθεία *l* (η οποία καλείται και άξονας συμμετρίας) αν η ευθεία *l* είναι μεσοκάθετη του τμήματος ΑΑ΄. Αν το σημείο Α΄ είναι η εικόνα του Α ως προς την ευθεία *l* τότε και αντίστροφα το σημείο Α είναι η εικόνα του Α΄ ως προς την *l* οπότε μπορούμε να μιλάμε για ζεύγη σημείων τα ποία είναι εικόνες το ένα του άλλου ως προς μια δοθείσα ευθεία *l* . Αν το Α΄ είναι η εικόνα του Α ως προς την ευθεία l τότε θα λέμε ότι το Α΄ είναι το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία *l* .

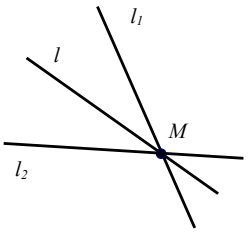


Σχ.19

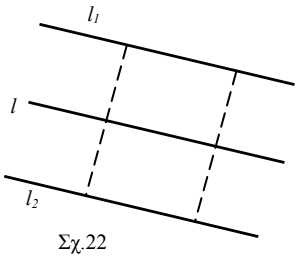


Σχ.20

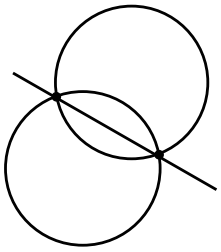
Το σύνολο των εικόνων των σημείων ενός σχήματος F, με την συμμετρία ως προς μια ευθεία *l*, σχηματίζει ένα νέο σχήμα F΄ το οποίο ονομάζεται εικόνα του σχήματος F ως προς την συμμετρία αυτή. Μια ευθεία απεικονίζεται μέσω συμμετρίας ως προς μια ευθεία *l* σε μια άλλη ευθεία. Επίσης μια ευθεία παράλληλη στην ευθεία *l* απεικονίζεται σε μια ευθεία παράλληλη προς την *l* και μία ευθεία η οποία τέμνει την ευθεία *l* στο σημείο Μ ανακλάται (απεικονίζεται) σε μια ευθεία η οποία τέμνει την ευθεία *l* επίσης στο σημείο Μ.



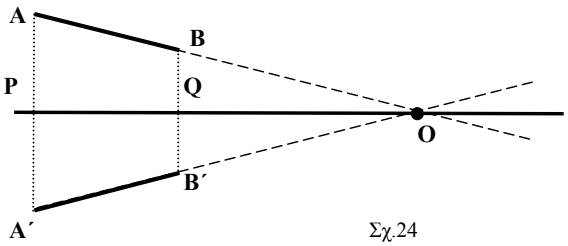
Σχ.21



Σχ.22

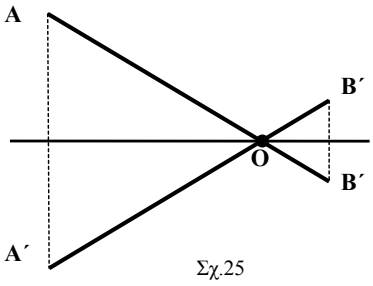

Σχ.23

Ένας κύκλος ανακλάται σε έναν σύμφωνο κύκλο. Η απόδειξη είναι εύκολη αρκεί να σκεφτούμε ότι κάθε ευθύγραμμο τμήμα ανακλάται σε ένα σύμφωνο με αυτό (Σχήμα 24,25,26) ευθύγραμμο τμήμα:



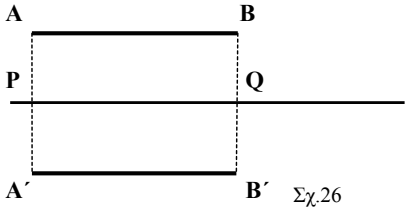
Σχ.24

τρίγωνο AOP= τρίγωνο A΄OP΄
τρίγωνο BOQ= τρίγωνο B΄OQ΄



Σχ.25

τρίγωνο AOP= τρίγωνο A΄OP΄
τρίγωνο BOP= τρίγωνο B΄OP΄



Σχ.26

AB=PQ=A΄B΄

Από αυτά προκύπτει ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων των οποίων η απόσταση από το Ο είναι ίση με r ανακλάται στον γεωμετρικό τόπο των σημείων των οποίων η απόσταση από το Ο΄ είναι ίση με r με το Ο΄ να είναι η ανάκλαση του Ο ως προς την ευθεία *l*.

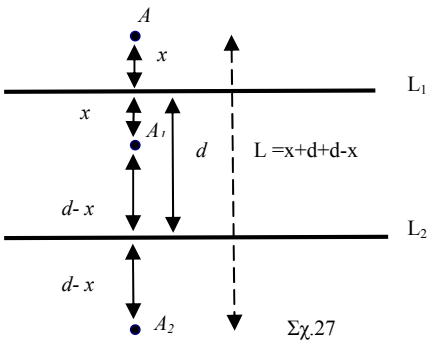
Χρήσιμες προτάσεις σχετικές με την ανάκλαση ως προς ευθεία.

Πρόταση 1

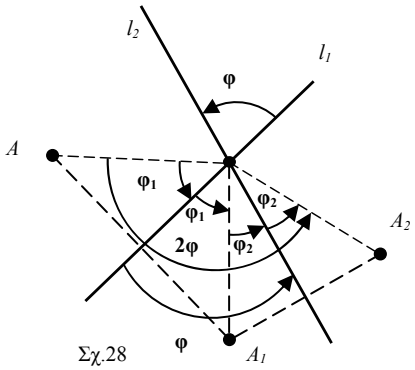
Η σύνθεση δύο ανακλάσεων ως προς την ίδια ευθεία είναι η ταυτοτική ανάκλαση

Πρόταση 2

Η σύνθεση δύο ανακλάσεων ως προς παράλληλες ευθείες είναι μεταφορά με διεύθυνση κάθετη στις δύο αυτές ευθείες και με απόσταση διπλάσια της απόστασης των δύο παραλλήλων ευθειών



Σχ.27



Σχ.28

Πρόταση 3

Η σύνθεση δύο ανακλάσεων ως προς ευθείες οι οποίες τέμνονται είναι στροφή ως προς το σημείο τομής των δύο ευθειών και ως προς γωνία διπλάσια της γωνίας των δύο ευθειών.

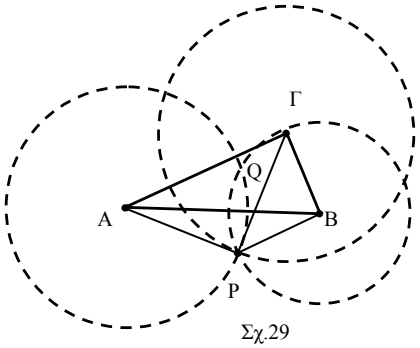
Στα σχήματα 27 και 28 ουσιαστικά σκιαγραφείται η απόδειξη των προτάσεων 2 και 3.

Όλοι οι πιο πάνω μετασχηματισμοί είναι μετασχηματισμοί που διατηρούν την απόσταση. Τέτοιοι μετασχηματισμοί ονομάζονται μετασχηματισμοί στερεάς κίνησης. Μέσω ενός τέτοιου μετασχηματισμού *M* έχουμε μία απεικόνιση του επιπέδου στον εαυτό του έτσι ώστε η απόσταση μεταξύ οποιονδήποτε δύο σημείων Α και Β είναι ίση με την απόσταση των εικόνων Α΄=*M*(Α) και Β΄=*M*(Β)

Η ισότητα δύο σχημάτων F και F΄ ορίζεται ως εξής: το F είναι σύμφωνο με το F΄ και γράφουμε F≈F΄αν υπάρχει κίνηση M τέτοια ώστε F΄≈*M*(F) .

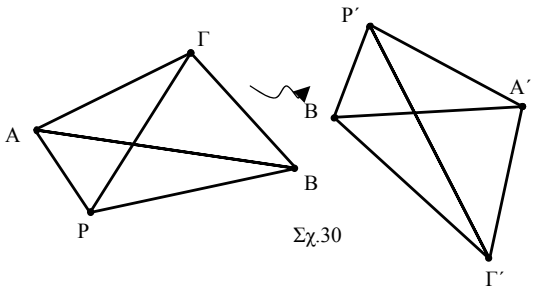
Μια τέτοια κίνηση μπορεί να καθοριστεί πλήρως από το αποτέλεσμα που αυτή έχει σε ένα οποιοδήποτε τρίγωνο. (πρόταση α)

Με την πιο πάνω πρόταση εννοούμε ότι αν γνωρίζουμε τι συμβαίνει σε τρία μη συνευθειακά σημεία αυτό καθορίζει πλήρως το τι θα συμβεί σε κάθε σημείο του επιπέδου.



Σχ.29

Αν παρατηρήσουμε το σχήμα 29 κάθε σημείο μπορεί να καθοριστεί μονοσήμαντα από τις αποστάσεις του από τις κορυφές Α, Β , Γ ενός τριγώνου. Αν είναι γνωστές οι αποστάσεις του σημείου από τρία σημεία Α,Β,Γ του επιπέδου τότε μπορούμε μονοσήμαντα να καθορίσουμε και το σημείο. Πράγματι οι αποστάσεις του σημείου από τις κορυφές Α και Β παράγουν δύο κύκλους οι οποίοι στην γενική περίπτωση τέμνονται σε δύο σημεία Ρ και Q ενώ η τρίτη απόσταση (αυτή από το Γ) καθορίζει το Ρ ή το Q αναλόγως ποιο σημείο ζητείται. Αντίστροφα αν έχουμε ένα σημείο Ρ τότε αν ΑΡ, ΒΡ, ΓΡ είναι οι αποστάσεις του από τα Α,Β, Γ τότε μπορούμε πολύ εύκολα να δείξουμε ότι δεν υπάρχει δεύτερο σημείο Q που να έχει τις ίδιες αποστάσεις από τα Α,Β,Γ (AQ=AP, BQ=BP, ΓQ=ΓΡ). Πράγματι οι κύκλοι (Α,ΑΡ) και (Β,ΒΡ) τέμνονται στα σημεία Ρ και Q. Η μεσοκάθετος του PQ είναι η ΑΒ . Έστω το Γ βρίσκεται στο ίδιο ημιεπίπεδο με το Q οπότε ΓΡ>ΓQ.



Σχ.30

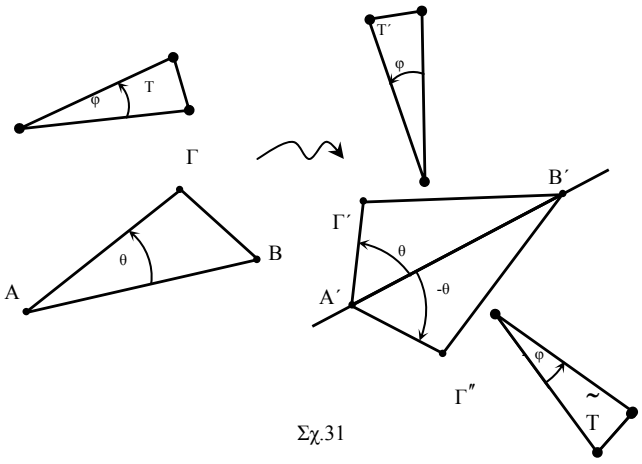
Για να αποδείξουμε τώρα αυτό που δηλώθηκε μέσω της πιο πάνω πρότασης (πρόταση α) πρέπει να παρατηρήσουμε το διπλανό σχήμα (Σχ.30): Στο σχήμα αυτό περιγράφεται μια στερεά κίνηση η οποία απεικονίζει τα Α,Β,Γ στα Α΄,Β΄,Γ΄. Από τον ορισμό της στερεάς κίνησης συμπεραίνουμε ότι αυτή απεικονίζει το αυθαίρετο σημείο Ρ στο Ρ΄ του οποίου οι αποστάσεις από τις

κορυφές Α΄,Β΄,Γ΄ είναι ίσες με τις αποστάσεις του Ρ από τα σημεία Α,Β,Γ αντίστοιχα. Έχουμε ήδη δείξει την μοναδικότητα το Ρ΄ άρα η απόδειξη έχει τελειώσει.

Το βασικότερο βήμα για την ταξινόμηση των στερεών κινήσεων είναι η αναγνώριση της ύπαρξης δύο διαφορετικών ειδών κίνησης. Η διάκριση μπορεί να γίνει ανάλογα με το αν το σχήμα αλλάζει προσανατολισμό έτσι ώστε να τοποθετηθεί πάνω σε ένα σύμφωνό του σχήμα.

Ας τα δούμε αυτά μέσω ενός σχήματος (σχήμα 31):

Ας υποθέσουμε ότι μια κίνηση Μ απεικονίζει δύο σημεία Α και Β στα Α΄ και Β΄ αντίστοιχα . Σύμφωνα με τα πιο πάνω η κίνηση δεν έχει ακόμα καθοριστεί διότι χρειάζεται να γνωρίζουμε την εικόνα και ενός τρίτου σημείου Γ. Από τη στιγμή που οι στερεές κινήσεις διατηρούν την απόσταση του Γ από τα Α και Β υπάρχουν ακριβώς δύο στέρεες κινήσεις για την εικόνα του Γ: αυτή η κίνηση που απεικονίζει το Γ στο Γ΄ και αυτή που απεικονίζει το Γ στο Γ΄΄ όπου Γ΄΄ είναι το συμμετρικό του Γ΄ ως προς την ευθεία Α΄Β΄. Έτσι υπάρχουν δύο κινήσεις οι Μ και Μ΄ όπου η μεν Μ απεικονίζει τα Α και Β στα Α΄ και Β΄ αντίστοιχα και το Γ στο Γ΄ και η δε Μ΄ απεικονίζει το Α στο Α΄ το Β στο Β΄ και το Γ στο Γ΄΄.

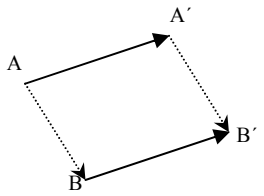


Σχ.31

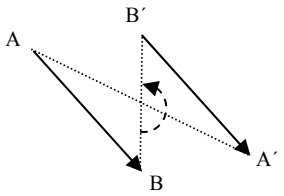
Μια διαφοροποίηση μεταξύ των Μ και Μ΄ γίνεται με το να παρατηρήσουμε την επίδραση που έχουν στον προσανατολισμό των γωνιών. Και οι δύο κινήσεις διατηρούν το μέγεθος των γωνιών αλλά παρατηρούμε ότι η μεν Μ διατηρεί και τον προσανατολισμό της γωνίας θ ενώ η Μ΄ τον αντιστρέφει. Η ουσιαστική διαφορά των Μ και Μ΄ βρίσκεται στο ότι η Μ διατηρεί τον προσανατολισμό όλων των γωνιών ενώ η Μ΄ αλλάζει τον προσανατολισμό όλων των γωνιών. Οι στερεές κινήσεις που διατηρούν την γωνία λέγονται ομόρροπες ή ευθείες κινήσεις και οι στερεές κινήσεις που αλλάζουν τον προσανατολισμό της γωνίας καλούνται αντίρροπες κινήσεις. Υπάρχει μία ακριβώς ομόρροπη κίνηση Μ και ακριβώς μία αντίρροπη κίνηση Μ΄ οι οποίες απεικονίζουν ένα ευθύγραμμο τμήμα σε ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα ίσου μήκους. Επιπλέον για τις Μ και Μ΄ ισχύει: Μ΄=Μ + (μια ανάκλαση). Οι στροφές και οι μεταφορές είναι ομόρροπες κινήσεις ενώ οι συμμετρίες ως προς ευθεία (ανακλάσεις) είναι αντίρροπες κινήσεις.

Κάθε ευθεία (ομόρροπη) κίνηση είναι στροφή ή μεταφορά. Για να το αποδείξουμε αυτό αρκεί να θεωρήσουμε δύο τυχαία ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και Α΄Β΄ ίσου μήκους και κατόπιν να βρούμε την ομόρροπη κίνηση η οποία απεικονίζει το ένα ευθύγραμμο τμήμα στο άλλο. Πράγματι έστω ότι τα ΑΒ και Α΄Β΄ είναι δύο ευθύγραμμα τμήματα ίσου μήκους. Αρχικά θα υποθέσουμε ότι τα δύο αυτά ευθύγραμμα τμήματα είναι παράλληλα. Για να διευκολυνθούμε στην απόδειξη θα δουλέψουμε με τα αντίστοιχα διανύσματα που προκύπτουν από τα ευθύγραμμα αυτά τμήματα. Τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A'B'}$ είναι ίσα ή αντίθετα. Αν είναι ίσα τότε η κίνηση είναι μεταφορά. Αν είναι αντίθετα τότε η κίνηση είναι στροφή κατά 180° (ημιστροφή) με κέντρο το σημείο τομής των τμημάτων ΑΑ΄ και ΒΒ΄. Αν τα διανύσματα δεν είναι παράλληλα τότε θα πάρουμε τους φορείς τους. Οι φορείς τους τέμνονται σε ένα σημείο Μ. Θα θυμηθούμε μια βασική ιδιότητα των κύκλων: κάθε σημείο του τόξου $\widehat{AMA'}$ βλέπει υπό ίση γωνία την χορδή ΑΑ΄. Ας υποθέσουμε τώρα ότι Ο είναι το σημείο τομής του τόξου $\widehat{AMA'}$ με τη μεσοκάθετο της χορδής ΑΑ΄. Εύκολα βλέπουμε ότι η ευθεία κίνηση που απεικονίζει το $\overrightarrow{AB}$ στο $\overrightarrow{A'B'}$ είναι μία στροφή με κέντρο το Ο αφού προφανώς το Α

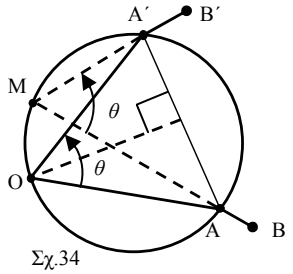
μεταφέρεται στο Α΄ και η διεύθυνση του $\overrightarrow{AB}$ απεικονίζεται στην διεύθυνση του $\overrightarrow{A'B'}$ (βλ.και σχήμα 11 σελ 32)



Σχ.32



Σχ.33



Σχ.34

Κάθε ομόρροπη κίνηση είναι λοιπόν σύνθεση δύο ανακλάσεων και κάθε αντίρροπη κίνηση είναι σύνθεση τριών ανακλάσεων. Κάθε κίνηση είναι επίσης μια ένα προς ένα και επί απεικόνιση. Το σύνολο των ισομετριών σχηματίζει ομάδα διότι: 1. η απεικόνιση d με $d(\mathrm{A}) \equiv \mathrm{A}$ για κάθε σημείο Α του επιπέδου (ταυτοτική απεικόνιση) είναι ισομετρία αφού αν ΑΒ είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα τότε d (ΑΒ)=ΑΒ 2. Αν $\Im_1, \Im_2$ είναι δύο ισομετρίες τότε η σύνθεση τους $\Im_2 \circ \Im_1$ είναι επίσης ισομετρία. Πράγματι για τυχαία σημεία $\mathrm{A_i}, \mathrm{B_i}$ του επιπέδου θα έχουμε αν $\Im_1(\mathrm{A_1}) \equiv \mathrm{A_2}$, $\Im_1(\mathrm{B_1}) \equiv \mathrm{B_2}$, $\Im_2(\mathrm{A_2}) \equiv \mathrm{A_3}$ $\Im_2(\mathrm{B_2}) \equiv \mathrm{B_3}$

τότε $\Im_1(\mathrm{A_1B_1}) \equiv \mathrm{A_2B_2}$ και $\mathrm{A_1B_1}=\mathrm{A_2B_2}$, $\Im_2(\mathrm{A_2B_2}) \equiv \mathrm{A_3B_3}$ και $\mathrm{A_2B_2}=\mathrm{A_3B_3}$ οπότε και $\mathrm{A_1B_1}=$ $=\mathrm{A_3B_3}$. Άρα $\Im_2 \circ \Im_1(\mathrm{A_1B_1}) \equiv \Im_2(\Im_1(\mathrm{A_1B_1})) \equiv \Im_2(\mathrm{A_2B_2}) \equiv \mathrm{A_3B_3}$ και $\mathrm{A_1B_1}=\mathrm{A_3B_3}$. 3. Αφού κάθε κίνηση είναι ένα προς ένα και επί άρα για κάθε ισομετρία $\Im_1$ υπάρχει η αντίστροφη απεικόνιση $\Im_1^{-1}$ η οποία είναι επίσης ισομετρία αφού για κάθε Α, Β σημεία του επιπέδου θα ισχύει $\Im_1(\mathrm{AB}) \equiv \mathrm{A_1B_1}$ και $\Im_1^{-1}(\mathrm{A_1B_1}) \equiv \mathrm{AB}$ με $\mathrm{AB}=\mathrm{A_1B_1}$

Η ομάδα αυτή και το σύνολο των σημείων του επιπέδου παράγουν την γνωστή μας Ευκλείδεια γεωμετρία αν δούμε τα πράγματα από την οπτική γωνία της άποψης του F. Klein.

4. Μετασχηματισμοί ομοιότητας- ομοιοθεσία

Πιο πριν αποδείξαμε ότι η σύνθεση δύο ανακλάσεων ως προς παράλληλες ευθείες είναι μεταφορά ενώ η σύνθεση δύο ανακλάσεων ως προς τεμνόμενες ευθείες είναι στροφή με γωνία διπλάσια της γωνίας που σχηματίζουν οι τεμνόμενες ευθείες. Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε μια στροφή ως προς γωνία θ και ως προς κέντρο Ο. Η στροφή αυτή είναι ισοδύναμη με την σύνθεση δύο ανακλάσεων ως προς ευθείες οι οποίες τέμνονται στο κέντρο Ο και οι οποίες σχηματίζουν γωνία θ/2. Αντίστοιχα μία μεταφορά L μπορεί να αντικατασταθεί από την σύνθεση δύο ανακλάσεων ως προς ευθείες παράλληλες προς το διάνυσμα της μεταφοράς και οι οποίες έχουν απόσταση L/2. Πριν τελειώσουμε την αναφορά μας στους βασικότερους μετασχηματισμούς της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και την άποψη του F. Klein για την γεωμετρία ας δούμε με μια πιο λεπτομερή ματιά το ρόλο της απόστασης στην Ευκλείδεια Γεωμετρία. Ας υποθέσουμε πως έχουμε δύο ορθογώνια τρίγωνα Τ και Τ΄ και δύο άτομα κάνουν μετρήσεις ο ένας στο τρίγωνο Τ και ο άλλος στο τρίγωνο Τ΄. Αν και οι δύο συναντηθούν και ανακοινώσουν ο ένας στον άλλο ότι οι μετρήσεις που έκαναν στο τρίγωνό του ο καθένας είναι 3,4,5 τότε κάποιος μπαίνει στον πειρασμό να δηλώσει ότι τα τρίγωνα είναι μεταξύ τους ίσα με την έννοια ότι υπάρχει στερεά κίνηση Μ η οποία απεικονίζει το ένα στο άλλο: Τ΄= Μ(Τ). Όμως αν ο ένας μετράει σε cm και ο άλλος μετράει σε ίντσες; Τότε τα τρίγωνα είναι όμοια αλλά όχι ίσα. Ποιο από τα δύο τρίγωνα έχει πλευρές 3,4,5; Μα φυσικά και τα δύο.

Άρα λοιπόν όταν πρόκειται να μιλήσουμε για αποστάσεις μέσω αριθμητικών τιμών αυτό προϋποθέτει μια μονάδα μέτρησης η οποία θα είναι κάποιο ευθύγραμμο τμήμα το οποίο ας συμβολίσουμε με U. Όταν λέμε λοιπόν κάποιο ευθύγραμμο τμήμα U΄ είναι μήκους 5 αυτό που εννοούμε είναι ότι ακριβώς 5 επαναλήψεις του U τοποθετημένες διαδοχικά πάνω σε μια

ευθεία δίνουν ένα ευθύγραμμο τμήμα το οποίο είναι σύμφωνο με το U΄. Όμως σε ένα επίπεδο κάθε επιλογή μονάδας είναι εξίσου καλή με οποιαδήποτε άλλη δηλαδή δεν υπάρχει απόλυτη μονάδα μέτρησης και τα γεωμετρικά θεωρήματα πρέπει να αντανακλούν αυτό το γεγονός. Για να το διευκρινίσουμε καλύτερα αυτό θα πρέπει να πούμε ότι τα θεωρήματα της ευκλείδειας γεωμετρίας δεν εξαρτιόνται από αυτήν την αυθαίρετη επιλογή του U αλλά αντιθέτως έχουν να κάνουν με λόγους μηκών των τμημάτων οι οποίοι λόγοι είναι ανεξάρτητοι από το U. Για παράδειγμα αυτός που κάνει τις μετρήσεις σε cm ανακαλύπτει ότι το τρίγωνό του ικανοποιεί το πυθαγόρειο θεώρημα στην μορφή $(3cm)^2+(4cm)^2=(5cm)^2$ αλλά αν διαιρέσουμε με $(5cm)^2$ και τα δύο μέλη τότε αυτό μπορεί να ξαναγραφεί με μορφή λόγου και έχουμε να κάνουμε πλέον με καθαρούς αριθμούς : $(3/5)^2+(4/5)^2=1$.

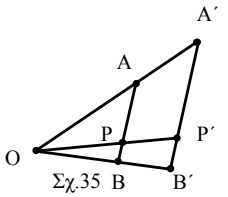
Από την στιγμή που τα θεωρήματα της ευκλείδειας γεωμετρίας δε έχουν να κάνουν με το πραγματικό μέγεθος των σχημάτων η προηγούμενη θεώρηση της ισότητας των σχημάτων με όρους στερεάς κίνησης είναι ίσως πολύ αυστηρός. Δύο σχήματα θα μπορούσαμε να πούμε πως είναι σύμφωνα αν και μόνο αν είναι όμοια. Πιο συγκεκριμένα θα μπορούσαμε να θεωρούμε ότι δύο σχήματα είναι ίσα όταν υπάρχει μία απεικόνιση *ομοιότητας* η οποία απεικονίζει το ένα στο άλλο. Με τον όρο δε *ομοιότητα* θα εννοούμε ένα μετασχηματισμό ο οποίος απεικονίζει το επίπεδο στον εαυτό του και *διατηρεί τους λόγους των αποστάσεων*.

Θα δώσουμε μια πιο λεπτομερή περιγραφή των μετασχηματισμών ομοιότητας. Πιο πριν όμως θα αναφερθούμε στους μετασχηματισμούς ομοιοθεσίας.

α) Ομοιοθεσία

Ομοιοθεσία $H_{O,\kappa}$ όπου O είναι ένα σταθερό σημείο του επιπέδου και κ είναι ένας μη μηδενικός αριθμός, είναι εκείνος ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το O στον εαυτό του και οποιοδήποτε άλλο σημείο P σε κάποιο άλλο σημείο P΄ έτσι ώστε τα σημεία O,P,P΄να είναι συγγραμμικά και OP΄=κ·OP. Το σημείο O καλείται κέντρο και το κ λόγος της ομοιοθεσίας. Η ομοιοθεσία είναι το θεμέλιο των μετασχηματισμών ομοιότητας με τον ίδιο περίπου τρόπο που οι ανακλάσεις είναι το θεμέλιο για τις ισομετρίες. Δεν θα μπορούσε κάποιος να πάρει όλους τους μετασχηματισμούς ομοιότητας μέσω σύνθεσης ομοιοθεσιών και μόνο, αλλά είναι μετασχηματισμοί απαραίτητοι και βασικοί για τις ομοιότητες. Ακολούθως θα εξετάσουμε τις στοιχειώδεις ιδιότητες των ομοιοθεσιών και θα παρουσιάσουμε τις βασικές σχέσεις μεταξύ των ομοιοθεσιών και των μετασχηματισμών ομοιότητας.

1. Η ομοιοθεσία $H_{O,\kappa}$ απεικονίζει το ευθύγραμμο τμήμα AB σε ένα παράλληλο ευθύγραμμο τμήμα A΄B΄ για το οποίο έχουμε A΄B΄=$|\kappa|$ AB.



Σχ.35

Πράγματι:

Ας υποθέσουμε ότι η $H_{O,\kappa}$ απεικονίζει το A στο A΄ το B στο B΄ και το οποιοδήποτε άλλο σημείο P στο σημείο P΄. Τότε $\angle$ BOP=$\angle$B΄OP΄ και $\frac{OB'}{OB}=\frac{OP'}{OP}=|\kappa|$. Άρα τα τρίγωνα BOP και B΄OP΄ είναι όμοια. Θα ισχύει λοιπόν $\frac{B'P'}{BP}=|\kappa|$. και το τμήμα B΄P΄ θα είναι παράλληλο στο BP. Ομοίως $\frac{P'A'}{PA}=|\kappa|$ και το P΄A΄ είναι παράλληλο στο PA .

Αφού BPA είναι ευθεία, το ίδιο θα είναι και η B΄P΄A΄ και $\frac{B'A'}{BA}=|\kappa|$

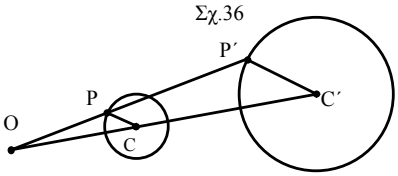
2. Μια ομοιοθεσία απεικονίζει ένα τρίγωνο σε ένα όμοιο τρίγωνο και γενικότερα απεικονίζει κάθε πολύγωνο σε ένα όμοιο πολύγωνο.

3. Μια ομοιοθεσία διατηρεί τις γωνίες μεταξύ των ευθειών.

4. Μια ομοιοθεσία $H_{O,\kappa}$ απεικονίζει έναν κύκλο ακτίνας ρ σε έναν άλλο κύκλο του οποίου η ακτίνα ρ΄ είναι ρ΄=$|\kappa|\rho$ και του οποίου το κέντρο C΄ είναι η ομοιοθετική εικόνα του κέντρου

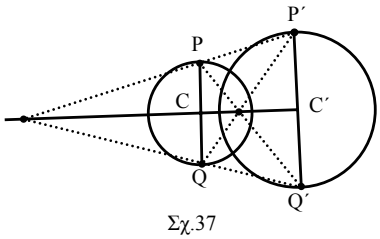
C του δοθέντος κύκλου. Ας υποθέσουμε ότι η ομοιοθεσία $H_{O,\kappa}$ απεικονίζει το κέντρο C ενός κύκλου στο σημείο C΄ και το τυχαίο σημείο P του κύκλου στο σημείο P΄. Πράγματι (σχήμα 36) αν είναι CP = ρ η ακτίνα του δοθέντος κύκλου τότε C΄P΄=| κ |ρ οπότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των σημείων P του δοθέντος κύκλου είναι ένας άλλος κύκλος κέντρου C΄ και ακτίνας | κ |ρ που είναι η εικόνα του κέντρου C.

Σχ.36



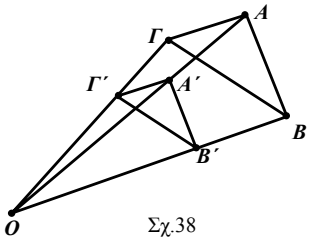
5. Για δύο οποιουσδήποτε κύκλους υπάρχει μια ομοιοθεσία η οποία απεικονίζει τον έναν στον άλλο Αν οι δύο κύκλοι δεν είναι ίσοι ούτε ομόκεντροι τότε υπάρχουν δύο τέτοιες ομοιοθεσίες.

Πράγματι αν οι δύο κύκλοι έχουν ακτίνες αντίστοιχα ρ και ρ΄, δεν είναι ομόκεντροι και δεν τέμνονται, τότε τα κέντρα των ομοιοθεσιών είναι α) τα σημεία τομής των κοινών τους εξωτερικών εφαπτόμενων με αντίστοιχο λόγο ομοιοθεσίας το λόγο ρ΄/ρ και β) τα σημεία τομής των κοινών εσωτερικών τους εφαπτόμενων και λόγο ομοιοθεσίας -ρ΄/ρ. Σε κάθε περίπτωση πάντως, μπορούμε να βρούμε τα κέντρα των ομοιοθεσιών αν φέρουμε τις κάθετες στην ευθεία που σχηματίζεται από τα κέντρα των κύκλων C και C΄, στα σημεία C και C΄. Αυτές οι κάθετες τέμνουν τον μεν κύκλο C στα P και Q και τον C΄στα P΄ και Q΄. Τα κέντρα των ομοιοθεσιών είναι τα σημεία τομής των PQ΄ και P΄Q και των PQ΄ και QP΄ (σχήμα 37).



Σχ.37

Αν δύο όμοια μη συμπτώσιμα τρίγωνα είναι έτσι προσανατολισμένα ώστε κάθε πλευρά του ενός να είναι παράλληλη αντίστοιχα με μια πλευρά του άλλου τότε υπάρχει ομοιοθεσία η οποία απεικονίζει το ένα τρίγωνο στο άλλο. Αυτό αποδεικνύεται ως εξής: Ας θεωρήσουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ τα οποία είναι όμοια με λόγο ομοιότητας λ (λ≠±1) και τα οποία έχουν παράλληλες πλευρές. Έστω ότι οι πλευρές ΑΑ΄ και ΒΒ΄ τέμνονται στο O_1. Λόγω παραλληλίας των ΑΒ και Α΄Β΄ τα τρίγωνα O_1ΒΑ και O_1Β΄Α΄ είναι όμοια (με λόγο ομοιότητας λ). Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι πλευρές ΓΓ΄ και ΒΒ΄ τέμνονται στο O_2. Λόγω παραλληλίας των ΑΒ και Α΄Β΄ τα τρίγωνα O_2ΒΓ και O_2Β΄Γ΄ είναι όμοια (με λόγο ομοιότητας λ) Έχουμε: $\frac{BB'}{B'O_1}=\lambda$ και $\frac{BB'}{B'O_2}=\lambda$ άρα $O_1 \equiv O_2$. Ας ονομάσουμε αυτό το σημείο Ο και η απόδειξη στην ουσία της έχει τελειώσει.

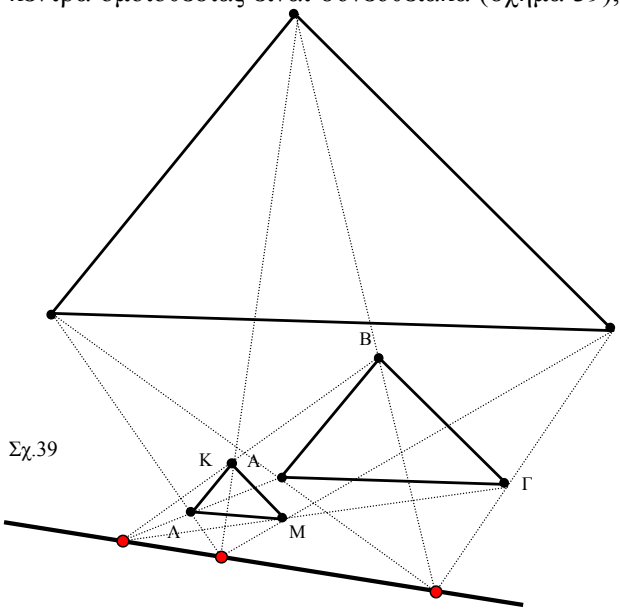


Σχ.38

Μια ομοιοθεσία καθορίζεται από δύο διαφορετικά σημεία και τις εικόνες τους. Αυτό συμπεραίνεται άμεσα αν θεωρήσουμε ότι οι εικόνες των σημείων Α και Β μέσω της ομοιοθεσίας είναι τα Α΄ και Β΄ αντίστοιχα. Το κέντρο της ομοιοθεσίας είναι το σημείο τομής των ΑΑ΄ και ΒΒ΄ και ο λόγος ομοιοθεσίας είναι $\pm\frac{A'B'}{AB}$ (το – αν το κέντρο ομοιοθεσίας είναι μεταξύ των Α και Α΄)

Αν κλ≠1 τότε η σύνθεση των δύο ομοιοθεσιών $H_{O,\kappa}$ και $H_{Q,\lambda}$ είναι μια ομοιοθεσία $H_{P,\kappa\lambda}$ όπου το P είναι συγγραμμικό με τα O και Q. Αν κλ=1 τότε το P γίνεται ιδεατό και η σύνθεση γίνεται μεταφορά. (Επειδή κάθε ομοιοθεσία απεικονίζει ένα τρίγωνο σε ένα τρίγωνο όμοιο με το δοθέν και με πλευρές παράλληλες προς αυτό, άρα και η σύνθεση τους είναι ομοιοθεσία με λόγο κλ αν κλ ≠1 ή μεταφορά αν κλ=1)

Τα κέντρα ομοιοθεσίας είναι συνευθειακά (σχήμα 39), όπως προκύπτει από το θεώρημα του Desargues (θεώρημα των δύο τριγώνων του Desargues: Αν δύο τρίγωνα είναι ομοπολικά τότε είναι ομοαξονικά[20]).



Σχ.39

Η σύνθεση δύο ομοιοθεσιών που έχουν το ίδιο κέντρο είναι αντιμεταθετική και είναι μια ομοιοθεσία με το ίδιο κέντρο και με λόγο ίσο με το γινόμενο των λόγων των εν λόγω ομοιοθεσιών.

Το κέντρο μιας ομοιοθεσίας λόγου λ≠+1 είναι το μόνο σταθερό σημείο της ομοιοθεσίας. Ευθείες που διέρχονται από το κέντρο είναι οι μόνες σταθερές ευθείες. Μια ομοιοθεσία λόγου λ=+1 είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός. Μια ομοιοθεσία είναι ευθύς (ομόρροπος) μετασχηματισμός.

β) Ομοιότητα

Μια ομοιότητα είναι μια απεικόνιση του επιπέδου η οποία απεικονίζει κάθε ζεύγος σημείων Α, Β σε ένα ζεύγος σημείων Α΄, Β΄ έτσι ώστε Α΄Β΄=κ·ΑΒ για κάποιον <u>σταθερό</u> θετικό πραγματικό αριθμό. Ο αριθμός κ λέγεται λόγος της ομοιότητας.

Μερικές χρήσιμες προτάσεις για την ομοιότητα είναι οι εξής:

1. Μια ομοιότητα με λόγο 1 είναι ισομετρία.

2. Μια ομοιότητα απεικονίζει ευθύγραμμα τμήματα σε ευθύγραμμα τμήματα.

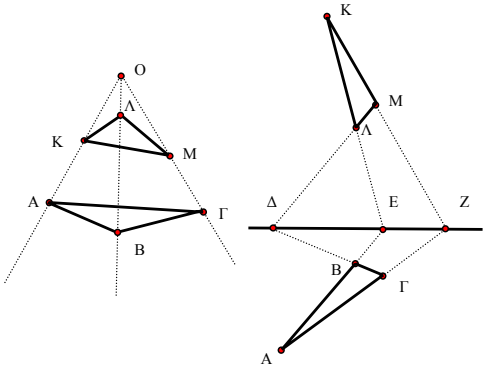
Ας θεωρήσουμε μια ομοιότητα με λόγο κ η οποία απεικονίζει το σημείο Α στο Α΄ και το Β στο Β΄. Αν πάρουμε οποιοδήποτε σημείο Ρ μεταξύ των Α και Β και ας υποθέσουμε ότι Ρ΄ είναι η εικόνα του Ρ τότε Α΄Β΄=κ·ΑΒ=κ·(ΑΡ+ΡΒ)=κ·ΑΡ+κ·ΡΒ=Α΄Ρ΄+Β΄Ρ΄ Αφού λοιπόν Α΄Β΄=Α΄Ρ΄+Β΄Ρ΄ άρα το σημείο Ρ΄ ανήκει στο τμήμα Α΄Β΄.

3. Η ομοιότητα διατηρεί τις γωνίες.

Έστω μία γωνία Α. Επιλέγουμε δύο σημεία Β και Γ στις δύο πλευρές της γωνίας αντίστοιχα έτσι ώστε να λάβουμε το τρίγωνο ΑΒΓ. Έστω η ομοιότητα που απεικονίζει το τρίγωνο ΑΒΓ στο Α΄Β΄Γ΄ (αυτό προκύπτει άμεσα από την πρόταση 2, αφού κάθε ομοιότητα απεικονίζει

---

[20] Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ είναι ομοπολικά αν οι ΑΚ, ΒΛ, ΓΜ συντρέχουν. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ είναι ομοαξονικά αν οι αντίστοιχες πλευρές τους τέμνονται σε σημεία που είναι συγγραμμικά



ευθύγραμμα τμήματα σε ευθύγραμμα τμήματα). Τότε $\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'\Gamma'}{B\Gamma}=\frac{\Gamma'A'}{\Gamma A}$ οπότε τα τρίγωνα είναι όμοια άρα και οι γωνίες ∡ΓΑΒ=∡Γ΄Α΄Β΄

4. Μια ομοιότητα απεικονίζει ένα τρίγωνο σε ένα όμοιο τρίγωνο και γενικότερα ένα πολύγωνο σε ένα όμοιο πολύγωνο.

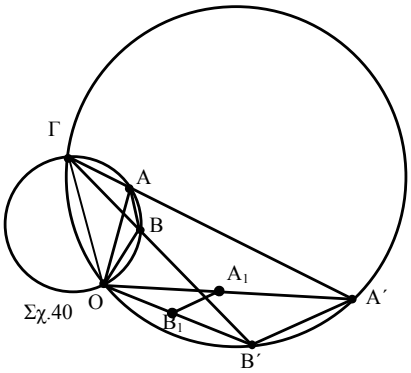
5. Μια ομοιότητα καθορίζεται πλήρως από τρία σημεία και τις εικόνες των σημείων αυτών.

6. Υπάρχουν ακριβώς δύο ομοιότητες (η μία είναι ομόρροπη και η άλλη αντίρροπη) οι οποίες απεικονίζουν ένα τυχαίο ζεύγος σημείων Α,Β σε ένα άλλο τυχαίο ζεύγος σημείων Α΄,Β΄ (Α≠Α, Α΄≠Β΄, όπου Α΄ είναι η εικόνα του Α και Β΄ είναι η εικόνα του Β).

7. Κάθε ευθεία (ομόρροπη) ομοιότητα με λόγο κ η οποία δεν είναι ισομετρία είναι σύνθεση μιας στροφής και μιας ομοιοθεσίας με λόγο κ η οποία έχει το ίδιο κέντρο με την στροφή. Επιπλέον μια τέτοια σύνθεση είναι αντιμεταθετική. Μια τέτοια σύνθεση είναι μια ευθεία ομοιότητα διότι από την ιδιότητα 6 έχουμε ότι μια ομοιότητα καθορίζεται από ένα τμήμα ΑΒ και την εικόνα του Α΄Β΄. Ας υποθέσουμε ότι ΑΑ΄ και ΒΒ΄ τέμνονται στο σημείο Γ και ας γράψουμε τους κύκλους που διέρχονται από τα Α, Β, Γ και από τα Α΄, Β΄, Γ οι οποίοι τέμνονται στο Ο. Τότε έχουμε:

∡ΑΟΒ=∡ΑΓΒ=∡Α΄ΓΒ΄=∡Α΄ΟΒ΄ και ∡ΒΑΟ=∡ΒΓΟ=∡Β΄ΓΟ=∡Β΄Α΄Ο

οπότε τα τρίγωνα ΑΒΟ και Α΄Β΄Ο είναι όμοια. Αν η ΑΒ στραφεί γύρω από το Ο κατά μια γωνία ∡ΑΟΑ΄ τότε μέσω της στροφής αυτής θα απεικονιστεί στο A_1B_1. Τα τρίγωνα OA_1B_1 και ΟΑ΄Β΄ είναι όμοια οπότε το A_1B_1 είναι παράλληλο στο Α΄Β΄ και το B_1 κείται πάνω στην ευθεία ΟΒ΄ ενώ προφανώς και το A_1 κείται πάνω στην ΟΑ΄.Έτσι η ομοιοθεσία $H_{O,\kappa}$ απεικονίζει το A_1B_1 στο Α΄Β΄. Αυτή λοιπόν η στροφή και η ομοιοθεσία είναι οι ζητούμενες από το θεώρημα . Τώρα αν το σχήμα που σχηματίζουν τα σημεία Ο, A_1, B_1, Α΄, Β΄ στραφεί γύρω από το Ο και κατά γωνία ∡Α΄ΟΑ (αντίστροφη της γωνίας ∡ΑΟΑ΄) τότε το A_1B_1 θα συμπέσει με το ΑΒ. Οπότε η ομοιοθεσία και η στροφή μπορούν να αντιμετατεθούν.



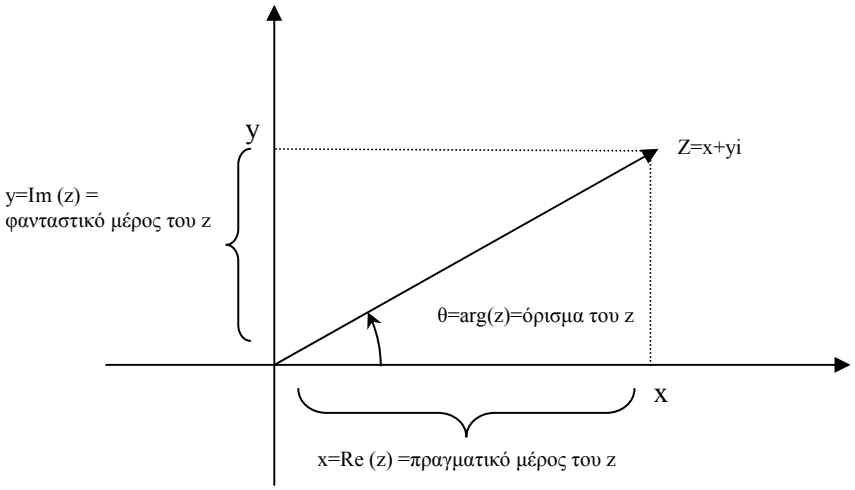
Σχ.40

8. Κάθε αντίρροπη ομοιότητα λόγου κ η οποία δεν είναι ισομετρία είναι σύνθεση μιας ανάκλασης και μιας ομοιοθεσίας της οποίας το κέντρο κείται στην ευθεία ανάκλασης. Επιπλέον αυτή η σύνθεση είναι αντιμεταθέσιμη. (Η απόδειξη της πρότασης είναι αρκετά μεγάλη και δεν νομίζω πως είναι ένας από τους κύριους στόχους της εργασίας μας η αναλυτική παρουσίαση της).

Το σύνολο όλων των μετασχηματισμών ομοιότητας σχηματίζουν ομάδα. (επίσης όλοι οι ευθείς μετασχηματισμοί ομοιότητας αποτελούν ομάδα) Θα μπορούσαμε να λοιπόν δώσουμε έναν ορισμό της Ευκλείδειας Γεωμετρίας βασιζόμενοι στους μετασχηματισμούς ομοιότητας στο πνεύμα της εισήγησης του F.Klein για το πρόγραμμα Erlangen: «*Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι η μελέτη εκείνων των ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων που μένουν αναλλοίωτες ως προς την ομάδα των μετασχηματισμών ομοιότητας*». Από την στιγμή που οι στερεές κινήσεις είναι ομοιότητες με λόγο λ=1 η ομάδα των στερεών κινήσεων είναι μια υποομάδα της ομάδας των ομοιοτήτων έτσι η προσπάθεια παραγωγής της ευκλείδειας γεωμετρίας με βάση την ομάδα των ισομετριών παράγει μια υπογεωμετρία της ομάδας των ομοιοτήτων.

Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί και μιγαδικοί αριθμοί –Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί και πίνακες

Μια σύντομη επανάληψη στους Μιγαδικούς Αριθμούς



Είναι πολύ χρήσιμο να επισημάνουμε από την αρχή, αν θέλουμε να δούμε τα πράγματα από μια γεωμετρική σκοπιά, ότι ένας μιγαδικός αριθμός είναι ένα σημείο στο επίπεδο. Μόνο όταν επιλέξουμε να περιγράψουμε αυτό το σημείο με αριθμητικό τρόπο δηλαδή εισάγωντας συντεταγμένες ο μιγαδικός αριθμός γίνεται κάτι το σύνθετο (complex). Ένας μιγαδικός αρθμός z μπορεί λοιπόν να ειδωθεί ως ένα σημείο Μ στο xy-επίπεδο το οποίο έχει καρτεσιανές συντεταγμένες (α,β) αλλά και ως ένα διάνυσμα το οποίο συνδέει την αρχή Ο με το σημείο Μ. Όταν δούμε το επίπεδο με αυτόν τον τρόπο, το ονομάζουμε μιγαδικό επίπεδο και το συμβολίζουμε με $\mathbb{C}$.

Ένας βασικός τρόπος για να παραστήσουμε ένα μιγαδικό αριθμό z μέσω καρτεσιανών συντεταγμένων είναι να τον γράψουμε στην μορφή $z = x + yi$. Με χρήση πάλι πολικών συντεταγμένων ένας μιγαδικός αριθμός z μπορεί να γραφεί στη μορφή $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ όπου $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$ και $\theta = \arg z$. Για συντομία μπορούμε να γράφουμε $z = r\measuredangle\theta$.

Για τον πολλαπλασιασμό έχουμε: $(\rho\measuredangle\theta)(r\measuredangle\phi) = (\rho r)\measuredangle(\theta + \phi)$

Για την διαίρεση : $\dfrac{(\rho\measuredangle\theta)}{(r\measuredangle\phi)} = \left(\dfrac{\rho}{r}\right)\measuredangle(\theta - \phi)$

Από αυτούς τους δύο τύπους μπορούμε να συμπεράνουμε ότι γεωμετρικά ο πολλαπλασιασμός με τον μιγαδικό αριθμό $A = R\measuredangle\theta$ είναι μια στροφή κατά γωνία θ και μια μεγέθυνση του επιπέδου κατά τον παράγοντα R.

Στο σημείο αυτό αξίζει να επισημανθούν:

1. Και η στροφή και η μεγέθυνση γίνονται ως προς την αρχή Ο.
2. Αν $R < 1$ τότε έχουμε μσίκρινση και όχι μεγέθυνση.

Με $\bar{z}$ συμβολίζουμε τον συζυγή του μιγαδικού αριθμού z. Ο συζυγής $\bar{z}$ ισούται με $\bar{z} = x - yi$.

Ισχύει επίσης: $z \cdot \overline{z} = |z|^2$, $\overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_1 + z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ καθώς και η γενικευμένη τριγωνική ανισότητα:

$|z_1 + z_2 + ... + z_v| \le |z_1| + |z_2| + ... |z_v|$

Τον τύπο $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ μπορούμε να τον αντικαταστήσουμε με κάποιον αρκετά πιο βολικό.

Θα χρησιμοποιήσουμε λοιπόν τον τύπο: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Αυτός ο τύπος ανακαλύφθηκε από τον Euler το 1740 και αποκαλείται τύπος του Euler.

Τον μιγαδικό αριθμό $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ μπορούμε να τον γράψουμε τώρα στην μορφή:

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$.

Μιγαδικοί αριθμοί και στερεές κινήσεις.

Θα αναφερθούμε τώρα στους μετασχηματισμούς μεταφοράς και στροφής με όρους μιγαδικών συνατρήσεων. Ας συμβολίσουμε μια μεταφορά κατά διάνυσμα υ με το σύμβολο $\Im_\upsilon$, ώστε ένας μιγαδικός αριθμός z να απεικονίζεται στον μιγαδικό $\Im_\upsilon(z) = z + \upsilon$.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός του $\Im_\upsilon$ συμβολίζεται με το σύμβολο $\Im_\upsilon^{-1}$ και είναι ο μετασχηματισμός ο οποίος 'ακυρώνει' τον $\Im_\upsilon$.

Δηλαδή η σύνθεση τους $\Im_\upsilon^{-1} \circ \Im_\upsilon = \Im_\upsilon \circ \Im_\upsilon^{-1} = \varepsilon$ όπου ε είναι η ταυτοτική απεικόνιση η οποία απεικονίζει κάθε σημείο στον εαυτό του: $\varepsilon(z) = z$. Μπορούμε πολύ εύκολα να διαπιστώσουμε ότι $\Im_\upsilon^{-1} = \Im_{-\upsilon}$.

Αν εφαρμόσουμε αρχικά τον μετασχηματισμό $\Im_\upsilon$ ο οποίος ακολουθείται κατόπιν από τον $\Im_\omega$ τότε η σύνθεση των μετασχηματισμών αυτών $\Im_\omega \circ \Im_\upsilon$ είναι μια ακόμα μεταφορά:

$\Im_\omega \circ \Im_\upsilon(z) = \Im_\omega(z + \upsilon) = z + (\omega + \upsilon) = \Im_{\omega+\upsilon}(z)$

Ας συμβολίσουμε την στροφή του επιπέδου γύρω από το σημείο α κατά γωνία θ με το σύμβολο: $\Re_\alpha^\theta$. Για παράδειγμα $\Re_\alpha^\phi \circ \Re_\alpha^\theta = \Re_\alpha^{\theta+\phi}$ και $\left(\Re_\alpha^\theta\right)^{-1} = \Re_\alpha^{-\theta}$

Ως πρώτο βήμα για την επεξεργασία και περιγραφή των στροφών με την βοήθεια μιγαδικών συναρτήσεων θα θυμηθούμε αυτά που είπαμε πιο πριν: Μια στροφή γύρω από την αρχή Ο και κατά γωνία θ μπορεί να γραφεί ως $\Re_o^\theta(z) = e^{i\theta}z$.

Μια στροφή $\Re_\alpha^\theta$ γενικότερα μπορεί να γραφεί με διαδοχικά βήματα:

1. μεταφορά του α στο Ο
2. στροφή γύρω από το Ο κατά γωνία θ
3. μεταφορά πίσω στο α

Συμβολικά θα έχουμε:

$\Re_\alpha^\theta(z) = \left(\Im_\alpha \circ \Re_o^\theta \circ \Im_\alpha^{-1}\right)(z) = e^{i\theta}(z-a) + a = e^{i\theta}z + k$ όπου $k = a(1 - e^{i\theta})$

Έτσι βρίσκουμε ότι μια στροφή γύρω από ένα οποιοδήποτε σημείο μπορεί να εκφραστεί ως μια στροφή γύρω από την αρχή Ο η οποία ακολουθείται από μια μεταφορά: $\Re_\alpha^\theta = \Im_k \circ \Re_o^\theta$.

Αντιστρόφως μια στροφή κατά γωνία α γύρω από το Ο που ακολουθείται από μια μεταφορά κατά υ μπορεί πάντα να αναχθεί σε μια και μόνο στροφή:

$\Im_\upsilon \circ \Re_o^\alpha = \Re_c^\alpha$ όπου $c = \frac{\upsilon}{1 - e^{ia}}$

Πράγματι θα έχουμε:

$$\Re_o^\alpha(z) = e^{ia}z$$

$$\Im_\upsilon \circ \Re_o^\alpha(z) = \Im_\upsilon\left(e^{ia}z\right) = e^{ia}z + \upsilon$$

$$\Re_c^\alpha(z) = e^{ia}z + c(1-e^{ia}) = e^{ia}z + \frac{\upsilon}{1-e^{ia}}(1-e^{ia}) = \Im_\upsilon \circ \Re_o^\alpha(z)$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε πολύ εύκολα να δούμε πως όταν εφαρμόσουμε την μεταφορά πριν από την στροφή τότε η σύνθεση αυτών των μετασχηματισμών μπορεί να επιτευχθεί απ΄ ευθείας με μια και μόνο στροφή $\Re_o^\theta \circ \Im_\upsilon = \Re_p^\theta$. Αυτό που πρέπει να προσδιορίσουμε είναι το p.

$$\Re_o^\theta \circ \Im_\upsilon(z) = \Re_o^\theta(z+\upsilon) = e^{i\theta}(z+\upsilon) = e^{i\theta}z + e^{i\theta}\upsilon$$

$$e^{i\theta}\upsilon = p(1-e^{i\theta}) \Rightarrow p = \frac{e^{i\theta}\upsilon}{(1-e^{i\theta})}$$

Τα αποτελέσματα που μόλις πήραμε σίγουρα δεν είναι προφανή γεωμετρικά και βοηθούν να δούμε την μεγάλη δύναμη που έχει ο χειρισμός με εργαλείο τις μιγαδικές συναρτήσεις.
Μια επιπρόσθετη επεξεργασία θα γίνει για την σύνθεση δύο στροφών γύρω από διαφορετικά σημεία.
Αναπαριστώντας τις στροφές ως μιγαδικές συναρτήσεις και μετά από κάποιες πράξεις έχουμε: $\Re_b^\phi \circ \Re_a^\theta(z) = e^{i(\phi+\theta)}z + \upsilon$ όπου $\upsilon = \alpha e^{i\phi}(1-e^{i\theta}) + b(1-e^{i\phi})$

$$\Re_b^\phi \circ \Re_a^\theta(z) = \Re_b^\phi(\Re_a^\theta(z)) = \Re_b^\phi(e^{i\theta}z + a(1-e^{i\theta})) =$$

$$e^{i\phi}(e^{i\theta}z + a(1-e^{i\theta})) + b(1-e^{i\phi}) = e^{i(\phi+\theta)}z + \underbrace{e^{i\phi}a(1-e^{i\theta}) + b(1-e^{i\phi})}_{\upsilon}$$

Αν εξαιρέσουμε την περίπτωση $\theta + \phi = 2\kappa\pi$ τότε θα έχουμε ότι $\Re_b^\phi \circ \Re_a^\theta(z) = \Re_c^{\phi+\theta}$

όπου $c = \dfrac{\upsilon}{1-e^{i(\theta+\phi)}} = \dfrac{\alpha e^{i\phi}(1-e^{i\theta}) + b(1-e^{i\phi})}{1-e^{i(\theta+\phi)}}$.

Αν όμως $\theta + \phi = 2\kappa\pi$ τότε $e^{i(\phi+\theta)} = 1$ και $\Re_b^\phi \circ \Re_a^\theta(z) = \Im_\upsilon$ με $\upsilon = (1-e^{i\phi})(b-a)$

Για παράδειγμα βάζοντας $\theta = \phi = \pi$ τότε $\Re_b^\phi \circ \Re_a^\theta(z) = \Im_{2(b-a)}$ είναι μια μεταφορά κατά το διπλάσιο του μιγαδικού αριθμού ο οποίος συνδέει το πρώτο κέντρο στροφής με το δεύτερο.
Έστω $M = \Re_{a_n}^{\theta_n} \circ \Re_{a_{n-1}}^{\theta_{n-1}} \circ \Re_{a_{n-2}}^{\theta_{n-2}} \circ \ldots \Re_{a_1}^{\theta_1}$ είναι η σύνθεση n στροφών και ας υποθέσουμε ότι $\Theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \ldots + \theta_n$ είναι η συνολική στροφή. Στην γενική περίπτωση θα έχουμε ότι $M = \Re_c^\Theta$ για κάποιο c, αλλά αν Θ είναι ένα πολλαπλάσιο του 2π τότε $\mathrm{M} = \Im_\upsilon$ για κάποιο υ ($\Im_\upsilon$ είναι μια μεταφορά).

Θεώρημα:

Κάθε ισομετρία $\mathbb{I}$ του επιπέδου μπορεί να εκφραστεί στο μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$ μέσω μιας συνάρτησης της μορφής: $\mathbb{I}(z) = az + b$ ή $\mathbb{I}(z) = a\bar{z} + b$ όπου $a, b \in \mathbb{C}, |a| = 1$. Αντίστροφα κάθε συνάρτηση της μορφής αυτής εκφράζει ισομετρία.

Απόδειξη:

Το αντίστροφο είναι προφανές. Θα σταθούμε λοιπόν στο ευθύ: Έστω $\mathbb{I}$ είναι μια ισομετρία του μιγαδικού επιπέδου και έστω $\mathbb{I}(0) = b$, $\mathbb{I}(1) = c$. Αν $a = c - b$ τότε $|a| = 1$.

Έστω η ισομετρία $S(z) = az + b$. Τότε $S(0) = b = \mathbb{I}(0)$ και $S(1) = a + b = c = \mathbb{I}(1)$.

Η $S^{-1} \circ \mathbb{I}$ είναι μια ισομετρία που σταθεροποιεί το 0 και το 1, οπότε θα σταθεροποιεί και κάθε άλλο σημείο του x-άξονα. Αφού λοιπόν η $S^{-1} \circ \mathbb{I}$ αφήνει αναλλοίωτο τον x-άξονα άρα θα είναι ή ο ταυτοτικός μετασχηματισμός ή ανάκλαση ως προς τον x-άξονα. Αν είναι ανάκλαση ως προς τον x-άξονα τότε $S^{-1} \circ \mathbb{I}(z) = \bar{z}$ οπότε $\mathbb{I}(z) = S(\bar{z}) = a\bar{z} + b$. Αν $S^{-1} \circ \mathbb{I}(z) = z$ τότε $\mathbb{I}(z) = S(z) = az + b$

Μιγαδικοί αριθμοί και ομοιότητα

Μια ομοιότητα όπως είπαμε και πιο πάνω είναι μια απεικόνιση του επιπέδου στον εαυτό του η οποία διατηρεί τους λόγους των αποστάσεων.
Κάθε ομοιότητα S διαστέλλει κάθε απόσταση κατά τον ίδιο μη μηδενικό παράγοντα r (διαστολή της S). Θα δηλώσουμε τη διαστολή κατά τον παράγοντα r προσθέτοντας έναν δείκτη r στο σύμβολο S, γράφοντας S^r.
Η ταυτοτική απεικόνιση S^1 είναι και αυτή μια απεικόνιση μετασχηματισμού ομοιότητας.
Επίσης έχουμε ότι:

$S^{-1} = S^{\frac{1}{r}}$ (αφού $S^k \circ S^r = S^{kr}$)

οπότε $S^k \circ S^r = S^1 \Rightarrow S^{kr} = S^1 \Rightarrow kr = 1 \Rightarrow k = \dfrac{1}{r}$

Από όσα παραθέτουμε πιο πάνω προκύπτει άμεσα ότι οι ομοιότητες σχηματίζουν μια ομάδα[1].
Μια επιμέρους περίπτωση ομοιότητας S^r, είναι και η ομοιοθεσία[2] ή αλλιώς κεντρική διαστολή D_o^r με κέντρο το σημείο Ο.

Αν αυτή η κεντρική διαστολή ακολουθείται (η ακολουθεί) μια στροφή $\Re_o^\theta$ με το ίδιο κέντρο τότε παίρνουμε μια ομοιοθετική στροφή (διαστολική στροφή) $D_o^{r,\theta} = \Re_o^\theta \circ D_o^r = D_o^r \circ \Re_o^\theta$.
Ας σημειωθεί ότι μια κεντρική διαστολή μπορεί να περιγραφεί ως ειδική περίπτωση της διαστολικής στροφής: $D_o^r = D_o^{r,0}$.

Παίρνοντας το O να είναι το κέντρο του $\mathbb{C}$ θα έχουμε: $D_o^{r,\theta}(z) = \left(re^{i\theta}\right)z$.

Αντίστροφα (και εδώ έχουμε φτάσει σε ένα σημείο κλειδί) ο κανόνας του πολλαπλασιασμού μιγαδικών μπορεί να ειδωθεί ως μια συνέπεια του τρόπου με τον οποίο συμπεριφέρονται οι διαστολικές στροφές.

---

[1] Ας θυμηθούμε στο σημείο αυτό τον ορισμό που έδωσε για την Ευκλείδεια γεωμετρία ο F. Klein κατά την εισήγηση του στο Πανεπιστήμιο Erlangen:
Ευκλείδεια γεωμετρία είναι η μελέτη εκείνων των ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων οι οποίες είναι αναλλοίωτες κάτω από την ομάδα των ομοιοτήτων

Επειδή οι κινήσεις είναι απλώς οι ομοιότητες S^1 μοναδιαίας διαστολής η ομάδα των κινήσεων είναι μια υποομάδα της ομάδας των ομοιοτήτων. Η προηγούμενη προσπάθειά μας να ορίσουμε την Ευκλείδεια γεωμετρία πάνω στην ομάδα των κινήσεων τελικά παράγει (με βάση φυσικά αυτό το σκεπτικό) μια υπογεωμετρία.

[2] Ένας τέτοιος μετασχηματισμός όπως είπαμε και σε προηγούμενη ενότητα αφήνει το Ο σταθερό και ακτινωτά διαστέλλει (τεντώνει η συρρικνώνει) κάθε τμήμα ΟΑ κατά r.
Ας σημειωθεί ότι η αντίστροφη απεικόνιση μιας κεντρικής διαστολής (ομοιοθεσίας) είναι και αυτή μια κεντρική διαστολή με το ίδιο κέντρο Ο : $\left(D_o^r\right)^{-1} = D_o^{\frac{1}{r}}$

Στο σημείο αυτό θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας στο σύνολο των διαστολικών στροφών με ένα κοινό σταθερό κέντρο Ο το οποίο θα θεωρήσουμε ότι είναι το κέντρο του μιγαδικού επιπέδου. Κάθε μετασχηματισμός $D_o^{r,\theta}$ καθορίζεται μοναδικά από την διαστολή του r και την στροφή του θ, οπότε μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα διάνυσμα μήκους r και γωνίας θ. Παρομοίως ο μετασχηματισμός $D_o^{R,\phi}$ μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα διάνυσμα μήκους R και γωνίας ϕ. Τι διάνυσμα θα αναπαριστά την σύνθεση αυτών των διαστολικών στροφών;

Γεωμετρικά έχουμε ότι: $D_o^{R,\phi} \circ D_o^{r,\theta} = D_o^{r,\theta} \circ D_o^{R,\phi} = D_o^{Rr,(\theta+\phi)}$ οπότε το νέο διάνυσμα λαμβάνεται από τα αρχικά διανύσματα πολλαπλασιάζοντας τα μέτρα τους και προσθέτοντας τις γωνίες τους, οπότε έχουμε μιγαδικό πολλαπλασιασμό.

Πιο πάνω είδαμε ότι αν οι μιγαδικοί αριθμοί ειδωθούν ως μεταφορές τότε η σύνθεση παράγει την μιγαδική πρόσθεση. Τώρα βλέπουμε ότι αν αυτοί ειδωθούν ως διαστολικές στροφές τότε η σύνθεσή τους παράγει τον μιγαδικό πολλαπλασιασμό.

Για να συμπληρώσουμε την περιγραφή μας για τους μιγαδικούς αριθμούς με γεωμετρικούς όρους θα πρέπει να τονίσουμε ότι οι μεταφορές και οι διαστολικές στροφές είναι θεμελιώδεις για την Ευκλείδεια γεωμετρία αν την δούμε μέσα από το πνεύμα του F. Klein.

Θα προσπαθήσουμε στο σημείο αυτό να εκφράσουμε την γενική ομοιότητα S^r ως σύνθεση μιας διαστολής και μιας κίνησης. Πράγματι αν p είναι ένα τυχαίο σημείο τότε $M = S^r \circ D_p^{\frac{1}{r}}$ είναι μια κίνηση. Έτσι κάθε ομοιότητα είναι μια σύνθεση μιας διαστολής και μιας κίνησης: $S^r = M \circ D_p^r$

Η ταξινόμηση των κινήσεων ως εκ τούτου μας δίνει την ευκαιρία να συμπεράνουμε ότι οι ομοιότητες εμφανίζονται με δύο τρόπους:

Αν η M διατηρεί τις γωνίες τότε το ίδιο θα κάνει και η S^r (ευθεία ομοιότητα). Αν η M αντιστρέφει τις γωνίες τότε το ίδιο θα κάνει και η S^r. Επειδή μπορεί κάποιος να μην αισθάνεται ικανοποιημένος αφού ο $S^r = M \circ D_p^r$ περιέχει διαστολικές στροφές ως προς οποιοδήποτε σημείο, ενώ οι μιγαδικοί αριθμοί εκφράζονται με διαστολικές στροφές ως προς την αρχή Ο, αυτό μπορεί να διευθετηθεί παρατηρώντας ότι οι εικόνες του τμήματος ΑΒ ως προς την $D_q^{r,\theta}$ και $D_o^{r,\theta}$ είναι παράλληλες και ίδιου μήκους οπότε θα υπάρχει μια μεταφορά $\Im_\upsilon$ η οποία απεικονίζει την μία στην άλλη. Με άλλα λόγια μια γενική διαστολική στροφή διαφέρει από την διαστολική στροφή ως προς το κέντρο Ο ως προς μια απλή μεταφορά: $D_q^{r,\theta} = \Im_\upsilon \circ D_o^{r,\theta}$.

Για να συνοψίσουμε: κάθε ευθεία ομοιότητα S^r μπορεί να εκφραστεί ως μιγαδική συνάρτηση της μορφής $S^r(z) = re^{iu}z + \upsilon$

Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί και πίνακες

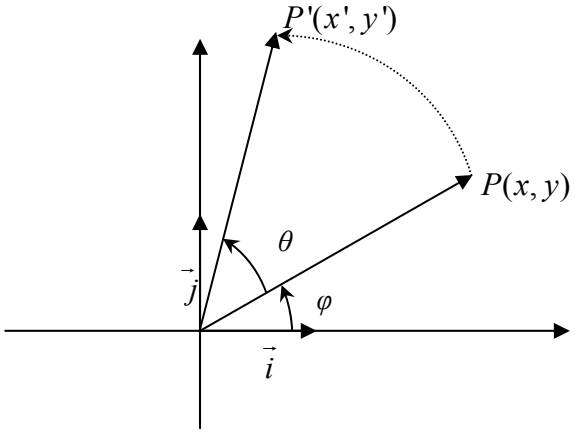
Θα θεωρήσουμε τον μετασχηματισμό στροφής του επιπέδου γύρω από την αρχή και κατά μια γωνία θ. Επίσης θα υποθέσουμε ότι $P(x, y)$ είναι ένα σημείο του επιπέδου εκφρασμένο μέσω καρτεσιανών συντεταγμένων.

Μέσω του μετασχηματισμού στροφής γύρω από το κέντρο Ο κάθε σημείο του επιπέδου απεικονίζεται σε ένα άλλο σημείο $P'(x', y')$ όπως στο σχήμα 1.

Ας σημειώσουμε ότι $\left|\overrightarrow{OP}\right| = \left|\overrightarrow{OP'}\right|$

Οπότε:

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} =$$
$$= \left|\overrightarrow{OP}\right|\left(\cos\phi\vec{i} + \sin\phi\vec{j}\right)$$
$$= \left|\overrightarrow{OP'}\right|\left(\cos\phi\vec{i} + \sin\phi\vec{j}\right)$$



Επίσης έχουμε:

$$\overrightarrow{OP'} = x'\vec{i} + y'\vec{j} =$$
$$= \left|\overrightarrow{OP'}\right|\cos(\theta+\phi)\vec{i} + \left|\overrightarrow{OP'}\right|\sin(\theta+\phi)\vec{j}$$
$$= \left|\overrightarrow{OP'}\right|(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi)\vec{i} + \left|\overrightarrow{OP'}\right|(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta s\sin\phi)\vec{j} =$$
$$= (x\cos\theta - y\sin\theta)\vec{i} + (x\sin\theta + y\cos\theta)\vec{j}$$

έχουμε λοιπόν ότι:

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$

Η σχέση μεταξύ των συντεταγμένων κάθε σημείου $P(x, y)$ και της εικόνας του $P'(x', y')$ μπορεί να εκφραστεί με την βοήθεια πινάκων ως:

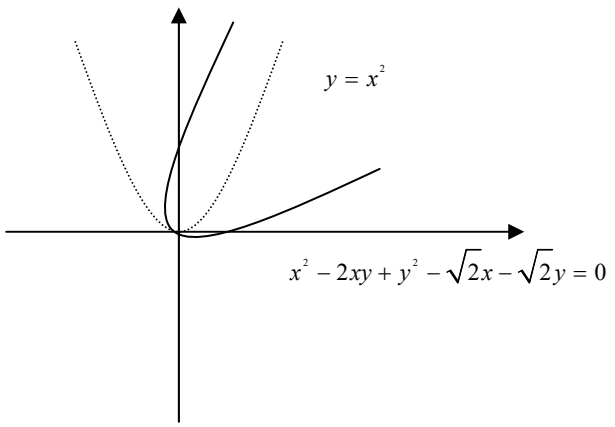
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας: $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ λέγεται πίνακας στροφής.

Ο πίνακας αυτός μπορεί να θεωρηθεί ως ένας τελεστής, ο οποίος απεικονίζει το κάθε σημείο *(x,y)* του επιπέδου στην εικόνα του, που είναι το σημείο $(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$ όταν το επίπεδο στρέφεται γύρω από την αρχή Ο κατά γωνία θ. Ας σημειωθεί ότι η ορίζουσα του κάθε τελεστή Α για κάθε πίνακα στροφής είναι πάντα η μονάδα. Επιπλέον τα ζεύγη διανυσμάτων που προκύπτουν από τις δύο γραμμές ή τις δύο στήλες του πίνακα Α είναι ζεύγη ορθογωνίων μεταξύ τους, μοναδιαίων διανυσμάτων.

Ας δώσουμε ένα παράδειγμα:

Να καθοριστεί η εξίσωση που ικανοποιείται από το σύνολο των σημείων τα οποία είναι οι εικόνες ως προς την στροφή κατά 45^0 γύρω από την αρχή των αξόνων των σημείων του γεωμετρικού τόπου που περιγράφεται από την εξίσωση: $x^2 - 2xy + y^2 - \sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 0$.



Επειδή η γωνία στροφής είναι $\theta = 45^0$ άρα θα είναι: $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

το σημείο εικόνα $P'(x', y')$ κάθε σημείου $P(x, y)$ παράγεται από τον πίνακα τελεστή:

$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ ως εξής: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Βρίσκοντας τον αντίστροφο πίνακα: $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ θα έχουμε: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

αντικαθιστώντας το x με το $\frac{\sqrt{2}x'}{2} + \frac{\sqrt{2}y'}{2}$ και το y με το $-\frac{\sqrt{2}x'}{2} + \frac{\sqrt{2}y'}{2}$ στην εξίσωση $x^2 - 2xy + y^2 - \sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 0$ προκύπτει:

$$\left(\frac{\sqrt{2}x'}{2} + \frac{\sqrt{2}y'}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{\sqrt{2}x'}{2} + \frac{\sqrt{2}y'}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}x'}{2} + \frac{\sqrt{2}y'}{2}\right) +$$

$$+\left(\frac{\sqrt{2}x'}{2} + \frac{\sqrt{2}y'}{2}\right)^2 - \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}x'}{2} + \frac{\sqrt{2}y'}{2}\right) - \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}x'}{2} + \frac{\sqrt{2}y'}{2}\right) = 0$$

και κάνοντας τις πράξεις θα πάρουμε: $y' = (x')^2$ δηλαδή την εξίσωση: $y = x^2$

Αν T_1, T_2 είναι δύο μετασχηματισμοί οι οποίοι αναπαρίστανται με τους πίνακες A_1, A_2 τότε η σύνθεσή του T_1 με τον T_2 αναπαριστάται με τον συμβολισμό $T_2 \circ T_1$ και ορίζεται έτσι ώστε

$$(T_2 \circ T_1)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = T_2\left(T_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)\right) = T_2\left(\mathrm{A}_1 \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \mathrm{A}_2 \bullet \left(\mathrm{A}_1 \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) =$$

$$= (\mathrm{A}_2 \bullet \mathrm{A}_1) \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Μια στροφή γύρω από την αρχή κατά γωνία θ είναι όπως έχουμε αναφέρει και πιο πάνω μια ένα προς ένα απεικόνιση των σημείων του επιπέδου στον εαυτό του. Οπότε ο αντίστροφος μετασχηματισμός υπάρχει για κάθε στροφή.

Ας θεωρήσουμε την στροφή του επιπέδου γύρω από την αρχή Ο κατά γωνία $-\theta$ οπότε ο πίνακας αυτής της στροφής είναι ο $\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Επειδή το γινόμενο $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

άρα θα έχουμε ότι η στροφή ως προς γωνία $-\theta$ είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός του μετασχηματισμού στροφής κατά γωνία θ.

Ας θεωρήσουμε τους μετασχηματισμούς οι οποίοι αντιπροσωπεύονται από τους πίνακες $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (α).

Αυτοί οι πίνακες απεικονίζουν κάθε σημείο (x, y) του επιπέδου στο σημείο $(-x, y)$ και στο σημείο $(x, -y)$ αντίστοιχα και εκφράζουν ένα προς ένα απεικονίσεις του επιπέδου στον εαυτό του. Αυτοί οι πίνακες, είναι πίνακες που αντιστοιχούν σε ανακλάσεις του επιπέδου.

Ένα άλλο ζεύγος πινάκων που αναπαριστούν ανακλάσεις του επιπέδου δίνεται από τους πίνακες $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (β).

Ο πίνακας $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ απεικονίζει κάθε σημείο (x, y) στο σημείο (y, x). Η απεικόνιση αυτή είναι μια ανάκλαση ως προς την ευθεία $y = x$.

Ο πίνακας $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ απεικονίζει κάθε σημείο (x, y) στο σημείο $(-y, -x)$. Η απεικόνιση αυτή είναι μια ανάκλαση ως προς την ευθεία $y = -x$.

Όταν κάναμε την γεωμετρική προσέγγιση των μετασχηματισμών του επιπέδου είχαμε δει ότι η σύνθεση δύο ανακλάσεων ως προς ευθείες οι οποίες τέμνονται είναι στροφή.

Είναι πολύ ενδιαφέρον να διαπιστώσουμε κάτι τέτοιο και τώρα με την άλγεβρα των πινάκων.

Πράγματι ο πολλαπλασιασμός των πινάκων :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\pi & \sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta = 0$$

παράγει μια στροφή ως προς την αρχή Ο.

Οι πίνακες ανάκλασης της μορφής (α) μπορούν να γραφούν ως γινόμενα των πινάκων ανάκλασης της μορφής (β) με πίνακες στροφής της μορφής: $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Για παράδειγμα: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

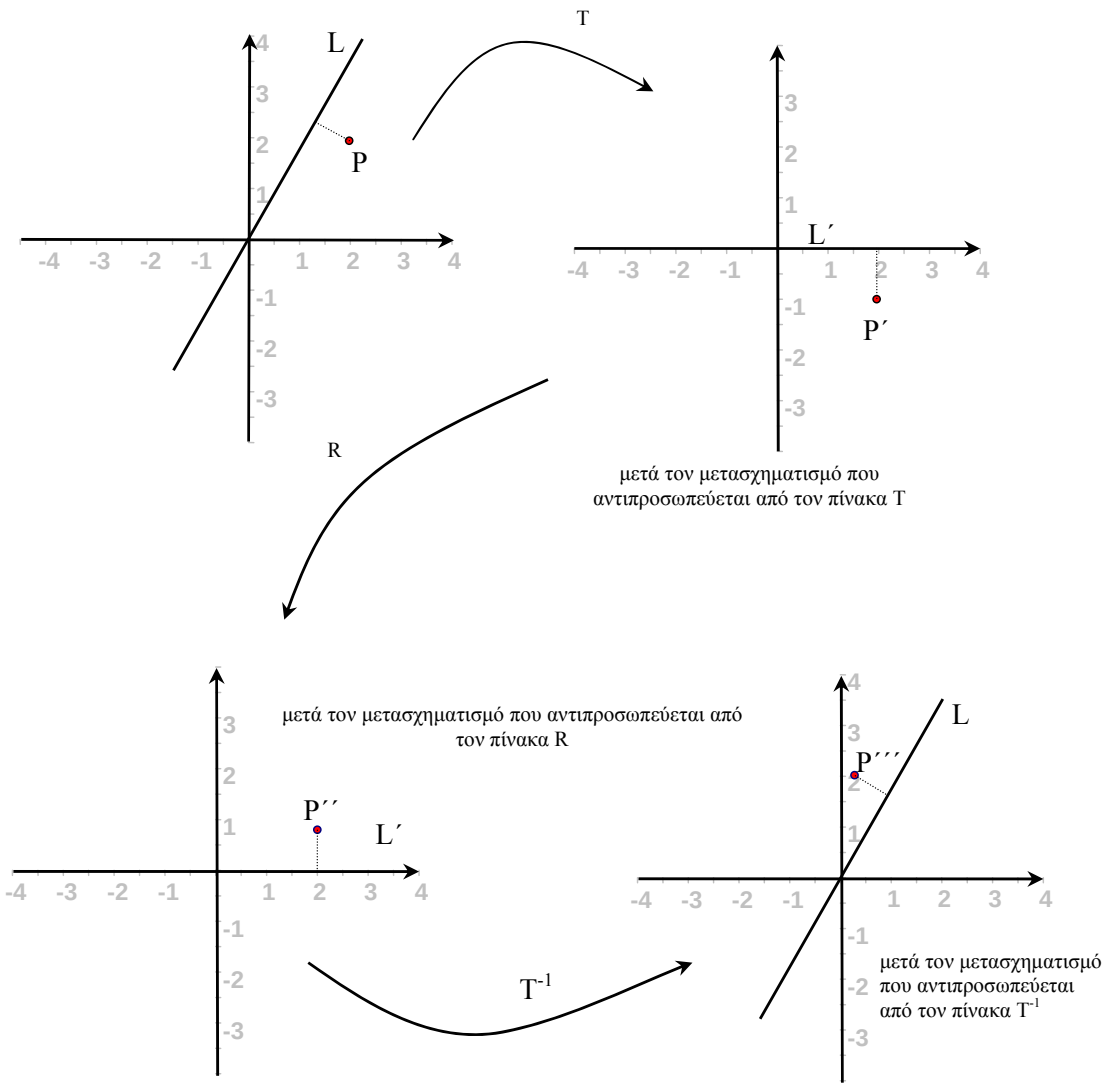
όπως επίσης: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

Υπάρχουν πίνακες ανακλάσεων οι οποίοι είναι διαφορετικοί από τις μορφές (α) και (β).

Τέτοιοι πίνακες ανακλάσεων οι οποίοι απεικονίζουν κάθε σημείο Μ πάνω στο επίπεδο σε ένα άλλο σημείο Μ΄ το οποίο είναι το συμμετρικό του ως προς άξονα συμμετρίας μια ευθεία

L μπορεί να δειχθεί ότι ισούνται με γινόμενα της μορφής $T^{-1}RT$ όπου T είναι ο πίνακας του μετασχηματισμού που απεικονίζει την ευθεία L στον x-άξονα και R είναι ο πίνακας που αναπαριστά μια ανάκλαση του επιπέδου ως προς τον x-άξονα

Ας τα δούμε όλα αυτά σχηματικά:



Οι ομοιοθεσίες του επιπέδου έχουν πίνακα: $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}, k \neq 0$

Οι μετασχηματισμοί του επιπέδου που έχουν την μορφή

$$\left.\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{a} & b \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

λέγονται γραμμικοί ομογενείς μετασχηματισμοί.

Οι μετασχηματισμοί που περιγράψαμε πιο πάνω (στροφές ως προς την αρχή, ανακλάσεις ως προς ευθείες που διέρχονται από την αρχή, ομοιοθεσίες) έχουν αντίστοιχο πίνακα $\begin{pmatrix} \mathrm{a} & b \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{pmatrix}$ με ορίζουσα $\begin{vmatrix} \mathrm{a} & b \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{vmatrix} \neq 0$

Θεώρημα:

Κάθε γραμμικός ομογενής μετασχηματισμός του επιπέδου με πίνακα T που έχει ορίζουσα μη μηδενική είναι μια ένα προς ένα και επί απεικόνιση του επιπέδου στον εαυτό του.

Το θεώρημα αυτό αποδεικνύεται άμεσα από την στιγμή που κάθε πίνακας T με $\det T \neq 0$ είναι αντιστρέψιμος. Έστω T ένας 2x2 πίνακας με $\det T \neq 0$.
Τότε για κάθε ζεύγος (x', y') υπάρχει ζεύγος (x, y) που είναι η εικόνα του:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1} \bullet \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T^{-1}\left(T \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T^{-1} \bullet \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Μοναδικότητα:

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T \bullet \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ οπότε

$$T \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = T \bullet \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1}\left(T \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right) = T^{-1}\left(T \bullet \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \text{ άρα } \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Γενικοί γραμμικοί μετασχηματισμοί του επιπέδου.
Το σύνολο των γραμμικών ομογενών μετασχηματισμών του επιπέδου είναι ένα υποσύνολο του συνόλου των γενικών γραμμικών μετασχηματισμών του επιπέδου.
Κάθε γενικός γραμμικός μετασχηματισμός του επιπέδου μπορεί να περιγραφεί με τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + e \\ y' &= cz + dy + f \end{aligned} \quad (\Gamma)$$ όπου το σημείο (x', y') είναι η εικόνα του σημείου (x, y)

Δεν είναι δυνατόν να εκφράσουμε έναν γενικό γραμμικό μετασχηματισμό του επιπέδου ο οποίος περιγράφεται μέσω των εξισώσεων (Γ) με μορφή πινάκων όπου ο πίνακας του μετασχηματισμού είναι ένας τετραγωνικός πίνακας τάξεως 2.
Για να εκφράσουμε τις σχέσεις (Γ) είναι απαραίτητο να χρησιμοποιήσουμε ομογενείς ορθογώνιες καρτεσιανές συντεταγμένες. Στο καρτεσιανό επίπεδο οι ομογενείς συντεταγμένες ενός σημείου με μη ομογενείς συντεταγμένες (x, y) είναι κάθε διατεταγμένη τριάδα (x_1, x_2, x_3) όπου $x_3 \neq 0$ και για την οποία έχουμε ότι $x = \frac{x_1}{x_3}$ και $y = \frac{x_2}{x_3}$. Για παράδειγμα το σημείο πάνω στο επίπεδο με μη ομογενείς συντεταγμένες $(1, -3)$ μπορεί να παρασταθεί με ένα άπειρο σύνολο τριάδων της μορφής $(k, -3k, k)$ όπου k είναι οποιοσδήποτε μη μηδενικός πραγματικός αριθμός. Μια τριάδα ομογενών συντεταγμένων για το σημείο (x, y) είναι η τριάδα $(x, y, 1)$. Όλες οι άλλες τριάδες ομογενών συντεταγμένων είναι της μορφής (kx, ky, k) όπου $k \neq 0$
Ένας γενικός λοιπόν γραμμικός μετασχηματισμός του επιπέδου μπορεί να εκφραστεί με την μορφή πίνακα και με ομογενείς συντεταγμένες ως εξής:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ας σημειωθεί ότι κάθε γραμμικός ομογενής μετασχηματισμός του επιπέδου μπορεί να εκφραστεί σε μορφή πίνακα ως εξής:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια μεταφορά του επιπέδου.

Οι εξισώσεις της μεταφοράς μπορούν να περιγραφούν μέσω των εξισώσεων: $\begin{matrix} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0 \end{matrix}$

Η μεταφορές μπορούν να απεικονιστούν με την μορφή πινάκων ως εξής:

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ όπου $(x, y, 1)$ και $(x', y', 1)$ είναι οι ομογενείς συντεταγμένες του σημείου και της εικόνας του.

Η ορίζουσα του πίνακα μεταφοράς $\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ είναι πάντοτε 1.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει το σύνολο των μετασχηματισμών που περιλαμβάνει τις στροφές ως προς ένα σημείο, τις ανακλάσεις ως προς μια ευθεία, καθώς και τις μεταφορές του επιπέδου, λέγεται σύνολο των μετασχηματισμών στερεάς κίνησης διότι η απόσταση μεταξύ δύο οποιονδήποτε σημείων του επιπέδου καθώς και των εικόνων τους μέσω ενός μετασχηματισμού από το σύνολο των στερεών κινήσεων παραμένει αναλλοίωτη.

Το σύνολο των μετασχηματισμών στερεάς κίνησης του επιπέδου μπορεί να παρασταθεί με έναν πίνακα της μορφής: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ όπου $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \pm 1$

Επίσης ισχύει το θεώρημα:

Θεώρημα:

Ας υποθέσουμε ότι $T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ αναπαριστά ένα γενικό γραμμικό μετασχηματισμό του επιπέδου για τον οποίο η απόσταση είναι βαθμωτό αναλλοίωτο.

Τότε :

$$a^2{}_{11} + a^2{}_{21} = 1$$
$$a^2{}_{12} + a^2{}_{22} = 1$$
$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 \quad \text{και αντιστρόφως.}$$

Απόδειξη:

Ας θεωρήσουμε τα σημεία $O(0,0,1)$ και $P(1,0,1)$

Ως προς τον μετασχηματισμό T οι εικόνες των σημείων O και P είναι τα σημεία O' και P' των οποίων οι συντεταγμένες είναι $O'(a_{13},a_{23},1)$ και $P'(a_{11}+a_{13},a_{21}+a_{23},1)$

Επειδή $\left|\overrightarrow{O'P'}\right|=\left|\overrightarrow{OP}\right|$ ως προς τον μετασχηματισμό T τότε θα έχουμε:

$$\sqrt{\left[(a_{11}+a_{13})-a_{13}\right]^2+\left[(a_{21}+a_{23})-a_{23}\right]^2}=\sqrt{(1-0)^2+(0-0)^2}$$

$$\sqrt{a^2{}_{11}+a^2{}_{21}}=\sqrt{1}$$

$$a^2{}_{11}+a^2{}_{21}=1$$

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι $a^2{}_{12}+a^2{}_{22}=1$

Τώρα ας θεωρήσουμε τα σημεία $O(0,0,1)$ και $P(1,1,1)$. Ως προς τον μετασχηματισμό T οι εικόνες των σημείων O και P είναι τα σημεία O' και P' των οποίων οι συντεταγμένες είναι $O'(a_{13},a_{23},1)$ και $P'(a_{11}+a_{12}+a_{13},a_{21}+a_{22}+a_{23},1)$.

Επειδή πάλι έχουμε $\left|\overrightarrow{O'P'}\right|=\left|\overrightarrow{OP}\right|$ ως προς τον μετασχηματισμό T τότε θα έχουμε:

$$\sqrt{(a_{11}+a_{12})^2+(a_{21}+a_{22})^2}=\sqrt{1^2+1^2}$$

$$(a_{11}+a_{12})^2+(a_{21}+a_{22})^2=2$$

$$\underbrace{a^2{}_{11}+a^2{}_{21}}_{1}+\underbrace{a^2{}_{12}+a^2{}_{22}}_{1}+2(a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22})=2$$

$$a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}=0$$

Για το αντίστροφο θα έχουμε:

έστω $P_1(x_1,y_1,1)$ και $P_2(x_2,y_2,1)$

Μέσω του μετασχηματισμού T οι εικόνες είναι $P_1'(a_{11}x_1+a_{12}y_1+a_{13},a_{21}x_1+a_2y_1+a_{23},1)$ και $P_2'(a_{11}x_2+a_{12}y_2+a_{13},a_{21}x_2+a_2y_2+a_{23},1)$

Παίρνοντας

$$\left|\overrightarrow{P_1'P_2'}\right|=\sqrt{\left[a_{11}(x_2-x_1)+a_{12}(y_2-y_1)\right]^2+\left[a_{21}(x_2-x_1)+a_{22}(y_2-y_1)\right]^2}=$$

$$=\left[\left(a^2{}_{11}+a^2{}_{21}\right)(x_2-x_1)^2+2(a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22})(x_2-x_1)(y_2-y_1)+\left(a^2{}_{12}+a^2{}_{22}\right)(y_2-y_1)^2\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|$$

Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα:

Θα αναφέρουμε λίγα πράγματα για τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ενός τετραγωνικού $A=\left(\left(a_{ij}\right)\right)$ πίνακα τάξης n.

Η συνάρτηση f που συνδέεται με τον πίνακα $A=\left(\left(a_{ij}\right)\right)$ και έχει τύπο:

$$f(\lambda)=\left|A-\lambda I\right|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

λέγεται χαρακτηριστική συνάρτηση του πίνακα.

Η εξίσωση $f(\lambda)=0 \Leftrightarrow \left|A-\lambda I\right|=0$ η οποία μπορεί να εκφραστεί με έναν τύπο της μορφής: $c_0\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+c_2\lambda^{n-2}+c_3\lambda^{n-3}+\dots+c_{n-1}\lambda^1+c_n=0$ λέγεται χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα.
Οι λύσεις $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\dots,\lambda_n$ της χαρακτηριστικής εξίσωσης λέγονται ιδιοτιμές της χαρακτηριστικής εξίσωσης.
Το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων ενός πίνακα A λέγεται ίχνος του πίνακα και συμβολίζεται με $tr(A)$.
Αποδεικνύεται ότι

$$tr(A)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$$

Θεωρούμε τον πίνακα $A-\lambda_i I$ όπου λ_i είναι μια οποιαδήποτε ιδιοτιμή του πίνακα A.
Έστω επίσης X_i είναι ένας πίνακας στήλη (θα μπορούσαμε να τον πούμε και διάνυσμα στήλη).
Το διάνυσμα X_i θα λέγεται ιδιοδιάνυσμα του A αν και μόνο αν είναι λύση της εξίσωσης $\left(A-\lambda_i I\right)X_i=0$. Είναι εξασφαλισμένο ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα ιδιοδιάνυσμα X_i για κάθε ιδιοτιμή λ_i αφού η εξίσωση $\left(A-\lambda_i I\right)X_i=0$ είναι ένα σύστημα n γραμμικών ομογενών εξισώσεων το οποίο έχει μια μη τετριμμένη λύση $X_i\neq 0$ αν και μόνο αν $\left|A-\lambda_i I\right|=0$ δηλαδή αν και μόνο αν το λ_i είναι ιδιοτιμή του A. Επιπλέον οποιοδήποτε βαθμωτό πολλαπλάσιο $k\cdot X_i$ ενός ιδιοδιανύσματος X_i το οποίο συνδέεται με μια ιδιοτιμή λ_i είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα που συνδέεται με αυτήν την ιδιοτιμή.

Γεωμετρική ερμηνεία των ιδιοδιανυσμάτων.

Έστω X_i ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A που συνδέεται με την ιδιοτιμή λ_i του πίνακα A. Επειδή ισχύει $\left(A-\lambda_i I\right)X_i=0 \Leftrightarrow A\bullet X_i=\lambda_i\cdot X_i$ θα έχουμε ότι ένα συγκεκριμένο ιδιοδιάνυσμα K_i που συνδέεται με την ιδιοτιμή λ_i απεικονίζεται στο βαθμωτό πολλαπλάσιο του $\lambda_i\mathrm{K}_i$. Δηλαδή κάθε ιδιοδιάνυσμα δεν αλλάζει *φορέα* μέσω της απεικόνισης που αντιστοιχεί στον πίνακα A.

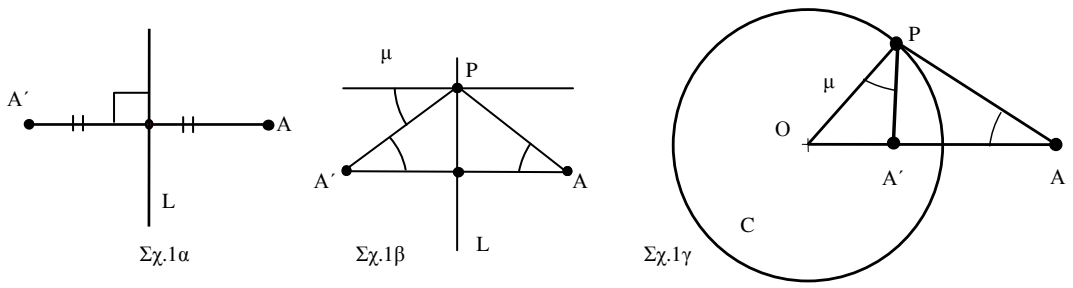
Γεωμετρική αντιστροφή- Γεωμετρία της Αντιστροφής κατά F. Klein- Μετασχηματισμοί Möbious

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε με λεπτομέρειες πολλά στοιχεία από την γεωμετρική αντιστροφή. Θα αποδείξουμε επίσης το θεώρημα *των απολλώνιων κύκλων*, δηλαδή θα αποδείξουμε ότι αν Α και Β είναι δύο συγκεκριμένα σημεία σε ένα επίπεδο, τότε όλα τα σημεία Ρ του επιπέδου για τα οποία αληθεύει ότι ο λόγος PA:PB είναι ένας σταθερός λόγος κ:1 (με κ θετικό πραγματικό αριθμό και $\kappa \neq 1$), θα βρίσκονται σε έναν κύκλο. Ας σημειώσουμε ότι αν κ=1 τότε ο λόγος PA: PB =1:1 είναι απλά το σύνολο των σημείων που ισαπέχουν από τα σημεία Α και Β δηλαδή η μεσοκάθετος του τμήματος ΑΒ.
Για κάθε ζεύγος σημείων Α και Β υπάρχει μια οικογένεια κύκλων γνωστών ως κύκλοι του Απολλώνιου που παράγονται για τις διάφορες τιμές του κ. Για μικρές τιμές του κ παράγονται κύκλοι οι οποίοι βρίσκονται κοντά στο Α ενώ για μεγάλες τιμές του κ παράγονται κύκλοι οι οποίοι βρίσκονται κοντά στο Β. Είναι κάποιες φορές χρήσιμο να θεωρήσουμε τα σημεία Α και Β ως σημειακούς κύκλους οι οποίοι αντιστοιχούν στις τιμές κ=0 και $\kappa = \infty$ αντίστοιχα .
Το εργαλείο κλειδί στην επεξεργασία του προβλήματος των απολλώνιων κύκλων θα είναι η αντιστροφή.
Η αντιστροφή μπορεί να θεωρηθεί, όπως αναφέραμε και στο κεφάλαιο της εισαγωγής, ως μια γενίκευση της έννοιας της ανάκλασης σημείων ως προς μια ευθεία. Ακριβώς όπως η ανάκλαση ως προς μια ευθεία απεικονίζει τα σημεία του ενός ημιεπιπέδου της ευθείας στα σημεία της άλλου ημιεπιπέδου, έτσι και η αντιστροφή ως προς έναν κύκλο, απεικονίζει τα σημεία που βρίσκονται μέσα στον κύκλο σε σημεία τα οποία βρίσκονται έξω από αυτόν και αντιστρόφως.
Μια δυσκολία η οποία ανακύπτει όταν ασχολούμαστε με προβλήματα όπως οι απολλώνιοι κύκλοι είναι η παρουσία μιας ευθείας μέσα σε κάτι που αλλιώς θα μπορούσε να ονομαστεί οικογένεια κύκλων. Θα ήταν λοιπόν μεγάλη ευκολία για μας αν μπορούσαμε να αντιμετωπίσουμε τέτοια προβλήματα χωρίς να χρειάζεται να αντιμετωπίζουμε την ευθεία ως ειδική περίπτωση. Στο κεφάλαιο της εισαγωγής είπαμε ότι από το ευκλείδειο επίπεδο μπορεί να παραχθεί το επίπεδο της αντιστροφής (inversive plane) θεωρώντας τις ευθείες γραμμές ως κύκλους που διέρχονται από ένα ιδεατό σημείο που καλείται σημείο στο άπειρο. Ένας τρόπος λοιπόν για να μην αντιμετωπίζουμε την ευθεία ως ειδική περίπτωση είναι να την δούμε ως κύκλο με άπειρη ακτίνα τα πέρατα της οποίας ενώνονται μεταξύ τους στο σημείο στο άπειρο. Θα εισάγουμε λοιπόν τον όρο *γενικευμένος κύκλος* (generalized circle) με τον οποίο θα εννοούμε και μια ευθεία αλλά και έναν κανονικό κύκλο.
Το επεκτεταμένο επίπεδο θα είναι τελικά ο χώρος στον οποίο θα μελετήσουμε την γεωμετρία της αντιστροφής. Το επίπεδο αυτό είναι ουσιαστικά το $\mathbb{R}^2$ μαζί με το σημείο στο άπειρο. Όταν αναφερόμαστε σε έναν μετασχηματισμό της γεωμετρίας της αντιστροφής θα τον αποκαλούμε μετασχηματισμό αντιστροφής (inversive transformation). Οι μετασχηματισμοί αντίστροφής έχουν αξιοσημείωτες ιδιότητες όπως η διατήρηση του μεγέθους της γωνίας μεταξύ τεμνόμενων καμπυλών και το ότι απεικονίζουν γενικευμένους κύκλους σε γενικευμένους κύκλους. Αρχικά θα ορίσουμε την αντιστροφή και θα μελετήσουμε τις βασικές της ιδιότητες. Κατόπιν θα ορίζουμε λεπτομερώς το επεκτεταμένο επίπεδο και θα δείξουμε ότι συγκεκριμένοι μετασχηματισμοί αυτού του επιπέδου μπορούν να παρασταθούν με χρήση μιγαδικών αριθμών. Τέλος θα δώσουμε μια ερμηνεία του επεκτεταμένου επιπέδου με όρους της όπως αποκαλείται, σφαίρας του Riemann. Σε αυτήν την σφαίρα όλοι οι γενικευμένοι κύκλοι μοιάζουν με κανονικούς κύκλους.
Θα μελετήσουμε επίσης τι εννοούμε με τον όρο *μετασχηματισμός αντιστροφής* και τι με τον όρο *γεωμετρία αντιστροφής*. Θα δείξουμε ότι το σύνολο όλων των μετασχηματισμών αντιστροφής είναι ομάδα η οποία έχει μια υποομάδα η οποία καλείται ομάδα των μετασχηματισμών Möbius.
Θα αποδείξουμε επίσης το θεμελιώδες θεώρημα της γεωμετρίας της αντιστροφής. Δηλαδή ότι: κάθε τρία διαφορετικά μεταξύ τους σημεία του επεκτεταμένου επιπέδου μπορούν να απεικονιστούν σε οποιαδήποτε άλλα τρία σημεία. Αυτό το θεώρημα μπορούμε να το

χρησιμοποιήσουμε για να δείξουμε ότι στην γεωμετρία της αντιστροφής όλοι οι γενικευμένοι κύκλοι είναι σύμφωνοι μεταξύ τους.

Η αντιστροφή ως γενίκευση της ανάκλασης

Θα ξεκινήσουμε λέγοντας ότι: αντιστροφή είναι ένας μετασχηματισμός του επιπέδου ο οποίος γενικεύει την ανάκλαση ως προς μια ευθεία. Αντί να απεικονίζει σημεία του ενός ημιεπιπέδου μιας ευθείας στο άλλο η αντιστροφή απεικονίζει τα σημεία από το εσωτερικό ενός κύκλου στο εξωτερικό του και αντίστροφα.
Ένα σημείο Α μέσω του μετασχηματισμού της ανάκλασης ως προς μια ευθεία L απεικονίζεται σε ένα σημείο Α΄ έτσι ώστε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΑ΄ να έχει ως μεσοκάθετη ευθεία την L (σχήμα 1α) . Για να γενικεύσουμε την έννοια της ανάκλασης θα της δώσουμε μια καινούργια μορφή τέτοια ώστε να μπορεί να μας δώσει μια καλή αναλογία όταν η ευθεία L αντικατασταθεί με τον κύκλο C.
Για να γίνει αυτό ας υποθέσουμε ότι μ είναι μια ευθεία παράλληλη προς το ΑΑ΄ η οποία τέμνει την L σε ένα σημείο Ρ (σχήμα 1β). Με την ανάκλαση ως προς την L η γωνία $\measuredangle$ ΡΑΑ΄ απεικονίζεται στην γωνία $\measuredangle$ ΡΑ΄Α και οι δύο αυτές γωνίες είναι ίσες. Όμως αφού η μ είναι παράλληλη με την ΑΑ΄ η γωνία $\measuredangle$ ΡΑ΄Α είναι ίση με την γωνία που σχηματίζεται από τις ΡΑ΄ και μ οπότε η γωνία $\measuredangle$ ΡΑΑ΄ είναι ίση με την γωνία που σχηματίζεται από τις ΡΑ΄ και μ. Αυτό είναι και το στοιχείο που μας οδηγεί στην γενίκευση της ανάκλασης.



Σχ.1α Σχ.1β Σχ.1γ

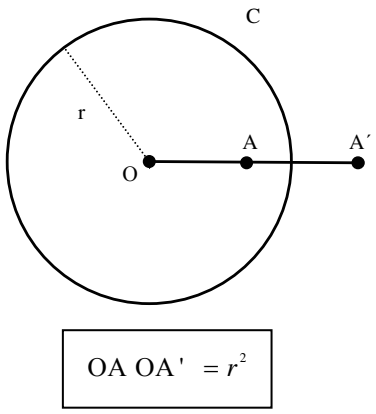
Με την βοήθεια της φαντασίας μας μπορούμε να δούμε την L ως έναν απείρως μεγάλο κύκλο C_∞ με την μ να είναι ο φορέας της ακτίνας του κύκλου C_∞ που διέρχεται από το Ρ. Αν αντικαταστήσουμε την L με τον κανονικό κύκλο C (σχήμα 1γ) και την ευθεία μ με μια «ακτινική» ευθεία (θεωρήσουμε δηλαδή ότι η μ είναι μια ακτίνα του κύκλου αυτού) η οποία συναντά τον κύκλο C σε ένα σημείο Ρ τότε με ανάλογο τρόπο όπως και στην περίπτωση της ανάκλασης μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η εικόνα του Α είναι το Α΄ πάνω στη ημιευθεία ΟΑ ώστε η γωνία $\measuredangle$ ΟΡΑ΄ είναι ίση με την γωνία $\measuredangle$ ΡΑΟ . Λέμε λοιπόν τότε ότι το Α΄ είναι το αντίστροφο σημείο του σημείου Α ως προς τον κύκλο C.
Φυσικά για να είναι αυτός ο ορισμός λειτουργικός θα πρέπει να ελέγξουμε αν για ένα δοσμένο σημείο Α, η θέση του σημείου Α΄ είναι ανεξάρτητη από την εκλογή του σημείου Ρ. Για να γίνει αυτό αρκεί να παρατηρήσουμε ότι τα τρίγωνα ΡΟΑ΄ και ΑΟΡ είναι όμοια διότι έχουν μια κοινή γωνία την Ο και $\measuredangle$ ΟΡΑ΄= $\measuredangle$ ΟΑΡ.

Από αυτό προκύπτει ότι $\dfrac{OA'}{OP} = \dfrac{OP}{OA}$ οπότε $OA\ OA' = OP^2$

Αλλά το ΟΡ είναι ίσο με την ακτίνα r του C οπότε $OA\ OA' = r^2$ (1)
Αφού υπάρχει ένα και μόνο ένα σημείο Α΄ πάνω στην ημιευθεία ΟΑ που ικανοποιεί την ισότητα (1) και επειδή η ισότητα αυτή δεν εξαρτάται, όπως βλέπουμε, από το Ρ, αυτό λοιπόν που εύλογα προκύπτει είναι ότι η θέση του Α΄ δεν εξαρτάται από την επιλογή του Ρ.
Οι πιο πάνω διαδικασίες μας οδηγούν στο συμπέρασμα πως η αντιστροφή (inversion) μπορεί να οριστεί ως μια γενίκευση της ανάκλασης. Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι η ισότητα (1) είναι επαρκής για να καθορίσουμε την θέση του σημείου Α΄ το οποίο αντιστοιχεί

σε κάποιο σημείο Α το οποίο δίνεται. Για απλότητα θα χρησιμοποιούμε από εδώ και πέρα την ισότητα (1) για τον ορισμό της αντιστροφής (inversion).

Ορισμός αντιστροφής

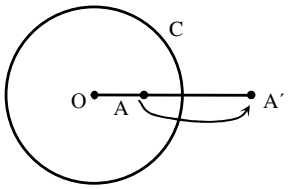
Ορισμοί	
Ας υποθέσουμε ότι C είναι ένας κύκλος με κέντρο O και ακτίνα r και ας δεχθούμε ότι A είναι ένα σημείο διαφορετικό από το O. Αν A΄ είναι ένα σημείο πάνω στην ημιευθεία OA και ικανοποιεί την ισότητα $OA\ OA' = r^2$ τότε θα καλούμε το σημείο A΄ αντίστροφο (inverse) του A ως προς τον κύκλο C. Το σημείο O λέγεται κέντρο της αντιστροφής (centre of inversion). Ο μετασχηματισμός t που ορίζεται από την ισότητα t(A)=A΄ ($A\in \mathbb{R}^2$ -{O}) είναι γνωστός ως αντιστροφή ως προς τον C (inversion in C)	

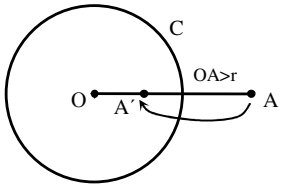
Σημείωση:

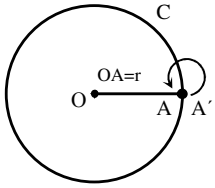
Επειδή $OA\ OA' = r^2$ με $r^2 \neq 0$ κανένα από τα OA και OA΄ λοιπόν δεν μπορεί να είναι μηδέν και έτσι κανένα από τα A και A΄ δεν μπορεί να συμπίπτει με το O. Αυτός είναι και ο λόγος που το O δεν περιλαμβάνεται στο πεδίο ορισμού του μετασχηματισμού t αφού δεν υπάρχει σημείο το οποίο να μπορεί να λειτουργεί ως εικόνα του O.

Μπορούμε μερικές φορές να βρούμε το αντίστροφο ενός σημείου κατευθείαν από τον ορισμό που αναφέραμε πιο πάνω. Για παράδειγμα αν C είναι ο μοναδιαίος κύκλος $\{(x,y): x^2+y^2=1\}$ τότε το αντίστροφο του (0,2) είναι το (0,1/2) και το αντίστροφο του (-1/3,0) είναι το (-3,0)

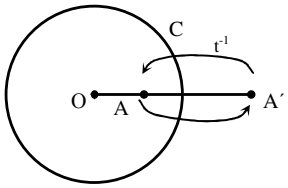
Η αντιστροφή παραμορφώνει αρκετά το επίπεδο διότι απεικονίζει τα σημεία τα οποία βρίσκονται έξω από τον κύκλο σε σημεία που είναι μέσα στον κύκλο και τα σημεία που είναι μέσα στον κύκλο σε σημεία που είναι απέξω. Αυτό μπορούμε πολύ εύκολα να το διαπιστώσουμε αν παρατηρήσουμε ότι αν OA<r και $OA'=r^2/OA$ τότε OA΄>r. Επίσης αν OA>r και $OA'=r^2/OA$ τότε OA΄<r.







Κάθε σημείο το οποίο βρίσκεται πάνω στον C απεικονίζεται στον εαυτό του. Ας σημειώσουμε ότι αν A΄ είναι το αντίστροφο του A ως προς τον κύκλο C τότε το A είναι το αντίστροφο του A΄ ως προς τον κύκλο C διότι αν $OA \cdot OA' = r^2$ τότε και $OA' \cdot OA = r^2$ οπότε λέμε ότι τα A και A΄ είναι αντίστροφα σημεία ως προς τον κύκλο C. Ακόμα και από αυτήν την πλευρά η αντιστροφή είναι σαν την ανάκλαση. Αν πάρουμε την ανάκλαση A΄ ενός σημείου A ως προς μια ευθεία L και κατόπιν πάρουμε την ανάκλαση της ανάκλασης A΄, τότε παίρνουμε το αρχικό σημείο A.



Κάθε μετασχηματισμός t που έχει αυτήν την ιδιότητα λέμε ότι είναι αυτοαντίστροφος (self inverse) ή ενειλικτικός (involution) διότι υπάρχει ο t^{-1} και είναι ίσος με τον t.

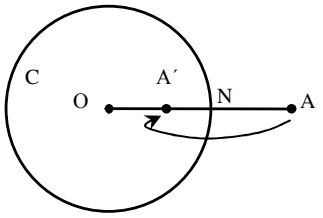
Αφού κάθε μετασχηματισμός που έχει έναν αντίστροφο είναι ένα προς ένα άρα και η αντιστροφή είναι ένας ένα προς ένα μετασχηματισμός. Επειδή όμως το O εξαιρείται

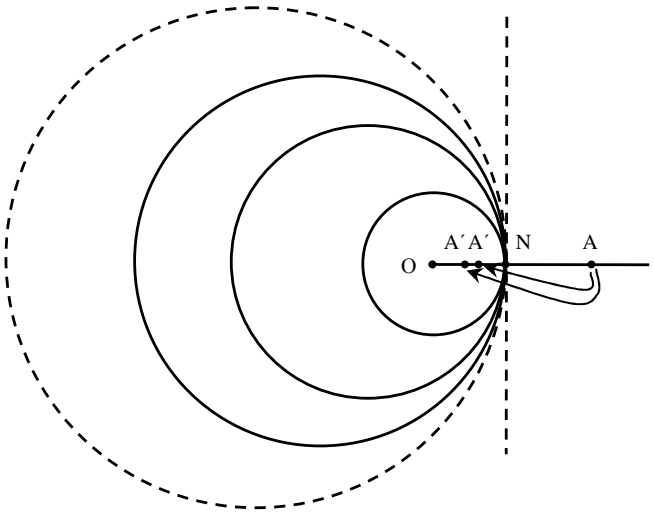
από το πεδίο ορισμού η αντιστροφή είναι ένας ένα προς ένα μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^2$-{O} στον εαυτό του.

Προηγουμένως αναφέραμε ότι η αντιστροφή (inversion) είναι μια γενίκευση της ανάκλασης (reflection). Αν τώρα σκεφτούμε με αντίστροφο τρόπο και προσπαθήσουμε να δούμε πως θα μπορούσε η ανάκλαση να προκύψει από την αντιστροφή θα πρέπει να εξετάσουμε τι συμβαίνει στο αντίστροφο ενός σημείου Α καθώς αυξάνουμε την ακτίνα του κύκλου ως προς τον οποίο γίνεται η αντιστροφή.

Ας είναι λοιπόν Α΄ το αντίστροφο του Α ως προς κύκλο με ακτίνα r και ας υποθέσουμε ότι το τμήμα ΑΑ΄ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ν. Τότε ΟΑ=r+ΑΝ και το ΟΑ΄ =r-Α΄Ν οπότε η ισότητα $OA \cdot OA' = r^2$ γίνεται $(r + AN)(r - A'N) = r^2$ και αφού εξαλείψουμε τις παρενθέσεις και διαγράψουμε το r^2 λύνοντας ως προς $A'N$ παίρνουμε

$$A'N = \frac{AN \cdot r}{r + AN} = \frac{AN}{1 + \frac{AN}{r}} \quad (2)$$



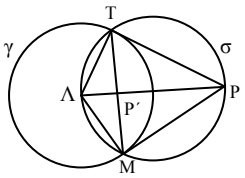


Αν σταθεροποιήσουμε τα Α και Ν και αφήσουμε την ακτίνα να τείνει στο άπειρο θα παρατηρήσουμε από την σχέση (2) ότι το μήκος του τμήματος Α΄Ν τείνει στο μήκος του τμήματος ΑΝ. Με άλλα λόγια η ανάκλαση ως προς μια ευθεία μπορεί να θεωρηθεί ως η οριακή περίπτωση αντιστροφής ως προς κύκλο αυξανόμενης ακτίνας.

Για αυτό το λόγο μπορούμε να υιοθετήσουμε την ακόλουθη χρήσιμη σύμβαση:

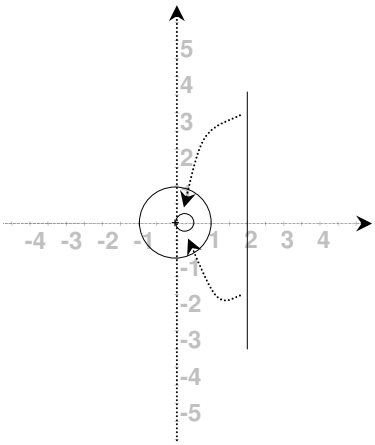
<u>Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον όρο αντιστροφή για να δηλώσουμε και την ανάκλαση ως προς μια ευθεία αλλά και την αντιστροφή ως κύκλο.</u>

Ακολούθως θα δώσουμε μια γεωμετρική μέθοδο για να κατασκευάσουμε αντίστροφα σημεία ως προς έναν κύκλο.



Έστω το σημείο Ρ το οποίο είναι εξωτερικό ενός κύκλου γ του οποίου το κέντρο είναι το σημείο Λ. Ας υποθέσουμε ότι σ είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο Q το οποίο είναι το μέσο του τμήματος ΡΛ και ακτίνα ίση με το μισό του τμήματος ΡΛ. Τότε ο κύκλος σ τέμνει τον κύκλο γ σε δύο σημεία Τ και Μ και ΡΤ, ΡΜ είναι εφαπτόμενες στον κύκλο αυτόν στα σημεία του Τ και Μ (οι γωνίες $\measuredangle \Lambda TP$ και $\measuredangle \Lambda MP$ είναι εγγεγραμμένες και οι δύο σε ημικύκλια άρα είναι ορθές). Αν λοιπόν η ΤΜ τέμνει την ΛΡ σε ένα σημείο Ρ΄ τότε το Ρ΄ είναι το αντίστροφο του Ρ αφού τα τρίγωνα ΛΤΡ και ΤΡ΄Λ είναι όμοια και ως εκ τούτου ισχύει $\frac{\Lambda P}{\Lambda T} = \frac{\Lambda T}{\Lambda P'} \Rightarrow \Lambda P \cdot \Lambda P' = R^2$ Θα δείξουμε τώρα ότι η αντιστροφή ως προς κύκλο είναι διαφορετικός τύπος μετασχηματισμού από αυτούς που προκύπτουν από την ευκλείδεια καθώς και από την συσχετισμένη γεωμετρία (affine geometry). Ο μετασχηματισμός της αντιστροφής ως προς κύκλο δεν είναι δεν είναι μετασχηματισμός της αφινικής γεωμετρίας από την στιγμή που δεν απεικονίζει ευθείες σε ευθείες. Για παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι C είναι ο μοναδιαίος κύκλος και L είναι η ευθεία με εξίσωση x=2. Όλα τα σημεία της L κείνται έξω από τον μοναδιαίο κύκλο και ως εκ τούτου η αντιστροφή ως προς τον κύκλο C πρέπει να απεικονίζει όλα τα σημεία της L σε σημεία που κείνται μέσα στον μοναδιαίο κύκλο. Άρα η

εικόνα της L δεν μπορεί να είναι ευθεία. Έτσι μιας και η εικόνα μιας ευθείας κάτω από έναν αφινικό μετασχηματισμό είναι ευθεία, μπορεί άμεσα να βγει το συμπέρασμα ότι η αντιστροφή δεν μπορεί να είναι ένας αφινικός μετασχηματισμός.

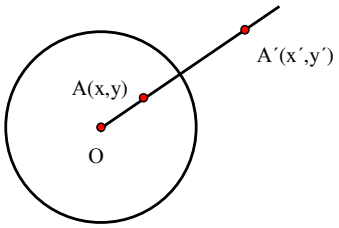


Μια αντιστροφή ως προς κύκλο δεν είναι ευκλείδειος μετασχηματισμός γιατί όπως και οι αφινικοί μετασχηματισμοί έτσι και οι ευκλείδειοι μετασχηματισμοί απεικονίζουν ευθείες σε ευθείες. Στη πραγματικότητα ένας ευκλείδειος μετασχηματισμός είναι ένας αφινικός μετασχηματισμός.

Το αποτέλεσμα ενός μετασχηματισμού αντιστροφής στις ευθείες και τους κύκλους.

Προηγουμένως είδαμε πώς να κατασκευάσουμε το σημείο Α΄ το οποίο είναι το αντίστροφο σημείο ενός σημείου Α ως προς έναν δοσμένο κύκλο C. Η γεωμετρική αυτή κατασκευή είδαμε πως είναι αρκετά εύκολη, ωστόσο είναι ευκολότερο για να μελετήσουμε τις διάφορες ιδιότητες της αντιστροφής, να χρησιμοποιήσουμε αναλυτική γεωμετρία καθώς και τους αλγεβρικούς τύπους που συνδέουν τις συντεταγμένες των Α και Α΄.

Προς το παρόν είναι αρκετό να δώσουμε τον τύπο που συνδέει τις συντεταγμένες των αντίστροφων σημείων Α και Α΄ στη περίπτωση που ο κύκλος ως προς τον οποίο γίνεται η αντιστροφή είναι ο μοναδιαίος κύκλος:$\{(x,y):x^2+y^2=1\}$.



Αυτός ο κύκλος θα εμφανίζεται πολύ συχνά οπότε θα του δώσουμε ένα ιδιαίτερο σύμβολο: το C. Ας υποθέσουμε ότι Α είναι σημείο με συντεταγμένες $(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{O\}$ και ας υποθέσουμε ότι Α΄ είναι η εικόνα του με την αντιστροφή ως προς τον κύκλο C. Μιας και το Α΄ βρίσκεται πάνω στην ημιευθεία ΟΑ οι συντεταγμένες του θα είναι (κx,κy) για κάποιο θετικό κ.

Η ακτίνα του C είναι 1 οπότε ΟΑ·ΟΑ΄=1.

Επειδή $OA^2\cdot OA'^2=1$ θα έχουμε: $\left(x^2+y^2\right)\left(\kappa^2x^2+\kappa^2y^2\right)=1$.

Από εδώ προκύπτει ότι $\kappa^2=\dfrac{1}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ και άρα $\kappa=\dfrac{1}{\left(x^2+y^2\right)}$.

Έτσι έχουμε ότι οι συντεταγμένες του Α΄ είναι οι $\left(\dfrac{x}{\left(x^2+y^2\right)},\dfrac{y}{\left(x^2+y^2\right)}\right)$.

Μπορούμε λοιπόν να συμπεράνουμε ότι η αντιστροφή ως προς τον μοναδιαίο κύκλο είναι η συνάρτηση:

$$t:(x,y)\rightarrow\left(\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)},\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)}\right)\text{ με }(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}.$$

Έστω ότι (x΄,y΄) είναι η εικόνα του (x,y) με την αντιστροφή ως προς τον κύκλο C. Επειδή η αντιστροφή είναι ενειλικτική προκύπτει η εξής ισότητα:

$$(x,y)=\left(\frac{x'}{\left((x')^2+(y')^2\right)},\frac{y'}{\left((x')^2+(y')^2\right)}\right)$$

Χρησιμοποιώντας αυτή τη σχέση μεταξύ των (x,y) και (x΄,y΄) μπορούμε να βρούμε την εικόνα μιας καμπύλης με την αντιστροφή ως προς τον κύκλο C . Πρέπει όμως να είμαστε

προσεκτικοί ως προς το ότι *η αντιστροφή δεν ορίζεται στο κέντρο της αντιστροφής και αντίστροφα κανένα σημείο δεν αντιστοιχίζεται στο κέντρο του κύκλου της αντιστροφής.*
Ας πάρουμε ένα παράδειγμα:
Να καθοριστεί η εικόνα μέσω αντιστροφής ως προς τον κύκλο C της ευθείας 2x+4y=1

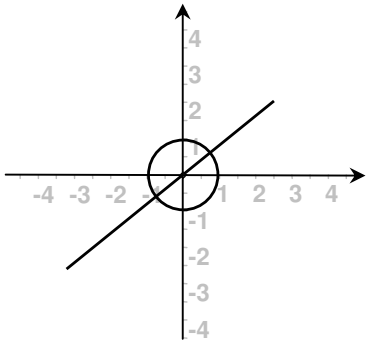
Λύση:

Ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο σημείο (x,y) της ευθείας 2x+4y=1

Επειδή $(x,y)=\left(\frac{x'}{\left((x')^2+(y')^2\right)},\frac{y'}{\left((x')^2+(y')^2\right)}\right)$ άρα τα x΄ και y΄ ικανοποιούν την ισότητα $\frac{2x'}{\left((x')^2+(y')^2\right)}+\frac{4y'}{\left((x')^2+(y')^2\right)}=1$ και πολλαπλασιάζοντας με $(x')^2+(y')^2$ παίρνουμε $2x'+4y'=\left((x')^2+(y')^2\right)$ και με συμπλήρωση τετραγώνων προκύπτει η ισότητα $(x'-1)^2+(y'-2)^2=5$ η οποία είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο (1,2) και ακτίνα √5.

Επειδή αυτός ο κύκλος διέρχεται από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής (origin) και από την στιγμή που το κέντρο δεν μπορεί να είναι εικόνα κάποιου σημείου, η εικόνα της ευθείας 2x+4y=1 είναι ο κύκλος $(x-1)^2+(y-2)^2=5$ με το κέντρο του κύκλου ως προς τον οποίο γίνεται η αντιστροφή, δηλαδή το (0,0), να εξαιρείται.
Για να μη χρησιμοποιούμε τόνους ώστε να συμβολίσουμε τις συντεταγμένες της εικόνας (x΄,y΄) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την πιο κάτω στρατηγική:

1. Γράφουμε την εξίσωση της καμπύλης της οποίας θέλουμε να βρούμε την αντιστροφή.



2. Αντικαθιστούμε το x με $\frac{x}{(x^2+y^2)}$ και το y με $\frac{y}{(x^2+y^2)}$ και απλοποιούμε την εξίσωση που προκύπτει.

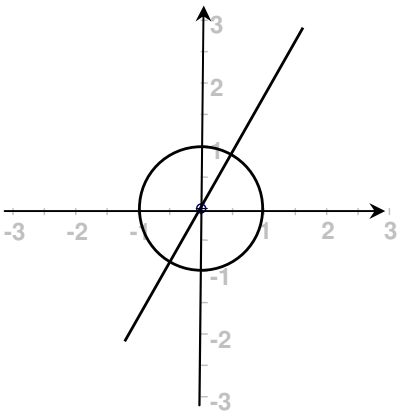
Όταν χρησιμοποιούμε αυτήν την στρατηγική πρέπει να προσέξουμε να εξαιρούμε το κέντρο από την καμπύλη που θα προκύψει.

Ας δούμε ένα δεύτερο παράδειγμα:
α) Καθορίστε την εικόνα, μέσω αντιστροφής ως προς τον κύκλο C (μοναδιαίος κύκλος), της ευθείας y=x με το κέντρο (0,0) να εξαιρείται.

Αντικαθιστούμε το x με το $\frac{x}{(x^2+y^2)}$ και το y με $\frac{y}{(x^2+y^2)}$ και παίρνουμε την ισότητα $\frac{x}{(x^2+y^2)}=\frac{y}{(x^2+y^2)}$ απ΄ όπου παίρνουμε την y=x

Αυτή είναι η εξίσωση με την οποία ξεκινήσαμε.
Επειδή είπαμε πως πρέπει να εξαιρούμε το κέντρο του κύκλου αντιστροφής θα έχουμε την y=x χωρίς το σημείο (0,0) (origin).
Θα χρησιμοποιούμε τον όρο *«διατρυπημένη»* (punctured) ευθεία για να περιγράψουμε μια ευθεία ή έναν κύκλο ο οποίος έχει ένα ή περισσότερα σημεία τα οποία έχουν εξαιρεθεί. Πιο συγκεκριμένα αν έχουμε μια ευθεία και το σημείο A έχει εξαιρεθεί από αυτήν τότε η ευθεία είναι διατρυπημένη στο σημείο A. Τον όρο *«διατρυπημένος»* θα χρησιμοποιούμε και για τους κύκλους.

β) Καθορίστε την εικόνα, μέσω αντιστροφής ως προς τον κύκλο C, της ευθείας y=2x από την οποία έχει εξαιρεθεί το κέντρο (0,0) (origin).



Αντικαθιστούμε το x με το $\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)}$ και το y με $\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)}$ και οδηγούμαστε στην ισότητα:

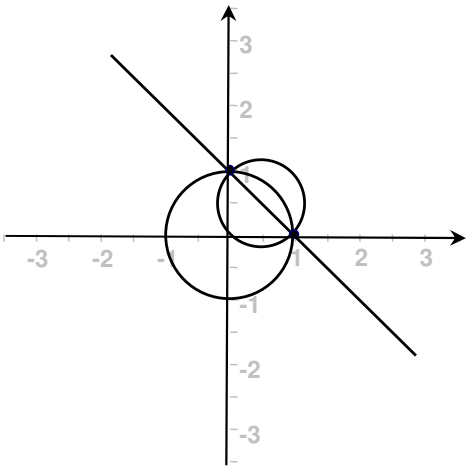
$\frac{2x}{\left(x^2+y^2\right)}=\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)}$, απ΄ όπου παίρνουμε την y=2x.

3. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε την ευθεία L με εξίσωση x+y=1

a) Να καθοριστεί η εικόνα της L μέσω αντιστροφής ως προς τον κύκλο C.

b) Να εξηγηθεί γιατί τα σημεία (1,0) και (0,1) βρίσκονται και στην ευθεία και στην εικόνα της.

γ) Να σχεδιαστεί η ευθεία x+y=1 και η εικόνα της σε ένα διάγραμμα.



a) Με τον ίδιο τρόπο που δουλέψαμε σε προηγούμενο παράδειγμα καταλήγουμε στην:

$\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)}+\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)}=1$ οπότε $x+y=x^2+y^2$

άρα

$x^2+y^2-x-y=0$

$$x^2+y^2-2\frac{1}{2}x-2\frac{1}{2}y+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

b) τα σημεία (1,0) και (0,1) βρίσκονται και στην ευθεία και στην εικόνα της αφού ικανοποιούν και τις δύο εξισώσεις.

Οι λύσεις αυτών των παραδειγμάτων σκιαγραφούν το ακόλουθο θεώρημα:

<u>Θεώρημα:</u>

Εικόνες των ευθειών μέσω αντιστροφής ως προς έναν κύκλο με κέντρο Ο:

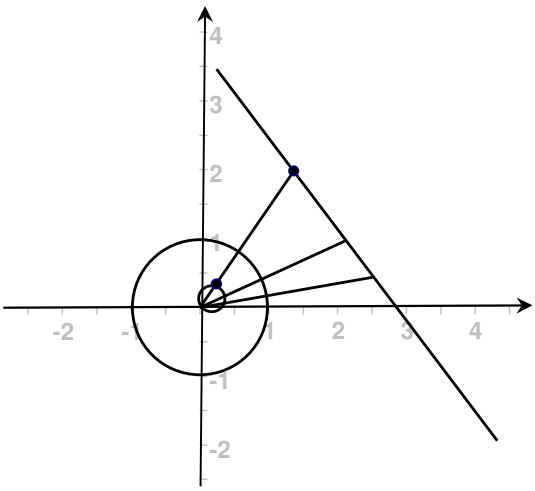
α) μια ευθεία η οποία δεν διέρχεται από το Ο (κέντρο αντιστροφής) απεικονίζεται σε έναν κύκλο ο οποίος είναι διατρυπημένος στο Ο.

β) μια ευθεία η οποία είναι διατρυπημένη στο Ο (κέντρο αντιστροφής) απεικονίζεται στον εαυτό της.

Απόδειξη:

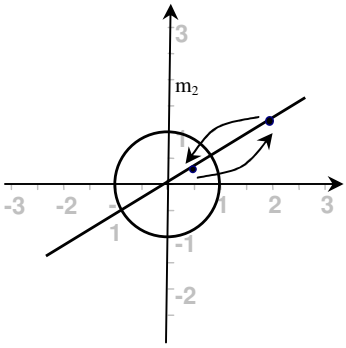
Πρώτα ας επιλέξουμε ένα σύστημα αξόνων συντεταγμένων με κέντρο το Ο και μονάδα μήκους ίση με την ακτίνα του κύκλου ως προς τον οποίο αντιστρέφουμε. Τότε ο κύκλος ως προς τον οποίο αντιστρέφουμε γίνεται ο μοναδιαίος κύκλος C.

α) Έστω L μια ευθεία που δεν περνάει από το κέντρο Ο του κύκλου αντιστροφής (origin). Σε τέτοια περίπτωση η ευθεία έχει εξίσωση της μορφής: ax+by+c=0 όπου το c είναι διαφορετικό από το μηδέν. Χρησιμοποιώντας την στρατηγική που αναπτύξαμε προηγουμένως δηλαδή αντικαθιστώντας το x με το $\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)}$ και το y με $\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)}$ παίρνουμε την ισότητα $\frac{ax}{\left(x^2+y^2\right)}+\frac{by}{\left(x^2+y^2\right)}+c=0$.



Επειδή το c είναι διαφορετικό από το μηδέν μπορούμε να γράψουμε την ισότητα στην μορφή $x^2+y^2+\frac{ax+by}{c}=0$. Αυτή είναι εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από την αρχή των αξόνων δηλαδή από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής. Αν εξαιρέσουμε το κέντρο του κύκλου αντιστροφής από το σύνολο των σημείων που είναι εικόνες της ευθείας ax+by+c=0 μέσω της εν λόγω αντιστροφής, τότε κάθε άλλο σημείο Α΄ του κύκλου $x^2+y^2+\frac{ax+by}{c}=0$ είναι εικόνα ενός σημείου Α, το οποίο, είναι το σημείο στο οποίο η ΟΑ΄ τέμνει την ax+by+c=0.

β) Μπορούμε να δουλέψουμε με τον ίδιο τρόπο:



Δηλαδή να πάρουμε την ευθεία ax+by=0 η οποία είναι μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή και να αντικαταστήσουμε το x με το $\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)}$ και το y με $\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)}$ οπότε παίρνουμε την ισότητα $\frac{ax}{\left(x^2+y^2\right)}+\frac{by}{\left(x^2+y^2\right)}=0$ και διαγράφοντας το $\left(x^2+y^2\right)$ από τους παρονομαστές έχουμε ax+by=0.

Το ίδιο θα μπορούσαμε να πάρουμε με χρήση κατ΄ ευθείαν του ορισμού της αντιστροφής. Πράγματι αν L είναι μια ευθεία διατρυπημένη στο Ο τότε κάθε σημείο της L μέσα στον κύκλο C είναι εικόνα ενός σημείου της L έξω από τον κύκλο και κάθε σημείο της L εξωτερικό του κύκλου είναι εικόνα ενός σημείου της L μέσα στον κύκλο. Τα σημεία της ευθείας L που ανήκουν και στον κύκλο αντιστροφής απεικονίζονται στον εαυτό τους. Έχουμε λοιπόν ότι η εικόνα της ευθείας L είναι η ίδια η ευθεία L.

Στην συνέχεια θα δούμε τις εικόνες κύκλων μέσω αντιστροφής. Επειδή σημεία πάνω στον κύκλο ως προς τον οποίο γίνεται η αντιστροφή απεικονίζονται στον εαυτό τους η εικόνα του κύκλου αντιστροφής είναι επίσης κύκλος και συγκεκριμένα ο ίδιος ο κύκλος της αντιστροφής. Επίσης κάθε κύκλος Ψ που έχει κέντρο το κέντρο του κύκλου αντιστροφής και ακτίνα ρ απεικονίζεται σε έναν άλλο κύκλο Ψ΄ που έχει κέντρο το Ο γιατί κάθε σημείο Α του Ψ απεικονίζεται στο σημείο Α΄ το οποίο ανήκει στην ημιευθεία ΟΑ και πάντα σε ίση απόσταση από το Ο αφού $OA\cdot OA'=r^2 \Rightarrow \rho\cdot OA'=r^2$ οπότε $OA'=r^2/\rho$.

Στο σημείο αυτό κατά συνέπεια μπορεί να τεθεί το ερώτημα αν η αντιστροφή απεικονίζει πάντα κύκλο σε κύκλο.

Ας προχωρήσουμε με ένα ακόμα παράδειγμα :

Να καθοριστεί η εικόνα, μέσω αντιστροφής ως προς κύκλο C, του κύκλου Ψ του οποίου το κέντρο είναι το (2,0) και η ακτίνα του είναι το 1.

Ο κύκλος έχει εξίσωση: $\left(x-2\right)^2+y^2=1$.

Την εξίσωση του κύκλου αυτού μπορούμε να την ξαναγράψουμε στην μορφή: $x^2+y^2-4x+3=0$.

Χρησιμοποιώντας την συνήθη στρατηγική δηλαδή αν αντικαταστήσουμε το x με το $\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)}$ και το y με το $\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)}$ παίρνουμε την ισότητα:

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2+\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2-4\frac{x}{x^2+y^2}+3=0$$

Προσθέτοντας τους δύο πρώτους όρους αυτής της ισότητας έχουμε:

$$\frac{1}{x^2+y^2}-4\frac{x}{x^2+y^2}+3=0.$$

Πολλαπλασιάζοντας με x^2+y^2 και κατόπιν με 1/3 έχουμε την:

$$x^2+y^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}=0$$

Συνεχίζοντας με την μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου έχουμε: $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2$.

Η εξίσωση αυτή είναι η εξίσωση κύκλου με κέντρο (2/3,0) και ακτίνα 1/3.

Σε αυτό το παράδειγμα ο κύκλος C απεικονίζεται σε έναν άλλο κύκλο. Πρέπει να παρατηρήσουμε όμως ότι το κέντρο του κύκλου C δηλαδή το (2,0) απεικονίζεται στο (1/2,0) το οποίο δεν είναι το κέντρο του κύκλου ο οποίος είναι η εικόνα του κύκλου C, πράγμα που σημαίνει ότι μια αντιστροφή μπορεί να απεικονίζει έναν κύκλο σε έναν άλλο κύκλο, όμως <u>δεν απεικονίζει απαραίτητα το κέντρο του ενός στο κέντρο του άλλου.</u>

Το επόμενο παράδειγμα δείχνει τι συμβαίνει όταν θέλουμε να βρούμε την εικόνα ενός κύκλου ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του κύκλου της αντιστροφής.

Παράδειγμα:

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τον κύκλο Ψ κέντρου (-2,0) και ακτίνας 2 που διέρχεται από κέντρο του κύκλου αντιστροφής C (διατρυπημένος).

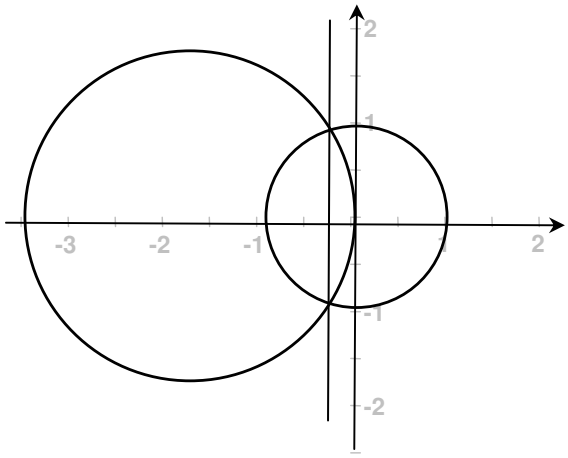
Να καθοριστεί η εικόνα του μέσω της αντιστροφής ως προς τον κύκλο C.

Λύση:

Ο κύκλος έχει εξίσωση : $(x+2)^2+y^2=2^2$

Την εξίσωση αυτή την ξαναγράφουμε στην μορφή: $x^2+y^2+4x=0$. Αν αντικαταστήσουμε το x με το $\frac{x}{(x^2+y^2)}$ και το y με $\frac{y}{(x^2+y^2)}$ παίρνουμε την ισότητα :

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2+\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2+\frac{4x}{x^2+y^2}=0$$



Κάνοντας τις πράξεις και πιο συγκεκριμένα προσθέτοντας τους δύο πρώτους όρους παίρνουμε: $\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{4x}{x^2+y^2}=0$ που προφανώς γίνεται $1+4x=0$

Βλέπουμε λοιπόν ότι εικόνα του διατρυπημένου κύκλου Ψ είναι η ευθεία L η οποία έχει την εξίσωση :

$$1+4x=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{4}.$$

Μπορούμε πολύ εύκολα να διαπιστώσουμε ότι κάθε σημείο της L είναι η εικόνα κάποιου σημείου του κύκλου Ψ και δεν χρειάζεται η εξαίρεση κάποιου σημείου.

Τα συμπεράσματα στα οποία καταλήγουμε από την επεξεργασία των πιο πάνω παραδειγμάτων συνοψίζονται στο εξής θεώρημα:

Θεώρημα:

Εικόνες των κύκλων μέσω αντιστροφής ως προς κύκλο:

α) Ένας κύκλος που δεν περνάει από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής απεικονίζεται σε κύκλο.
β) Ένας κύκλος διατρυπημένος στο Ο (κέντρο του κύκλου αντιστροφής) απεικονίζεται σε μια ευθεία που δεν περνάει από το Ο.
Απόδειξη:
Θεωρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων τέτοιο ώστε ο κύκλος ως προς τον οποίο κάνουμε την αντιστροφή να είναι ο μοναδιαίος.
Έστω τώρα ότι ο κύκλος Ψ, που θέλουμε να αντιστρέψουμε, είναι ένας τυχαίος κύκλος ακτίνας ρ και κέντρου (α,β).
Έτσι έχουμε την εξίσωση για τον κύκλο Ψ: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2$
Κάνοντας τις πράξεις φτάνουμε στη μορφή:
$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+c=0$
με $c=\alpha^2+\beta^2-\rho^2$
Αν αντικαταστήσουμε το x με το $\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)}$ και το y με $\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)}$ παίρνουμε την ισότητα

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2+\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2-\frac{2\alpha x}{x^2+y^2}-\frac{2\beta x}{x^2+y^2}+c=0$$

Προσθέτοντας τους δύο πρώτους όρους της εξίσωσης έχουμε

$$\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2\alpha x}{x^2+y^2}-\frac{2\beta x}{x^2+y^2}+c=0$$

και πολλαπλασιάζοντας με x^2+y^2 φτάνουμε στην μορφή $1-2\alpha x-2\beta y+c(x^2+y^2)=0$
Η μορφή $1-2\alpha x-2\beta y+c(x^2+y^2)=0$ είναι ή ευθεία ή κύκλος ανάλογα με το αν ο κύκλος Ψ διέρχεται ή όχι από το Ο.
α) αν δεν περνάει από το Ο τότε το c είναι διαφορετικό από το 0.
Σε τέτοια περίπτωση διαιρώντας την εξίσωση $1-2\alpha x-2\beta y+c(x^2+y^2)=0$
με c παίρνουμε $x^2+y^2-2\frac{\alpha}{c}x-2\frac{\beta}{c}y+\frac{1}{c}=0$ η οποία είναι εξίσωση κύκλου.
β) Αν ο κύκλος Ψ περνάει από το Ο τότε c=0 οπότε η εξίσωση:
$1-2\alpha x-2\beta y+c(x^2+y^2)=0$ γίνεται $1-2\alpha x-2\beta y=0$ η οποία είναι εξίσωση ευθείας η οποία δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων, δηλαδή από το κέντρο Ο του κύκλου αντιστροφής.
Ο ακόλουθος πίνακας περιγράφει με συνοπτικό τρόπο τα συμπεράσματα στα οποία φτάσαμε μέσω των προηγούμενων θεωρημάτων

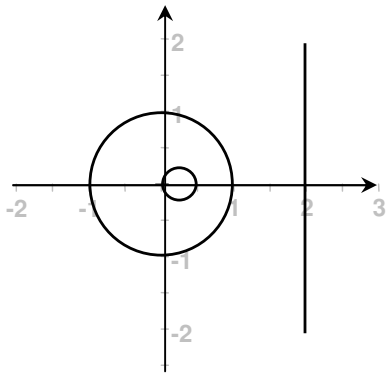
Μέσω αντιστροφής ως προς κύκλο που έχει κέντρο το Ο:		
Μία ευθεία που διέρχεται (punctured) από το Ο	απεικονίζεται	Στην ίδια ευθεία (punctured) στο Ο
Μια ευθεία που δεν διέρχεται από το Ο	απεικονίζεται	Σε κύκλο που διέρχεται (punctured) από το Ο
Ένας κύκλος που διέρχεται από (punctured) το Ο	απεικονίζεται	Σε μια ευθεία που δεν διέρχεται από το Ο
Ένας κύκλος που δεν διέρχεται από το Ο	απεικονίζεται	Σε κύκλο που δεν διέρχεται από το Ο

Δεν υπάρχει ανάγκη να θυμόμαστε αναλυτικά τον πιο πάνω πίνακα γιατί μπορούμε να ανακαλούμε τα συμπεράσματά του ως ακολούθως: Πρώτον: σημεία πάνω σε μια ευθεία ή έναν κύκλο που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής (origin) μπορούν να επιλεγούν αυθαίρετα κοντά στην κέντρο (origin) οπότε οι εικόνες τέτοιων σημείων μπορούν να βρεθούν αυθαίρετα μακριά από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής οπότε μόνο σε ευθεία μπορούν να ανήκουν. Δεύτερον: σημεία πάνω σε ευθεία μπορούν να βρεθούν αυθαίρετα μακριά από το κέντρο (origin). Οι εικόνες αυτών των σημείων μπορούν να βρεθούν

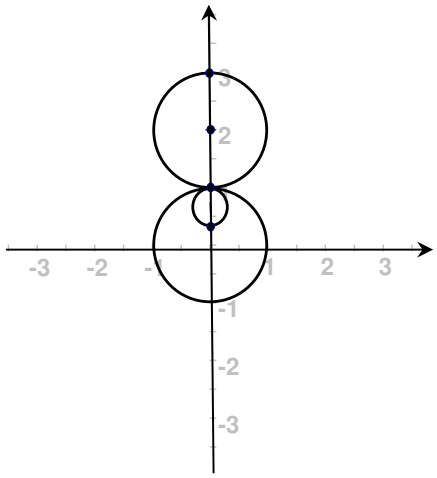
αυθαίρετα κοντά στο κέντρο οπότε πρέπει να βρίσκονται σε κύκλο ή ευθεία που διέρχεται από το κέντρο Ο. Σε όλα τα παραπάνω πρέπει να λάβουμε υπ΄ όψιν ότι εξαιρείται πάντα το κέντρο Ο διότι δεν είναι εικόνα κάποιου σημείου αλλά ούτε και έχει εικόνα κάποιο σημείο.

Παράδειγμα:

Να βρεθεί η εικόνα μέσω αντιστροφής ως προς τον κύκλο C (μοναδιαίος κύκλος) των :
α) ευθείας με εξίσωση x=2.
b) κύκλου C με κέντρο (0,2) και ακτίνα ρ=1.



α) από τον πίνακα γνωρίζουμε ότι η ευθεία L απεικονίζεται σε ένα κύκλο C που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής.
Ο κύκλος διέρχεται από το (1/2,0) που είναι η εικόνα του σημείου (2,0) της ευθείας x=2. Αφού η ευθεία x=2 είναι συμμετρική ως προς τον x-άξονα προκύπτει ότι και ο κύκλος εικόνα θα είναι συμμετρικός ως προς τον x-άξονα.
Ο μόνος κύκλος που ικανοποιεί αυτές τις προϋποθέσεις είναι ο κύκλος με ακτίνα 1/4 και κέντρο το (1/4 ,0)



β) από τον πίνακα έχουμε ότι η εικόνα C΄ του C είναι ένας κύκλος που δεν περνάει από την αρχή.
Πρέπει να είναι συμμετρικός ως προς τον y-άξονα (αφού και ο C είναι) και πρέπει να περνάει από τα σημεία (0,1/3) και (0,1) (οι εικόνες του (0,3) και (0,1) αντίστοιχα). Ο μόνος κύκλος που ικανοποιεί αυτές τις προϋποθέσεις είναι ο κύκλος με ακτίνα 1/3 και κέντρο το σημείο (0,2/3).

Γεωμετρική αντιστροφή και μιγαδικοί αριθμοί

Η χρήση μιγαδικών αριθμών δίνει έναν ιδιαίτερα άνετο τρόπο μέσω του οποίου μπορούμε να χειριστούμε τις αντιστροφές.
Θεώρημα:
Η αντιστροφή ως προς κύκλο C, ακτίνας *r* και κέντρου *(a,b)*, παριστάνεται στο μιγαδικό επίπεδο με τον μετασχηματισμό:

$$t_C(z) = \frac{r^2}{\overline{z-c}} + c = \frac{c\overline{z} + r^2 - |c|^2}{\overline{z} - \overline{c}} \quad (z \in \mathbb{C} - \{c\})$$

$\mu\varepsilon \quad c = a + ib$

Απόδειξη:
Πρώτα θα θεωρήσουμε την περίπτωση που ο C είναι ο μοναδιαίος κύκλος. Από προηγούμενο θεώρημα γνωρίζουμε ότι η εικόνα μέσω αντιστροφής ως προς τον κύκλο C του σημείου *(x,y)* είναι το σημείο $(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$. Θα προσπαθήσουμε να

ξαναδιατυπώσουμε την έκφραση αυτή με όρους μιγαδικών αριθμών χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το μέτρο $|z|$ ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + iy$ ικανοποιεί την $x^2 + y^2 = |z|^2 = z\bar{z}$.

Έτσι η εικόνα μέσω αντιστροφής ενός σημείου $z = x + iy$ είναι το σημείο $\frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{x+iy}{x^2+y^2} = \frac{z}{z\bar{z}} = \frac{1}{\bar{z}}$

Το επόμενο βήμα είναι να θεωρήσουμε ότι ο κύκλος C είναι ένας κύκλος ακτίνας r και κέντρου *(a,b)*. Σε αυτήν την περίπτωση η αντιστροφή ως προς τον C μπορεί να εκφραστεί ως σύνθεση $t = t_3 \circ t_2 \circ t_1$

Όπου:

- $t_1(z) = \frac{z-c}{r}$ είναι η σύνθεση μιας μεταφοράς και μιας ομοιοθεσίας που μετασχηματίζει τον κύκλο C στον μοναδιαίο κύκλο.
- $t_2(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ είναι η αντιστροφή ως προς τον μοναδιαίο κύκλο.
- $t_3(z) = rz + c$ είναι η αντίστροφη της t_1 και στέλνει τον μοναδιαίο κύκλο πίσω στον C.

Οπότε $t_C = t_3 \circ t_2 \circ t_1(z) = \frac{r^2}{\overline{z-c}} + c$

Η αναπαράσταση της αντιστροφής όπως δίνεται στο θεώρημα αυτό έχει μια ιδιαίτερα απλή μορφή στην περίπτωση που ο κύκλος C είναι ο μοναδιαίος κύκλος.

Σε αυτήν την περίπτωση $r = 1$ και c=0 οπότε η αντιστροφή παριστάνεται με τον μετασχηματισμό $t_C(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ $(z \in \mathbb{C} - \{0\})$

Δεύτερος τρόπος απόδειξης:

Έστω η αντιστροφή ως προς έναν τυχαίο κύκλο C με κέντρο έναν μιγαδικό αριθμό q και ακτίνα R. Θα παραστήσουμε και πάλι την αντιστροφή ως προς τον κύκλο C με το σύμβολο t_C και την εικόνα του z με $t_C(z)$ (δηλαδή $t_C : z \to t_C(z)$).

Έστω λοιπόν ότι ρ είναι η απόσταση του τυχαίου μιγαδικού αριθμού z από τον μιγαδικό q, οπότε ο μιγαδικός αριθμός ο οποίος είναι η εικόνα του z ως προς την αντιστροφή t_C είναι ο μιγαδικός αριθμός z΄, που βρίσκεται στην ημιευθεία με αρχή το κέντρο q, η οποία περιέχει τον μιγαδικό αριθμό z και σε απόσταση $\frac{R^2}{\rho}$ από τον q. Επειδή οι μιγαδικοί αριθμοί που συνδέουν τον q με τον z και τον z΄ έχουν την ίδια διεύθυνση και τα μέτρα τους είναι ρ και $\frac{R^2}{\rho}$ αυτό που προκύπτει είναι ότι $(z'-q)\left(\overline{z-q}\right) = \rho e^{i\theta}\overline{\frac{R^2}{\rho}e^{i\theta}} = \rho e^{i\theta}\frac{R^2}{\rho}e^{-i\theta} = R^2$ (για τον $z'-q$ και για τον $z-q$ έχουμε όρισμα θ διότι και οι δύο βρίσκονται στην ίδια ημιευθεία).

Λύνοντας ως προς z΄ έχουμε $t_C(z) = \frac{R^2}{\overline{z-q}} + q = \frac{q\bar{z} + (R^2 - |q|^2)}{\bar{z} - \bar{q}}$.

Παραδείγματα:

• Η εικόνα του σημείου $1-i$ μέσω του μετασχηματισμού της αντιστροφής είναι το σημείο $\frac{1}{\overline{1-i}}=\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}=\frac{1}{2}(1-i)$

• Ας υποθέσουμε ότι C είναι ο κύκλος ακτίνας 2 και κέντρου O(0,0) (origin). Να γραφεί η αντιστροφή ως προς τον C ως μετασχηματισμός του $\mathbb{C}-\{(0,0)\}$

Λύση

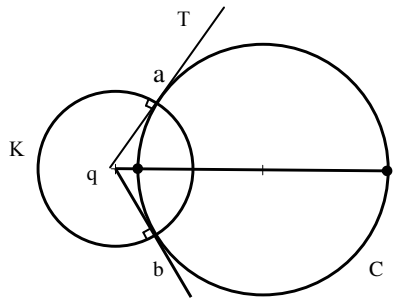
Η αντιστροφή ως προς τον κύκλο C, ακτίνας r και κέντρου (a,b), μπορεί να απεικονιστεί στο μιγαδικό επίπεδο με τον μετασχηματισμό:

$$t(z)=\frac{r^2}{z-c}+c \quad (z\in\mathbb{C}-\{c\})$$

$$\mu\varepsilon \quad c=a+ib$$

οπότε στην συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε: $t(z)=\frac{4}{\overline{z}}$ $(z\in\mathbb{C}-\{0\})$.

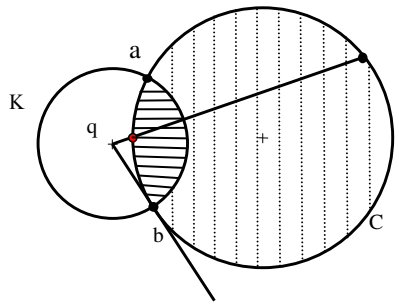
Αντιστροφή ορθογώνιων κύκλων ως προς τον κύκλο αντιστροφής - Κατασκευή αντίστροφων σημείων με την βοήθεια ορθογωνίων κύκλων.



Ας θεωρήσουμε τον κύκλο C ο οποίος τέμνει τον κύκλο της αντιστροφής K κατά ορθή γωνία στα σημεία a και b. Με άλλα λόγια η εφαπτομένη T του C στο σημείο a για παράδειγμα, περνάει από το q. Μέσω της αντιστροφής ως προς K τα σημεία a και b παραμένουν σταθερά και η εφαπτομένη T απεικονίζεται στον εαυτό της. Έτσι η εικόνα του κύκλου C είναι ένας κύκλος που διέρχεται από τα a,b και εφάπτεται με την ευθεία T (εικόνα της T) στο σημείο εικόνα του a που είναι το ίδιο το a). Ένας κύκλος που έχει αυτές τις ιδιότητες υπάρχει και είναι προφανώς ο ίδιος ο κύκλος C.

Έτσι έχουμε το εξής συμπέρασμα: Κάθε κύκλος C ορθογώνιος στον κύκλο K απεικονίζεται στον εαυτό του μέσω της αντιστροφής ως προς τον κύκλο K.

Άμεσες συνέπειες αυτού του συμπεράσματος είναι οι εξής: Πρώτα απ΄ όλα ο δίσκος που έχει σύνορο τον κύκλο C απεικονίζεται στον εαυτό του.



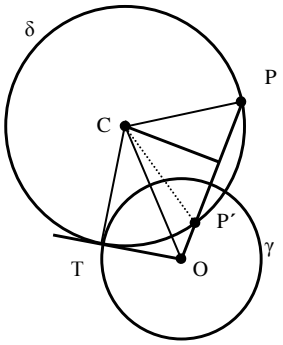
Πιο συγκεκριμένα το μέρος με τις κατακόρυφες διακεκομμένες γραμμοσκιάσεις απεικονίζεται στο μέρος με τις οριζόντιες και αντίστροφα.

Επίσης κάθε ευθεία που διέρχεται από το κέντρο q και τέμνει τον κύκλο C σε ένα σημείο z θα τέμνει τον κύκλο C και σε ένα δεύτερο σημείο z΄ το οποίο είναι το αντίστροφο σημείο του z ως προς τον κύκλο K. Αυτό προκύπτει εύκολα αν σκεφτούμε ότι η εν λόγω ευθεία αντιστρέφεται στον εαυτό της αφού διέρχεται από το κέντρο της αντιστροφής q οπότε μένει αναλλοίωτη. Αφού μένει αναλλοίωτη το αντίστροφο του τυχαίου σημείου της θα είναι πάλι ένα σημείο της. Επίσης ο κύκλος C μένει αναλλοίωτος οπότε κάθε σημείο του αντιστρέφεται σε κάποιο άλλο σημείο του. Γνωρίζουμε ότι οι αντιστροφές διατηρούν τις τομές οπότε τα σημεία τομής της ευθείας και του κύκλου είναι μεταξύ τους αντίστροφα –αφού ένα σημείο τομής τους πρέπει με την αντιστροφή να είναι πάλι σημείο τομής τους.

Ένα άλλο συμπέρασμα στο οποίο φτάνουμε είναι ότι: Το αντίστροφο σημείο ενός σημείου z είναι το δεύτερο σημείο τομής δύο οποιονδήποτε κύκλων που περνάνε από το z και είναι ορθογώνιοι ως προς τον κύκλο αντιστροφής.

Απόδειξη: θα υποθέσουμε ότι Ρ είναι ένα οποιοδήποτε σημείο το οποίο δεν κείται στον κύκλο γ και είναι διαφορετικό από το κέντρο του Ο και έστω ότι δ είναι ένας οποιοσδήποτε κύκλος που διέρχεται από το Ρ. Θα αποδείξουμε ότι ο κύκλος δ τέμνει ορθογώνια τον κύκλο γ αν και μόνο αν ο κύκλος δ διέρχεται από το αντίστροφο σημείο Ρ΄ του σημείου Ρ ως προς τον κύκλο γ.

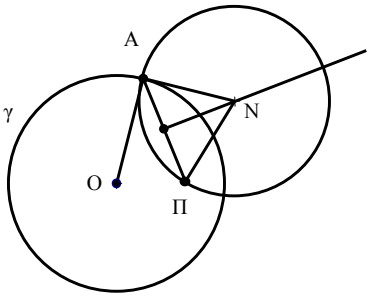
Θα θεωρήσουμε ότι ο κύκλος δ περνάει από το σημείο Ρ΄. Τότε το κέντρο C του κύκλου δ κείται στην μεσοκάθετη του PP΄ οπότε CO>CP οπότε το Ο κείται έξω από τον κύκλο δ και έτσι υπάρχει η εφαπτόμενη ευθεία στον κύκλο δ σε κάποιο σημείο του Τ, η οποία διέρχεται ταυτόχρονα και από το κέντρο Ο του κύκλου γ. Αν υποθέσουμε ότι τα Ρ και Ρ΄ είναι αντίστροφα μεταξύ τους σημεία τότε ισχύει: $OP'OP=\rho^2$ (1) όπου ρ είναι η ακτίνα του κύκλου γ. Επίσης γνωρίζουμε ότι $OP'OP=OC^2-R^2$ (2) όπου R είναι η ακτίνα του κύκλου δ (δύναμη του σημείου Ο ως προς τον κύκλο δ). Τελικά από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $\rho^2= OC^2 - R^2$ οπότε $\rho^2= OC^2 - CT^2$. Επειδή η ΟΤ είναι η εφαπτόμενη στον κύκλο δ στο σημείο του Τ άρα το τρίγωνο CTO είναι ορθογώνιο οπότε από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $TO^2=CO^2 -CT^2$. Τελικά ρ=ΤΟ οπότε οι ακτίνες των δύο κύκλων γ,δ προς στο σημείο Τ είναι κάθετες μεταξύ τους άρα οι κύκλοι αυτοί είναι ορθογώνιοι μεταξύ τους. Αντίστροφα αν υποθέσουμε ότι οι κύκλοι γ και δ είναι μεταξύ τους ορθογώνιοι με ανάλογο τρόπο προκύπτει ότι $OP'OP=\rho^2$ οπότε τα Ρ και Ρ΄ είναι αντίστροφα μεταξύ τους σημεία.



Για να βρούμε λοιπόν το αντίστροφο Π΄ ενός σημείου Π μέσω αντιστροφής ως προς κύκλο κατασκευάζουμε δύο κύκλους οι οποίοι είναι ορθογώνιοι προς τον κύκλο αντιστροφής και διέρχονται και οι δύο από το σημείο Π. Το δεύτερο σημείο τομής Π΄ των δύο αυτών κύκλων είναι το αντίστροφο σημείο του σημείου Π.

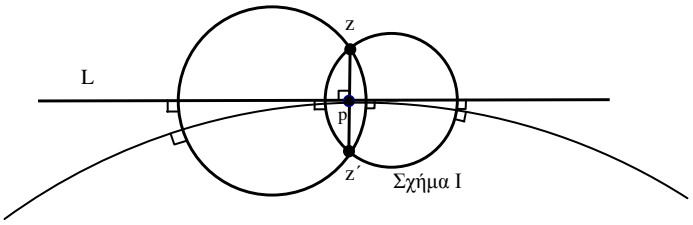
Πώς όμως μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν κύκλο ορθογώνιο στον κύκλο αντιστροφής γ ο οποίος διέρχεται από ένα συγκεκριμένο σημείο Π;

Αρχικά επιλέγουμε ένα σημείο Α πάνω στο κύκλο γ από το οποίο θέλουμε να περάσει ο κύκλος ο ορθογώνιος προς τον κύκλο γ. Κατόπιν φέρνουμε την εφαπτομένη του κύκλου γ στο σημείο Α. Φέρνουμε την μεσοκάθετη του τμήματος ΑΠ η οποία τέμνει την εφαπτόμενη στο σημείο Ν. Το σημείο Ν είναι το κέντρο ενός ορθογωνίου κύκλου προς τον κύκλο γ που διέρχεται από τα Α και Π.

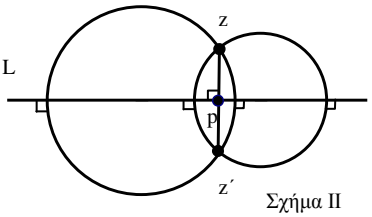


Έχουμε αναφερθεί διεξοδικά στην αναλογία μεταξύ αντιστροφής ως προς έναν κύκλο Κ και ανάκλασης ως προς ευθεία L. Η αναλογία αυτή, την οποία έχουμε προσεγγίσει από διαφορετική οπτική γωνία σε άλλα σημεία της εργασίας, βαθαίνει από την στιγμή που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ίδια κατασκευή με την αντιστροφή για να πάρουμε την εικόνα $z' = \Re_L(z)$ του z ως προς την ανάκλαση $\Re_L$.Όπως είπαμε και πιο πριν για να βρούμε το αντίστροφο Π΄ ενός σημείου Π κατασκευάζουμε δύο κύκλους οι οποίοι είναι ορθογώνιοι προς τον κύκλο αντιστροφής και διέρχονται και οι δύο από το σημείο Π. Το δεύτερο σημείο τομής Π΄ των δύο αυτών κύκλων είναι το αντίστροφο σημείο του σημείου Π.

Η ίδια κατασκευή γίνεται και για την εύρεση του συμμετρικού z΄ ενός σημείου z κατά την ανάκλασή του ως προς μια ευθεία L (σχήμα ΙΙ).



Σχήμα Ι



Σχήμα ΙΙ

Όπως δείχνει το σχήμα I, το τμήμα της L στην γειτονιά του σημείου p, μπορεί να προσεγγιστεί από ένα τόξο ενός πολύ μεγάλου κύκλου, που εφάπτεται στην ευθεία L στο σημείο της p.

Το σημείο $z' = I_{\mathrm{K}}(z)$ είναι η εικόνα μέσω της αντιστροφής ως προς τον κύκλο K του σημείου z. Όπως μπορούμε να δούμε δεν υπάρχει στην πραγματικότητα διαφορά μεταξύ των δύο σχημάτων. Καθώς η ακτίνα του κύκλου K τείνει στο άπειρο η αντιστροφή ως προς τον κύκλο K γίνεται ανάκλαση ως προς την ευθεία L. Πιο συγκεκριμένα ο λόγος [pz]/[pz΄] τείνει στην μονάδα[1] ή ισοδύναμα το [pz΄] γίνεται ίσο με το [pz] (το σύμβολο [pz] όπως έχουμε αναφέρει και αλλού είναι η απόσταση $|p\text{-}z|$ των μιγαδικών αριθμών p,z). Μπορούμε επίσης να ελέγξουμε το αποτέλεσμα και αλγεβρικά. Πρώτα απ' όλα θα παρατηρήσουμε ότι είναι αρκετό το να αποδείξουμε το ζητούμενο για μια ευθεία και ένα σημείο πάνω σε αυτήν. Ας επιλέξουμε ως εκ τούτου η ευθεία L να είναι ο πραγματικός άξονας και το σημείο p να είναι η αρχή των αξόνων.

Άρα ο κύκλος K ακτίνας R και κέντρου q=iR είναι εφαπτόμενος στην ευθεία L στο σημείο p.

Χρησιμοποιώντας τον τύπο: $I_{\mathrm{K}}(z) = \dfrac{q\bar{z} + \left(R^2 - |q|^2\right)}{\bar{z} - \bar{q}}$ έχουμε:

$$I_{\mathrm{K}}(z) = \frac{q\bar{z} + (R^2 - |q|^2)}{\bar{z} - \bar{q}} = \frac{q\bar{z} + (R^2 - R^2)}{\bar{z} - \overline{iR}} = \frac{q\bar{z}}{\bar{z} - \overline{iR}} = \frac{q\bar{z}}{\bar{z} + iR} = \frac{\bar{z}}{\dfrac{z}{q} + \dfrac{iR}{q}} = \frac{\bar{z}}{\dfrac{\bar{z}}{iR} + 1} = \frac{\bar{z}}{-\dfrac{i\bar{z}}{R} + 1}$$

Έτσι όταν το R τείνει στο άπειρο βρίσκουμε ότι $I_{\mathrm{K}}(z)$ είναι τελικά ίσο με το $\Re_{\mathrm{L}}(z) = \bar{z}$ πράγμα που θέλαμε να δείξουμε.

Επίσης ένας άλλος τρόπος για να κάνουμε την απόδειξη είναι και ο εξής

Αντί να μεγαλώνουμε όλο και περισσότερο την ακτίνα ας θεωρήσουμε ότι ο μιγαδικός αριθμός z κινείται όλο και πλησιέστερα προς ένα τυχαίο σημείο P το οποίο βρίσκεται σε έναν κύκλο K συγκεκριμένης ακτίνας. Καθώς το z προσεγγίζει το P από οποιαδήποτε κατεύθυνση, τότε η $I_{\mathrm{K}}(z)$ γίνεται τελικά ίση με την $\Re_{\mathrm{T}}(z)$, όπου T είναι η εφαπτομένη στον K στο σημείο του p.

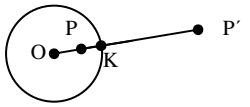
Το ίδιο αποτέλεσμα πάλι μπορούμε να πάρουμε αλγεβρικά χρησιμοποιώντας την εξίσωση: $I_{\mathrm{K}}(z) = \dfrac{\bar{z}}{-\dfrac{i\bar{z}}{R} + 1}$ Επειδή $|z| < R$ τότε ο τύπος $I_{\mathrm{K}}(z) = \dfrac{\bar{z}}{-\dfrac{i\bar{z}}{R} + 1}$ παριστάνει το άθροισμα απείρων όρων μιας γεωμετρικής προόδου της οποίας ο λόγος $\lambda = \dfrac{i\bar{z}}{R} \Rightarrow |\lambda| = \left|\dfrac{i\bar{z}}{R}\right| = \dfrac{|z|}{R} < 1$

Έτσι $I_K(z) = \bar{z} + \dfrac{i\bar{z}^2}{R} - \dfrac{i\bar{z}^3}{R^2} + \ldots$

Οπότε αν το z πλησιάζει το σημείο p=0 το $|\bar{z} - p| = |z - p| = |z|$ πλησιάζει στο μηδέν όποτε $I_{\mathrm{K}}(z)$ είναι τελικά ίσο με το $\Re_{\mathrm{L}}(z) = \bar{z}$ που είναι ανάκλαση ως προς την εφαπτομένη στον κύκλο K στο σημείο του p.

---

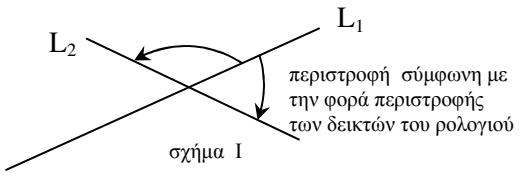
[1] P και P΄ αντίστροφα σημεία άρα OP·OP΄=ρ^2 , OP=ρ-PK και OP΄=ρ+KP΄



(ρ-PK)(ρ+KP΄)=ρ^2⇒…⇒ $\dfrac{1}{\rho} = \left(\dfrac{1}{PK} - \dfrac{1}{P'K}\right)$ αν ρ→∞ τότε PK-P΄K→0⇒

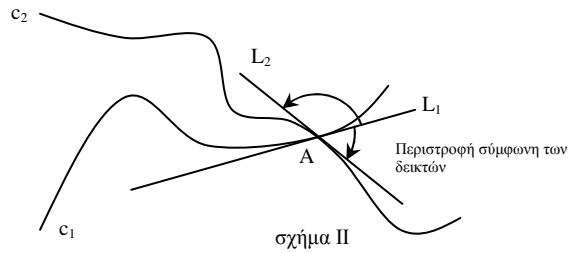
⇒ PK/P΄K→1

Διατήρηση των γωνιών



σχήμα I

Θα ξεκινήσουμε την συγκεκριμένη ενότητα σχολιάζοντας τι εννοούμε με τον όρο διατήρηση των γωνιών. Στην περίπτωση δύο τεμνόμενων ευθειών L_1 και L_2 (σχήμα I) υπάρχουν δύο τρόποι με τους οποίους μπορούμε να μετρήσουμε την γωνία από την L_1 προς στην L_2. Μπορούμε να μετρήσουμε σύμφωνα με την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, μπορούμε όμως να μετρήσουμε και αντίστροφα από την φορά περιστροφής των δεικτών. Στη περίπτωση δύο τεμνόμενων καμπυλών καθορίζουμε την γωνία ανάμεσα στις καμπύλες αυτές σε ένα κοινό τους σημείο, χρησιμοποιώντας τις εφαπτόμενές τους ευθείες στο σημείο αυτό. Έστω δύο καμπύλες c_1 και c_2 που τέμνονται σε ένα σημείο Α. Με δεδομένο ότι αυτές οι καμπύλες *είναι επαρκώς λείες* στο Α, τότε όπως έχουμε σχεδιάσει και στο σχήμα ΙΙ, μπορούμε να φέρουμε τις εφαπτόμενές τους στο σημείο αυτό.



σχήμα ΙΙ

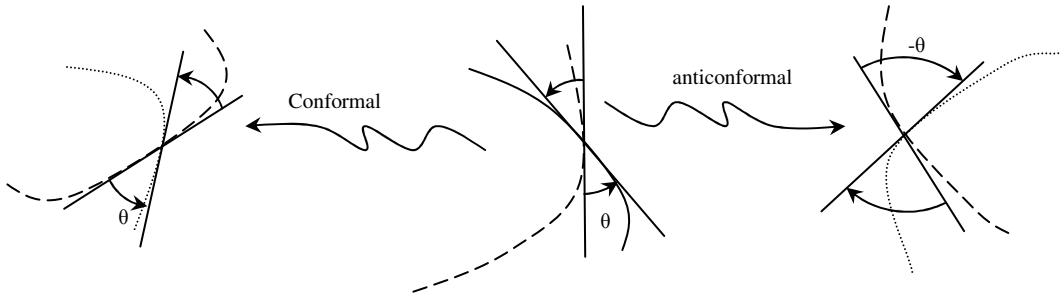
Ορισμός:
Έστω δύο καμπύλες που τέμνονται στο σημείο Α. Έστω επίσης ότι οι εφαπτόμενες ευθείες των καμπυλών αυτών στο Α είναι οι L_1 και L_2 αντίστοιχα (σχήμα ΙΙ). Ορίζουμε ως γωνία μεταξύ των c_1 και c_2 στο σημείο Α την οξεία γωνία θ που σχηματίζεται <u>από την</u> εφαπτομένη L_1 <u>προς την</u> εφαπτομένη L_2. Θα δεχόμαστε ως θετική, τη γωνία που διαγράφεται με φορά αντίθετη της φοράς περιστροφής των δεικτών του ρολογιού. Η γωνία μεταξύ των c_1 και c_2, την οποία ας συμβολίσουμε με θ είναι αντίθετη από την γωνία μεταξύ των c_2 και c_1 η οποία είναι η –θ.

Αν εφαρμόσουμε έναν μετασχηματισμό τέτοιο ώστε οι αντίστοιχες εικόνες Σ_1 και Σ_2, των καμπυλών *c_1 και c_2*, να είναι λείες τότε θα υπάρχουν οι εφαπτόμενες ευθείες στην εικόνα Α΄ του Α οπότε η γωνία μεταξύ των καμπυλών- εικόνων Σ_1 και Σ_2 θα είναι καλά ορισμένη.

Αν η γωνία μεταξύ των εικόνων των καμπυλών στο σημείο Α΄ το οποίο είναι η εικόνα του Α είναι η ίδια με την γωνία μεταξύ των αρχικών καμπυλών στο σημείο Α τότε λέμε ότι ο μετασχηματισμός διατηρεί την γωνία στο Α.

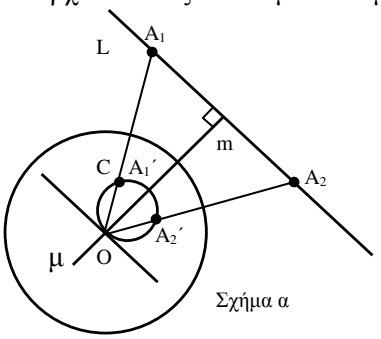
Είναι αρκετά πιθανό ότι ο μετασχηματισμός διατηρεί την γωνία μεταξύ δύο καμπυλών c_1 και c_2 σε ένα κοινό σημείο τους Α, αλλά όχι και την γωνία μεταξύ δύο οποιονδήποτε καμπυλών, στο Α. Όταν ένας μετασχηματισμός διατηρεί την γωνία μεταξύ δύο καμπυλών για κάθε ζεύγος καμπυλών που διέρχεται από το σημείο Α τότε θα λέμε ότι ο μετασχηματισμός είναι σύμμορφος (conformal) στο σημείο Α. Αυτό που πρέπει να διευκρινίσουμε εδώ είναι το εξής: όταν λέμε ότι ένας μετασχηματισμός είναι σύμμορφος σε ένα σημείο θεωρούμε ότι διατηρείται <u>και το μέγεθος και το πρόσημο</u> της γωνίας σε αυτό το σημείο. Αν αντίθετα κάθε γωνία στο σημείο Α απεικονίζεται μέσω του μετασχηματισμού σε κάποια γωνία ίσου μεγέθους αλλά αντίθετου πρόσημου τότε λέμε ότι η απεικόνιση είναι αντισύμμορφη (anticonformal) στο σημείο Α. Αν ο μετασχηματισμός είναι σύμμορφος σε κάθε σημείο της περιοχής στην οποία είναι ορισμένος τότε ονομάζουμε αυτόν τον μετασχηματισμό σύμμορφή απεικόνιση. Αν αντίθετα είναι αντισύμμορφη απεικόνιση σε κάθε σημείο της περιοχής στην οποία ορίζεται τότε θα λέμε ότι είναι αντισύμμορφος μετασχηματισμός. Τέλος σε περίπτωση που γνωρίζουμε ότι η απεικόνιση διατηρεί το μέγεθος των γωνιών αλλά δεν είμαστε σίγουροι αν διατηρεί το πρόσημο ή όχι τότε ονομάζουμε αυτόν τον μετασχηματισμό ισογώνιο μετασχηματισμό. Είναι εύκολο να δούμε μερικά παραδείγματα συγκεκριμένων μετασχηματισμών οι οποίοι είναι σύμμορφοι ή αντισύμμορφοι μετασχηματισμοί. Για παράδειγμα η μεταφορά $z \to (z + c)$ είναι σύμμορφος μετασχηματισμός. Επίσης σύμμορφοι μετασχηματισμοί είναι και οι μετασχηματισμοί της μορφής $z \to az$ (στροφή και ομοιοθεσία ως προς την αρχή του επιπέδου). Από την άλλη μεριά υπάρχουν μετασχηματισμοί όπως ο

$z \to \bar{z}$ αλλά και κάθε ανάκλαση ως προς ευθεία που είναι αντισύμμορφοι μετασχηματισμοί. Η αναλογία μεταξύ ανάκλασης ως προς κύκλο και αντιστροφής ως προς ευθεία γίνεται τώρα μεγαλύτερη διότι και η αντιστροφή ως προς κύκλο όπως θα δούμε στην αμέσως επόμενη παράγραφο είναι ένας anticonformal μετασχηματισμός.



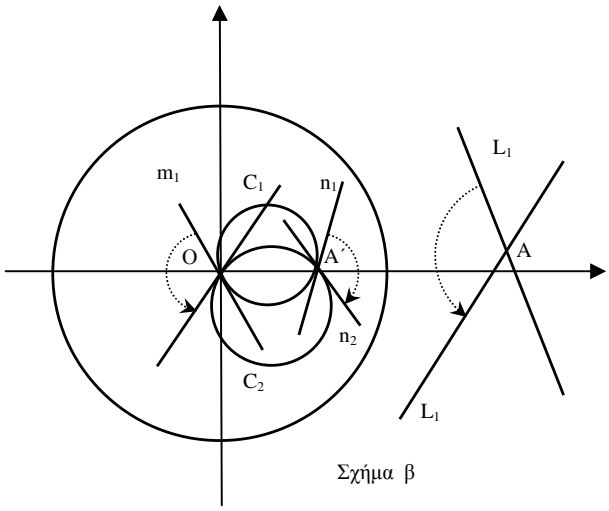
Ας δούμε λοιπόν πως επιδρά στις γωνίες η αντιστροφή.

Αρχικά θα εξετάσουμε τι συμβαίνει σε μια ευθεία L με την αντιστροφή ως προς κύκλο (O) (σχήμα α). Γνωρίζουμε ότι η L απεικονίζεται σε έναν κύκλο C που διέρχεται από το O από τον οποίο έχουμε αφαιρέσει το O (διατρυπημένος στο O-punctured at O). Επιπλέον μπορούμε να πούμε ότι αν m είναι η ευθεία που διέρχεται από το O και είναι κάθετη στην L τότε η L είναι συμμετρική ως προς την m οπότε και ο κύκλος C είναι συμμετρικός ως προς την m (πράγματι αν πάρουμε δύο σημεία A_1 και A_2 της ευθείας L συμμετρικά ως προς την m και έστω A_1' και A_2' τα αντίστροφα τους σημεία ως προς τον κύκλο (O). Οι ημιευθείες OA_1 και OA_2 είναι συμμετρικές ως προς την m. Επειδή $OA_1=OA_2$ θα είναι και $OA_1'=OA_2'$ οπότε τα A_1' και A_2' θα και αυτά συμμετρικά ως προς την m). Άρα η L είναι παράλληλη στην εφαπτόμενη μ του C στο O.



Σχήμα α

Έχουμε λοιπόν το κάτωθι λήμμα:
(λήμμα συμμετρίας)
Αν L είναι μια ευθεία που δεν περνάει από το O τότε, μέσω αντιστροφής ως προς κύκλο που έχει κέντρο το O, η L απεικονίζεται στον κύκλο C που διέρχεται από το O (punctured) και η εφαπτόμενη του C στο O είναι παράλληλή προς την L.

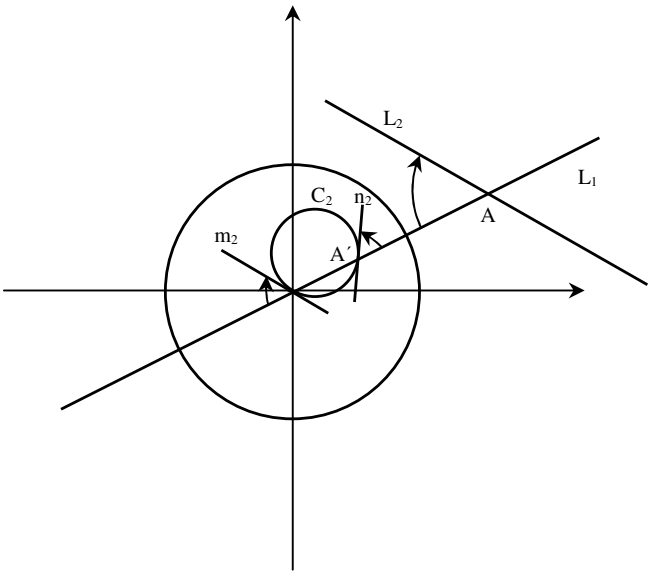


Σχήμα β

Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει στην γωνία μεταξύ δύο ευθειών L_1 και L_2 οι οποίες τέμνονται σε κάποιο σημείο A διαφορετικό από το O, όπως βλέπουμε στο σχήμα β . Προς το παρόν ας υποθέσουμε ότι καμία από τις ευθείες L_1 και L_2 δεν διέρχεται από το κέντρο O, οπότε μέσω της αντιστροφής ως προς κύκλο κέντρου O, αυτές οι ευθείες απεικονίζονται στους κύκλους C_1 και C_2 οι οποίοι διέρχονται από το O. Αυτοί οι κύκλοι τέμνονται στο A΄ το οποίο είναι εικόνα του A. Το ζητούμενο είναι σύγκριση της γωνίας A που σχηματίζουν οι L_1 και L_2 (με φορά διαγραφής της γωνίας αυτής από την ευθεία L_1 προς την L_2) με την γωνία A΄ που σχηματίζουν οι κύκλοι C_1 και C_2 (με φορά διαγραφής της γωνίας αυτής από τον κύκλο C_1 προς τον C_2). Αυτό που θα κάνουμε είναι να συγκρίνουμε τις δύο γωνίες A και A΄ με την γωνία O που σχηματίζουν οι κύκλοι C_1 και C_2 (με φορά διαγραφής της γωνίας O από τον κύκλο C_1 προς τον C_2). Από το προηγούμενο λήμμα προκύπτει ότι η L_1 είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη m_1 του C_1 στο σημείο O και η L_2 είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη m_2 του C_2 στο σημείο O.

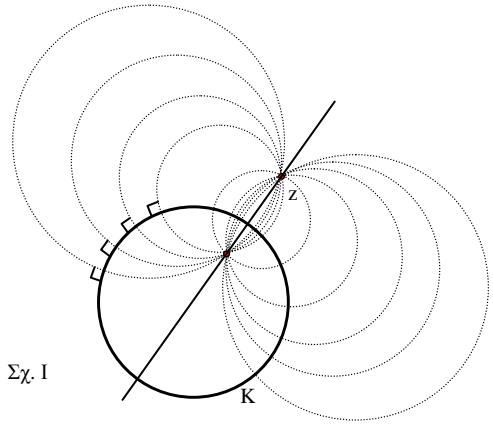
Άρα η γωνία που σχηματίζουν οι L_1 και L_2 με φορά διαγραφής από την ευθεία L_1 προς την ευθεία L_2 πρέπει να είναι ίση σε μέγεθος και προσανατολισμό προς την γωνία που σχηματίζουν οι m_1 και m_2 με φορά διαγραφής από την m_1 προς την m_2.
Ακολούθως παρατηρούμε ότι η ανάκλαση ως προς την ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα των κύκλων C_1 και C_2 αντιστοιχίζει τις εφαπτόμενες m_1 και m_2 στο Ο στις εφαπτόμενες n_1 και n_2 στο Α΄. Αφού η ανάκλαση διατηρεί το μέγεθος της γωνίας αλλά αλλάζει τον προσανατολισμό, αυτό που συμπεραίνουμε είναι ότι η γωνία που διαγράφεται με φορά διαγραφής από την n_1 προς την n_2 στο Α΄ πρέπει να είναι ίση σε μέγεθος αλλά με αντίθετο προσανατολισμό σε σχέση με την ευθεία m_1 προς την m_2 στο Ο.

Έτσι έχουμε το θεώρημα (θεώρημα της γωνίας):
Μια αντιστροφή ως προς κύκλο διατηρεί το μέγεθος των γωνιών αλλά αντιστρέφει τον προσανατολισμό.
Μένει να αποδείξουμε τώρα το θεώρημα στην περίπτωση που μια από τις ευθείες διέρχεται από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής.
Σε αυτήν την περίπτωση ακολουθούμε την προηγούμενη απόδειξη μέχρι του σημείου που αυτό είναι εφικτό κάνοντας τις απαραίτητες τροποποιήσεις για την ευθεία η οποία περνάει από το κέντρο Ο του κύκλου αντιστροφής.
Ας θεωρήσουμε ότι η L_1 είναι η ευθεία που περνάει από το Ο και ότι η L_2 συναντάει την L_1 στο σημείο Α. Μέσω της αντιστροφής η L_1-{Ο} απεικονίζεται στον εαυτό της και η L_2 απεικονίζεται σε κάποιον κύκλο C_2 που διέρχεται (punctured) από το Ο. Τότε ο C_2 τέμνει την L_1 στο Ο και σε ένα άλλο σημείο Α΄ το οποίο είναι η εικόνα του Α μέσω της αντιστροφής.



Από το λήμμα της συμμετρίας η L_2 είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη m_2 του κύκλου C_2 στο Ο. Από εδώ προκύπτει ότι η γωνία των L_1 και L_2 με φορά από την L_1 προς την L_2 πρέπει να είναι ίση σε μέγεθος και προσανατολισμό με την γωνία που σχηματίζεται από την L_1 προς την m_2 με κορυφή το Ο.
Κατόπιν θα παρατηρήσουμε ότι η ανάκλαση ως προς την μεσοκάθετη του ΟΑ΄ απεικονίζει την L_1 στον εαυτό της και τον C_2 στον εαυτό του ενώ απεικονίζει την εφαπτομένη m_2 του C_2 στο σημείο Ο στην εφαπτομένη n_2 στο Α΄. Από την στιγμή που η ανάκλαση διατηρεί το μέγεθος μιας γωνίας αλλά αλλάζει τον προσανατολισμό συμπεραίνουμε ότι η γωνία από την L_1 στην n_2 με κορυφή το Α΄ πρέπει να είναι ίση σε μέγεθος αλλά αντίθετου προσανατολισμού με την γωνία που έχει φορά διαγραφής από την L_1 στην m_2 με κορυφή το Ο.
Συνολικά έχουμε δείξει ότι η γωνία από την L_1 προς τον C_2 με κορυφή το Α΄ πρέπει να είναι ίση σε μέγεθος αλλά αντίθετου προσανατολισμού με την γωνία που διαγράφεται με φορά από τη L_1 στην L_2 και με κορυφή το Α.
Θα δούμε τώρα μια λίγο διαφορετική προσέγγιση στο πρόβλημα της επίδρασης στις γωνίες του μετασχηματισμού της αντιστροφής ως προς κύκλο.
Αν παρατηρήσουμε το σχήμα Ι, θα δούμε ότι αν δοθεί ένα σημείο z το οποίο δεν ανήκει στον κύκλο Κ, υπάρχει ακριβώς ένας κύκλος για κάθε διεύθυνση ο οποίος είναι ορθογώνιος στον Κ ο οποίος διέρχεται από το z .

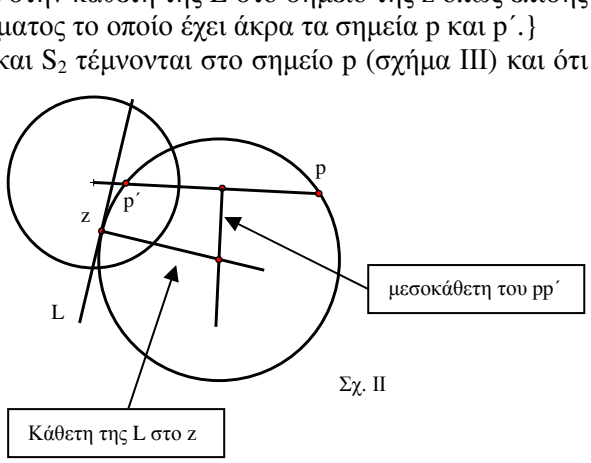
{Πως μπορούμε να κατασκευάσουμε όμως το μοναδικό κύκλο ο οποίος διέρχεται από το z, είναι ορθογώνιος στον κύκλο της αντιστροφής K και εφαπτόμενος σε μια συγκεκριμένη ευθεία L η οποία διέρχεται από το z;



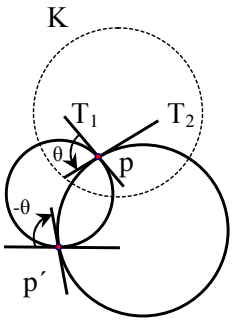
Σχ. I

Πρώτα θα θεωρήσουμε ένα σημείο p (σχήμα II) και θα βρούμε το αντίστροφο σημείο του p΄ ως προς τον κύκλο K και κατόπιν θα βρούμε τον ορθογώνιο κύκλο που αναζητούμε. Γνωρίζουμε ότι κάθε κύκλος ο οποίος διέρχεται από δύο σημεία τα οποία είναι αντίστροφα μεταξύ τους ως προς τον κύκλο K είναι ορθογώνιος ως προς αυτόν. Θα κατασκευάσουμε τον κύκλο που διέρχεται από τα δύο αντίστροφα μεταξύ τους σημεία p και p΄ και εφάπτεται στην ευθεία L στο σημείο της z. Το κέντρο του κύκλου που θέλουμε να κατασκευάσουμε βρίσκεται στην κάθετη της L στο σημείο της z όπως επίσης και στην μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος το οποίο έχει άκρα τα σημεία p και p΄.}

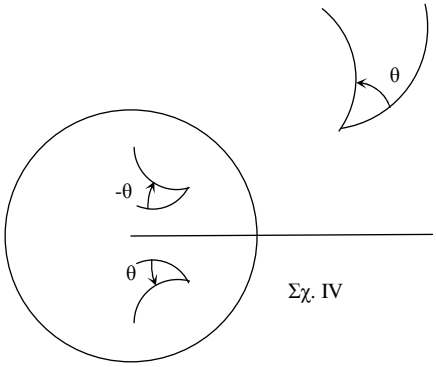
Ας υποθέσουμε τώρα ότι δύο καμπύλες S_1 και S_2 τέμνονται στο σημείο p (σχήμα III) και ότι οι εφαπτόμενές τους στο p είναι οι T_1 και T_2. Η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ τους είναι η θ. Για να βρούμε τι συμβαίνει σε αυτήν την γωνία με την αντιστροφή ως προς κύκλο K ας αντικαταστήσουμε τις S_1 και S_2 με τους μοναδικούς ορθογώνιους κύκλους στον κύκλο K οι οποίοι διέρχονται από το p και έχουν τις ίδιες διευθύνσεις με τις διευθύνσεις των S_1 και S_2 στο p. Δηλαδή κύκλοι οι οποίοι έχουν εφαπτόμενες στο σημείο p τις T_1 και T_2. Αφού η αντιστροφή ως προς K απεικονίζει κάθε έναν από αυτούς τους κύκλους στον εαυτό τους η νέα γωνία στο σημείο $p' = I_K(p)$ είναι η –θ (έχουμε γωνία –θ διότι δύο τεμνόμενοι κύκλοι παρουσιάζουν συμμετρία ως προς την διάκεντρο όμως οι ανακλάσεις αντιστρέφουν τον προσανατολισμό των γωνιών).



Σχ. II



Σχ. III



Σχ. IV

Παρατήρηση :

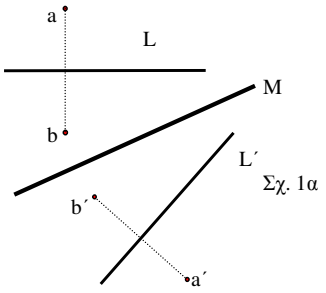
Το σχήμα IV περιγράφει το αποτέλεσμα που έχει ο μετασχηματισμός $z \to \frac{1}{z}$ στις γωνίες.

Επειδή αυτός ο μετασχηματισμός είναι ισοδύναμος με την αντιστροφή ως προς τον μοναδιαίο κύκλο ακολουθούμενη από ανάκλαση ως προς τον πραγματικό άξονα (και οι δύο αυτοί μετασχηματισμοί είναι αντισύμμορφοι) βλέπουμε ότι η σύνθεσή τους αντιστρέφει την φορά της γωνίας δύο φορές έχοντας ως τελικό αποτέλεσμα μια γωνία η οποία είναι ίδια σε μέγεθος και διεύθυνση με την αρχική γωνία.

Έτσι έχουμε το συμπέρασμα ότι η μιγαδική αντιστροφή $z \to \frac{1}{z}$ είναι ένας σύμμορφος μετασχηματισμός. Για τον μετασχηματισμό αυτό θα μιλήσουμε και λίγο πιο κάτω όπου τον προσεγγίζουμε με αρκετή αυστηρότητα.
Η σύνθεση άρτιου αριθμού από ανακλάσεις (ως προς ευθείες ή κύκλους) είναι σύμμορφοι μετασχηματισμοί ενώ η σύνθεση περιττού πλήθους τέτοιων ανακλάσεων είναι αντισύμμορφος μετασχηματισμός.

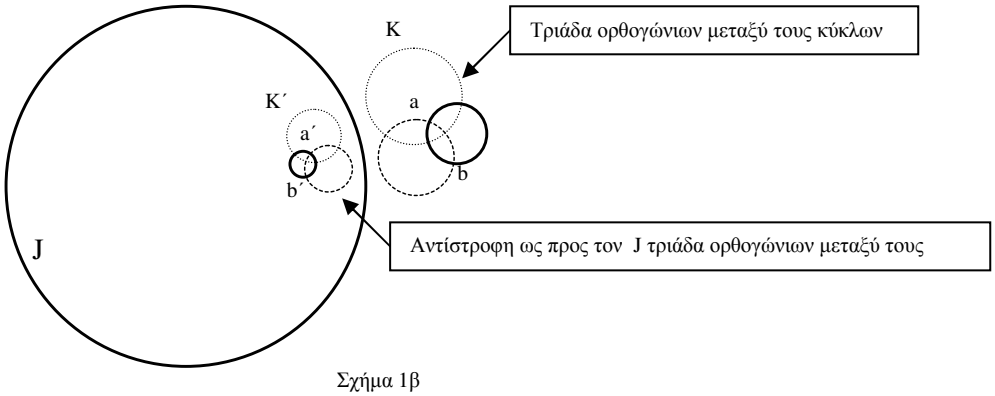
Διατήρηση της συμμετρίας:

Ας θεωρήσουμε το σχήμα 1α στο οποίο έχουμε δύο σημεία a και b τα οποία είναι συμμετρικά ως προς μια ευθεία L. Αν η ανάκλαση ως προς μια ευθεία M απεικονίζει το a στο a΄ το b στο b΄ και την L στην L΄ τότε προφανώς τα σημεία a΄ και b΄ είναι πάλι συμμετρικά ως προς την εικόνα L΄ της L. Ισχύει λοιπόν ότι η ανάκλαση ως προς ευθείες διατηρεί την συμμετρία ως προς ευθείες.
Επίσης η ανάκλαση ως προς κύκλους διατηρεί την συμμετρία ως προς κύκλους.



Σχ. 1α

Αν a και b είναι δύο συμμετρικά σημεία ως προς τον κύκλο K τότε οι εικόνες τους a΄ και b΄ ως προς την αντιστροφή ως προς οποιονδήποτε κύκλο J είναι πάλι συμμετρικά ως προς την εικόνα K΄ του K. Αυτό ισχύει διότι η αντιστροφή απεικονίζει ένα οποιοδήποτε ζεύγος ορθογώνιων μεταξύ τους κύκλων σε ένα άλλο ζεύγος ορθογώνιων μεταξύ τους κύκλων (αφού είναι anticonformal απεικόνιση). Έχοντας κάτι τέτοιο στο μυαλό μας η διατήρηση της συμμετρίας είναι πολύ εύκολο να δειχθεί. Επειδή οι δύο κύκλοι που διέρχονται από τα συμμετρικά σημεία a και b είναι ορθογώνιοι ως προς τον κύκλο K οι εικόνες τους ως προς τον κύκλο J είναι ορθογώνιοι κύκλοι στον κύκλο K' (αφού η αντιστροφή διατηρεί το μέγεθος των γωνιών) και ως εκ τούτου αυτοί τέμνονται σε ένα ζεύγος σημείων τα οποία είναι συμμετρικά ως προς τον κύκλο K'. Αν ένας από τους κύκλους διέρχεται από το κέντρο της αντιστροφής τότε η εικόνα θα είναι μια ευθεία. Αν όμως θεωρήσουμε ότι οι ευθείες είναι απλώς κύκλοι με άπειρη ακτίνα τότε δεν χρειάζεται να σχολιάσουμε αυτήν την περίπτωση σαν ιδιαίτερη περίπτωση.

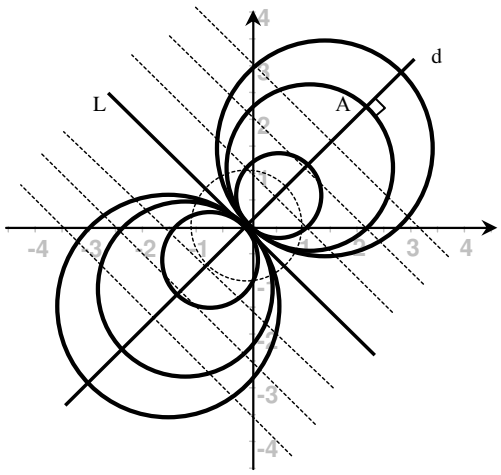


Σχήμα 1β

Παραδείγματα σχετικά με την διατήρηση των γωνιών:

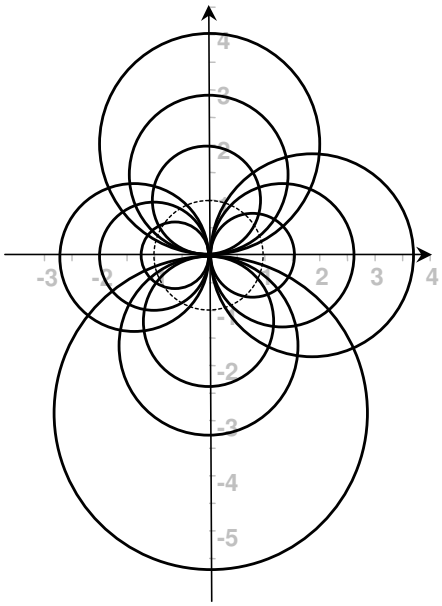
Έστω μια οικογένεια κύκλων που έχει κοινή εφαπτόμενη στο κέντρο O του κύκλου αντιστροφής.
Θα εξετάσουμε το αποτέλεσμα της αντιστροφής ως προς τον κύκλο (O) πάνω στην οικογένεια των κύκλων αυτών.

Ας υποθέσουμε ότι L είναι η κοινή εφαπτομένη των κύκλων όπως δείχνουμε στο αντίστοιχο σχήμα. Αν είναι η d η ευθεία που διέρχεται από το O και είναι κάθετη στην L τότε κάθε ένας από τους κύκλους τέμνει την d κατά ορθή γωνία. Επειδή οι κύκλοι διέρχονται από το O οι εικόνες τους μέσω της αντιστροφής ως προς τον μοναδιαίο κύκλο πρέπει να είναι ευθείες γραμμές οι οποίες μέσω του θεωρήματος της γωνίας πρέπει να τέμνουν την εικόνα της d κατά ορθές γωνίες. Αλλά η d απεικονίζεται στον εαυτό της μέσω της αντιστροφής έτσι οι κύκλοι απεικονίζονται στην οικογένεια των παραλλήλων ευθειών των κάθετων στην d.

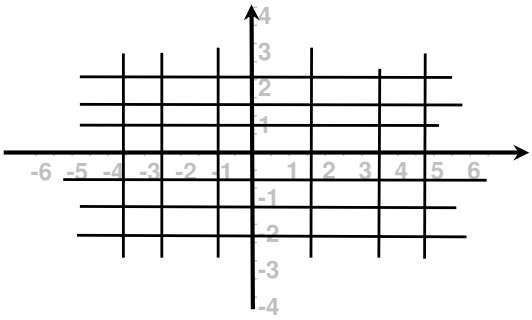


Αν εξαιρέσουμε την L κάθε ευθεία κάθετη στην d πρέπει να είναι η εικόνα ενός κύκλου που διέρχεται από το O γιατί αν μια κάθετη ευθεία τέμνει την d σε κάποιο σημείο A΄ τότε αυτή πρέπει να είναι η εικόνα ενός κύκλου που διέρχεται από το O ο οποίος περνάει από το σημείο A το οποίο απεικονίζεται στο A΄ μέσω της αντιστροφής.

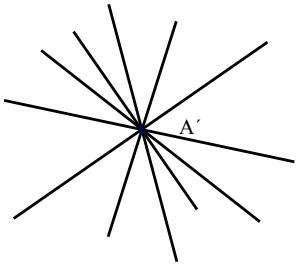
Μια οικογένεια κύκλων εφάπτεται στον x-άξονα στο O και μια δεύτερη οικογένεια εφάπτεται στο y-άξονα στο O. Περιγράψτε το αποτέλεσμα της αντιστροφής των δύο αυτών οικογενειών μέσω αντιστροφής ως προς τον μοναδιαίο κύκλο.

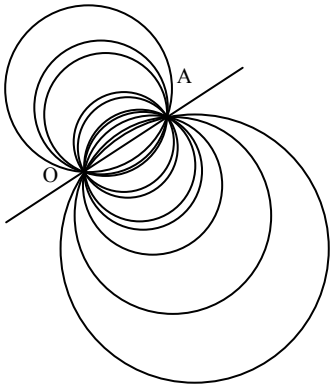


Από το προηγούμενο παράδειγμα η εικόνα μέσω αντιστροφής για κάθε κύκλο που διέρχεται από το O και εφάπτεται στον x-άξονα είναι μια ευθεία παράλληλη στον x-άξονα. Παρομοίως οι κύκλοι που διέρχονται από το O και εφάπτονται στον y-άξονα απεικονίζονται σε ευθείες παράλληλες προς τον y-άξονα. Το σχήμα που έχουμε κατασκευάσει πιο κάτω εικονίζει τις ευθείες αυτές.

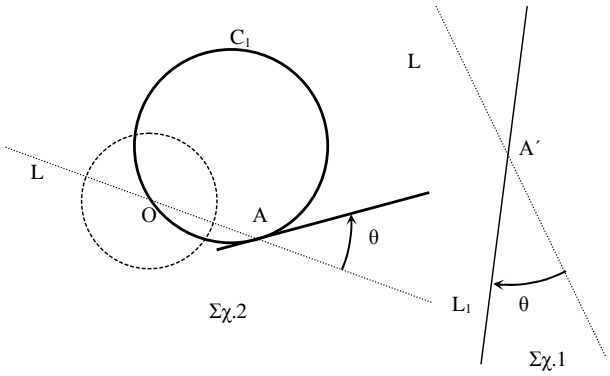


Μια οικογένεια κύκλων τέμνονται στην αρχή των αξόνων O και σε κάποιο άλλο σημείο A. Περιγράψτε την επίδραση της αντιστροφής ως προς τον μοναδιαίο κύκλο (O,1) στην οικογένεια αυτών των κύκλων.



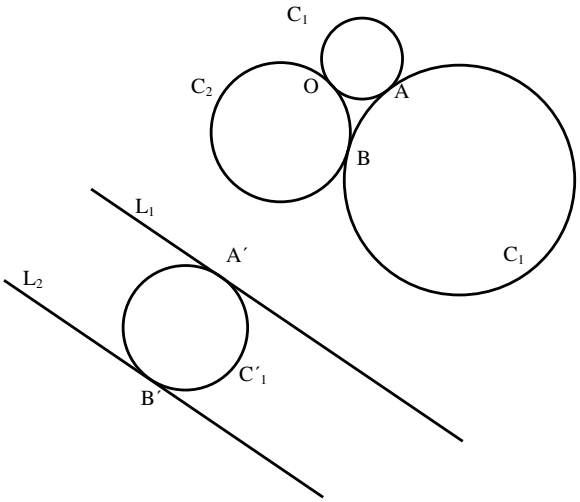


Ας θέσουμε L την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία O και A. Μέσω της αντιστροφής ως προς τον μοναδιαίο κύκλο η L-{O}απεικονίζεται στον εαυτό της. Πιο συγκεκριμένα το σημείο A πάνω στην L απεικονίζεται σε κάποιο σημείο A΄ πάνω στην L. Επειδή όλοι οι κύκλοι διέρχονται από το A και από το O (εξαιρείται το O από την αντιστροφή) οι εικόνες τους μέσω αντιστροφής πρέπει να είναι ευθείες που τέμνονται στο A΄



Με εξαίρεση την L κάθε ευθεία που διέρχεται από το A΄ (σχ.1) πρέπει να είναι η εικόνα ενός από τους κύκλους της οικογένειας διότι αν μια ευθεία L_1 σχηματίζει γωνία θ με την L τότε πρέπει να είναι εικόνα ενός κύκλου C1 που διέρχεται από το O και από το A ο οποίος σχηματίζει γωνία -θ με την L (σχ.2).

Ας θεωρήσουμε ότι οι C_1 ,C_2 ,C_3 είναι κύκλοι στο επίπεδο τέτοιοι ώστε οι C_1 και C_2 εφάπτονται στο O (το O είναι η αρχή- origin), οι C_3 και C_1 εφάπτονται σε ένα άλλο σημείο A και οι C_2 και C_3 εφάπτονται σε ένα τρίτο σημείο B. Περιγράψτε το αποτέλεσμα την αντιστροφής των κύκλων C_1 και C_2 καθώς και του C_3 ως προς τον μοναδιαίο κύκλο (O,1).



Οι κύκλοι C_1 και C_2 διέρχονται από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής οπότε οι εικόνες τους μέσω αντιστροφής ως προς τον μοναδιαίο κύκλο είναι δύο παράλληλες ευθείες L_1 και L_2. Ακολούθως παρατηρούμε ότι η κοινή εφαπτομένη ευθεία στους C_1 και C_2 στο σημείο O απεικονίζεται στον εαυτό της. Αφού αυτή η εφαπτομένη και οι κύκλοι C_1 και C_2 έχουν κοινό σημείο μόνο το O άρα οι εικόνες τους δεν έχουν κοινό σημείο, δηλαδή οι L_1 και L_2 είναι ευθείες παράλληλες στην εφαπτομένη αυτή. Ας υποθέσουμε ότι τα σημεία A και B έχουν εικόνες τα σημεία A΄ και B΄ αντίστοιχα μέσω της αντιστροφής. Τότε ο κύκλος C_3 έχει εικόνα έναν κύκλο ο οποίος διέρχεται από τα A΄ και B΄ αφού τα σημεία A και B ανήκουν στον κύκλο C_3. Επειδή οι γωνίες διατηρούνται (σε μέγεθος) με την αντιστροφή τότε οι εικόνες εφαπτόμενων μεταξύ τους καμπυλών (οι οποίες μπορούν να θεωρηθούν ως τεμνόμενες ευθείες με γωνία τομής μηδενική) είναι επίσης εφαπτόμενες μεταξύ τους καμπύλες. Άρα ο κύκλος C'_3 πρέπει να είναι εφαπτόμενος της L_1 στο A΄ και της L_2 στο B΄.

Τα απλά αυτά προβλήματα που παρουσιάσαμε πιο πάνω έχουν βασικό στόχο να δείξουν ότι αν πάρουμε κατάλληλο κέντρο αντιστροφής μπορούμε να μετασχηματίσουμε κάποιους από τους κύκλους του σχήματος σε ευθείες. Επειδή είναι πιο εύκολο να επεξεργαστούμε ευθείες παρά κύκλους μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε σχήματα που έχουν μετασχηματιστεί κατά τέτοιο τρόπο μέσω αντιστροφής ώστε κάποιοι κύκλοι να έχουν γίνει ευθείες, για να μελετήσουμε εκείνες τις ιδιότητες των σχημάτων που μένουν αναλλοίωτες ως προς την αντιστροφή.

Αντιστροφή, γραμμικές συναρτήσεις, μιγαδική αντιστροφή.

Ορισμός:

Μια γραμμική συνάρτηση (linear function) είναι μια συνάρτηση που έχει τύπο :
$t(z) = az + b \quad (z \in \mathbb{C}) \quad$ με $\quad a, b \in \mathbb{C} \quad$ και $\quad a \neq 0$

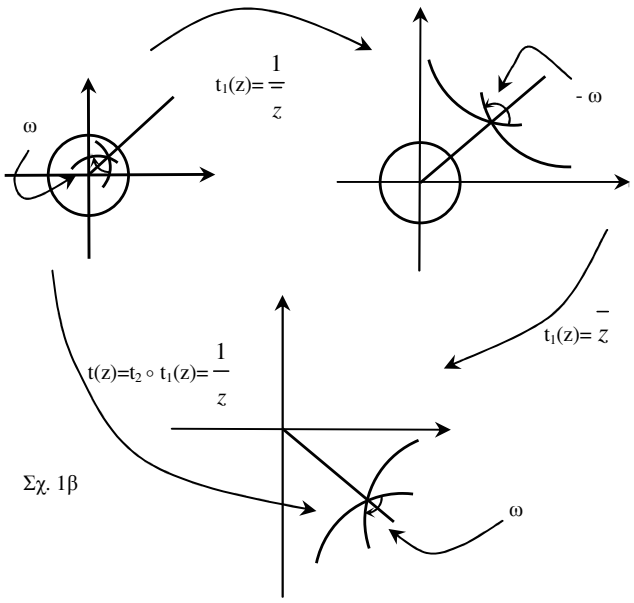
Κάθε γραμμική συνάρτηση $t(z) = az + b$ μπορεί να γραφεί ως σύνθεση $t_2 \circ t_1$ δύο συναρτήσεων όπου t_1 είναι η ομοιοθεσία $t_1 = |a|\, z$ και t_2 είναι η ισομετρία $t_2(z) = (\frac{a}{|a|})z + b$

Η γεωμετρική ερμηνεία της γραμμικής συνάρτησης t εξαρτάται από το πώς διαλέγουμε να ερμηνεύσουμε την ισομετρία t_2.

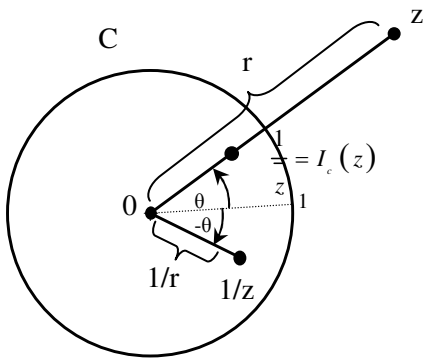
Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι η γραμμική συνάρτηση είναι μια ομοιοθεσία με συντελεστή $|a|$ ακολουθούμενη από μια στροφή ως προς την γωνία $Arg(\frac{a}{|a|})$, η οποία ακολουθείται από μια μεταφορά ως προς το διάνυσμα (Re(b),Im(b)).

Εναλλακτικά μπορούμε να πούμε ότι η γραμμική συνάρτηση είναι η σύνθεση μιας ομοιοθεσίας και ενός αριθμού από ανακλάσεις.

Είτε με τον ένα είτε με τον άλλο τρόπο μπορούμε να πούμε πως επειδή τόσο οι ομοιοθεσίες όσο και οι ισομετρίες διατηρούν τις γωνίες και απεικονίζουν κύκλους και ευθείες σε κύκλους και ευθείες άρα το ίδιο πρέπει να συμβαίνει και για όλες τις γραμμικές συναρτήσεις.



Σχ. 1β



Σχ. 1α

Ορισμός:

Η συνάρτηση του αντιστρόφου (reciprocal function) ή μιγαδική αντιστροφή (complex inversion) ορίζεται από τον τύπο : $t(z) = \frac{1}{z} \quad (z \in \mathbb{C} - \{0\})$

Είναι ο μετασχηματισμός κλειδί για την κατανόηση των μετασχηματισμών Möbius.

Η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z = re^{i\theta}$ μέσω του μετασχηματισμού της μιγαδικής αντιστροφής είναι $\frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$ (Σχ.1α). Το μέτρο του μιγαδικού που προκύπτει είναι ο αντίστροφος αριθμός του αρχικού μέτρου και η καινούργια γωνία είναι η αντίθετη της αρχικής γωνίας.

Έστω ένας μιγαδικός αριθμός z οποίος βρίσκεται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο. Έχουμε σε τέτοια περίπτωση: $z = e^{i\theta}$ οπότε ο αντίστροφος μιγαδικός αριθμός είναι ο $\frac{1}{z} = e^{-i\theta}$ που είναι ένας μιγαδικός αριθμός που βρίσκεται επίσης στον μοναδιαίο κύκλο. Μπορούμε να συμπεράνουμε εύκολα ότι κάθε μιγαδικός αριθμός που βρίσκεται στο εσωτερικό του

μοναδιαίου κύκλου απεικονίζεται στο εξωτερικό του και αντιστρόφως κάθε μιγαδικός που βρίσκεται στο εξωτερικό του κύκλου αυτού απεικονίζεται στο εσωτερικό του ενώ κάθε μιγαδικός που βρίσκεται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο απεικονίζεται επίσης πάνω στον μοναδιαίο κύκλο.

Η $t(z)=\frac{1}{z}$ $(z\in\mathbb{C}-\{0\})$ μπορεί να ειδωθεί και ως σύνθεση $t_2\circ t_1$ των συναρτήσεων t_2, t_1 όπου t_1 είναι η $t_1(z)=\frac{1}{\bar{z}}$ και t_2 είναι η συζυγής συνάρτηση $t_2(z)=\bar{z}$. Έτσι έχουμε ότι η συνάρτηση $t(z)=\frac{1}{z}$ $(z\in\mathbb{C}-\{0\})$ γεωμετρικά μεταφράζεται ως μια αντιστροφή ως προς τον μοναδιαίο κύκλο, η οποία ακολουθείται από μια ανάκλαση ως προς τον πραγματικό άξονα όπως δείχνουμε στα σχήματα 1α και 1β.

Στο σχήμα 1α μπορεί κάποιος να δεί πιο καθαρά την σύνθεση της μιγαδικής αντιστροφής σε δύο στάδια:

1.Απεικονίζουμε τον $z=re^{i\theta}$ στο σημείο το οποίο έχει την ίδια διεύθυνση με το z και μέτρο τον αντίστροφο του r (δηλαδή τον $\frac{1}{r}$). Με άλλα λόγια απεικονίζουμε τον αριθμό $z=re^{i\theta}$ στον αριθμό $\frac{1}{\bar{z}}=\frac{1}{r}e^{i\theta}$

2. Εφαρμόζουμε αντιστροφή στον $\frac{1}{\bar{z}}$ οποίος έτσι απεικονίζεται στον $\overline{\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}=\frac{1}{z}$

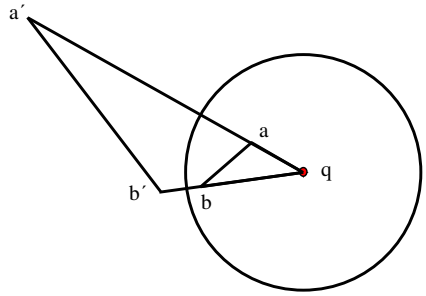
Στο σχήμα 1β βλέπουμε πως εξελίσσεται η ίδια διαδικασία στην περίπτωση δύο σχημάτων που σχηματίζουν γωνία ω μεταξύ τους.

Επειδή η αντιστροφή $t(z)=\frac{r^2}{\overline{z-c}}+c$ (inversion) και η συζυγής $\bar{z}$ (conjugation) είναι και οι δύο, ένα προς ένα συναρτήσεις που διατηρούν το μέγεθος αλλά αντιστρέφουν τον προσανατολισμό, έχουμε ότι η μιγαδική αντιστροφή (reciprocal function) θα είναι ένα προς ένα συνάρτηση η οποία διατηρεί και το μέγεθος και τον προσανατολισμό των γωνιών (Σχ.1β).

Τέλος θα αποδείξουμε μια πολύ σημαντική ιδιότητα της γεωμετρίας της αντιστροφής .

Έστω a,b δύο μιγαδικοί αριθμοί. Θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό [ab] για να συμβολίσουμε την απόσταση $|a-b|$ μεταξύ δύο μιγαδικών a,b.

Έστω λοιπόν δύο τυχαία σημεία a,b και $a'=I_K(a), b'=I_K(b)$ είναι οι εικόνες τους μέσω της αντιστροφής I_K. Από τον ορισμό έχουμε



$[qa][qa']=R^2=[qb][qb']$

άρα $\frac{[qa]}{[qb]}=\frac{[qb']}{[qa']}$

Επειδή έχουμε και την ισότητα των γωνιών $\angle aqb=\angle a'qb'$, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι: τα τρίγωνα aqb και $b'qa'$ είναι όμοια.

Θα βρούμε λοιπόν την σχέση που συνδέει το $[ab]$ και το $[a'b']$ όπου a,b είναι δύο τυχαία σημεία και $a'=I_K(a), b'=I_K(b)$ είναι οι εικόνες τους μέσω της αντιστροφής I_K

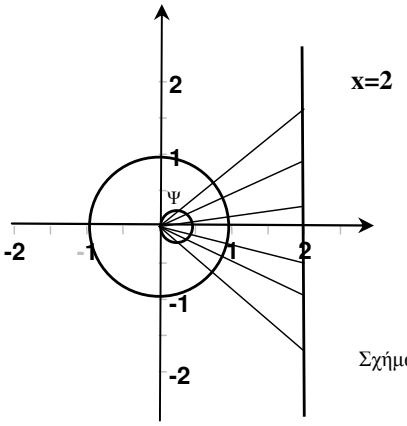
Δείξαμε προηγουμένως τα τρίγωνα aqb και $b'qa'$ είναι όμοια άρα $\frac{[a'b']}{[ab]}=\frac{[qb']}{[qa]}$ (1)

Έχουμε επίσης: $R^2 = [qb][qb'] \Rightarrow [qb'] = \dfrac{R^2}{[qb]}$ (2)

Από (1) και (2) προκύπτει ότι : $[a'b'] = \left(\dfrac{R^2}{[qa][qb]}\right)[ab]$

Το επεκτεταμένο επίπεδο

Μέχρι τώρα έχουμε διαπιστώσει ότι η αντιστροφή (inversion) όταν εφαρμόζεται σε ευθείες και κύκλους είναι αρκετά περίπλοκη αφού πρέπει να αφαιρέσουμε (puncture) την αρχή O (origin) από εκείνες τις ευθείες και τους κύκλους που διέρχονται από την αρχή.
Επίσης η ανάγκη να διαχωρίσουμε τις εικόνες σε αυτές που είναι κύκλοι και σε αυτές που είναι ευθείες κάνει την περιγραφή της αντιστροφής κάπως περίπλοκη.
Μπορούμε να διαπραγματευθούμε τις δύο αυτές δυσκολίες με ένα αρκετά κομψό τρόπο με την πρόσθεση ενός επιπλέον σημείου στο επίπεδο για πάρουμε αυτό που λέμε επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο.
Για να σχηματοποιήσουμε τις ιδέες που περιγράφουμε πιο πάνω ας θεωρήσουμε την ευθεία L με εξίσωση x=2 και ας θυμηθούμε ότι η αντιστροφή ως προς τον μοναδιαίο κύκλο C απεικονίζει την L σε έναν κύκλο C με ακτίνα 1/4 και κέντρο (1/4 ,0) από τον οποίο έχουμε αφαιρέσει ένα σημείο, το κέντρο O.
Το σημείο (2,0) απεικονίζεται στο σημείο (1/2 ,0) το σημείο (2,1) απεικονίζεται στο (2/5,1/5) το (2,2) απεικονίζεται στο (1/4,1/4) το σημείο (2,3) στο (2/13, 3/13) και γενικότερα το σημείο (2,y) απεικονίζεται στο $(2/(4+y^2),y/(4+y^2))$ του κύκλου C.



Σχήμα 1

Καθώς το σημείο (2,y) κινείται "*ξεκινώντας*" από το σημείο(2,0) πάνω στην ευθεία x=2 και με κατεύθυνση "*προς τα πάνω*" δηλαδή με το y να μεγαλώνει συνεχώς η εικόνα της ευθείας αυτής (δηλαδή της x=2) μέσω της αντιστροφής ως προς τον κύκλο C κινείται πάνω στον κύκλο Ψ με φορά αντίθετη της φοράς κίνησης των δεικτών του ρολογιού. Παρομοίως καθώς το σημείο (2,y) κινείται ξεκινώντας από το (2,0) πάνω στην ευθεία x=2 με κατεύθυνση "προς τα κάτω" η εικόνα του μέσω της αντιστροφής ως προς τον κύκλο C κινείται πάνω στον κύκλο Ψ με φορά τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού. Το κενό για τον κύκλο Ψ στο σημείο O προκύπτει διότι δεν υπάρχει σημείο πάνω στην L καθώς και κανένα σημείο στο $\mathbb{R}^2$ το οποίο να αντιστρέφεται στο O.
Για να γεμίσουμε "*το κενό*" προσθέτουμε ένα επιπλέον σημείο (κατ΄ εκδοχήν σημείο) στο επίπεδο: <u>*το σημείο στο άπειρο*</u>. Το σημείο αυτό μπορούμε να το φανταστούμε ως το σημείο εκείνο στο οποίο συναντιόνται τα άκρα της ευθείας x=2 αν φανταστούμε πως η ευθεία αυτή είναι ένας κύκλος άπειρης ακτίνας πού "*κλείνει*" στο άπειρο (επιπλέον σχόλια υπάρχουν λίγο πιο κάτω).
Ορισμοί:
Το επεκτεταμένο επίπεδο είναι η ένωση του ευκλείδειου επιπέδου $\mathbb{R}^2$ και ενός επιπλέον σημείου, *του σημείου στο άπειρο* το οποίο και παριστάνουμε με το σύμβολο ∞. Όταν θέλουμε να θεωρήσουμε το ευκλείδειο επίπεδο ως το μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$, τότε αποκαλούμε το επεκτεταμένο επίπεδο επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο, και το παριστάνουμε με το σύμβολο $\widehat{\mathbb{C}}$ (τα οποίο διαβάζεται ως $\mathbb{C}$ καπέλο) δηλαδή $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
Το επεκτεταμένο επίπεδο και το επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο, αποτελούνται και τα δύο από το συμβατικό επίπεδο στο οποίο έχουμε προσθέσει ένα επιπλέον σημείο το ∞. Μπορούμε να χρησιμοποιούμε και τους δύο όρους εναλλακτικά και κάθε φόρα σε σχέση με το τι θέλουμε να κάνουμε. Όταν θέλουμε να παραστήσουμε τα σημεία του επιπέδου ως ζεύγη πραγματικών αριθμών έχουμε το *επεκτεταμένο επίπεδο* και όποτε θέλουμε να δούμε τα

σημεία του επιπέδου ως μιγαδικούς αριθμούς τότε έχουμε το *επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο*. Το σύμβολο ∞ δε αναπαριστά έναν μιγαδικό αριθμό οπότε δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε αριθμητικές πράξεις μιγαδικών αριθμών. Για παράδειγμα το ∞+3i είναι μια έκφραση που δεν έχει νόημα. Έχοντας επεκτείνει το επίπεδο κατ΄ αυτόν τον τρόπο επεκτείνουμε τώρα τον ορισμό της αντιστροφής ως προς κύκλο με κέντρο το Ο. Αυτό που θα κάνουμε είναι να ορίσουμε ως εικόνα του Ο το ∞ και ως εικόνα του ∞ το Ο. Τα υπόλοιπα σημεία συνεχίζουν να απεικονίζονται με τον τρόπο που έχουμε ήδη περιγράψει.
Με την επέκταση του ορισμού το σημείο Ο αντιστοιχεί στο ∞ και ως εκ΄ τούτου ο κύκλος Ψ του σχήματος 1 αντιστοιχεί τώρα στο σύνολο L∪{∞}. Αυτή η προσθήκη σίγουρα γεμίζει το κενό αλλά πως μπορεί να ερμηνευθεί το σύνολο L∪{∞}; Καθώς το σημείο Α κινείται πάνω στον κύκλο Ψ αντίθετα από τους δείκτες του ωρολογίου προς το σημείο Ο, η εικόνα του Α΄ μέσω της αντιστροφής (inversion) κινείται πάνω στην ευθεία L με κατεύθυνση «*προς τα πάνω*» (σχ.1). Όταν το Α πλησιάζει το Ο το Α΄ πλησιάζει το ∞. Καθώς το Α συνεχίζει πάνω στον Ψ και κάτω από το σημείο Ο, η εικόνα του πάνω στην L έχει κατεύθυνση «*από κάτω προς τα πάνω*». Μπορεί να φανταστεί λοιπόν κανείς το σημείο ∞ ως το σημείο που συνδέει τα δύο άκρα της ευθείας L, και έτσι ένα σημείο να μπορεί να κινείται *γύρω - γύρω* πάνω στην L. Μέσω κάποιας διεύρυνσης της φαντασίας μας μπορούμε λοιπόν να φανταστούμε τη ευθεία L ως έναν κύκλο με άπειρη ακτίνα όπου «το κενό στο άπειρο» έχει συμπληρωθεί με το κατ΄ εκδοχήν σημείο ∞. Μπορούμε λοιπόν να συμπληρώσουμε για κάθε ευθεία L του επιπέδου το «κενό της στο άπειρο» σχηματίζοντας το σύνολο L∪{∞}. Ένα τέτοιο σύνολο καλείται *επεκτεταμένη ευθεία.* Επειδή κάθε επεκτεταμένη ευθεία μπορεί να θεωρηθεί ως ένας κύκλος άπειρης ακτίνας θα δώσουμε τον εξής ορισμό:
Ορισμός: Γενικευμένος κύκλος στο επεκτεταμένο επίπεδο είναι ένα σύνολο σημείων το οποίο είναι είτε ένας κανονικός κύκλος είτε μια επεκτεταμένη ευθεία.

Μέσω αυτού του ορισμού μπορούμε να θεωρούμε μια επεκτεταμένη ευθεία ως έναν γενικευμένο κύκλο ο οποίος διέρχεται από το σημείο στο άπειρο. Επίσης μπορούμε να θεωρούμε ότι μια κανονική ευθεία είναι ένας γενικευμένος κύκλος από τον οποίο έχουμε αφαιρέσει το σημείο στο άπειρο.

Ας θυμηθούμε ότι έχουμε δεχθεί ότι μια αντιστροφή είναι είτε ανάκλαση ως προς μια ευθεία ή αντιστροφή ως προς έναν κύκλο. Μπορούμε τώρα πλέον να θεωρούμε και τις δύο περιπτώσεις ως αντιστροφές ως προς γενικευμένους κύκλους:

Ορισμός:

Ας θεωρήσουμε ότι C είναι ένας γενικευμένος κύκλος στο επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο. Τότε μια αντιστροφή του επεκτεταμένου μιγαδικού επιπέδου ως προς τον γενικευμένο κύκλο C είναι μια συνάρτηση t που ορίζεται με έναν από τους κάτωθι κανόνες:

- Αν C είναι ένας κύκλος με ακτίνα r και κέντρο Ο τότε

$$t(A) = \begin{cases} \text{Το αντίστροφο του A ως προς τον κύκλο C αν } A \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \\ \text{Το σημείο στο άπειρο } \infty \text{ αν A= O (το σημείο O είναι η αρχή)} \\ \text{O αν το A είναι το σημείο στο άπειρο } \infty \end{cases}$$

- Αν C είναι μια επεκτεταμένη ευθεία L∪{∞} τότε :

$$t(A) = \begin{cases} \text{H ανάκλαση του A ως προς την L αν } A \in \mathbb{R}^2 \\ \infty \quad \text{αν } A = \infty \end{cases}$$

Ας σημειωθεί ότι κάθε αντιστροφή (inversion) ως προς μια επεκτεταμένη ευθεία διατηρεί σταθερό το σημείο στο άπειρο. Αντίστροφα κάθε αντιστροφή που σταθεροποιεί το σημείο στο άπειρο είναι αντιστροφή ως προς μια επεκτεταμένη ευθεία.

Ο πιο πάνω ορισμός εγγυάται ότι οι γενικευμένοι κύκλοι απεικονίζονται σε γενικευμένους κύκλους. Πράγματι γνωρίζουμε ότι αυτό αληθεύει αν θεωρήσουμε τους κύκλους χωρίς το σημείο Ο (punctured) αλλά χρειάζεται να εξετάσουμε ακόμα αν το *"κενό"* σε ένα

διατρυπημένο κύκλο (δηλαδή κύκλο από τον οποίο έχουμε αφαιρέσει το σημείο Ο) απεικονίζεται στο αντίστοιχο *"κενό"* της εικόνας. Στη περίπτωση αντιστροφής ως προς κύκλο κέντρου Ο γνωρίζουμε ότι ένας κύκλος ή μια ευθεία χωρίς το σημείο Ο (punctured) απεικονίζονται σε μια ευθεία και αυτό είναι απόλυτα συνεπές με το γεγονός ότι το Ο απεικονίζεται στο ∞. Επίσης μια ευθεία απεικονίζεται σε έναν κύκλο ή ευθεία χωρίς το σημείο Ο (punctured at O) και κάτι τέτοιο είναι επίσης απόλυτα συνεπές με το ότι το ∞ απεικονίζεται στο Ο.

Στην περίπτωση της αντιστροφής ως προς μια επεκτεταμένη ευθεία γνωρίζουμε ότι ευθείες ανακλώνται σε ευθείες πράγμα που είναι συνεπές με το γεγονός ότι το ∞ απεικονίζεται στο ∞.

Κανονικοί κύκλοι δεν αποτελούν πρόβλημα αφού ανακλώνται σε κανονικούς κύκλους.

Ισχύει λοιπόν το επόμενο γενικό συμπέρασμα: Αντιστροφές του επεκτεταμένου επιπέδου απεικονίζουν γενικευμένους κύκλους σε γενικευμένους κύκλους

Μερικές φορές είναι μεγάλη ευκολία να γράφουμε τις αντιστροφές του επεκτεταμένου επιπέδου ως αντιστροφές του $\widehat{\mathbb{C}}$.

Για παράδειγμα μπορούμε να γράψουμε την αντιστροφή του επεκτεταμένου επιπέδου ως προς τον μοναδιαίο κύκλο C με τον τύπο:

$$t(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{z} \text{ αν } z\in\mathbb{C}-\{0\}\\ 0 \text{ αν } z=\infty\\ \infty \text{ αν } z=0\end{cases}$$

Παράδειγμα: Γράψτε κάθε μια από τις ακόλουθες αντιστροφές του επεκτεταμένου επιπέδου ως μετασχηματισμούς του $\widehat{\mathbb{C}}$.

1) Την αντιστροφή ως προς τον κύκλο ακτίνας 2 και με κέντρο το Ο.

2) Την αντιστροφή ως προς τον επεκτεταμένο πραγματικό άξονα.

Η πρώτη αντιστροφή του επεκτεταμένου επιπέδου μπορεί να γραφεί ως εξής:

1)
$$t(z)=\begin{cases}\dfrac{4}{z} \text{ αν } z\in\mathbb{C}-\{0\}\\ \infty \text{ αν z=0}\\ 0 \text{ αν } z=\infty\end{cases}$$

2) Μέσω ανάκλασης ως προς τον πραγματικό άξονα ένα σημείο z του $\mathbb{C}$ απεικονίζεται στο $\bar{z}$ οπότε η αντιστροφή μπορεί να γραφεί:

$$t(z)=\begin{cases}\bar{z} \text{ αν } z\in\mathbb{C}\\ \infty \text{ αν z=}\infty\end{cases}$$

Η αντιστροφή του επεκτεταμένου επιπέδου έτσι όπως τη γράψαμε πιο πάνω (ερώτημα (2)) είναι ιδιαιτέρως σημαντική διότι μας προμηθεύει με ένα φυσικό τρόπο επέκτασης της συζυγούς συνάρτησης (conjugation function) από το $\mathbb{C}$ στο $\widehat{\mathbb{C}}$.

Έχουμε δε τον ανάλογο ορισμό:

Η συνάρτηση $t:\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$ η οποία ορίζεται από τον τύπο: $t(z)=\begin{cases}\bar{z} \text{ αν } z\in\mathbb{C}\\ \infty \text{ αν z=}\infty\end{cases}$

καλείται επεκτεταμένη συζυγής συνάρτηση (extended conjugation function).

Αυτή η συνάρτηση συναντάται πάρα πολύ συχνά. Επειδή έχουμε θέσει το σύμβολο $\overline{z}$ για τον συζυγή του z θα υιοθετήσουμε επίσης την σύμβαση $\overline{\infty} = \infty$

Οι αντιστροφές δεν είναι οι μόνοι μετασχηματισμοί οι οποίοι μπορούν να επεκταθούν στο $\widehat{\mathbb{C}}$. Αντίθετα, οι περισσότεροι μετασχηματισμοί είναι μετασχηματισμοί μπορούν να επεκταθούν στο $\widehat{\mathbb{C}}$.

Ορισμός:

Η συνάρτηση $t : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ η οποία ορίζεται από τον τύπο:

$$t(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{z} \text{ αν } z \in \mathbb{C} - \{0\} \\ 0 \text{ αν } z = \infty \\ \infty \text{ αν } z = 0 \end{cases}$$

καλείται επεκτεταμένη συνάρτηση του αντιστρόφου (extended reciprocal function) ή επεκτεταμένη μιγαδική αντιστροφή (extended complex inversion).

Η συνάρτηση $t : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ η οποία ορίζεται από τον τύπο:

$$t(z) = \begin{cases} az + b \text{ αν } z \in \mathbb{C} \\ \infty \text{ αν z=}\infty \end{cases}$$

Όπου $a, b \in \mathbb{C}$ και $a \neq 0$ καλείται επεκτεταμένη γραμμική συνάρτηση (extended linear function).

Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι η επεκτεταμένη μιγαδική αντιστροφή (extended complex inversion) μπορεί να εκφραστεί ως σύνθεση δύο αντιστροφών (inversions).

Παράδειγμα:

Να βρεθεί η σύνθεση $t = t_1 \circ t_2$ όπου:

t_1 είναι αντιστροφή ως προς τον μοναδιαίο κύκλο C και t_2 είναι η επεκτεταμένη συνάρτηση του συζυγούς (extended conjugation function) (θυμηθείτε ότι έχουμε δεχθεί πως οι ανακλάσεις ως προς ευθεία θεωρούνται επίσης αντιστροφές ως προς γενικευμένο κύκλο).

Λύση:

Επειδή:

$$t_1(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\overline{z}} \text{ αν } z \in \mathbb{C} - \{0\} \\ \infty \text{ αν z=0} \\ 0 \text{ αν } z = \infty \end{cases} \quad \text{και} \quad t_2(z) = \begin{cases} \overline{z} \text{ αν } z \in \mathbb{C} \\ \infty \text{ αν z} = \infty \end{cases}$$

Θα έχουμε:

$t(\infty) = t_2 \circ t_1(\infty) = t_2(0) = 0$

$t(0) = t_2 \circ t_1(0) = t_2(\infty) = \infty$

για τις υπόλοιπες τιμές των $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ έχουμε $t(z) = t_2 \circ t_1(z) = t_2\left(\dfrac{1}{\overline{z}}\right) = \overline{\left(\dfrac{1}{\overline{z}}\right)} = \dfrac{1}{z}$

Πιο κάτω θα περιγράψουμε πως μια επεκτεταμένη γραμμική συνάρτηση (extended linear function) μπορεί να εκφραστεί ως σύνθεση αντιστροφών. Για να γίνει ευκολότερα κατανοητό πως μπορεί να γίνει κάτι τέτοιο θα λύσουμε το ακόλουθο πρόβλημα:

Πρόβλημα:

Να βρεθεί η σύνθεση $t = t_1 \circ t_2$ όπου:

t_1 είναι αντιστροφή ως προς τον μοναδιαίο κύκλο C.

t_2 είναι αντιστροφή ως προς τον κύκλο ακτίνας 2 και κέντρο το O(0,0).

Να δοθεί μια ερμηνεία της σύνθεσης t και να περιγραφεί τι θα μπορούσε να συμβεί αν ο κύκλος με ακτίνα 2 αντικατασταθεί με κύκλο ακτίνας $\sqrt{k}$ και κέντρου O(0,0).
Έστω ότι:

$$t_1(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{\bar{z}} \text{ αν } z\in\mathbb{C}-\{0\}\\ 0 \text{ αν } z=\infty\\ \infty \text{ αν } z=0\end{cases} \qquad \text{και} \qquad t_2(z)=\begin{cases}\dfrac{4}{\bar{z}} \text{ αν } z\in\mathbb{C}-\{0\}\\ 0 \text{ αν } z=\infty\\ \infty \text{ αν } z=0\end{cases}$$

οπότε:

$t(\infty)=t_2\circ t_1(\infty)=t_2(0)=\infty$

$t(0)=t_2\circ t_1(0)=t_2(\infty)=0$

Για τις υπόλοιπες τιμές των $z\in\mathbb{C}-\{0\}$ έχουμε $t(z)=t_2\circ t_1(z)=t_2\left(\dfrac{1}{\bar{z}}\right)=\left(\dfrac{4}{\dfrac{1}{\bar{z}}}\right)=4z$

οπότε θα έχουμε:

$$t(z)=\begin{cases}4z \text{ αν } z\in\mathbb{C}\\ \infty \text{ αν z=}\infty\end{cases}$$

Αυτή η συνάρτηση σταθεροποιεί το ∞ και *μεγεθύνει* τα στοιχεία του $\mathbb{C}$ κατά 4. Αν ο κύκλος ακτίνας 2 αντικατασταθεί από έναν κύκλο ακτίνας $\sqrt{k}$ τότε η t θα σταθεροποιεί το σημείο στο άπειρο ∞ και θα μεγεθύνει τα στοιχεία του $\mathbb{C}$ κατά k.
Έχουμε πει πως κάθε γραμμική συνάρτηση γράφεται ως σύνθεση $t\circ s$, μιας ομοιοθεσίας s η οποία ακολουθείται από μια ισομετρία t.
Αφού κάθε ισομετρία t είναι σύνθεση ανακλάσεων μπορούμε λοιπόν εύκολα να συμπεράνουμε πως κάθε γραμμική συνάρτηση γράφεται ως σύνθεση $r_1\circ r_2\circ\ldots\circ r_n\circ s$ μιας ομοιοθεσίας η οποία ακολουθείται από έναν αριθμό από ανακλάσεις $r_1, r_2, r_3, \ldots r_n$.
Η μόνη διαφορά μεταξύ μιας γραμμικής συνάρτησης και μιας επεκτεταμένης γραμμικής συνάρτησης βρίσκεται στο ότι η επεκτεταμένη γραμμική συνάρτηση περιέχει ένα επιπλέον σημείο στο άπειρο στο πεδίο ορισμού της. Επειδή το επιπλέον σημείο απεικονίζεται στον εαυτό του έχουμε ότι η επεκτεταμένη γραμμική συνάρτηση εκφράζεται ως σύνθεση μιας ομοιοθεσίας η οποία κρατάει σταθερό το ∞ (δηλαδή απεικονίζει το ∞ στον εαυτό του) ακολουθούμενη από έναν αριθμό από ανακλάσεις οι οποίες επίσης σταθεροποιούν το ∞. Όμως μια ανάκλαση η οποία σταθεροποιεί το ∞ δεν είναι τίποτα άλλο από μια αντιστροφή ως προς μια επεκτεταμένη ευθεία.
Από το πρόβλημα που λύσαμε ακριβώς πιο πάνω, προκύπτει ότι μια ομοιοθεσία η οποία σταθεροποιεί το ∞ είναι μια σύνθεση δύο αντιστροφών.
Έτσι λοιπόν έχουμε:

- Μια οποιαδήποτε επεκτεταμένη γραμμική συνάρτηση είναι σύνθεση αντιστροφών (inversions).
- Επίσης, όπως προκύπτει από παράδειγμα που επεξεργαστήκαμε πιο πάνω, η σύνθεση $t=t_1\circ t_2$ όπου t_1 είναι η αντιστροφή ως προς τον μοναδιαίο κύκλο C και η t_2 είναι η επεκτεταμένη συνάρτηση του συζυγούς, είναι η επεκτεταμένη μιγαδική αντιστροφή, όπότε ο συνδυασμός αυτών των δύο δίνει το πιο κάτω πολύ σημαντικό θεώρημα: Η επεκτεταμένη μιγαδική αντιστροφή και η επεκτεταμένη γραμμική συνάρτηση μπορούν να γραφούν ως σύνθεση αντιστροφών.

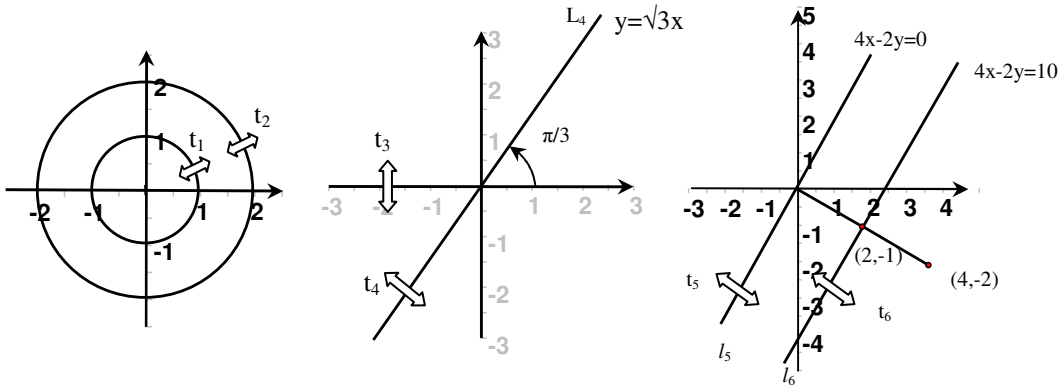
Γνωρίζουμε ότι οι αντιστροφές (inversions) του επεκτεταμένου επιπέδου απεικονίζουν γενικευμένους κύκλους σε γενικευμένους κύκλους οπότε έχουμε το ακόλουθο πόρισμα του

πιο πάνω θεωρήματος: Οι επεκτεταμένες γραμμικές συναρτήσεις και η επεκτεταμένη μιγαδική αντιστροφή απεικονίζουν γενικευμένους κύκλους σε γενικευμένους κύκλους.
Παράδειγμα:
Ας υποθέσουμε ότι t είναι η επεκτεταμένη γραμμική συνάρτηση που δίνεται από τον τύπο:

$$t(z)=\begin{cases} 2\left(-1+\sqrt{3}i\right)z+\left(4-2i\right),\ z\in\mathbb{C} \\ \infty \ \text{αν z=}\infty \end{cases}$$

Να εκφραστεί η t ως σύνθεση αντιστροφών του επεκτεταμένου μιγαδικού επιπέδου.
Λύση:
Εκτός του ότι απεικονίζει το ∞ στο ∞ ο μετασχηματισμός t πολλαπλασιάζει το μιγαδικό επίπεδο με τον συντελεστή $\left|2(-1+i\sqrt{3})\right|=4$

το περιστρέφει κατά γωνία $Arg\left(2(-1+i\sqrt{3})\right)=\dfrac{2\pi}{3}$ και κατόπιν το μεταφέρει κατά διάνυσμα (4,-2).
Η ομοιοθεσία με συντελεστή το 4 μπορεί να γραφεί ως σύνθεση $t_2\circ t_1$ όπου t_1 είναι αντιστροφή ως προς τον μοναδιαίο κύκλο C και t_2 είναι η αντιστροφή ως προς τον κύκλο με ακτίνα $\sqrt{4}=2$ ο οποίος έχει κέντρο το O (origin).
Η στροφή ως προς γωνία $\dfrac{2\pi}{3}$ μπορεί να γραφεί ως σύνθεση $t_4\circ t_3$ όπου t_3 είναι αντιστροφή ως προς τον επεκτεταμένο πραγματικό άξονα και t_4 είναι η αντιστροφή ως προς την επεκτεταμένη ευθεία $l_4\cup\{\infty\}$ όπου l_4 είναι η ευθεία $y=\sqrt{3}x$ (Η l_4 είναι η ευθεία που διέρχεται από το O και σχηματίζει γωνία $\dfrac{\pi}{3}$ με τον x- άξονα)
Η μεταφορά ως προς το διάνυσμα (4,-2) μπορεί να γραφεί ως σύνθεση $t_6\circ t_5$ όπου t_5 είναι η αντιστροφή ως προς την επεκτεταμένη ευθεία $l_5\cup\{\infty\}$ όπου l_5 είναι η ευθεία $4x-2y=0$ και t_6 είναι η αντιστροφή ως προς την επεκτεταμένη ευθεία $l_6\cup\{\infty\}$ όπου l_6 είναι η ευθεία 4x-2y=10.
(Ας σημειώσουμε ότι η t_5 είναι η ευθεία που διέρχεται από το O (origin) και είναι κάθετη προς το διάνυσμα (4,-2) και l_6 η ευθεία που διέρχεται από το (2,-1) και είναι παράλληλη προς την l_5
Επειδή οι t_6,t_5,t_4,t_3 και $t_2\circ t_1$ απεικονίζουν το ∞ στον εαυτό του προκύπτει ότι $t=t_6\circ t_5\circ t_4\circ t_3\circ t_2\circ t_1$



Πρόβλημα

Ας υποθέσουμε ότι t είναι η επεκτεταμένη γραμμική συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο

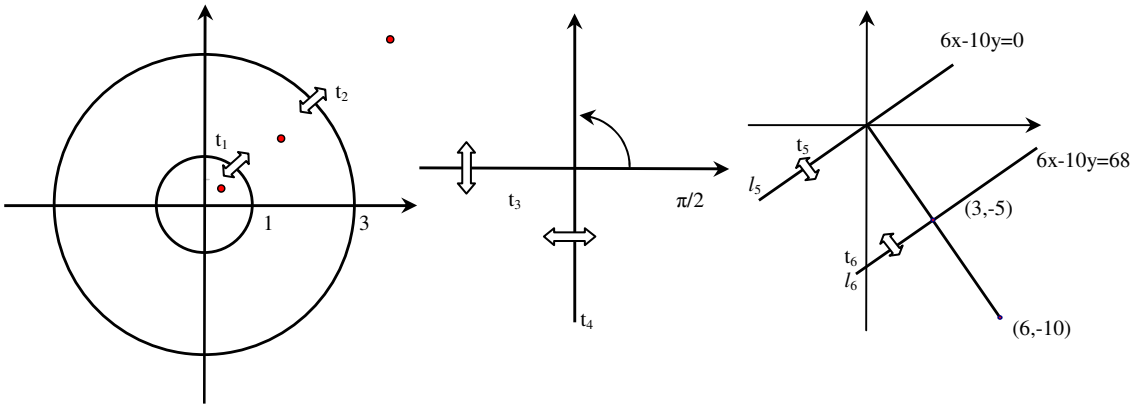
$$t(z)=\begin{cases}-9z+(6-10i),\ z\in\mathbb{C}\\ \infty \text{ αν } z=\infty\end{cases}$$

Να εκφραστεί η t ως σύνθεση αντιστροφών του επεκτεταμένου μιγαδικού επιπέδου

Λύση :

Εκτός του ότι το ∞ απεικονίζεται στο ∞ ο μετασχηματισμός t μετασχηματίζει ομοιοθετικά το μιγαδικό επίπεδο κατά παράγοντα $|-9|=9$, το περιστρέφει ως προς γωνία $Arg(-9)=\pi$ και κατόπιν το μεταφέρει κατά το διάνυσμα (6,-10).

Από προηγούμενο πρόβλημα η ομοιοθεσία με συντελεστή το 9 μπορεί να γραφεί ως σύνθεση $t_2\circ t_1$ δύο συναρτήσεων t_1,t_2 όπου η t_1 είναι αντιστροφή ως προς τον μοναδιαίο κύκλο και η t_2 είναι αντιστροφή ως προς τον κύκλο ακτίνας 3 και κέντρο το O(0,0).



Η στροφή ως προς γωνία π μπορεί να γραφεί ως σύνθεση $t_3\circ t_4$ δύο απεικονίσεων t_3,t_4 όπου η t_3 είναι αντιστροφή ως προς τον επεκτεταμένο x-άξονα και όπου η t_4 είναι αντιστροφή ως προς τον επεκτεταμένο y-άξονα (ο y- άξονας σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{2}$ με τον x-άξονα).

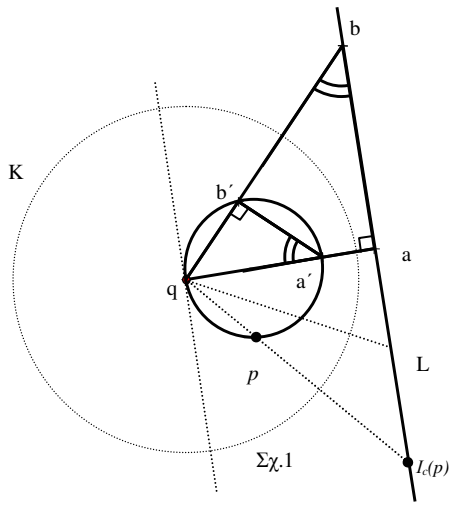
Η μεταφορά ως προς διάνυσμα (6,-10) μπορεί να γραφεί ως σύνθεση $t_6\circ t_5$ δύο συναρτήσεων t_6,t_5 όπου η t_5 είναι αντιστροφή ως προς την επεκτεταμένη ευθεία $l_5\cup\{\infty\}$ όπου η t_5 είναι η ευθεία $6x-10y=0$ και η t_6 είναι αντιστροφή ως προς ως προς την επεκτεταμένη ευθεία $l_6\cup\{\infty\}$ όπου η t_6 είναι η ευθεία $6x-10y=68$

•Ας σημειώσουμε ότι η t_5 είναι η ευθεία που διέρχεται από το O (origin) και είναι κάθετη προς το διάνυσμα (6,-10) και l_6 η ευθεία που διέρχεται από το (3,-5) και είναι παράλληλη προς την l_5.

Επειδή οι t_6,t_5,t_4,t_3 και $t_2\circ t_1$ απεικονίζουν το ∞ στον εαυτό του προκύπτει ότι $t=t_6\circ t_5\circ t_4\circ t_3\circ t_2\circ t_1$

Αντιστροφή ως προς σφαίρα:

Η αντιστροφή I_s (στις τρεις διαστάσεις) ως προς σφαίρα S (ακτίνας R και κέντρου q) ορίζεται με τον εξής τρόπο: Αν p είναι ένα σημείο στο χώρο το οποίο βρίσκεται σε



απόσταση ρ από το q (κέντρο αντιστροφής), τότε το αντίστροφο $I_s(p)$ του σημείου p ως προς την σφαίρα S είναι εκείνο το σημείο που ανήκει στην ημιευθεία με αρχή το q η οποία διέρχεται από το p και το οποίο βρίσκεται σε απόσταση $\frac{R^2}{\rho}$ από το q (σχήμα 1).

Χωρίς πρόσθετη δουλειά μπορούμε να γενικεύσουμε τα περισσότερα από τα αποτελέσματα που προέκυψαν κατά την μελέτη της αντιστροφής ως προς κύκλο σε αποτελέσματα της αντιστροφής ως προς σφαίρα.

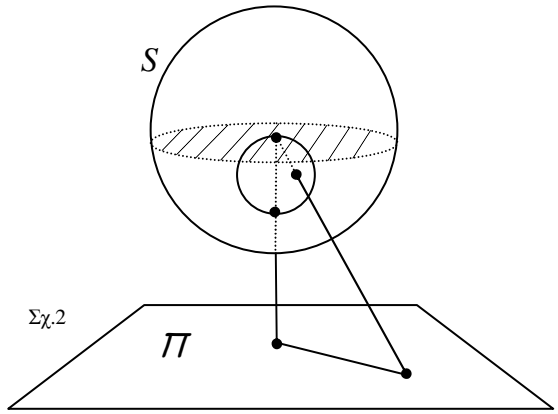
Για παράδειγμα ας ξαναδούμε την αντιστροφή ως προς τον κύκλο K, μιας ευθείας που δεν διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής. Η εικόνα αυτής της ευθείας είναι ένας κύκλος που διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής. Το σχήμα που αντιστοιχεί σε αυτήν την αντιστροφή είναι το σχήμα 1.

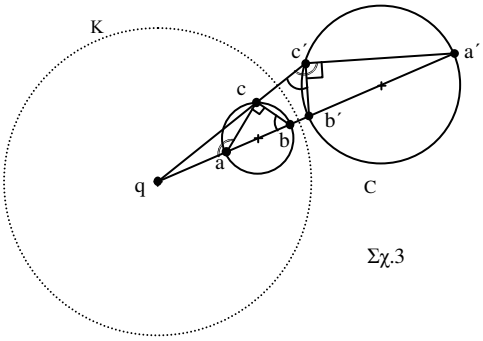
Αν περιστρέψουμε αυτό το σχήμα στο χώρο και γύρω από την ευθεία που ορίζεται από τα σημεία q και a τότε παίρνουμε το σχήμα 2.

Στο σχήμα 2 (το οποίο λάβαμε από την περιστροφή) παρατηρούμε ότι ο κύκλος της αντιστροφής K έχει διαγράψει την σφαίρα της αντιστροφής S και η ευθεία που ορίζεται από τα σημεία a και b έχει διαγράψει το επίπεδο Π. Μπορούμε λοιπόν να πούμε τα εξής:

Μέσω της αντιστροφής ως προς την σφαίρα που έχει κέντρο το q , ένα επίπεδο που δεν διέρχεται από το q απεικονίζεται σε μια σφαίρα που περιέχει το q και της οποίας το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο q είναι παράλληλο προς το επίπεδο Π. Αντίστροφα μια σφαίρα που περιέχει το q, απεικονίζεται σε ένα επίπεδο που είναι παράλληλο στο εφαπτόμενο επίπεδο σε αυτήν την σφαίρα, στο σημείο της q.

Με την ίδια λογική δηλαδή περιστρέφοντας το πιο κάτω σχήμα (σχ. 3) προκύπτουν και άλλα συμπεράσματα όπως:

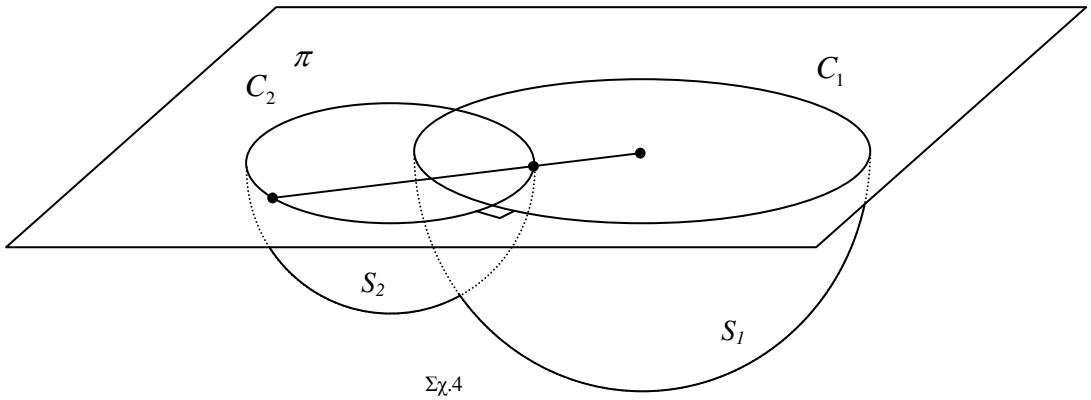




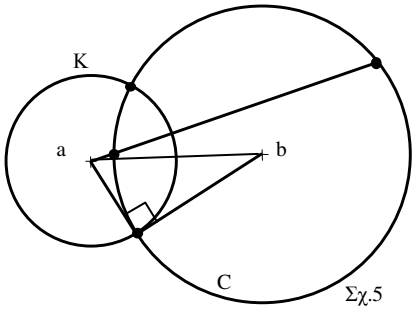
Μέσω αντιστροφής ως προς μια σφαίρα κέντρου q, η εικόνα μιας σφαίρας που δεν περιέχει το κέντρο της αντιστροφής, είναι μια άλλη σφαίρα που δεν περιέχει το κέντρο της αντιστροφής.

Με βάση τα όσα έχουμε συμπεράνει μέχρι τώρα μπορούμε να δούμε, χωρίς δυσκολίες, τι συμβαίνει σε έναν τυχαίο κύκλο μιας σφαίρας μέσω της αντιστροφής της ως προς σφαίρα, αφού ένας τέτοιος κύκλος μπορεί να θεωρηθεί ως η τομή δύο σφαιρών. Πιο συγκεκριμένα ισχύει το έξής: Μέσω αντιστροφής ως προς μια σφαίρα, η εικόνα ενός κύκλου C που δεν περνάει από το κέντρο q της σφαίρας της αντιστροφής, είναι ένας άλλος κύκλος ο οποίος δεν περνάει από το q. Αν ο κύκλος C

περνάει από το q, τότε η εικόνα του είναι η παράλληλη ευθεία στην εφαπτόμενη ευθεία του κύκλου C στο σημείο του q.
Η στενή σχέση που έχουν η αντιστροφή ως προς κύκλο και η ανάκλαση ως προς ευθεία συνεχίζει να υπάρχει και στην περίπτωση της αντιστροφής ως προς σφαίρα. Για αυτό το λόγο η αντιστροφή ως προς σφαίρα καλείται και ανάκλαση ως προς σφαίρα.
Επίσης πολύ μεγάλης σημασίας είναι και το γεγονός ότι οι ανακλάσεις στις τρεις διαστάσεις διατηρούν την συμμετρία: Έστω K είναι ένα επίπεδο ή σφαίρα και a , b είναι συμμετρικά σημεία ως προς K. Τότε κατά την τρισδιάστατη ανάκλαση ως προς ένα οποιοδήποτε επίπεδο ή σφαίρα οι εικόνες των a και b είναι και πάλι συμμετρικά ως προς την εικόνα του K.
Αν προσπαθήσουμε να περιγράψουμε τα βήματα που οδηγούν σε ένα τέτοιο συμπέρασμα θα δούμε ότι είναι σε μεγάλο βαθμό ανάλογα με τα βήματα που μας οδήγησαν στα αποτελέσματα για την συμμετρία στις δύο διαστάσεις.
Θα αρχίσουμε διευκρινίζοντας ότι όταν λέμε σφαίρες ορθογώνιες μεταξύ τους, εννοούμε ότι τα εφαπτόμενα επίπεδα των σφαιρών αυτών σε κάθε κοινό σημείο τους (δηλαδή σε κάθε σημείο του κύκλου ως προς τον οποίο αυτές οι σφαίρες τέμνονται), είναι μεταξύ τους ορθογώνια.
Θα διατυπώσουμε επίσης και λίγο διαφορετικά τι εννοούμε όταν λέμε ότι δύο τεμνόμενες σφαίρες S_1 και S_2 είναι ορθογώνιες μεταξύ τους:
Έστω λοιπόν δύο σφαίρες S_1 και S_2 (σχήμα 4). Έστω επίσης C_1 και C_2 οι δύο τεμνόμενοι μέγιστοι κύκλοι οι οποίοι δημιουργούνται από την τομή των σφαιρών αυτών με ένα επίπεδο το οποίο διέρχεται από τα κέντρα των σφαιρών. Οι δύο σφαίρες S_1 και S_2 είναι ορθογώνιες αν και μόνο αν οι δύο μέγιστοι κύκλοι C_1 και C_2 είναι και αυτοί μεταξύ τους ορθογώνιοι.



Σχ.4



Σχ.5

Αν περιστρέψουμε το σχήμα 5 γύρω από την ευθεία που ορίζεται από τα κέντρα a και b των ορθογώνιων μεταξύ τους κύκλων K και C, συνάγεται ότι με την αντιστροφή ως προς μια σφαίρα S, κάθε σφαίρα Σ ορθογώνια προς την S, απεικονίζεται στον εαυτό της.
Ένα πολύ σημαντικό συμπέρασμα που μπορεί να προκύψει σε αυτό το σημείο είναι ότι αν περιορίσουμε το ενδιαφέρον μας αποκλειστικά στο επίπεδο π (σχήμα 4) τότε η τρισδιάστατη αντιστροφή ως προς την σφαίρα S_1 είναι τελικά ταυτόσημη με τη δισδιάστατη αντιστροφή ως προς τον κύκλο C_1. Αν δούμε τελικά υπό αυτήν την οπτική γωνία την αντιστροφή ως προς τις τρεις διαστάσεις θα έχουμε έναν τρόπο να γενικεύσουμε πολύ πιο σύντομα τα αποτελέσματα που πήραμε προηγουμένως καθώς και πολλά άλλα ακόμα.
Για παράδειγμα αν γυρίσουμε πίσω στην αντιστροφή ως προς κύκλο και πιο συγκεκριμένα στην πρόταση: κάθε κύκλος που διέρχεται από δύο σημεία του επιπέδου τα οποία είναι

μεταξύ τους αντίστροφα είναι ορθογώνιος με τον κύκλο της αντιστροφής και υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σημείο p του επιπέδου π τότε το σημείο $p' = I_{s_1}(p)$ μπορεί να κατασκευαστεί ως το σημείο τομής δύο κύκλων, σαν τον κύκλο C_2, οι οποίοι βρίσκονται στο επίπεδο π, είναι ορθογώνιοι προς τον κύκλο C_1 και περνάνε από το σημείο p.

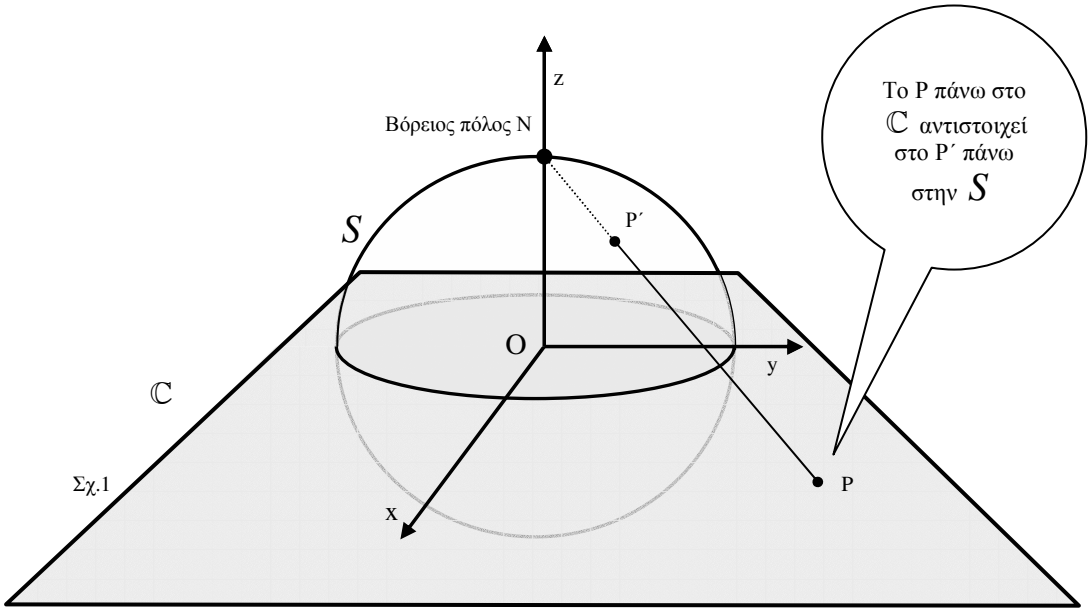
Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τις ορθογώνιες μεταξύ τους, σφαίρες S_1, S_2 του σχήματος 4 και ας υποθέσουμε επίσης ότι υποβάλλονται σε αντιστροφή ως προς μια τρίτη σφαίρα S_3. Ας θεωρήσουμε ότι π είναι το μοναδικό επίπεδο που διέρχεται από τα κέντρα και των τριών σφαιρών και ας υποθέσουμε ότι C είναι ο μέγιστος κύκλος κατά τον οποίο η σφαίρα S_3 τέμνει το επίπεδο π. Επειδή η αντιστροφή I_C απεικονίζει τους ορθογώνιους κύκλους C_1 και C_2 πάλι σε ορθογώνιους κύκλους μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η πρόταση την οποία διατυπώσαμε πιο πάνω και πιο συγκεκριμένα ότι κάθε σφαίρα που είναι ορθογώνια προς την σφαίρα ως προς την οποία γίνεται η αντιστροφή, απεικονίζεται στον εαυτό της, είναι τελικά μέρος μια ευρύτερης πρότασης η οποία έχει ως εξής:

Ορθογώνιες σφαίρες αντιστρέφονται σε ορθογώνιες σφαίρες. {Πρόταση (α)}

Μέσω της πρότασης (α) μπορούμε εύκολα να δούμε τώρα γιατί ισχύει η πρόταση που διατυπώσαμε προηγουμένως: αν K είναι ένα επίπεδο ή σφαίρα και a, b είναι συμμετρικά σημεία ως προς K τότε κατά την τρισδιάστατη ανάκλαση ως προς ένα οποιοδήποτε επίπεδο ή σφαίρα οι εικόνες των a και b είναι και πάλι συμμετρικά ως προς την εικόνα του K.

Η σφαίρα του Riemann- Στερεογραφική προβολή-θεωρήματα

Εισαγάγαμε προηγουμένως το σημείο στο άπειρο και το επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο, με σκοπό να δώσουμε μια όσο τον δυνατόν απλή εξήγηση της επίδρασης πού έχει η αντιστροφή στις ευθείες και τους κύκλους. Ωστόσο πολλές φορές μοιάζει πολύ δύσκολο το να οπτικοποιήσουμε μια ευθεία γραμμή ως γενικευμένο κύκλο, αφού τα άκρα μιας γραμμής μοιάζουν να είναι απείρως μακριά το ένα από το άλλο. Επίσης είναι δύσκολο να οπτικοποιήσουμε το που θα μπορούσε να τοποθετηθεί το σημείο στο άπειρο σε σχέση με το επίπεδο $\mathbb{C}$ και αυτό που φτιάχνουμε ως εικόνα είναι μια θολή θέση για αυτό το σημείο σε κάποιον ασαφή τόπο γύρω από τα όρια του $\mathbb{C}$. Όλα αυτά λοιπόν αφήνουν μια αίσθηση ότι κάτι δεν πάει καλά αφού μάλιστα μέχρι τώρα είχαμε συνδυάσει το ∞ με οριακές διαδικασίες και όχι με κάτι που μοιάζει να είναι ένας καθορισμένος αριθμός ο οποίος όμως είναι απείρως μακριά.



Σχ.1

Ευτυχώς υπάρχει ένα μοντέλο του επεκτεταμένου μιγαδικού επιπέδου στο οποίο το σημείο στο άπειρο εμφανίζεται ως πραγματικό σημείο! Αυτό το μοντέλο είναι το αποτέλεσμα της ιδιοφυούς ιδέας του Ρήμμαν (Riemann) να ερμηνεύσει τους μιγαδικούς ως σημεία πάνω σε μια σφαίρα S αντί να τους θεωρήσει ως σημεία πάνω σε ένα επίπεδο.
Ας θεωρήσουμε το μιγαδικό επίπεδο μέσα στον τρισδιάστατο χώρο με τον άξονα των πραγματικών αριθμών να ταυτίζεται με τον x-άξονα του τρισδιάστατου χώρου και τον άξονα των φανταστικών αριθμών με το y-άξονα του τρισδιάστατου χώρου. Με αυτόν τον τρόπο κάθε μιγαδικός αριθμός $x+yi$ θα μπορούσε να αναπαρασταθεί με το σημείο $(x, y, 0)$ στο (x, y)- επίπεδο. Για να είμαστε πιο σαφείς ως προς το πώς είναι τοποθετημένο το μιγαδικό επίπεδο στο χώρο θα υποθέσουμε ότι όταν κοιτάμε από πάνω προς τα κάτω το επίπεδο αυτό, τότε μια περιστροφή αντίθετη από την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού (δηλαδή μια θετική περιστροφή) κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$ μεταφέρει τον αριθμό 1 στο i.

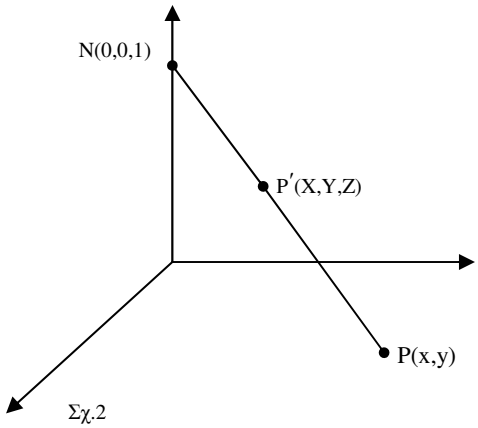
Ακολούθως κατασκευάζουμε την σφαίρα S με κέντρο την αρχή του συστήματος συντεταγμένων (Origin) και ακτίνα 1. Αυτή η σφαίρα καλείται σφαίρα του Ρήμμαν (Riemann sphere). Η τομή της S με το μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$ είναι ο μοναδιαίος κύκλος του $\mathbb{C}$. Ας δούμε τώρα τον τρόπο με τον οποίο θα αντιστοιχίσουμε τα σημεία της σφαίρας S με τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{C}$. Αν σκεφτούμε ότι η σφαίρα S είναι κάτι ανάλογο με την επιφάνεια της γης τότε βρισκόμαστε μπροστά στο αρχαίο πρόβλημα της χάραξης γεωγραφικών χαρτών. Σύμφωνα λοιπόν με την αναλογία αυτή θα ονομάζουμε βόρειο πόλο το σημείο $N=(0,0,1)$ το οποίο είναι η κορυφή της σφαίρας S και το σημείο Σ=(0,0,-1) το οποίο βρίσκεται στο κάτω μέρος της σφαίρας νότιο πόλο.
Σε έναν Άτλα θα βρούμε πολλούς τρόπους χάραξης χαρτών και ο λόγος για την ποικιλία αυτή είναι ότι κανένας χάρτης δεν μπορεί να αναπαραστήσει με απόλυτη πιστότητα κάθε πλευρά μια καμπυλωμένης επιφάνειας πάνω σε ένα επίπεδο κομμάτι χαρτί. Παρόλο που στρεβλώσεις κάποιου είδους μπορεί αναπόφευκτα να εισαχθούν, τελικά διαφορετικοί χάρτες μπορεί να αναπαριστούν με πιστότητα διαφορετικά αλλά όχι όλα τα χαρακτηριστικά μιας καμπυλωμένης επιφάνειας.
Για παράδειγμα ένας χάρτης μπορεί να αναπαριστά με πιστότητα (να διατηρεί δηλαδή) τις γωνίες με κόστος όμως την στρέβλωση των διάφορων περιοχών.
Ο Πτολεμαίος (περίπου το 125 μ. Χ) ήταν ο πρώτος που κατασκεύασε έναν τέτοιο χάρτη τον οποίο χρησιμοποίησε για να σχεδιάσει τις θέσεις διαφόρων ουρανίων σωμάτων πάνω στην ουράνια σφαίρα. Κάθε ευθεία που συνδέει το σημείο P του μιγαδικού επιπέδου με το βόρειο πόλο τέμνει την σφαίρα του Riemann σε ένα σημείο P΄ και αντιστρόφως. Με αυτόν τον τρόπο δημιουργούμε μια ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των σημείων του μιγαδικού επιπέδου και των σημείων της σφαίρας εκτός από ένα. Το σημείο εκείνο της σφαίρας το οποίο δεν είναι δυνατόν να συνδεθεί με κάποιο σημείο του μιγαδικού επιπέδου είναι ο Βόρειος πόλος N. Καθώς το σημείο P΄ πάνω στην σφαίρα κινείται προς το N το αντίστοιχο σημείο P στο επίπεδο κινείται ακόμα πιο μακριά από το σημείο O (αρχή του συστήματος αξόνων-origin). Αυτό υποδεικνύει ότι ο Βόρειος πόλος συνδέεται με το σημείο ∞ του επεκτεταμένου μιγαδικού επιπέδου.

Η συνάρτηση $\pi : S \to \widehat{\mathbb{C}}$ η οποία απεικονίζει τα σημεία της σφαίρας του Riemann στα αντίστοιχα σημεία του επεκτεταμένου μιγαδικού επιπέδου καλείται στερεογραφική προβολή. Αφού η π είναι ένα προς ένα και επί, αυτό που συμπεραίνουμε είναι ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την σφαίρα του Riemann ως μια βολική οπτικοποιημένη αναπαράσταση του επεκτεταμένου μιγαδικού επιπέδου $\widehat{\mathbb{C}}$.
Ας σημειωθούν τα ακόλουθα: α) το εσωτερικό το μοναδιαίου κύκλου του μιγαδικού επιπέδου απεικονίζεται στο νότιο ημισφαίριο της σφαίρας S και πιο συγκεκριμένα το 0 απεικονίζεται στο νότιο πόλο Σ.

β) Κάθε σημείο του μοναδιαίου κύκλου απεικονίζεται στον εαυτό του θεωρώντας ότι ανήκει στον ισημερινό της σφαίρας S.
γ) Το εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου απεικονίζεται στο βόρειο ημισφαίριο της σφαίρας S εκτός από το σημείο N που δεν είναι εικόνα κανενός πεπερασμένου σημείου του μιγαδικού επιπέδου.
Αντί να μιλάμε απλά για μια αντιστοιχία μεταξύ των μιγαδικών αριθμών και των σημείων της σφαίρας S μπορούμε να φανταστούμε ότι τα σημεία της σφαίρας είναι οι μιγαδικοί αριθμοί του επεκτεταμένου μιγαδικού επιπέδου. Για παράδειγμα Σ=0 και N=∞.
Όπως θα δούμε πιο κάτω μπορούμε να βρούμε ένα τύπο για την στερεογραφική προβολή του σημείου (X,Y,Z) της σφαίρας στο σημείο $x+yi$ του μιγαδικού επιπέδου και αντιστρόφως.
Θεώρημα:
Ας υποθέσουμε ότι με το γράμμα π συμβολίζουμε την απεικόνιση μέσω της στερεογραφικής προβολής της σφαίρας του Riemann S επί του επεκτεταμένου μιγαδικού επιπέδου $\widehat{\mathbb{C}}$. Η στερεογραφική προβολή του σημείου (X,Y,Z) της σφαίρας S επί του σημείου $x+yi$ δίνεται από τον τύπο $\pi(X,Y,Z)=\dfrac{X}{1-Z}+i\dfrac{Y}{1-Z}$.
Η αντίστροφη απεικόνιση της απεικόνισης π δίνεται από τον τύπο:

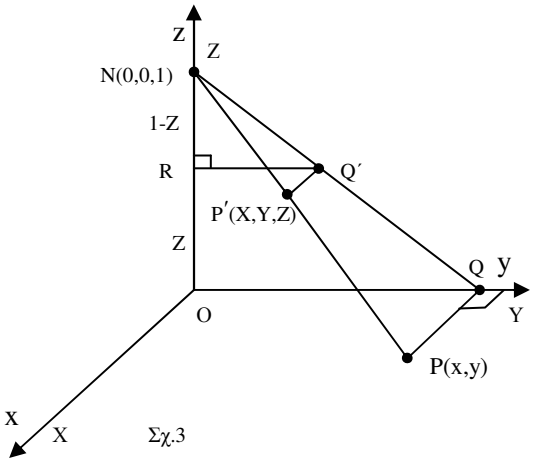
$$\pi^{-1}\left(x+yi\right)=\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1},\frac{2y}{x^2+y^2+1},\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right).$$

Απόδειξη:



Σχ.2

Ας υποθέσουμε ότι το σημείο $P'(X,Y,Z)$ (Σχ.2) είναι ένα σημείο πάνω στην σφαίρα S (διαφορετικό από το N) και $P(x,y)$ το σημείο του επιπέδου που αντιστοιχεί στο P' μέσω της στερεογραφικής προβολής. Προβάλουμε την ευθεία $NP'P$ κάθετα πάνω στο επίπεδο (Y-Z) έτσι ώστε τα σημεία P' και P να προβάλλονται στα σημεία Q' και Q (Σχ.3). Τα σημεία Q' και Q έχουν συντεταγμένες (0,Y,Z) και (0,y,0) στο $\mathbb{R}^3$.



Σχ.3

Φέρνουμε την κάθετη $Q'R$ από το Q' προς τον Z-άξονα.
Είναι $Q'R$ παράλληλη προς την OQ οπότε τα τρίγωνα $\triangle NRQ'$ και $\triangle NOQ$ είναι όμοια. Λόγω της ομοιότητας αυτής προκύπτει ότι $\dfrac{NR}{RQ'}=\dfrac{NO}{OQ}$ δηλαδή έχουμε:

$$\frac{1-Z}{Y}=\frac{1}{y}\Rightarrow y=\frac{Y}{1-Z}.$$

Προβάλλοντας την ευθεία $NP'P$ κάθετα πάνω στο επίπεδο (X-Z) και με ανάλογο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι $x=\dfrac{X}{1-Z}$.

Αυτό που προκύπτει τελικά είναι ότι η απεικόνιση της στερεογραφικής προβολής δίνεται από τον τύπο:

$$\pi\left(X,Y,Z\right)=x+iy=\frac{X}{1-Z}+i\frac{Y}{1-Z}.$$

Αυτός ο τύπος ισχύει και για το σημείο N το οποίο όπως γνωρίζουμε απεικονίζεται στο κατ΄ εκδοχήν σημείο (δηλαδή το σημείο ∞) διότι το σημείο N έχει συντεταγμένες (0,0,1) άρα θα θέσουμε στον τύπο Z=1.

Για να βρούμε τον τύπο για την αντίστροφη απεικόνιση π^{-1} χρησιμοποιούμε την ισότητα $X^2+Y^2+Z^2=1$. Η ισότητα αυτή προφανώς αληθεύει αφού το $\left(X,Y,Z\right)$ είναι σημείο της σφαίρας S (σφαίρα του Riemann) η οποία έχει κέντρο το σημείο O(0,0,0) και ακτίνα ίση με 1. Παίρνοντας λοιπόν τους τύπους $y=\frac{Y}{1-Z}$ $x=\frac{X}{1-Z}$ και την ισότητα $X^2+Y^2+Z^2=1$ και μετά από κάποιες πράξεις βρίσκουμε: $x^2+y^2+1=\frac{2}{1-Z}$ [2]

Από την ισότητα $x^2+y^2+1=\frac{2}{1-Z}$ και από τις πιο πάνω εξισώσεις για τα X,Y προκύπτει ότι: $X=x(1-Z)=\frac{2x}{x^2+y^2+1}$ και $Y=y(1-Z)=\frac{2y}{x^2+y^2+1}$.

Επίσης πολύ εύκολα μπορούμε να βγάλουμε ότι $Z=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}$ τελικά έχουμε τον τύπο για την π^{-1}: $\pi^{-1}\left(x+yi\right)=\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1},\frac{2y}{x^2+y^2+1},\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)$

Αν περιγράψουμε το $\hat{z}$ (σημείο πάνω στην σφαίρα) με την βοήθεια πολικών συντεταγμένων $\left(\phi,\theta\right)$ τότε παίρνουμε ένα τύπο στερεογραφικής προβολής παρά πολύ κομψό.

Θα αναφέρουμε αρχικά πως η γωνία θ μετράει την γωνία γύρω από τον άξονα z΄z και η γωνία θ=0 αντιστοιχεί στο κατακόρυφο ημιεπίπεδο το οποίο διέρχεται από τον θετικό ημιάξονα ox. Έτσι για ένα σημείο z στο μιγαδικό επίπεδο, η γωνία θ είναι απλά η συνηθισμένη γωνία που διαγράφεται αρχίζοντας από τον θετικό πραγματικό άξονα μέχρι το z. Το τι είναι η γωνία φ περιγράφεται στο σχήμα (α): είναι η γωνία που έχει κορυφή το σημείο O (κέντρο της σφαίρας S) και βαίνει στο τόξο με άκρα τα N και $\hat{z}$,το οποίο διαγράφεται από το N προς το $\hat{z}$. Για παράδειγμα ο ισημερινός της σφαίρας Σ αντιστοιχεί σε γωνία $\phi=\frac{\pi}{2}$. Συμβατικά θεωρούμε ότι $0\le\phi\le\pi$.

Αν z είναι η στερεογραφική προβολή του σημείου $\hat{z}$ το οποίο έχει συντεταγμένες (ϕ,θ) τότε $z=re^{i\theta}$ και αυτό που μας μένει να βρούμε είναι το r ως συνάρτηση του ϕ.

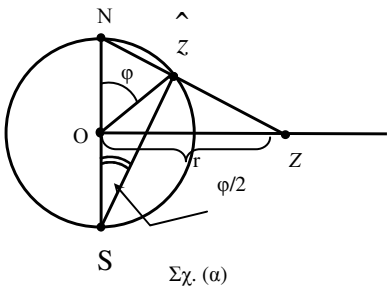
---

[2]

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{X}{1-Z} \\ y=\frac{Y}{1-Z}\end{array}\right)\Rightarrow x^2+y^2=\frac{X^2}{\left(1-Z\right)^2}+\frac{Y^2}{\left(1-Z\right)^2}\Rightarrow x^2+y^2+1=\frac{X^2+Y^2+\left(1-Z\right)^2}{\left(1-Z\right)^2}\Rightarrow x^2+y^2+1=\frac{X^2+Y^2+\left(1-Z\right)^2}{\left(1-Z\right)^2}\Rightarrow$$

$$x^2+y^2+1=\frac{X^2+Y^2+Z^2+1-2Z}{\left(1-Z\right)^2}\Rightarrow x^2+y^2+1=\frac{1+1-2Z}{\left(1-Z\right)^2}\Rightarrow x^2+y^2+1=\frac{2}{1-Z}$$

Από το σχήμα (α) βρίσκουμε ότι τα τρίγωνα $N\hat{z}S$ και NOz είναι όμοια και καθώς η γωνία $NS\hat{z} = \frac{\phi}{2}$ προκύπτει ότι $r = \cot\frac{\phi}{2}$.



Σχ. (α)

Έτσι ο νέος στερεογραφικός τύπος είναι: $z = \left(\cot\frac{\phi}{2}\right)e^{i\theta}$.

Ας δούμε τώρα δυο εφαρμογές:

Όπως και προηγουμένως ας συμβολίσουμε με $\hat{z}$ ένα τυχαίο σημείο της σφαίρας Σ το οποίο έχει συντεταγμένες (φ,θ) και έστω $\hat{\hat{z}}$ ότι είναι το σημείο στο οποίο μεταφέρεται το $\hat{z}$ όταν περιστρέψουμε την σφαίρα S κατά π γύρω από τον πραγματικό άξονα.

Οι συντεταγμένες του $\hat{\hat{z}}$ είναι $(\pi-\phi,-\theta)$. Έτσι αν $\tilde{z}$ είναι η στερεογραφική προβολή του $\hat{\hat{z}}$ τότε $\tilde{z} = \cot\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\phi}{2}\right]e^{-i\theta} = \frac{1}{\cot\left(\frac{\phi}{2}\right)}e^{-i\theta} = \frac{1}{z}$

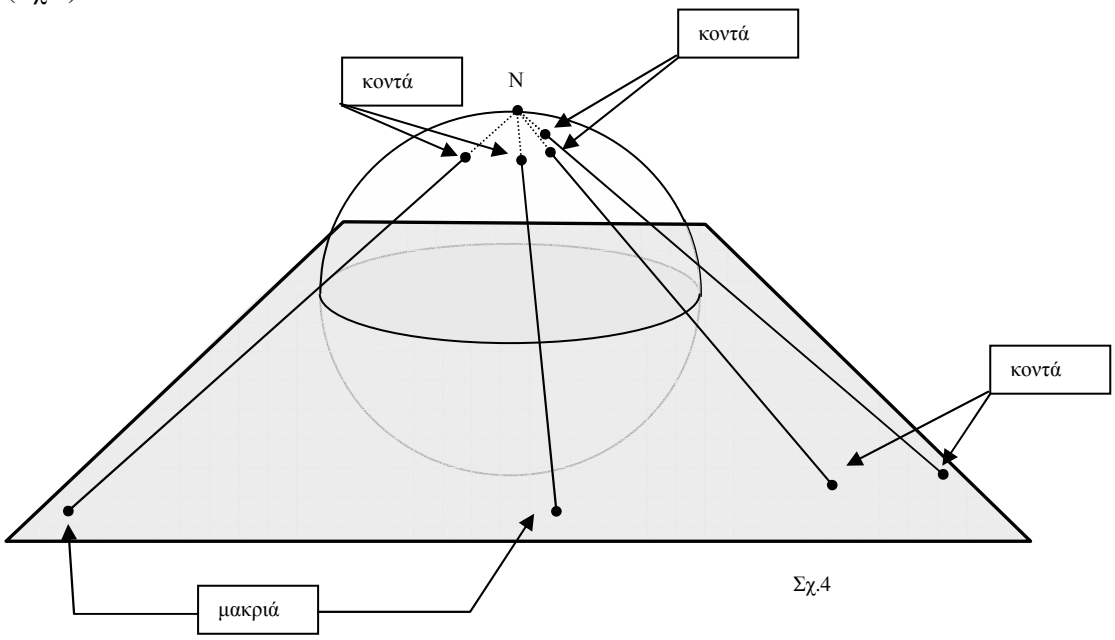
Για την δεύτερη εφαρμογή πριν προχωρήσουμε στα πιο ουσιαστικά θα δώσουμε τον ορισμό των αντιποδικών σημείων: Δύο σημεία της σφαίρας θα λέμε ότι είναι αντιποδικά όταν είναι διαμετρικά αντίθετα μεταξύ τους.

Θα δείξουμε τώρα ότι αν κ και λ είναι δύο αντιποδικά σημεία μιας σφαίρας Σ τότε οι στερεογραφικές προβολές τους μ και ν συνδέονται με τον εξής τύπο: $\nu = -\frac{1}{\bar{\mu}}$ και για να το θέσουμε και λίγο διαφορετικά: $\nu = -I_C(\mu)$ όπου C είναι ο μοναδιαίος κύκλος.

Ο τύπος προκύπτει αρκεί να σκεφτούμε ότι αν το κ έχει συντεταγμένες (ϕ,θ) τότε το λ έχει συντεταγμένες $(\pi-\phi,\pi+\theta)$. Το υπόλοιπο της απόδειξης συνεχίζει όπως και προηγουμένως.

Ας σημειωθεί ότι η στερεογραφική προβολή αλλοιώνει τις αποστάσεις μεταξύ των σημείων.

Για παράδειγμα δύο σημεία τα οποία είναι αρκετά κοντά πάνω στην S μπορεί να προβάλλονται σε σημεία τα οποία είναι μακριά το ένα από το άλλο πάνω στο επίπεδο $\mathbb{C}$ (Σχ.4).

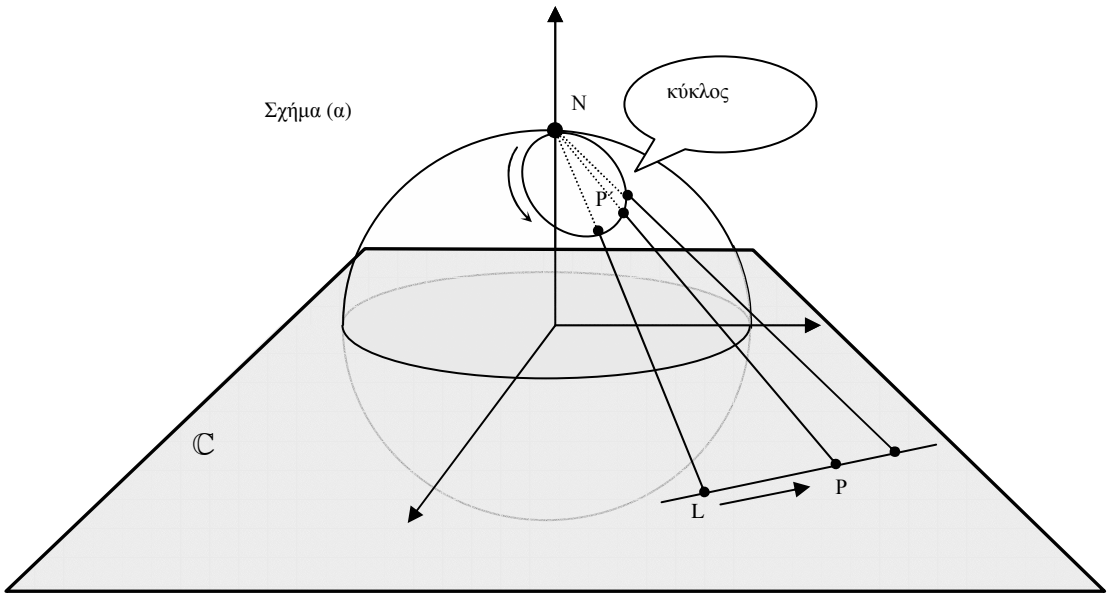


Σχ.4

Έχουμε αναφερθεί μέχρι τώρα στο γεγονός ότι μια ευθεία του $\mathbb{C}$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένας κύκλος που διέρχεται από το σημείο στο άπειρο. Η σφαίρα του Riemann μεταμορφώνει την αφηρημένη αυτή ιδέα κυριολεκτικά σε μια πραγματικότητα. Αυτό γίνεται με έναν πολύ εύκολο τρόπο: Ας θεωρήσουμε ένα σημείο P πάνω σε μια ευθεία L του $\mathbb{C}$ (σχήμα (α)). Καθώς το P κινείται κατά μήκος της L η ευθεία που διέρχεται από το P και από τον βόρειο πόλο N διαγράφει το επίπεδο που ορίζουν η ευθεία L και το σημείο N. Αυτό το επίπεδο τέμνει την σφαίρα S σε έναν κύκλο. Οπότε καθώς το P διαγράφει την ευθεία L τότε το αντίστοιχο σημείο P΄ πάνω στην σφαίρα διαγράφει αυτόν τον κύκλο. Καθώς το σημείο P κινείται όλο και πιο μακριά κατά μήκος της ευθείας L τότε το σημείο P΄ κινείται όλο και πιο κοντά στον βόρειο πόλο N. Το σημείο P΄ στην πράξη ποτέ δεν φτάνει στο βόρειο πόλο αφού ο βόρειος πόλος αντιστοιχεί σε κάποιου είδους «κενό πάνω» στην ευθεία L το οποίο συμπληρώνουμε επισυνάπτοντας στην ευθεία L το ∞ για να πάρουμε έτσι την επεκτεταμένη ευθεία L$\cup\{\infty\}$ η οποία ανήκει πλέον στο $\widehat{\mathbb{C}}$. Πάνω στην σφαίρα του Riemann το σημείο N γεμίζει το αντίστοιχο κενό στον κύκλο και έτσι η επεκτεταμένη ευθεία L$\cup\{\infty\}$ αντιστοιχεί σε έναν πραγματικό κύκλο πάνω στην σφαίρα - στην πραγματικότητα σε έναν κύκλο ο οποίος διέρχεται από το N.

Αυτό το συγκεκριμένο παράδειγμα μας οδηγεί στην διατύπωση ενός γενικότερου θεωρήματος:

Θεώρημα: Μέσω της στερεογραφικής προβολής κύκλοι πάνω στην σφαίρα του Riemann απεικονίζονται σε γενικευμένους κύκλους στο $\widehat{\mathbb{C}}$. Πιο συγκεκριμένα κύκλοι πάνω στην σφαίρα που διέρχονται από τον βόρειο πόλο N απεικονίζονται σε επεκτεταμένες ευθείες του $\widehat{\mathbb{C}}$ και οι κύκλοι στην σφαίρα που δεν διέρχονται από το N απεικονίζονται σε κανονικούς κύκλους στο $\widehat{\mathbb{C}}$.



Απόδειξη:

Ένας κύκλος πάνω στην σφαίρα του Riemann είναι η τομή της σφαίρας $X^2+Y^2+Z^2=1$ με κάποιο επίπεδο $aX+bY+cZ+d=0$ όπου a,b,c δεν είναι όλοι ταυτόχρονα μηδέν.

Αν αντικαταστήσουμε στην ισότητα $aX+bY+cZ+d=0$ τα X,Y,Z με τα δεύτερα μέλη των ισοτήτων $X=\dfrac{2x}{x^2+y^2+1}$ $Y=\dfrac{2y}{x^2+y^2+1}$ $Z=\dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}$ (αφού το (X,Y,Z) ανήκει στην σφαίρα $X^2+Y^2+Z^2=1$) το αποτέλεσμα είναι η ισότητα:

$\dfrac{2ax+2by+c(x^2+y^2-1)}{x^2+y^2+1}+d=0$ η οποία μπορεί να πάρει την μορφή:

$2ax+2by+c(x^2+y^2-1)+d(x^2+y^2+1)=0$

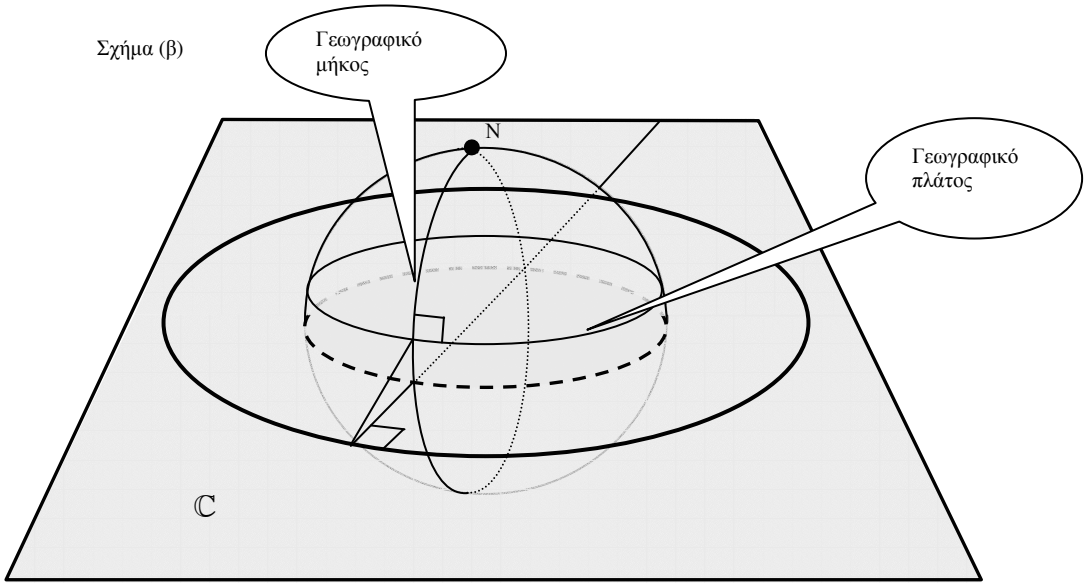
ή ισοδύναμα: $(c+d)x^2+(c+d)y^2+2ax+2by+(d-c)=0$.

Άρα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η εικόνα ενός κύκλου στην σφαίρα είναι ένας γενικευμένος κύκλος στο επεκτεταμένο επίπεδο.

Ο κύκλος στην σφαίρα διέρχεται από το σημείο N(0,0,1) αν το επίπεδο $aX+bY+cZ+d=0$ διέρχεται από το N και σε τέτοια περίπτωση θα είναι $c+d=0$. Προκύπτει χωρίς δυσκολία λοιπόν ότι αν ο κύκλος πάνω στην σφαίρα περνάει από το N τότε η εικόνα του στο επεκτεταμένο επίπεδο έχει εξίσωση της μορφής $2ax+2by+(d-c)=0$ και ως εκ΄ τούτου είναι μια επεκτεταμένη ευθεία. Από την άλλη μεριά αν ο κύκλος πάνω στην σφαίρα δεν περνάει από το N τότε $c+d\neq 0$ και η εικόνα του είναι ένας κανονικός κύκλος στο επίπεδο $\widehat{\mathbb{C}}$.

Σε αυτό το σημείο ας δώσουμε ένα σχήμα (σχήμα β) το οποίο θα κάνει πιο κατανοητό το θεώρημα που μόλις αποδείξαμε. Θα περιγράψουμε τι συμβαίνει στις γραμμές του *γεωγραφικού μήκους* και του *γεωγραφικού πλάτους* πάνω στην σφαίρα του Riemann μέσω της στερεογραφικής προβολής.

Σχήμα (β)

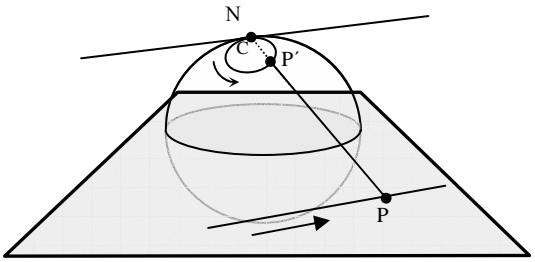


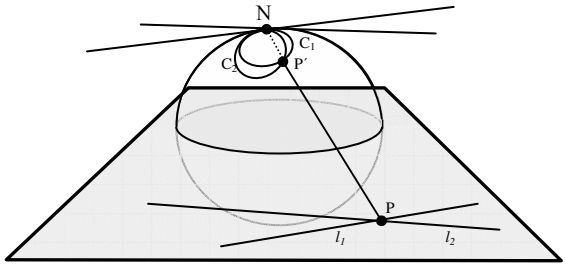
Μια γραμμή *γεωγραφικού μήκους* πάνω στην σφαίρα του Riemann είναι ένας κύκλος πάνω στην S που περνάει από τον βόρειο πόλο καθώς και από τον νότιο πόλο της S. Μια τέτοια γραμμή προβάλλεται πάνω στο επίπεδο σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αρχή O (origin). Παρομοίως έχουμε ότι μια γραμμή γεωγραφικού πλάτους πάνω στην σφαίρα του Riemann είναι ένας κύκλος ο οποίος βρίσκεται σε σταθερή απόσταση από το (x,y)- επίπεδο. Αυτός ο κύκλος προβάλλεται πάνω σε έναν κύκλο ο οποίος έχει κέντρο την αρχή του (x,y)-επιπέδου.

Οι ευθείες του γεωγραφικού μήκους και του γεωγραφικού πλάτους πάνω στην σφαίρα του Riemann, τέμνονται ορθογώνια, πράγμα που συμβαίνει και με τις προβολές τους. Αυτό είναι μια συνέπεια ενός πολύ ενδιαφέροντος θεωρήματος το οποίο θα αναφέρουμε ακολούθως:

Θεώρημα:

Η στερεογραφική προβολή διατηρεί το *μέγεθος* των γωνιών.

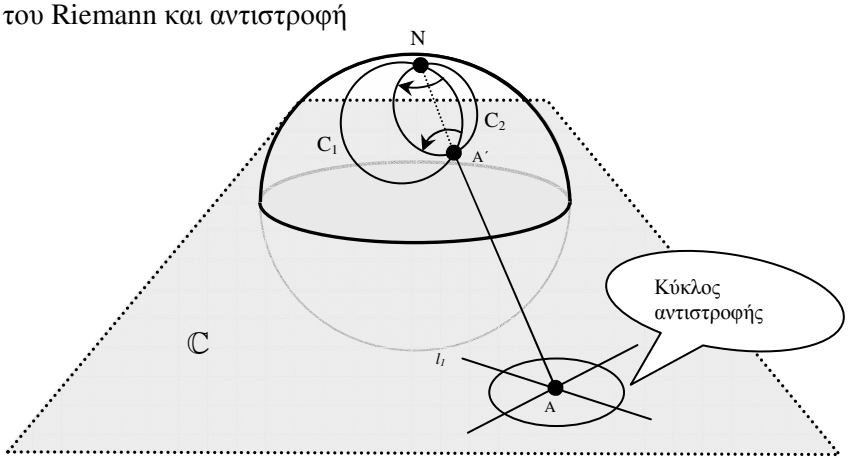




Απόδειξη:

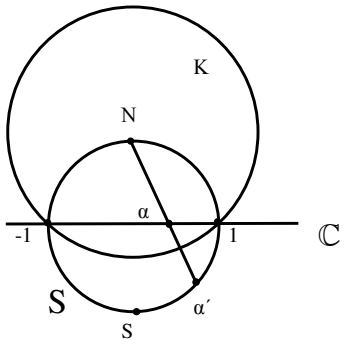
Πρώτα απ΄ όλα θα κάνουμε μια πολύ σημαντική παρατήρηση: Ας θυμηθούμε ότι αν ένα σημείο P κινείται κατά μήκος μιας ευθείας τότε το αντίστοιχο σημείο P΄ πάνω στην σφαίρα του Riemann κινείται πάνω σε κύκλο ο οποίος διέρχεται από το σημείο N. Καθώς το P κινείται «προς τα έξω» δηλαδή προς το ∞ τότε το P΄ πλησιάζει το N και η ευθεία NP΄ (στο $\mathbb{R}^3$) προσεγγίζει την εφαπτόμενη του κύκλου στο σημείο του N. Έτσι η εφαπτόμενη του κύκλου στο N και η αρχική ευθεία L θα πρέπει να είναι παράλληλες. Ας υποθέσουμε ότι οι C_1 και C_2 είναι καμπύλες του μιγαδικού επιπέδου που τέμνονται σε κάποιο σημείο P και ότι l_1 και l_2 είναι οι εφαπτόμενες στις C_1 και C_2 στο κοινό τους σημείο P (Εδώ ας θυμηθούμε ότι έχουμε ορίσει ως γωνία μεταξύ των C_1 και C_2 στο κοινό τους σημείο P την γωνία που σχηματίζεται από τις εφαπτόμενες τους l_1 και l_2 στο σημείο P). Οι καμπύλες της σφαίρας του Riemann οι οποίες αντιστοιχούν στις l_1 και l_2 είναι κύκλοι που διέρχονται από τον βόρειο πόλο N και έστω P΄ το σημείο πάνω στη σφαίρα το οποίο αντιστοιχεί στο P. Πρέπει να δείξουμε ότι η γωνία μεταξύ αυτών των κύκλων στο σημείο P΄ (δηλαδή η γωνία που σχηματίζεται από τις εφαπτόμενες ευθείες των κύκλων αυτών στο σημείο P΄) είναι ίση με την γωνία η οποία σχηματίζεται από τις ευθείες l_1 και l_2 στο P. Λόγω συμμετρίας η γωνία μεταξύ των δύο αυτών κύκλων στο σημείο P΄ είναι ίση με την γωνία που σχηματίζουν οι δύο κύκλοι στο άλλο σημείο τομής τους το οποίο είναι το σημείο N. Όπως όμως είδαμε λίγο πιο πάνω, οι ευθείες l_1 και l_2 που διέρχονται από το P είναι παράλληλες στις αντίστοιχες εφαπτόμενες ευθείες στο σημείο N. Έτσι η γωνία μεταξύ των κύκλων στο N πρέπει να είναι ίση με την αρχική γωνία μεταξύ των l_1 και l_2 στο P.

Σφαίρα του Riemann και αντιστροφή



Πιο πριν αποδείξαμε ότι η αντιστροφή διατηρεί το μέγεθος των γωνιών αλλά αντιστρέφει τον προσανατολισμό τους. Έχοντας μέχρι τώρα παρουσιάσει την σφαίρα του Riemann, μπορούμε πλέον να δείξουμε ότι υπάρχει μια οπτική γωνία υπό την οποία αυτό είναι επίσης αληθές και πάνω στην σφαίρα του Riemann. Είναι δε αληθές ακόμα και στην περίπτωση που οι γωνίες έχουν κορυφή στο κέντρο του κύκλου αντιστροφής ή ακόμα και στο ∞.

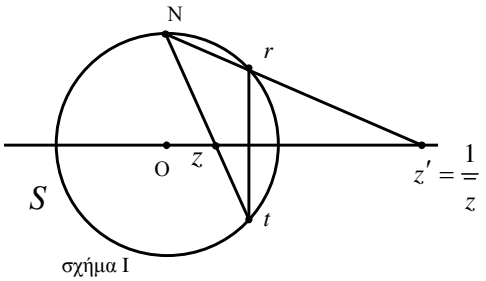
Για να διαπιστώσουμε κάτι τέτοιο ας θεωρήσουμε δύο ευθείες l_1 και l_2 οι οποίες τέμνονται στο κέντρο Α του κύκλου αντιστροφής.
Οι αντίστοιχες επεκτεταμένες ευθείες $l_1 \cup \{\infty\}$ και $l_2 \cup \{\infty\}$ τέμνονται πάλι στο σημείο ∞.
Στην σφαίρα του Riemann αυτές οι επεκτεταμένες ευθείες γίνονται οι κύκλοι C_1 και C_2 οι οποίοι τέμνονται στον βόρειο πόλο και στο σημείο Α΄ το οποίο είναι το αντίστοιχο του Α. Μέσω της αντιστροφής κάθε μια από αυτές τις επεκτεταμένες ευθείες απεικονίζεται στον εαυτό της οπότε και οι κύκλοι C_1 και C_2 απεικονίζονται στον εαυτό τους. Ας σημειωθεί ωστόσο ότι τα σημεία Α΄ και Ν είναι το ένα αντίστοιχο του άλλου οπότε και οι γωνίες Α΄ και Ν είναι επίσης η μια αντίστοιχη της άλλης. Λόγω συμμετρίας αυτές οι γωνίες είναι ίσες σε μέγεθος αλλά αντίθετου προσανατολισμού. Έτσι με δεδομένο ότι ερμηνεύουμε την γωνία μεταξύ καμπυλών στο ∞ ως την αντίστοιχη γωνία πάνω στην σφαίρα του Riemann μπορούμε να συμπεράνουμε ότι πράγματι αυτά που διατυπώσαμε για το μέγεθος των γωνιών ισχύουν για όλο το $\hat{\mathbb{C}}$.
Τέλος ας υποθέσουμε ότι Κ είναι η σφαίρα που έχει κέντρο το βόρειο πόλο Ν της σφαίρας S και τέμνει την σφαίρα S κατά μήκος του ισημερινού της (ο μοναδιαίος κύκλος του μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{C}$). Το σχήμα δείχνει μια κατακόρυφη τομή των K, S και του μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{C}$ που διέρχεται από το βόρειο πόλο Ν και τον πραγματικό άξονα. Ολόκληρη η τρισδιάστατη εικόνα μπορεί να αποκτηθεί με την περιστροφή του σχήματος αυτού ως προς την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Ν και S. Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η Κ είναι σφαίρα ακτίνας $\sqrt{2}$ και κέντρου στο Ν. Η στερεογραφική προβολή είναι όπως πολύ εύκολα διαπιστώνεται ο περιορισμός στο $\mathbb{C}$ ή στην S της αντιστροφής ως προς την σφαίρα Κ.
Με άλλα λόγια αν α είναι ένα σημείο του $\mathbb{C}$ και α' είναι η στερεογραφική προβολή του πάνω στην σφαίρα S τότε $a' = I_K(a)$ και $a = I_K(a')$



Μεταφέροντας τις μιγαδικές συναρτήσεις στη σφαίρα του Riemann.

Η στερεογραφική προβολή μας δίνει την δυνατότητα της μεταφοράς των δράσεων των μιγαδικών συναρτήσεων στη σφαίρα του Riemann (σχετική νύξη κάναμε και πιο πριν, όταν αναφερθήκαμε κατά την αντιστροφή στο μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$, στην διατήρηση των αντίστοιχων γωνιών και πάνω στη σφαίρα του Riemann - σελίδα 96-).
Αν δοθεί μια μιγαδική απεικόνιση $z \to w = f(z)$ του μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{C}$ στον εαυτό του μπορούμε να πάρουμε την αντίστοιχη απεικόνιση $z' \to w'$ της σφαίρας S στον εαυτό της με z', w' να είναι οι στερεογραφικές εικόνες των z, w. Μπορούμε να πούμε ότι η απεικόνιση $z \to w$ του μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{C}$ παράγει την απεικόνιση $z' \to w'$ της σφαίρας S.
Για παράδειγμα ας δούμε τι γίνεται αν μεταφέρουμε την απεικόνιση $f(z) = \bar{z}$ στην σφαίρα S. Προφανώς αυτό που συμβαίνει είναι ότι: Η απεικόνιση $f(z) = \bar{z}$ του μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{C}$ παράγει μια ανάκλαση της σφαίρας του Riemann ως προς το κατακόρυφο επίπεδο του $\mathbb{C}$ το οποίο διέρχεται από τον πραγματικό άξονα. Ως επόμενο παράδειγμα ας

θεωρήσουμε την απεικόνιση $f(z)=\frac{1}{\bar{z}}$ η οποία είναι αντιστροφή ως προς τον μοναδιαίο κύκλο c.



σχήμα I

Το σχήμα I δείχνει μια κατακόρυφη τομή της σφαίρας S που διέρχεται από το N καθώς και από το σημείο z του μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{C}$.
Το σχήμα δείχνει ένα αναπάντεχο αποτέλεσμα: Η αντιστροφή του μιγαδικού επιπέδου ως προς τον μοναδιαίο κύκλο παράγει μια ανάκλαση της σφαίρας S του Riemann ως προς το επίπεδο το οποίο έχει τομή με την σφαίρα S τον ισημερινό της (δηλαδή το μιγαδικό επίπεδο)

Για να δούμε πιο αναλυτικά αυτήν την πρόταση πρέπει να παρατηρήσουμε ότι τα σημεία z και z' δεν είναι απλώς συμμετρικά ως προς τον μοναδιαίο κύκλο (βλέποντας τα πράγματα από την δισδιάστατη άποψή) αλλά είναι επίσης συμμετρικά (με την τρισδιάστατη οπτική) και ως προς την σφαίρα S. Γνωρίζουμε όμως ότι αν K είναι μια σφαίρα ή ένα επίπεδο και M, N είναι συμμετρικά μεταξύ τους σημεία ως προς K, τότε μέσω μιας οποιασδήποτε τρισδιάστατης ανάκλασης ως προς ένα επίπεδο ή μια σφαίρα P, οι εικόνες των M, N είναι και πάλι συμμετρικά σημεία ως προς την εικόνα K΄ του K.
Γυρίζοντας πάλι στο παρόν πρόβλημα και επειδή έχουμε ότι τα σημεία z και z' είναι συμμετρικά ως προς την σφαίρα S τότε οι στερεογραφικές τους προβολές $t=I_K(z)$ και $r=I_K(z')$ θα είναι συμμετρικές ως προς την $I_K(S)$. Όμως $I_K(S)=\mathbb{C}$ όπου $\mathbb{C}$ είναι το μιγαδικό επίπεδο[3].
Με τον συνδυασμό των πιο πάνω αποτελεσμάτων μπορούμε να βρούμε τώρα το αποτέλεσμα της μιγαδικής αντιστροφής στην σφαίρα S του Riemann. Στο μιγαδικό επίπεδο γνωρίζουμε ότι η απεικόνιση $z\to\frac{1}{z}$ είναι ισοδύναμη με την σύνθεση της αντιστροφής $I(z)=\frac{1}{\bar{z}}$ ως προς τον μοναδιαίο κύκλο με την $f(z)=\bar{z}$. Η παραγόμενη απεικόνιση στην σφαίρα του Riemann είναι ως εκ τούτου η σύνθεση δύο ανακλάσεων σε κάθετα επίπεδα που διέρχονται από τον πραγματικό άξονα (το ένα επίπεδο κατακόρυφο και το άλλο οριζόντιο). Όμως δεν είναι και πολύ δύσκολο να δει κανείς ότι το συνδυαστικό αποτέλεσμα δύο διαδοχικών ανακλάσεων της σφαίρας S σε δύο κάθετα επίπεδα που διέρχονται από τον πραγματικό άξονα είναι μια στροφή της σφαίρας γύρω από τον πραγματικό άξονα και κατά γωνία π.
Έτσι έχουμε το εξής συμπέρασμα:
Η απεικόνιση $z\to\frac{1}{z}$ του μιγαδικού επιπέδου παράγει μια στροφή της σφαίρας του Riemann γύρω από τον πραγματικό άξονα κατά γωνία π. Ας ξαναθυμηθούμε ότι το σημείο ∞ καθορίζεται από την ιδιότητα ότι απεικονίζεται στο 0 και αντιστρόφως, μέσω της μιγαδικής αντιστροφής $z\to\frac{1}{z}$.Το πιο πάνω συμπέρασμα λοιπόν δείχνει την ορθότητα της ταύτισης του N με το σημείο στο άπειρο διότι το σημείο 0 στο μιγαδικό επίπεδο αντιστοιχεί στον νότιο

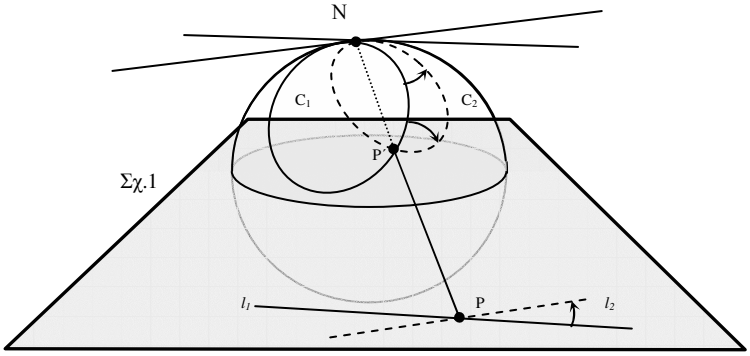
---

[3] Η K είναι η σφαίρα ακτίνας $\sqrt{2}$ και κέντρου στο N. Η στερεογραφική προβολή είναι ο περιορισμός στο $\mathbb{C}$ ή στην S της αντιστροφής ως προς K.
Με άλλα λόγια αν *α* είναι ένα σημείο του C και *α΄* είναι η στερεογραφική προβολή του πάνω στην σφαίρα S τότε $a'=I_K(a)$ και $a=I_K(a')$

πόλο S της σφαίρας S και η στροφή κατά π γύρω από τον πραγματικό άξονα αντιστοιχεί το S με το N .

Συμπεριφορά των συναρτήσεων στο άπειρο

Η γωνία που έχουμε σχεδιάσει στο σχήμα 1 και πιο συγκεκριμένα στο σημείο P (με φορά από την "*συνεχή*" καμπύλη προς την "*διακεκομμένη*") είναι θετική γιατί βλέποντάς την από πάνω από το επίπεδο $\mathbb{C}$ είναι αντίθετης φοράς από την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού. Κοιτώντας ωστόσο την γωνία στο σημείο P΄ (από την "*συνεχή*" καμπύλη προς την "*διακεκομμένη*") αυτή είναι αρνητική αφού, όπως την έχουμε σχεδιάσει, κοιτώντας την από πάνω από το επίπεδο $\mathbb{C}$ και έξω από την σφαίρα, έχει φορά η οποία συμφωνεί με την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού. Αν όμως δούμε την γωνία αυτή από μέσα από την σφαίρα τότε αυτή είναι θετική, οπότε θα έχουμε τον εξής ορισμό: Αν καθορίσουμε την φορά μιας γωνίας ανάλογα με το πως αυτή φαίνεται σε έναν παρατηρητή *όταν αυτός βρίσκεται στην αρχή O του μιγαδικού επίπεδου (στο εσωτερικό της σφαίρας* S *)* τότε η στερεογραφική προβολή είναι *σύμμορφη* απεικόνιση.



Ας υποθέσουμε ότι δύο καμπύλες στο $\mathbb{C}$ εκτείνονται σε αυθαίρετα μεγάλη απόσταση από την αρχή.
Κάποιος θα μπορούσε αυθαίρετα να πει ότι αυτές οι δύο καμπύλες τέμνονται στο άπειρο.
Στην σφαίρα S η τομή στο άπειρο μεταφράζεται σε κάτι συγκεκριμένο που είναι η τομή στον βόρειο πόλο N οπότε αν η κάθε μια από τις καμπύλες φτάνει στο N από μια καλά ορισμένη διεύθυνση τότε μπορούμε να καθορίσουμε μια γωνία τομής στο ∞.
Για παράδειγμα, στο σχήμα 1 υποδεικνύεται ότι αν δύο ευθείες γραμμές τέμνονται σε ένα πεπερασμένο σημείο και σχηματίζουν μια γωνία α στο σημείο αυτό, τότε θα τέμνονται για δεύτερη φορά στο άπειρο και θα σχηματίζουν εκεί μια γωνία –α.
Μεταφέροντας μια μιγαδική συνάρτηση στην σφαίρα του Riemann κάποιος έχει την δυνατότητα να εξετάσει την συμπεριφορά της στο άπειρο ακριβώς όπως θα μπορούσε να το κάνει και σε οποιοδήποτε άλλο σημείο.
Πιο συγκεκριμένα θα μπορούσε κάποιος να ερευνήσει αν μια τέτοια συνάρτηση διατηρεί την γωνία ανάμεσα σε δύο καμπύλες που διέρχονται από το άπειρο. Για παράδειγμα η συνάρτηση $z \to \frac{1}{z}$ διατηρεί τις γωνίες στο N και έτσι είναι σύμμορφη στο άπειρο (πράγμα που προκύπτει από το ότι έχουμε δείξει ότι η απεικόνιση $z \to \frac{1}{z}$ του μιγαδικού επιπέδου παράγει μια στροφή της σφαίρας του Riemann γύρω από τον πραγματικό άξονα κατά γωνία π). Με την ίδια λογική αυτή η στροφή της σφαίρας S θα διατηρεί επίσης την γωνία μεταξύ δύο καμπυλών που διέρχονται από το ιδιάζον σημείο z=0 του μετασχηματισμού $z \to \frac{1}{z}$ έτσι η μιγαδική αντιστροφή είναι σύμμορφή εκεί επίσης. Με λίγα λόγια η μιγαδική αντιστροφή είναι σύμμορφη σε όλο το επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο.

Σε αυτό το κεφάλαιο διαπιστώσαμε ότι βόλευε να βλέπουμε κάθε συνάρτηση $z \to w$, ως μια συνάρτηση που απεικονίζει το μιγαδικό επίπεδο στον εαυτό του και στο πιο πάνω παράδειγμα, ερμηνεύσαμε με παρόμοιο τρόπο την απεικόνιση $z' \to w'$,που παράγεται από την $z \to w$, ως απεικόνιση που αντιστοιχίζει τα σημεία της σφαίρας S σε σημεία της ίδιας σφαίρας S. Όμως πολλές φορές είναι πολύ πιο βολικό να θεωρούμε ότι οι απεικονίσεις αυτές απεικονίζουν τα σημεία του z - επιπέδου σε μια δεύτερη *κόπια* το μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{C}$ το οποίο ας ονομάσουμε w-επίπεδο. Συνεχίζοντας στο ίδιο πνεύμα προκύπτει ότι η παραγόμενη απεικόνιση $z' \to w'$ μπορεί να θεωρηθεί ότι απεικονίζει τα σημεία μιας σφαίρας, την οποία ας ονομάσουμε z-σφαίρα, στα σημεία μιας άλλης σφαίρας, την οποία ας ονομάσουμε w – σφαίρα.

Ας δούμε το επόμενο παράδειγμα:

Ας θεωρήσουμε την απεικόνιση $z \to w = z^n$ όπου n είναι ένας θετικός ακέραιος.

Το σχήμα 2α (περίπτωση n=2), δείχνει τη απεικόνιση μέσω της $z \to w = z^2$, ενός πλέγματος από μικρά 'τετράγωνα' τα οποία γειτονεύουν με τον μοναδιαίο κύκλο και περιορίζονται από δύο ημιευθείες οι οποίες σχηματίζουν γωνία θ μεταξύ τους.

Οι εικόνες αυτών των τετραγώνων στο w–επίπεδο είναι και πάλι σχεδόν «τετράγωνα» διότι η απεικόνιση $z \to w = z^n$ είναι μια σύμμορφη απεικόνιση (η απόδειξη η οποία στην ουσία στηρίζεται στο να δείξουμε ότι μια απεικόνιση είναι σύμμορφη όταν κάθε απειροστό σχήμα απεικονίζεται σε ένα όμοιο απειροστό σχήμα παραλείπεται).

Η στερεογραφική προβολή είναι σύμμορφη, οπότε περιμένουμε πως όταν μεταφέρουμε το πλέγμα από το z - επίπεδο στην z - σφαίρα το αποτέλεσμα θα είναι και πάλι ένα πλέγμα από τετράγωνα.

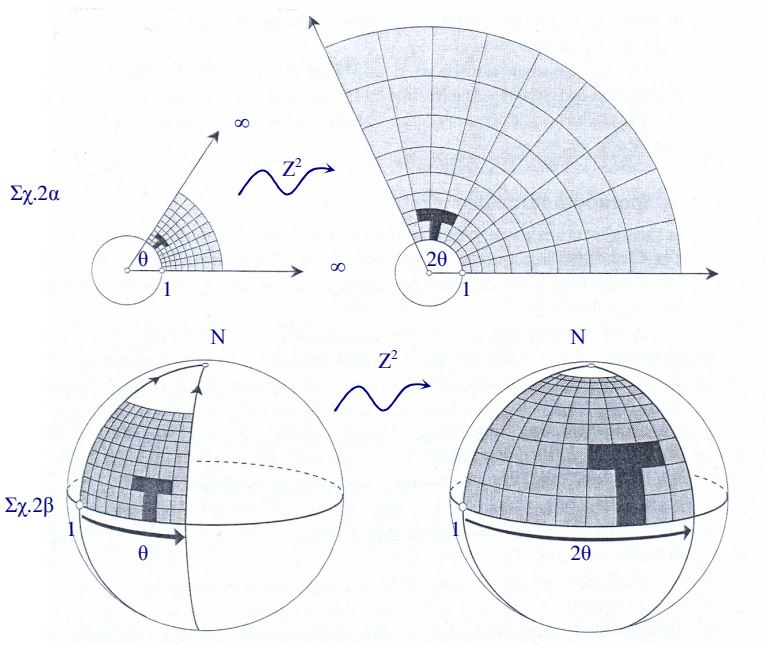
Τη περιγραφή αυτή μπορούμε να την δούμε με ένα σχήμα (σχήμα 2β) .Το σχήμα 2β δείχνει το ίδιο φαινόμενο καθώς περνάμε από το πλέγμα εικόνα του w- επίπέδου στο πλέγμα εικόνα της w- σφαίρας.

Κάθε σύμμορφη απεικόνιση του μιγαδικού επιπέδου θα παράγει μια σύμμορφη απεικόνιση της σφαίρας S η οποία θα απεικονίσει ένα πλέγμα από απειροστά τετράγωνα σε ένα άλλο πλέγμα από απειροστά τετράγωνα.

Το σχήμα 2 δεν δείχνει μόνο την συμμορφικότητα της $z \to w = z^n$ αλλά δίνει επίσης και δείγματα της ύπαρξης σημείων που το σύμμορφο σπάει.

Η γωνία θ στην αρχή Ο των αξόνων διπλασιάζεται. Γενικά στην περίπτωση της απεικόνισης $z \to w = z^n$ η γωνία στην αρχή πολλαπλασιάζεται με n. Γενικά όταν η κατά τα άλλα σύμμορφη απεικόνιση σπάει σε ένα σημείο P τότε το σημείο P καλείται ιδιάζων σημείο της απεικόνισης. Μπορούμε να πούμε ότι το σημείο 0 είναι ένα ιδιάζων σημείο της απεικόνισης $z \to w = z^n$

.



Αν περιοριστούμε στο μιγαδικό επίπεδο το μοναδικό ιδιάζων σημείο είναι το 0.
Αν όμως στρέψουμε το ενδιαφέρον μας στην απεικόνιση που παράγεται από την $z \to w = z^n$ πάνω στην σφαίρα S τότε στο επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο υπάρχει και ένα δεύτερο σημείο το οποίο είναι ιδιάζων σημείο: αυτό το σημείο είναι το σημείο στο άπειρο.
Στο σημείο αυτό οι γωνίες πολλαπλασιάζονται με τον θετικό ακέραιο n όπως ακριβώς γίνεται και στο σημείο 0. Έτσι για να έχουμε περισσότερη ακρίβεια από πριν μπορούμε να πούμε ότι η συνάρτηση $z \to w = z^n$ είναι μια σύμμορφη απεικόνιση η οποία έχει δύο ιδιάζοντα σημεία το 0 και το ∞. Στα επόμενα θα συζητήσουμε πως η συμπεριφορά μις μιγαδικής απεικόνισης στο άπειρο μπορεί να ερευνηθεί αλγεβρικά. Η μιγαδική αντιστροφή περιστρέφει την σφαίρα S έτσι ώστε ένα γειτονικό σημείο του N=∞ να γίνεται γειτονικό σημείο του S=0. Έτσι το να εξετάσουμε την συμπεριφορά κοντά στο άπειρο θα πρέπει πρώτα να εφαρμόσουμε μιγαδική αντιστροφή και κατόπιν να εξετάσουμε την γειτονιά της αρχής.
Αλγεβρικά κάτι τέτοιο σημαίνει ότι για να εξετάσουμε την συμπεριφορά της $f(z)$ στο άπειρο θα πρέπει να εξετάσουμε την συμπεριφορά της $F(z) = f(\frac{1}{z})$ στην αρχή.

Για παράδειγμα αν $f(z) = \frac{(z+1)^3}{(z^5 - z)}$ τότε $F(z) = \frac{z^2(1+z)^3}{1-z^4}$ η οποία έχει διπλή ρίζα στο 0.

Έτσι αντί να πούμε απλώς ότι $f(z)$ τείνει στο μηδέν ακριβώς όπως και το $\frac{1}{z^2}$ καθώς το z τείνει στο άπειρο, μπορούμε να πούμε τώρα (με μεγαλύτερη ακρίβεια κατά κάποιον τρόπο) ότι η $f(z)$ έχει μια διπλή ρίζα στο $z = \infty$.

Γεωμετρία της αντιστροφής κατά Klein

Ένας από τους βασικούς σκοπούς αυτής της εργασίας είναι και η εισαγωγή μιας γεωμετρίας, η οποία είναι γνωστή με το όνομα γεωμετρία της αντιστροφής (inversive geometry) την οποία θα χρησιμοποιούμε για να μελετήσουμε τις ιδιότητες των κύκλων των ευθειών και των γωνιών.
Ας θυμηθούμε ότι σύμφωνα με τον Klein μια γεωμετρία έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

- ένα χώρο ο οποίος αποτελείται από σημεία
- Μια ομάδα μετασχηματισμών η οποία δρα στο χώρο αυτό

Μια γεωμετρία χρησιμοποιείται για την μελέτη των ιδιοτήτων των σχημάτων του χώρου στον οποίο αναφέρεται, οι οποίες όμως μένουν αναλλοίωτες από τους μετασχηματισμούς της.
Για παράδειγμα η ευκλείδεια γεωμετρία χρησιμοποιείται για την μελέτη των ιδιοτήτων του $\mathbb{R}^2$ οι οποίες μένουν αναλλοίωτες κάτω από τις ισομετρίες του $\mathbb{R}^2$. Ιδιότητες που μένουν αναλλοίωτες κάτω από τους μετασχηματισμούς αυτούς είναι η απόσταση και οι γωνίες.
Επειδή κάθε ισομετρία του $\mathbb{R}^2$ μπορεί να γραφεί ως σύνθεση ανακλάσεων λογικό είναι λοιπόν να σκεφτούμε ότι η ομάδα μετασχηματισμών η οποία συνδέεται με την Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι η ομάδα του αποτελείται από *όλες τις δυνατές συνθέσεις ανακλάσεων*.
Κατ΄ αναλογία με όσα είπαμε για τους μετασχηματισμούς της Ευκλείδειας γεωμετρίας μπορούμε να προχωρήσουμε για να ορίσουμε και τους μετασχηματισμούς της νέας γεωμετρίας, δηλαδή της γεωμετρίας της αντιστροφής. Στην θέση όμως *όλων των συνθέσεων των ανακλάσεων* - που συνδέονται με την Ευκλείδεια γεωμετρία - θα έχουμε τις *συνθέσεις όλων των αντιστροφών*.

Ορισμός:

Ένας μετασχηματισμός $t:\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$ είναι ένας μετασχηματισμός αντιστροφής (inversive transformation) αν αυτός ο μετασχηματισμός μπορεί να εκφραστεί ως σύνθεση αντιστροφών (inversions).
Για παράδειγμα η επεκτεταμένη συνάρτηση του αντιστρόφου (extended reciprocal function) είναι ένας μετασχηματισμός αντιστροφής διότι μπορεί να εκφραστεί ως σύνθεση $t_2\circ t_1$ όπου t_1 είναι η αντιστροφή (inversion) ως προς τον μοναδιαίο κύκλο και t_2 είναι αντιστροφή (inversion) ως προς τον πραγματικό άξονα.
Ομοίως όλες οι επεκτεταμένες γραμμικές συναρτήσεις (extended linear functions) μπορούν να εκφραστούν ως συνθέσεις αντιστροφών οπότε είναι και αυτές μετασχηματισμοί αντιστροφής. Έτσι έχουμε το εξής θεώρημα: Η επεκτεταμένη συνάρτηση αντιστρόφου (extended reciprocal function) καθώς και όλες οι επεκτεταμένες γραμμικές συναρτήσεις (extended linear functions) είναι μετασχηματισμοί αντιστροφής.
Επειδή κάθε αντιστροφή διατηρεί το μέγεθος των γωνιών και απεικονίζει γενικευμένους κύκλους σε γενικευμένους κύκλους το ίδιο πρέπει να είναι αληθές και για όλες τις συνθέσεις των αντιστροφών. Έτσι έχουμε το δεύτερο συμπέρασμα:
Οι μετασχηματισμοί της αντιστροφής διατηρούν το μέγεθος των γωνιών και απεικονίζουν γενικευμένους κύκλους σε γενικευμένους κύκλους (βασικές ιδιότητες των μετασχηματισμών αντιστροφής).
Για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε τους μετασχηματισμούς αντιστροφής ώστε να καθορίσουμε την αντίστοιχη γεωμετρία πρέπει να ελέγξουμε αν πράγματι οι μετασχηματισμοί αυτοί συνιστούν ομάδα (group).
Θεώρημα 3:
Το σύνολο των μετασχηματισμών αντιστροφής αποτελεί μια ομάδα ως προς την πράξη της σύνθεσης συναρτήσεων.
Απόδειξη:
Πρέπει να ελέγξουμε αν ικανοποιούνται τα τέσσερα αιτήματα τα οποία μορφοποιούν μια ομάδα:

G1 (Closure) κλειστότητα:

Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε δύο μετασχηματισμούς αντιστροφής τους οποίους ας ονομάσουμε r και s. Μπορούμε να γράψουμε

$$r=t_1\circ t_2\circ t_3\circ t_4\ldots t_k$$

και

$$s=t_{k+1}\circ t_{k+2}\circ t_{k+3}\circ t_{k+4}\ldots t_n$$

όπου οι $t_i \quad i=1,2,3,...,k,k+1,k+2,\ldots n$ είναι όλες αντιστροφές.
Τότε η

$$r\circ s=\left(t_1\circ t_2\circ t_3\circ t_4\ldots t_k\right)\circ\left(t_{k+1}\circ t_{k+2}\circ t_{k+3}\circ t_{k+4}\ldots t_n\right)$$

είναι σύνθεση αντιστροφών και ως εκ τούτου ένας μετασχηματισμός αντιστροφής.

G2 ταυτότητα- ταυτοτικό στοιχείο (identity):

Το ταυτοτικό στοιχείο για την σύνθεση των συναρτήσεων είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός ο οποίος δίνεται από τον τύπο : $t(z)=z \quad z\in\widehat{\mathbb{C}}$.
Αυτός ο μετασχηματισμός είναι πράγματι ένας μετασχηματισμός αντιστροφής αφού μπορεί να γραφεί ως:
$t=s\circ s$ όπου s είναι η αντιστροφή ως προς τον μοναδιαίο κύκλο.

G3 αντίστροφο στοιχείο (inverses):

Έστω t είναι ένας μετασχηματισμός αντιστροφής.

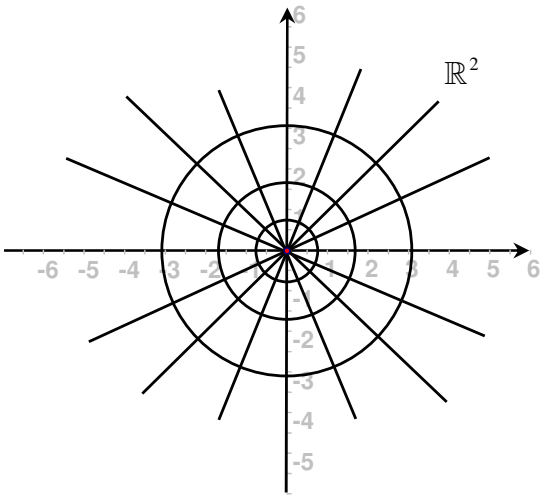
Τότε μπορούμε να γράψουμε:
$t = t_1 \circ t_2 \circ t_3 \circ t_4 .... \circ t_n$ όπου $t_1, t_2, t_3, t_4, ..., t_n$ είναι αντιστροφές.
Όπως πολύ εύκολα μπορούμε να συμπεράνουμε η t έχει αντίστροφή την:
$t^{-1} = t_n^{-1} \circ t_{n-1}^{-1} \circ t_{n-2}^{-1} \circ t_{n-3}^{-1} .... \circ t_1^{-1} = t_n \circ t_{n-1} \circ t_{n-2} \circ t_{n-3} .... \circ t_1$

G4 μεταβατικότητα (assosiativity):

Η σύνθεση συναρτήσεων είναι πάντα μεταβατική.
Επειδή λοιπόν και οι τέσσερις ιδιότητες που πρέπει να χαρακτηρίζουν μια ομάδα ισχύουν, άρα οι μετασχηματισμοί αντιστροφής σχηματοποιούν μια ομάδα ως προς την πράξη της σύνθεσης συναρτήσεων.
Έχοντας δείξει ότι οι μετασχηματισμοί αντιστροφής σχηματοποιούν μια ομάδα, το επόμενο βήμα που μένει να κάνουμε, είναι να χρησιμοποιήσουμε αυτούς τους μετασχηματισμούς για να καθορίσουμε την αντίστοιχη γεωμετρία.
Αλλά ποίος να είναι άραγε ο χώρος για αυτήν την γεωμετρία;
Αφού οι μετασχηματισμοί αντιστροφής δρουν πάνω στον $\widehat{\mathbb{C}}$ αυτός ο χώρος πρέπει να είναι αναγκαστικά ο $\widehat{\mathbb{C}}$.
Ένα άλλο ερώτημα που πρέπει να απαντηθεί είναι ποια θα είναι τα σχήματα αυτού του χώρου;
Ακριβώς όπως στην περίπτωση των σχημάτων του $\mathbb{R}^2$,τα οποία είναι τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$, έτσι και στη περίπτωση του $\widehat{\mathbb{C}}$, τα σχήματα αυτού του χώρου πρέπει να είναι και πάλι τα υποσύνολα του.
Έτσι οι κύκλοι και οι επεκτεταμένες ευθείες είναι παραδείγματα σχημάτων του $\widehat{\mathbb{C}}$.
Μπορούμε τώρα να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό για την γεωμετρία της αντιστροφής:
Γεωμετρία της αντιστροφής είναι η μελέτη εκείνων των ιδιοτήτων των σχημάτων του $\widehat{\mathbb{C}}$ οι οποίες μένουν αναλλοίωτες κάτω από τους μετασχηματισμούς της αντιστροφής.

Σχέση της γεωμετρίας της Αντιστροφής με άλλες γεωμετρίες.

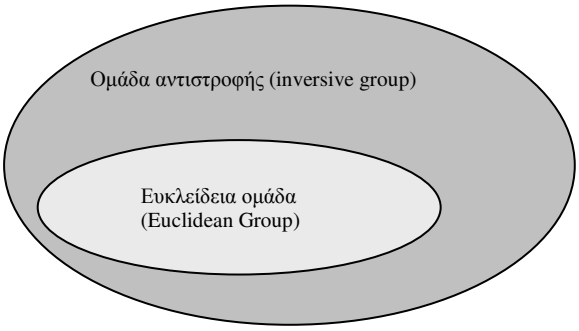
Παρόλο που η έννοια του σημείου στο άπειρο είναι κομβική για την γεωμετρία της αντιστροφής, όταν πρέπει να ερμηνεύσουμε αποτελέσματα σχετικά με τα σχήματα αυτής της γεωμετρίας, συχνά επιλέγουμε να περιορίσουμε το ενδιαφέρον μας και την μελέτη μας σε σημεία του $\mathbb{C}$.
Αν αγνοήσουμε λοιπόν το ∞, τα σημεία του $\mathbb{C}$ τα οποία μένουν μπορούν να θεωρηθούν ως σημεία του $\mathbb{R}^2$, και κάθε επεκτεταμένη ευθεία των σχημάτων, μπορεί να θεωρηθεί ως κανονική ευθεία.



Με αυτήν την έννοια τα σχήματα του $\mathbb{R}^2$ μπορούν να θεωρηθούν ως σχήματα του $\widehat{\mathbb{C}}$ και αντιστρόφως. Για παράδειγμα, το σχήμα που έχουμε σχεδιάσει δίπλα, είναι ένα σχήμα του $\mathbb{R}^2$. Αυτό αποτελείται από την οικογένεια κύκλων που έχουν κέντρο το O (origin) και την οικογένεια ευθειών που έχουν κέντρο πάλι το O.
Αν προσθέσουμε το ∞ στο σχήμα μας, τότε όλες οι ευθείες γίνονται γενικευμένοι κύκλοι και το σχήμα γίνεται σχήμα του $\widehat{\mathbb{C}}$. Το σχήμα αυτό θα το ξαναβρούμε μπροστά μας σε επόμενη παράγραφο.
Νωρίτερα είδαμε ότι κάθε Ευκλείδειος

μετασχηματισμός μπορεί να εκφραστεί ως σύνθεση ανακλάσεων.
Μια ανάκλαση μπορεί να ερμηνευθεί ως αντιστροφή, η οποία, σταθεροποιεί το σημείο στο άπειρο (λέγοντας σταθεροποιεί, εννοούμε ότι μέσω αυτής της αντιστροφής το σημείο στο άπειρο απεικονίζεται στον εαυτό του), οπότε μπορούμε να ερμηνεύσουμε κάθε ευκλείδειο μετασχηματισμό ως σύνθεση αντιστροφών και ως εκ τούτου ως έναν μετασχηματισμό αντιστροφής.

Μια άμεση συνέπεια της ερμηνείας που μόλις κάναμε είναι ότι όταν τα σχήματα του $\widehat{\mathbb{C}}$ θεωρούνται ως σχήματα του $\mathbb{R}^2$, τότε όλες οι ιδιότητες αντιστροφής (δηλαδή οι ιδιότητες εκείνες που είναι στόχος μελέτης της γεωμετρίας της αντιστροφής) των σχημάτων αυτών, γίνονται αμέσως ευκλείδειες ιδιότητες. Αυτό, όπως εύκολα γίνεται κατανοητό, προκύπτει από το ότι κάθε ιδιότητα που διατηρείται από όλους τους μετασχηματισμούς αντιστροφής, πρέπει να διατηρείται επίσης και από όλους τους Ευκλείδειους μετασχηματισμούς. Για παράδειγμα, το μέγεθος των γωνιών, είναι μια ιδιότητα που διατηρείται από τους μετασχηματισμούς αντιστροφής και βεβαίως είναι ιδιότητα, η οποία διατηρείται και από τους Ευκλείδειους μετασχηματισμούς.
Μια σχηματική αναπαράσταση που αναφέρεται στην σχέση μεταξύ της Ευκλείδειας γεωμετρίας και της Γεωμετρίας της αντιστροφής δίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Δεδομένου ότι έχουμε αγνοήσει το σημείο στο άπειρο η Ευκλείδεια ομάδα μπορεί να θεωρηθεί ως υποομάδα της ομάδας των μετασχηματισμών αντιστροφής.
Επειδή η Ευκλείδεια ομάδα είναι μικρότερη από την ομάδα των μετασχηματισμών αντιστροφής, συμπεραίνουμε ότι η Ευκλείδεια ομάδα, έχει περισσότερες ιδιότητες από την ομάδα των μετασχηματισμών αντιστροφής.
Ας βάλουμε τώρα στο πεδίο μελέτης μας και μια άλλη γεωμετρία, την οποία ονομάζουμε ομοπαραλληλική γεωμετρία (affine geometry[4]).
Κάθε Ευκλείδειος μετασχηματισμός είναι και ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός. Το ερώτημα που προκύπτει άμεσα στο σημείο αυτό είναι: ποια η σχέση μεταξύ των ομοπαραλληλικών μετασχηματισμών (affine transformations) και των μετασχηματισμών αντιστροφής (inversive transformations);
Μερικοί ομοπαραλληλικοί μετασχηματισμοί είναι μετασχηματισμοί αντιστροφής χωρίς να είναι Ευκλείδειοι μετασχηματισμοί.
Για παράδειγμα ας πάρουμε τον μετασχηματισμό $t(z) = 2z \qquad z \in \mathbb{C}$

---

[4] Ένας αφινικός μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^2$ είναι μια συνάρτηση $t:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ της μορφής:
$t(\mathbf{x})=\mathbf{Ax}+\mathbf{b}$ όπου $\mathbf{A}$ είναι ένας 2x2 πίνακας και $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$. Η ομάδα των αφινικών μετασχηματισμών διαμορφώνει την γεωμετρία εκείνη που ονομάζουμε αφινική ή συσχετισμένη ή ομοπαραλληλική γεωμετρία. Βασικές ιδιότητες των αφινικών μετασχηματισμών είναι οι εξής: 1. απεικονίζουν ευθείες γραμμές σε ευθείες γραμμές 2. απεικονίζουν παράλληλες ευθείες σε παράλληλες ευθείες. 3. διατηρούν το λόγο των μηκών των τμημάτων που βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία γραμμή.

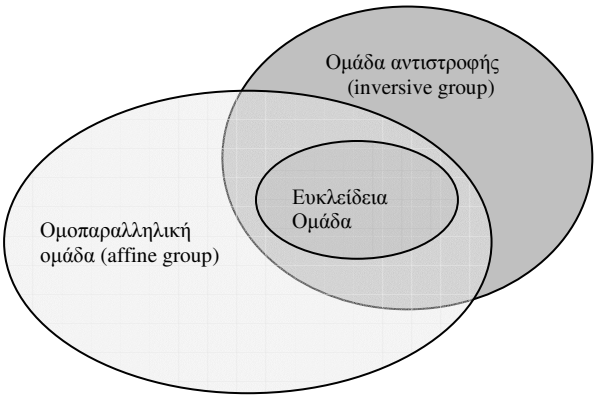
Αυτός ο μετασχηματισμός είναι ένας ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός αλλά από την άλλη δεν είναι Ευκλείδειος μετασχηματισμός. Όπως παρατηρούμε, μπορεί να γραφεί ως σύνθεση $t_2 \circ t_1$, όπου t_1 είναι αντιστροφή ως προς τον μοναδιαίο κύκλο και t_2 είναι αντιστροφή ως προς τον κύκλο $\{ |z| = \sqrt{2} : z \in \widehat{\mathbb{C}} \}$, πράγμα που μας δίνει το δικαίωμα να πούμε ότι είναι ένας μετασχηματισμός αντιστροφής με την γνωστή φυσικά προϋπόθεση αναφορικά με το ∞. Ωστόσο δεν είναι όλοι οι ομοπαραλληλικοί μετασχηματισμοί και μετασχηματισμοί αντιστροφής.

Για παράδειγμα αν πάρουμε τον μετασχηματισμό:

$$t(\mathrm{X}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{X} \qquad \left(\mathrm{X} \in \mathbb{R}^2 \right)$$

ο οποίος είναι γραμμικός ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός με μια σταθερή συντεταγμένη (shear).

Αυτός ο μετασχηματισμός δεν μπορεί να είναι μετασχηματισμός αντιστροφής από την στιγμή που δεν διατηρεί τις γωνίες. Αυτό που μπορούμε λοιπόν να συμπεράνουμε είναι ότι η ομάδα των ομοπαραλληλικών μετασχηματισμών περιέχει την ομάδα των Ευκλείδειων μετασχηματισμών όμως δεν περιέχει ούτε όμως και περιέχεται στην ομάδα των μετασχηματισμών αντιστροφής Την σχέση μεταξύ των τριών ομάδων μετασχηματισμών μπορούμε να την δούμε στο πιο κάτω διάγραμμα:



Μετασχηματισμοί του Möbius

> Ο August Ferdinand Möbius (1790-1868) ήταν ένας Γερμανός μαθηματικός ο οποίος δούλεψε πάνω στην Γεωμετρία καθώς και στη Τοπολογία. Εκτός από τους μετασχηματισμούς Möbius είναι γνωστός στην ευρύτερη μαθηματική κοινότητα και για την ανακάλυψη της όπως αποκαλείται, ταινίας του Möbius.

Παρά τον απλό τους χαρακτήρα, οι μετασχηματισμοί Möbius βρίσκονται στην καρδιά αρκετών περιοχών της τρέχουσας μαθηματικής έρευνας. Αυτό οφείλεται, κατά μεγάλο μέρος, στην στενή και πολλές φορές θαυμαστή σχέση τους με τις μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες. Επιπλέον, αυτοί οι μετασχηματισμοί, συνδέονται στενά με την θεωρία σχετικότητας του Einstein. Χωρίς να μπούμε σε λεπτομέρειες, αξίζει να αναφέρουμε δύο πράγματα πάνω σε αυτό. Σε αυτήν την θεωρία ο χρόνος T και οι καρτεσιανές συντεταγμένες (X,Y,Z) ενός γεγονότος, συνδυάζονται σε ένα τετραδιάστατο διάνυσμα χώρου-χρόνου (T,X,Y,Z). Τα

χωρικά συστατικά ενός τέτοιου διανύσματος δεν έχουν απόλυτη σημασία. Στρέφοντας το σύστημα συντεταγμένων έχουμε διαφορετικές συντεταγμένες (X΄,Y΄,Z΄) για το ίδιο σημείο στο χώρο. Αλλά αν δύο παρατηρητές διαλέξουν διαφορετικούς άξονες, αυτοί θα συμφωνήσουν παρ΄ όλα αυτά στο ότι έχουμε $X^2+Y^2+Z^2 = X'^2+Y'^2+Z'^2$, αφού αυτή η ισότητα αναπαριστά το τετράγωνο της απόστασης της αρχής του συστήματος από το εν λόγω σημείο. Σε αντίθεση με αυτά που είπαμε για τα χωρικά στοιχεία, έχουμε συνηθίσει να θεωρούμε τον χρόνο ως στοιχείο με απόλυτη σημασία, πράγμα που ο Einstein μέσω της θεωρίας του –και με επιβεβαίωση μέσω πολλών παραδειγμάτων- μας λέει ότι δεν συμβαίνει. Αν δύο (στιγμιαία ταυτόχρονοι) παρατηρητές είναι σε σχετική κίνηση μεταξύ τους, τότε αυτοί θα διαφωνούν για τους χρόνους στους οποίους τα γεγονότα συμβαίνουν. Επιπλέον αυτοί θα διαφωνούν και για την τιμή του $X^2+Y^2+Z^2$. Υπάρχει κάποια πλευρά του χώρου -χρόνου ως προς την οποία οι δύο παρατηρητές, εβρισκόμενοι σε σχετική κίνηση μεταξύ τους, θα συμφωνήσουν; Η απάντηση είναι θετική: κάνοντας την κατάλληλη επιλογή μονάδων έτσι ώστε η τιμή της ταχύτητας του φωτός να είναι 1, ο Einstein ανακάλυψε ότι και οι δύο παρατηρητές θα συμφωνούν για την τιμή: $T^2-(X^2+Y^2+Z^2) = T'^2-(X'^2+Y'^2+Z'^2)$. Ένας μετασχηματισμός Lorentz L είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός του χωροχρόνου (σε ένα 4x4 πίνακα) ο οποίος απεικονίζει την περιγραφή (T,X,Y,Z) του παρατηρητή για ένα γεγονός, στην περιγραφή ενός άλλου παρατηρητή (T΄,X΄,Y΄,Z΄). Τοποθετώντας το λίγο διαφορετικά ο L είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός που διατηρεί το $T^2-(X^2+Y^2+Z^2)$ πάνω στο οποίο και οι δύο παρατηρητές συμφωνούν.

Τώρα ας φανταστούμε ότι το κέντρο του χωροχρονικού συστήματος συντεταγμένων εκπέμπει μια δέσμη φωτός, μια σφαίρα δηλαδή, που το κέντρο της βρίσκεται στο κέντρο του χωροχρονικού συστήματος συντεταγμένων και της οποίας η ακτίνα αυξάνει με την ταχύτητα του φωτός. Αποδεικνύεται ότι κάθε συγκεκριμένος μετασχηματισμός Lorentz, είναι πλήρως καθορισμένος από το αποτέλεσμά που έχει στις συντεταγμένες των ακτινών φωτός αυτής της δέσμης. Εδώ είναι που ερχόμαστε στην επόμενη βασική ιδέα: Υπάρχει μια ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ αυτών των ακτινών φωτός και των μιγαδικών αριθμών. Ας δώσουμε μια συνοπτική περιγραφή για το πώς γίνεται κάτι τέτοιο: Επιλέγουμε μονάδες χώρου και χρόνου τέτοιες ώστε η ταχύτητα του φωτός να είναι 1. Μετά από μια μονάδα χρόνου, η συνεχώς διευρυνόμενη σφαίρα φωτός γίνεται η μοναδιαία σφαίρα. Τότε κάθε φωτόνιο του εκπεμπόμενου φωτός μπορεί να παρασταθεί με ένα σημείο πάνω στην σφαίρα του Riemann και έτσι, μέσω της στερεογραφικής προβολής, με έναν μιγαδικό αριθμό του επιπέδου. Αν ο μιγαδικός αριθμός έχει σφαιρικές πολικές συντεταγμένες (φ,θ), τότε ο εν λόγω μιγαδικός αριθμός είναι ο $z=\cot(\varphi/2)e^{i\theta}$. Έτσι κάθε μετασχηματισμός Lorentz του χωροχρόνου εισάγει μια συγκεκριμένη απεικόνιση του μιγαδικού επιπέδου. Τι είδος μιγαδικών απεικονίσεων παίρνουμε με αυτόν τον τρόπο; Η απάντηση είναι αρκετά εντυπωσιακή: Οι μιγαδικές απεικονίσεις που αντιστοιχούν στους μετασχηματισμούς Lorentz είναι μετασχηματισμοί Möbius. Αντίστροφα κάθε μετασχηματισμός Möbius του $\mathbb{C}$ παράγει έναν μοναδικό μετασχηματισμό Lorentz του χωροχρόνου. Εδώ τελειώνουμε αυτή την σύντομη αναφορά στην σχέση μετασχηματισμών Möbius και θεωρίας σχετικότητας.

Αξίζει όμως να αναφέρουμε ότι αυτή η σύνδεση με την θεωρία της σχετικότητας του Einstein έχει μελετηθεί με αξιοσημείωτη επιτυχία από τον Roger Penrose και τον Rindler (1984 κεφάλαιο 1). Εκεί μπορεί κάποιος να βρει πάρα πολλές λεπτομέρειες σχετικά με τα όσα περιγράφουμε πιο πάνω.

Έτσι παρόλο που πέρασαν πάνω από 150 χρόνια από την εποχή που μελετήθηκαν για πρώτη φορά οι διγραμμικοί μετασχηματισμοί (μετασχηματισμοί Möbius), πρέπει να πούμε ότι η πλούσια φλέβα γνώσης που αυτός αποκάλυψε, θα δώσει πάρα πολλά ακόμα, πριν φτάσει στο σημείο να εξαντληθεί.

Για να μπορέσουμε να διαπραγματευθούμε προβλήματα της γεωμετρίας τη αντιστροφής με αλγεβρικό τρόπο χρειαζόμαστε μια αναπαράσταση των μετασχηματισμών αντιστροφής.

Θα δείξουμε ότι κάθε μετασχηματισμός αντιστροφής έχει την μορφή $t(z) = M(z)$ ή την μορφή $t(z) = M(\overline{z})$ όπου M είναι ένας μετασχηματισμός του Möbius.

Ας ξεκινήσουμε με έναν ορισμό για τους μετασχηματισμούς αυτούς.

Ορισμός:

Ένας μετασχηματισμός του Möbius είναι μια συνάρτηση $M:\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$ της μορφής $M(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ όπου $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ και $ad-bc\neq 0$.

Αν $c=0$ τότε υιοθετούμε την σύμβαση: $M(\infty)=\infty$.

Αν $c\neq 0$ τότε πάλι υιοθετούμε την σύμβαση $M\left(-\dfrac{d}{c}\right)=\infty$ και $M\left(\infty\right)=\dfrac{a}{c}$.

Αξιοσημείωτες παρατηρήσεις:

1. Κάθε (επεκτεταμένη) γραμμική συνάρτηση είναι ένας μετασχηματισμός Möbius όπως πολύ εύκολα μπορούμε να δούμε θέτοντας $c=0$ και $d=1$.

Επίσης η (επεκτεταμένη) συνάρτηση του αντιστρόφου (με άλλα λόγια η μιγαδική αντιστροφή) είναι ένας μετασχηματισμός Möbius με $a=d=0$ και $b=c=1$.

2. Αν $c=0$ τότε ο τύπος για τον M γίνεται $M(z)=\left(\dfrac{a}{d}\right)z+\dfrac{b}{d}$.

Αυτή η μορφή ορίζει μια επεκτεταμένη γραμμική συνάρτηση διότι ο περιορισμός $ad-bc\neq 0$ εξασφαλίζει ότι και το a και το b είναι επίσης διάφορα από το μηδέν οπότε και το $\dfrac{a}{d}$ είναι διάφορο του μηδέν. Επίσης η σύμβαση $M(\infty)=\infty$ συμφωνεί με τον ορισμό της επεκτεταμένης γραμμικής συνάρτησης.

3. Ο περιορισμός $ad-bc\neq 0$ ισοδυναμεί με την σχέση $\dfrac{a}{c}\neq\dfrac{b}{d}$. Αυτός ο περιορισμός είναι ιδιαίτερα σημαντικός αφού έτσι εξασφαλίζεται ότι ο αριθμητής δεν είναι απλά ένα πολλαπλάσιο του παρονομαστή διότι, σε περίπτωση που κάτι τέτοιο συνέβαινε, η M θα ήταν μια σταθερή συνάρτηση.

Για παράδειγμα ας πάρουμε τον μετασχηματισμό $\dfrac{6iz+4i}{3z+2}$.

Έχουμε: $6i\cdot 2-4i\cdot 3=0$ και $\dfrac{6iz+4i}{3z+2}=2i$, δηλαδή σταθερή συνάρτηση.

Ας δούμε τώρα ένα παράδειγμα:

Α) Ποιος από τους πιο κάτω μετασχηματισμούς είναι ένας μετασχηματισμός Möbius;

$a)M(z)=\dfrac{5}{z}$ $\qquad b)M(z)=\dfrac{-z+2i}{3z-4i}$

$c)M(z)=-3z+\dfrac{i}{z}$ $\qquad d)M(z)=1+\dfrac{5}{z+2i}$

Β) Για εκείνους τους τύπους που είναι μετασχηματισμοί Möbius να δοθεί η εικόνα του ∞.

Λύση:

Α) Σε κάθε περίπτωση πρέπει να βρούμε αν ο τύπος είναι της μορφής $M(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ όπου $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ και $ad-bc\neq 0$ (1).

$a)$ Στη περίπτωση αυτή έχουμε έναν μετασχηματισμό Möbius. Έχει την μορφή (1) με $a=0,b=5,c=1,d=0$. Επίσης έχουμε ότι $ad-bc\neq 0$ αφού $ad-bc=5\neq 0$.

Από την σύμβαση που έχουμε δώσει στον ορισμό θα έχουμε: $M(\infty)=\dfrac{a}{c}=0$.

$b)$ Επίσης στην περίπτωση αυτή έχουμε έναν μετασχηματισμό Möbius. Έχει την μορφή (1) με $a=-1,b=2i,c=3,d=-4i$. Επίσης έχουμε ότι $ad-bc=4i-6i=2i\neq 0$.

Από την σύμβαση που έχουμε δώσει στον ορισμό θα έχουμε: $M(\infty)=\dfrac{a}{c}=-\dfrac{1}{3}$.

$c)$ Αυτός δεν είναι ένας μετασχηματισμός Möbius.

Προφανώς τον $M(z) = -3i + \frac{i}{z}$ μπορούμε να τον φέρουμε στην μορφή $M(z) = \frac{-3z^2 + i}{z + 0}$ ο οποίος δεν είναι της μορφής (1).

$d)$ Εδώ έχουμε και πάλι έναν μετασχηματισμό Möbius διότι μπορούμε την μορφή: $M(z) = 1 + \frac{5}{z + 2i}$ να την φέρουμε στην μορφή: $M(z) = \frac{(z + 2i) + 5}{z + 2i} = \frac{z + (5 + 2i)}{z + 2i}$.

που εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι είναι της μορφής (1) με:

$a = -1, b = 5 + 2i, c = 1, d = 2i$. Επίσης έχουμε ότι: $ad - bc = 4i - 6i = 2i \neq 0$.

Πριν προχωρήσουμε στην εξέταση των ιδιοτήτων των μετασχηματισμών Möbius θα αποδείξουμε ότι κάθε μετασχηματισμός Möbius είναι και μετασχηματισμός αντιστροφής.

Έχουμε λοιπόν το κάτωθι θεώρημα:

Θεώρημα:

Κάθε μετασχηματισμός Möbius είναι και μετασχηματισμός αντιστροφής (inversive transformation).

Απόδειξη:

Ας υποθέσουμε ότι M είναι ένας μετασχηματισμός Möbius που ορίζεται από τον τύπο: $M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ όπου $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ και $ad - bc \neq 0$.

Αν $c = 0$ τότε ο M είναι μια επεκτεταμένη γραμμική συνάρτηση και ως εκ τούτου είναι ένας μετασχηματισμός αντιστροφής.

Αν $c \neq 0$ τότε για $z \in \mathbb{C} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$ μπορούμε να γράψουμε:

$$M(z) = \frac{a(cz + d) - ad + bc}{c(cz + d)} = -\left(\frac{ad - bc}{c} \right)\left(\frac{1}{cz + d} \right) + \frac{a}{c}.$$

Σαν συνέπεια έχουμε ότι ο M μπορεί να εκφραστεί ως σύνθεση $t_3 \circ t_2 \circ t_1$ όπου t_2 είναι η επεκτεταμένη μιγαδική αντιστροφή (extended complex inversion, ή όπως ονομάζεται αλλιώς, extended reciprocal function) και t_1 , t_3 είναι επεκτεταμένες γραμμικές συναρτήσεις:

$$t_1(z) = \begin{cases} cz + d & \text{αν } z \neq \infty \\ \infty & \text{αν } z = \infty \end{cases} \quad \text{και} \quad t_3(z) = \begin{cases} -\left(\frac{ad - bc}{c} z \right) + \frac{a}{c} & \text{αν } z \neq \infty \\ \infty & \text{αν } z = \infty \end{cases}$$

Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει με τα σημεία ∞ και $-\frac{d}{c}$:

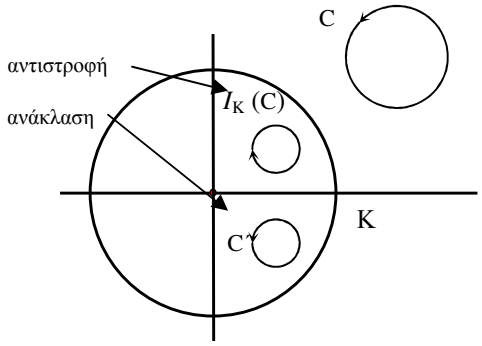
$$t_3 \circ t_2 \circ t_1(\infty) = t_3 \circ t_2(\infty) = t_3(0) = \frac{a}{c} = M(\infty).$$

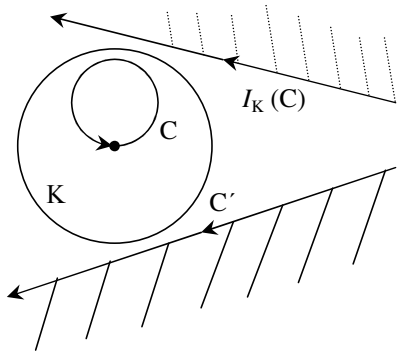
$$t_3 \circ t_2 \circ t_1\left(-\frac{d}{c} \right) = t_3 \circ t_2(0) = t_3(\infty) = \infty = M\left(-\frac{d}{c} \right).$$

Αφού η επεκτεταμένη γραμμική συνάρτηση και η επεκτεταμένη μιγαδική αντιστροφή (extended reciprocal function) είναι μετασχηματισμοί αντιστροφής, άρα και οι μετασχηματισμοί Möbius είναι μετασχηματισμοί αντιστροφής.

Επειδή οι μετασχηματισμοί Möbius είναι μετασχηματισμοί αντιστροφής πρέπει να διατηρούν το μέγεθος των γωνιών και να απεικονίζουν γενικευμένους κύκλους σε γενικευμένους κύκλους. Στο θεώρημα που προηγήθηκε αποδείξαμε ότι κάθε μετασχηματισμός Möbius είναι είτε μια επεκτεταμένη γραμμική συνάρτηση είτε σύνθεση δύο επεκτεταμένων γραμμικών συναρτήσεων και μιας επεκτεταμένης μιγαδικής αντιστροφής. Γνωρίζουμε όμως ότι κάθε

επεκτεταμένη γραμμική συνάρτηση καθώς και κάθε επεκτεταμένη μιγαδική αντιστροφή, διατηρούν και το μέγεθος και τον προσανατολισμό των γωνιών, άρα το ίδιο πρέπει να ισχύει και για τους μετασχηματισμούς Möbius.
Ενώ γνωρίζουμε ότι ένας γενικευμένος κύκλος απεικονίζεται σε έναν γενικευμένο κύκλο, δεν γνωρίζουμε τι συμβαίνει στους αντίστοιχους δίσκους που περιέχονται στους κύκλους αυτούς. Πρώτα ας φανταστούμε τον εαυτό μας να κινείται γύρω από ένα κύκλο C και με κατεύθυνση αντίθετη των δεικτών του ρολογιού. Η κίνηση μας δίνει στον C αυτό που λέμε θετικό προσανατολισμό. Από τις δύο περιοχές, που ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος χωρίζει το επίπεδο, ο δίσκος θεωρούμε ότι είναι η περιοχή που βρίσκεται προς τα αριστερά μας καθώς κινούμαστε πάνω στον κύκλο. Οι μεταφορές, οι στροφές και οι διαστολές, διατηρούν τον προσανατολισμό του κύκλου και απεικονίζουν το εσωτερικό του κύκλου στο εσωτερικό της εικόνας C΄ του κύκλου C.
Όμως το αποτέλεσμα της μιγαδικής αντιστροφής εξαρτάται από το αν ο κύκλος περιέχει την αρχή (origin). Αν ο κύκλος C δεν περιέχει την αρχή τότε ο κύκλος C΄ έχει τον ίδιο προσανατολισμό με τον κύκλο C και το εσωτερικό του κύκλου C απεικονίζεται στο εσωτερικό του κύκλου C΄.





Αν όμως ο κύκλος C περιέχει την αρχή τότε η εικόνα C΄ έχει τον αντίθετο προσανατολισμό και το εσωτερικό του C απεικονίζεται στο εξωτερικό του C΄. Αν ο κύκλος C περνάει από την αρχή τότε το εσωτερικό απεικονίζεται στο ημιεπίπεδο που βρίσκεται στα αριστερά της προσανατολισμένης γραμμής C΄.
Για να συνοψίσουμε:
Ένας μετασχηματισμός Möbius απεικονίζει έναν προσανατολισμένο κύκλο C σε έναν προσανατολισμένο κύκλο C΄ με τέτοιο τρόπο ώστε η περιοχή που βρίσκεται στα αριστερά του C να απεικονίζεται στην περιοχή στα αριστερά του C΄.

Αναπαράσταση μετασχηματισμών Möbius με χρήση πινάκων.

Ένας συγκεκριμένος μετασχηματισμός Möbius $M(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ *προσδιορίζεται* στην περίπτωση που οι a,b,c,d είναι γνωστοί αριθμοί. Αυτοί οι αριθμοί ονομάζονται συντελεστές του μετασχηματισμού Möbius. Αν μιλήσουμε με γεωμετρικούς όρους, αυτό θα μπορούσε να σημαίνει ότι για να προσδιορίσουμε έναν συγκεκριμένο μετασχηματισμό Möbius, μάλλον χρειάζεται να γνωρίζουμε τις εικόνες τεσσάρων σημείων.
Αυτό είναι λάθος όπως θα δούμε αμέσως πιο κάτω:
Αν k είναι ένας αυθαίρετος μη μηδενικός πραγματικός αριθμός τότε $M(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}=\dfrac{kaz+kb}{kcz+kd}$.

Με άλλα λόγια μόνο ο λόγος των συντελεστών έχει σημασία. Από την στιγμή λοιπόν που τρεις ακριβώς μιγαδικοί αριθμοί χρειάζονται για να ξέρουμε τον μετασχηματισμό - για παράδειγμα οι $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{d}$ - οδηγούμαστε στην εικασία ότι:

Υπάρχει μοναδικός μετασχηματισμός Möbius, που απεικονίζει οποιαδήποτε τρία σημεία, σε τρία, οποιαδήποτε άλλα σημεία. Κάτι τέτοιο θα αποδειχθεί αργότερα.

Σε προηγούμενη παράγραφο μελετήσαμε τους μετασχηματισμούς ομοιότητας. Αυτοί οι μετασχηματισμοί επίσης καθορίζονται από το αποτέλεσμα που έχουν σε τρία σημεία. Οι ομοιότητες μπορούν να εκφραστούν ως μιγαδικές συναρτήσεις της μορφής $f(z) = az + b$, οπότε είναι και αυτές, φυσικά πολύ απλής μορφής, μετασχηματισμοί Möbius. Ωστόσο, για να μπορεί να καθοριστεί μια ομοιότητα, πρέπει τα σημεία εικόνες να σχηματίζουν ένα τρίγωνο το οποίο είναι όμοιο με το αρχικό τρίγωνο (δηλαδή το τρίγωνο που σχηματίζεται από τα τρία αρχικά σημεία). Όμως στην περίπτωση των μετασχηματισμών Möbius δεν υπάρχει τέτοιος περιορισμός και αυτό είναι κάτι που οδηγεί σε πιο ευέλικτες μη Ευκλείδειες γεωμετρίες, στις οποίες ο μετασχηματισμός Möbius παίζει τον ρόλο της κίνησης.

Οι πιο ενδιαφέροντες τέτοιοι μετασχηματισμοί Möbius είναι αυτοί για τους οποίους ισχύει $ad - bc \neq 0$ (δηλαδή οι non singular μετασχηματισμοί Möbius). Αν για ένα μετασχηματισμό Möbius έχουμε $ad - bc = 0$ τότε ο μετασχηματισμός προκαλεί μια κατάρρευση όλου του επιπέδου σε ένα σημείο: το $\frac{a}{c}$.

Αν για ένα μη σταθερό (non singular) μετασχηματισμό Möbius πολλαπλασιάσουμε τους συντελεστές του με τον αριθμό $k = \pm\sqrt{ad - bc}$ τότε παίρνουμε $ad - bc = 1$. Σε τέτοια περίπτωση λέμε ότι έχουμε κανονικοποίηση του μετασχηματισμού Möbius.

Όταν μελετάμε τις ιδιότητες ενός γενικού μετασχηματισμού Möbius καλό είναι να χρησιμοποιούμε την κανονική του μορφή. Αν όμως εργαζόμαστε με ένα συγκεκριμένο μετασχηματισμό Möbius καλό είναι να μη τον κανονικοποιούμε.

Είναι αρκετά χρήσιμο να δούμε την σχέση μεταξύ μετασχηματισμών Möbius και πινάκων για να μπορέσουμε να μελετήσουμε κάποιες επιπλέον ιδιότητες των μετασχηματισμών αυτών.

Ας θυμηθούμε μερικά βασικά στοιχεία από την θεωρία των πινάκων.

Θα περιοριστούμε στο να αναφερθούμε μόνο σε πίνακες διάστασης 2×2 αφού θα εργαστούμε μόνο με πίνακες αυτής της μορφής.

Για τον πολλαπλασιασμό των πινάκων ισχύουν τα εξής:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}.$$

Για τον αντίστροφο ενός πίνακα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \text{αν} \quad ad - bc \neq 0.$$

Ορισμός:

Ας υποθέσουμε ότι M είναι ένας μετασχηματισμός Möbius που δίνεται μέσω του τύπου: $M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ όπου $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ και $ad - bc \neq 0$.

Τότε ο πίνακας

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, καλείται πίνακας του μετασχηματισμού M .

Σημείωση :

Κάθε πίνακας $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ο οποίος αντιστοιχεί σε ένα μετασχηματισμό Möbius M είναι αντιστρέψιμος πράγμα που άμεσα μπορούμε να συμπεράνουμε αφού $ad-bc\neq 0$.

Αν ένας πίνακας συνδέεται με κάποιον μετασχηματισμό Möbius, δεν είναι απαραίτητα και ο μοναδικός πίνακας που συνδέεται με αυτόν τον μετασχηματισμό.

Πράγματι ας θεωρήσουμε τους τύπους:

$M(z)=\dfrac{2z+i}{3z+2i}$ και $M(z)=\dfrac{2iz-1}{3iz-2}$.

Οι τύποι αυτοί ορίζουν τον ίδιο μετασχηματισμό Möbius M, αφού ο δεύτερος τύπος προκύπτει από τον πρώτο με πολλαπλασιασμό του αριθμητή και του παρονομαστή με την ίδια σταθερά. Στην συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε πολλαπλασιάσει με i.

Έτσι οι πίνακες:

$\begin{pmatrix} 2 & i \\ 3 & 2i \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 2i & -1 \\ 3i & -2 \end{pmatrix}$ συνδέονται και οι δύο με τον ίδιο μετασχηματισμό Möbius M .

Γενικότερα αν A είναι ένας πίνακας που συνδέεται με ένα μετασχηματισμό M τότε και κάθε πίνακας της μορφής cA $c\neq 0$ είναι επίσης ένας πίνακας που συνδέεται με τον μετασχηματισμό M . Αλλά και αντίστροφα κάθε πίνακας που συνδέεται με τον M έχει την μορφή cA $c\neq 0$.

Παράδειγμα:

Δίνονται τρεις πίνακες και τρεις μετασχηματισμοί Möbius:

$A_1=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $A_2=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -2i & -8 \end{pmatrix}$ $A_3=\begin{pmatrix} -4i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$M_1(z)=\dfrac{-3iz+2}{z-3i}$ $M_2(z)=\dfrac{-4i}{z}$ $M_3(z)=\dfrac{4iz}{z-4i}$

Για κάθε πίνακα από αυτούς να βρεθεί (φυσικά αν υπάρχει) ποιος είναι ο αντίστοιχος μετασχηματισμός Möbius.

Λύση

Ας πάρουμε τον πρώτο μετασχηματισμό Möbius : $M_1(z)=\dfrac{-3iz+2}{z-3i}$.

Κάθε πίνακας ο οποίος είναι μη μηδενικό πολλαπλάσιο του πίνακα $A=\begin{pmatrix} -3i & 2 \\ 1 & -3i \end{pmatrix}$ είναι και πίνακας του μετασχηματισμού αυτού.

Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει στοιχείο στον πίνακα Α το οποίο να ισούται με το μηδέν. Άρα κανένας από τους πίνακες που δίνονται δεν μπορεί να γραφεί ως μη μηδενικό πολλαπλάσιο του πίνακα Α οπότε κανένας από τους πίνακες A_i $i=1,2,3$ δεν συνδέεται με τον μετασχηματισμό $M_1(z)=\dfrac{-3iz+2}{z-3i}$

Για τον δεύτερο μετασχηματισμό Möbius : $M_2(z)=\dfrac{-4i}{z}$

Μπορούμε να πούμε ότι κάθε πίνακας ο οποίος είναι μη μηδενικό πολλαπλάσιο του πίνακα $A=\begin{pmatrix} 0 & -4i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ είναι και πίνακας του μετασχηματισμού αυτού.

Επειδή $iA = i\begin{pmatrix} 0 & -4i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ i & 0 \end{pmatrix} = A_1$, συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ i & 0 \end{pmatrix}$ είναι ο αντίστοιχος πίνακας του μετασχηματισμού $M_2(z) = \dfrac{-4i}{z}$.

Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο καταλήγουμε ότι ο μετασχηματισμός $M_3(z) = \dfrac{4iz}{z-4i}$ συνδέεται με τον πίνακα $A_2 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -2i & -8 \end{pmatrix}$.

Ένας ιδιαίτερα σημαντικός μετασχηματισμός του $\widehat{\mathbb{C}}$ είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός (identity transformation) ο οποίος ορίζεται από τον τύπο $t(z) = z \quad z \in \widehat{\mathbb{C}}$.

Ο μετασχηματισμός αυτός μπορεί να γραφεί στην μορφή $M(z) = \dfrac{z+0}{0z+1}$, οπότε είναι μετασχηματισμός Möbius.

Ένας πίνακας που αντιστοιχεί στον μετασχηματισμό αυτόν είναι και ο ταυτοτικός πίνακας $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Σύνθεση μετασχηματισμών Möbius

Θα ξεκινήσουμε με την παρουσίαση ενός παραδείγματος σύνθεσης μετασχηματισμών Möbius.
Παράδειγμα:
Να καθορίσετε την σύνθεση $M_1 \circ M_2$ όπου M_1 και M_2 είναι δύο μετασχηματισμοί Möbius οι οποίοι δίνονται από τους τύπους:

$$M_1(z) = \frac{iz+1}{2z-2} \quad \text{και} \quad M_2(z) = \frac{z+i}{2z-1}$$

Λύση:
Επειδή οι μετασχηματισμοί M_1 και M_2 είναι ένα προς ένα μετασχηματισμοί του $\widehat{\mathbb{C}}$ στο $\widehat{\mathbb{C}}$ το ίδιο θα συμβαίνει και για την σύνθεσή τους $M_1 \circ M_2$.
Ο τύπος για την σύνθεση $M_1 \circ M_2(z)$ προκύπτει ως εξής:

$$M_1 \circ M_2(z) = M_1\left(\frac{z+i}{2z-1}\right) = \frac{i\left(\dfrac{z+i}{2z-1}\right)+1}{2\left(\dfrac{z+i}{2z-1}\right)-2} = \frac{i(z+i)+(2z-1)}{2(z+i)-2(2z-1)} = \frac{(2+i)z-2}{-2z+(2+2i)}$$

Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι αυτός ο τύπος ορίζει έναν μετασχηματισμό Möbius αρκεί να θυμηθούμε ότι ένας μετασχηματισμός Möbius είναι μια συνάρτηση $M : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ της μορφής $M(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ όπου $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ και $ad-bc \neq 0$.
Στην συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε πράγματι ότι :

$ad - bc = (2+i)(2+i) - (-2)(-2) = -2 + 6i \neq 0$

Για να διατηρήσουμε ένα πνεύμα αυστηρότητας θα πρέπει να εξετάσουμε αν ο τελικός τύπος $T(z) = \dfrac{(2+i)z - 2}{-2z + (2+2i)}$ δίνει απ΄ ευθείας την ίδια τιμή για το $T(\infty)$ με την τιμή που δίνει ο τύπος $M_1 \circ M_2(z)$ για το $M_1 \circ M_2(\infty)$. Δηλαδή πρέπει να δείξουμε: $T(\infty) = M_1 \circ M_2(\infty)$

πράγματι έχουμε:

$T(\infty) = \dfrac{2+i}{-2}$.

$M_2(\infty) = \dfrac{1}{2}$. Οπότε: $M_1 \circ M_2(\infty) = M_1\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\frac{1}{2}i + 1}{1-2} = \dfrac{2+i}{-2}$

Άρα ισχύει

$T(\infty) = M_1 \circ M_2(\infty) = \dfrac{2+i}{-2}$.

Στο παράδειγμα που παραθέσαμε βλέπουμε πως η σύνθεση δύο μετασχηματισμών Möbius M_1 και M_2 είναι επίσης ένα μετασχηματισμός Möbius.

Ας δούμε και ένα δεύτερο παράδειγμα από το οποίο μπορούμε να βγάλουμε χρήσιμα συμπεράσματα για την σχέση του πίνακα της σύνθεσης $M_1 \circ M_2$ δύο μετασχηματισμών, με τους αντίστοιχους πίνακες των μετασχηματισμών που συντίθενται.

Παράδειγμα:

Να γραφούν δύο πίνακες A_1, A_2 οι οποίοι να αντιστοιχούν στους μετασχηματισμούς M_1 και M_2 του προηγούμενου παραδείγματος.

Να υπολογιστεί το γινόμενο $A_1 \bullet A_2$ των πινάκων αυτών και να συγκριθεί με τον μετασχηματισμό $M_1 \circ M_2$.

Λύση:

Δυο πίνακες που αντιστοιχούν στους μετασχηματισμούς M_1 και M_2 του προηγούμενου παραδείγματος είναι οι

$A_1 = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ και $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ αντίστοιχα.

(όπως έχουμε τονίσει και πιο πάνω οι πίνακες αυτοί δεν είναι μοναδικοί)

$$A_1 \bullet A_2 = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+i & -2 \\ -2 & 2+2i \end{pmatrix}.$$

Επίσης έχουμε:

$$M_1 \circ M_2(z) = \frac{(2+i)z - 2}{-2z + (2+2i)}.$$

Ένας πίνακας που αντιστοιχεί στον μετασχηματισμό $M_1 \circ M_2(z)$ είναι ο $\begin{pmatrix} 2+i & -2 \\ -2 & 2+2i \end{pmatrix}$.

Η λύση των παραδειγμάτων που αναφέραμε πιο πάνω υποδεικνύει το εξής θεώρημα:

Θεώρημα:

Έστω ότι M_1 και M_2 είναι δύο μετασχηματισμοί Möbius και A_1, A_2 δύο πίνακες που αντιστοιχούν στους μετασχηματισμούς αυτούς (ο A_1 συνδέεται με τον M_1 και ο A_2 με τον M_2).

Η σύνθεση $M_1 \circ M_2$,των δύο αυτών μετασχηματισμών, είναι επίσης ένας μετασχηματισμός Möbius και ένας πίνακας που αντιστοιχεί σε αυτόν τον μετασχηματισμό, είναι ο πίνακας γινόμενο $A_1 \bullet A_2$ των πινάκων A_1 και A_2.

Απόδειξη:

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τους μετασχηματισμούς M_1 και M_2 οι οποίοι ορίζονται από τους τύπους $M_1(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ και $M_2(z) = \dfrac{ez+f}{gz+h}$.

Επειδή οι μετασχηματισμοί M_1 και M_2 είναι ένα προς ένα μετασχηματισμοί του $\widehat{\mathbb{C}}$ στο $\widehat{\mathbb{C}}$ το ίδιο θα συμβαίνει και για την σύνθεσή τους $M_1 \circ M_2$.

$$M_1 \circ M_2(z) = M_1\left(\frac{ez+f}{gz+h}\right) = \frac{a\left(\dfrac{ez+f}{gz+h}\right)+b}{c\left(\dfrac{ez+f}{gz+h}\right)+d} = \frac{a(ez+f)+b(gz+h)}{c(ez+f)+d(gz+h)} = \frac{(ae+bg)z+(af+bh)}{(ce+dg)z+(cf+dh)}.$$

Επειδή η σύνθεση $M_1 \circ M_2$ είναι ένα προς ένα, αυτός ο τύπος δεν μπορεί να παραμένει σταθερός καθώς το z μεταβάλλεται, οπότε έχουμε ότι:

$(ae+bg)(cf+dh)-(af+bh)(ce+dg) \neq 0$

άρα ο τύπος $T(z) = \dfrac{(ae+bg)z+(af+bh)}{(ce+dg)z+(cf+dh)}$ πραγματικά ορίζει έναν μετασχηματισμό Möbius.

Ένας πίνακας που αντιστοιχεί στον μετασχηματισμό $T(z) = \dfrac{(ae+bg)z+(af+bh)}{(ce+dg)z+(cf+dh)}$ είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}.$$

Όπως πολύ εύκολα μπορούμε να παρατηρήσουμε ο πίνακας αυτός είναι το γινόμενο των πινάκων $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$οι οποίοι είναι πίνακες που αντιστοιχούν στους μετασχηματισμούς M_1 και M_2 αντίστοιχα.

Το προηγούμενο θεώρημα βοηθάει στην επινόηση μιας στρατηγικής η οποία απλοποιεί την διαδικασία σύνθεσης δύο μετασχηματισμών Möbius:

Στρατηγική:

Για να συνθέσουμε δύο μετασχηματισμούς Möbius M_1 και M_2:

1. Βρίσκουμε δύο πίνακες A_1, A_2 για τους οποίους έχουμε ότι ο A_1 συνδέεται με τον M_1 και ο A_2 με τον M_2.
2. Υπολογίζουμε το γινόμενο $A_1 \bullet A_2$ των πινάκων A_1 και A_2.
3. Βρίσκουμε τον μετασχηματισμό Möbius T οποίος αντιστοιχεί στο γινόμενο $A_1 \bullet A_2$. Ο μετασχηματισμός Möbius ο οποίος είναι η σύνθεση $M_1 \circ M_2$ των M_1 και M_2 είναι ο T.

Ας πάρουμε ένα ακόμα παράδειγμα:
Να βρεθεί η σύνθεση $M_1 \circ M_2$ των μετασχηματισμών Möbius M_1 και M_2,
όπου $M_1(z) = \dfrac{3z+1}{iz-2}$ και $M_2(z) = \dfrac{2iz+3}{z-2}$.
Λύση:
Οι μετασχηματισμοί Möbius M_1 και M_2 έχουν πίνακες τους:
$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ i & -2 \end{pmatrix}$ και $A_2 = \begin{pmatrix} 2i & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ αντίστοιχα.
Το γινόμενό τους είναι:

$$A_1 \bullet A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ i & -2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2i & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6i & 7 \\ -4 & 4+3i \end{pmatrix}.$$

Οπότε η σύνθεση $M_1 \circ M_2$ των μετασχηματισμών Möbius M_1 και M_2 είναι :

$$M_1 \circ M_2(z) = \frac{(1+6i)z+7}{-4z+(4+3i)}.$$

Είδαμε ότι ισχύει $[M_2][M_1] = [M_2 \circ M_1]$ (με $[M]$ συμβολίζουμε έναν πίνακα που αντιστοιχεί στον μετασχηματισμό M). Είναι σύμπτωση που συμβαίνει κάτι τέτοιο; Η απάντηση είναι αρνητική και η εξήγηση βρίσκεται στην έννοια των ομογενών συντεταγμένων. Θα πρέπει να περιγράψουμε αρχικά το μιγαδικό επίπεδο με ένα εντελώς νέο είδος συστήματος συντεταγμένων. Αντί να εκφράσουμε τον $z = x + iy$ με την βοήθεια δύο πραγματικών αριθμών τον γράφουμε ως λόγο δύο μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 (δηλαδή $z = \dfrac{z_1}{z_2}$). Το διατεταγμένο ζεύγος των μιγαδικών αριθμών $[z_1, z_2]$ καλείται ζεύγος ομογενών συντεταγμένων του μιγαδικού αριθμού z. Για να είναι καλά ορισμένο αυτό το ζεύγος απαιτούμε να είναι $[z_1, z_2] \neq [0,0]$
Για κάθε διατεταγμένο ζεύγος $[z_1$ αυθαίρετο, $z_2 \neq 0]$ αντιστοιχεί ακριβώς ένα σημείο $z = \dfrac{z_1}{z_2}$ αλλά για κάθε σημείο z αντιστοιχεί ένα άπειρο πλήθος ομογενών συντεταγμένων: $[kz_1, kz_2] = k[z_1, z_2]$ όπου k είναι ένας αυθαίρετος μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός.
Τι συμβαίνει όμως με τη μορφή $[z_1, 0]$; Κρατώντας το z_1 σταθερό καθώς το z_2 τείνει στο μηδέν, βλέπουμε ότι το $[z_1, 0]$ ταυτίζεται με το σημείο στο άπειρο. Έτσι η χρήση των ζευγών $[z_1, z_2]$, είναι το εργαλείο εκείνο, που μπορεί να μας δώσει συντεταγμένες για το επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο. Η εισαγωγή ομογενών συντεταγμένων επιτυγχάνει για την άλγεβρα ότι επιτυγχάνει η γεωμετρία για την σφαίρα του Riemann: κλείνει τα κενά, τα σχετικά με την χρήση του ∞. Ακριβώς όπως χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\mathbb{R}^2$ για να παραστήσουμε το σύνολο των ζευγών (x, y) όπου x, y είναι πραγματικοί αριθμοί, έτσι χρησιμοποιούμε και το σύμβολο $\mathbb{C}^2$ για να παραστήσουμε το σύνολο των ζευγών $[z_1, z_2]$ των μιγαδικών αριθμών. Για να επισημάνουμε την διαφορά μεταξύ του $\mathbb{R}^2$ και του $\mathbb{C}^2$ κάνουμε χρήση παρενθέσεων για το $\mathbb{R}^2$ και χρήση αγκυλών για το $\mathbb{C}^2$.
Όπως ένας γραμμικός μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^2$ μπορεί να παρασταθεί με ένα πραγματικό 2x2 πίνακα, έτσι και ένας γραμμικός μετασχηματισμός του $\mathbb{C}^2$ μπορεί να παρασταθεί με ένα μιγαδικό 2x2 πίνακα.

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az_1 + bz_2 \\ cz_1 + dz_2 \end{pmatrix}.$$

Όμως αν $[z_1, z_2]$ και $[m_1, m_2]$ είναι οι ομογενείς συντεταγμένες στο $\mathbb{C}^2$ του σημείου $z = \frac{z_1}{z_2}$ στο $\mathbb{C}$ και της εικόνας του $w = \frac{m_1}{m_2}$, τότε ο πιο πάνω γραμμικός μετασχηματισμός του $\mathbb{C}^2$ εισάγει τον ακόλουθο μη γραμμικό μετασχηματισμό του $\mathbb{C}$:

$$z = \frac{z_1}{z_2} \to w = \frac{m_1}{m_2} = \frac{az_1 + bz_2}{cz_1 + dz_2} = \frac{a\frac{z_1}{z_2} + b}{c\frac{z_1}{z_2} + d} = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Εδώ δεν έχουμε τίποτα άλλο παρά τον μετασχηματισμό Möbius στην πιο γενική μορφή του. Να λοιπόν γιατί ο μετασχηματισμός Möbius έχει συμπεριφορά τόσο όμοια με τους γραμμικούς μετασχηματισμούς.
Οι μετασχηματισμοί Möbius είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί, μόνο που ενεργούν στις ομογενείς συντεταγμένες του $\mathbb{C}^2$ μάλλον, παρά κατευθείαν στα σημεία του $\mathbb{C}$ καθαυτά.

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

Η αναπαράσταση των μετασχηματισμών Möbius με την μορφή πινάκων, δίνει ένα πρακτικό και κομψό τρόπο για να κάνουμε πολύπλοκους υπολογισμούς. Το πιο σημαντικό όμως είναι ότι αναπτύσσοντας την όλη θεωρία των μετασχηματισμών Möbius με την βοήθεια των πινάκων, ανοίγουμε μια πόρτα προς ένα ευρύ πεδίο νέων ιδεών και τεχνικών τις οποίες παίρνουμε από την γραμμική άλγεβρα. Θα ξεκινήσουμε με κάτι πολύ απλό. Η σύνθεση δύο non singular μετασχηματισμών Möbius είναι και αυτός non singular ($ad - bc \neq 0$). Κάτι τέτοιο όμως δεν είναι προφανές αλγεβρικά. Η νέα οπτική γωνία (αυτή της γραμμικής άλγεβρας) όμως μας λύνει τα χέρια.
Ας θυμηθούμε μια στοιχειώδη ιδιότητα των οριζουσών πινάκων:

$$\det\{[M_1][M_2]\} = \det[M_1]\det[M_2].$$

Αν είναι $\det[M_2] \neq 0$ και $\det[M_1] \neq 0$ τότε και $\det\{[M_1][M_2]\} \neq 0$.
Εδώ βλέπουμε πόσο σημαντικό είναι πολλές φορές να δουλεύουμε με κανονικοποιημένους μετασχηματισμούς Möbius, αφού αν $\det[M_1] = 1$ και $\det[M_2] = 1$ τότε και $\det\{[M_1][M_2]\} = 1$, οπότε το σύνολο των κανονικοποιημένων 2x2 πινάκων σχηματίζει μια ομάδα (υποομάδα την ομάδας των μη μοναδικών πινάκων).
Ας θεωρήσουμε τώρα τα ιδιοδιανύσματα ενός γραμμικού μετασχηματισμού:
$[M] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ του $\mathbb{C}^2$.

Από τον ορισμό έχουμε ότι ένα ιδιοδιάνυσμα είναι ένα διάνυσμα $\delta = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$ του οποίου η διεύθυνση δεν αλλάζει υπό την επίδραση του μετασχηματισμού, με την έννοια ότι η εικόνα μέσω του μετασχηματισμού, είναι ένα πολλαπλάσιο $\lambda \bullet \delta$ του αρχικού διανύσματος. Αυτή η τιμή λ καλείται ιδιοτιμή του ιδιοδιανύσματος δ. Με άλλα λόγια το ιδιοδιάνυσμα ικανοποιεί την σχέση $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$.

Με όρους μετασχηματισμών Möbius αυτό σημαίνει ότι ο $z=\frac{\delta_1}{\delta_2}$ απεικονίζεται στον $M(z)=\frac{\lambda\delta_1}{\lambda\delta_2}=z$. Έτσι ο $z=\frac{\delta_1}{\delta_2}$ είναι ένα σταθερό σημείο του $\mathrm{M}(z)$ αν και μόνο αν το $\delta=\begin{pmatrix}\delta_1\\ \delta_2\end{pmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του $[M]$.

Ας σημειωθεί ότι το άμεσο πλεονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι ότι δεν υπάρχει πλέον καμιά πραγματική διαφορά ανάμεσα σε ένα πεπερασμένο σταθερό σημείο και σε ένα σταθερό σημείο στο ∞, διότι το τελευταίο απλώς αντιστοιχεί σε ένα ιδιοδιάνυσμα της μορφής: $\begin{pmatrix}\delta_1\\ 0\end{pmatrix}, \delta_1\neq 0$. Για παράδειγμα ας δούμε πόσο εύκολα μπορεί να προκύψει ότι το ∞ είναι ένα σταθερό σημείο, αν και μόνο αν $M(z)$ είναι ένας μετασχηματισμός ομοιότητας.

Το ∞ είναι ένα σταθερό σημείο αν και μόνο άν $\lambda\begin{pmatrix}\delta_1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}\delta_1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\delta_1\\ c\delta_1\end{pmatrix}$.

Έτσι $c=0, \lambda=\alpha$ και $\mathrm{M}(z)=\frac{a}{d}z+\frac{b}{d}$.

Πιο κάτω θα δούμε ότι οι ιδιοτιμές του κανονικοποιημένου πίνακα $[M]$ καθορίζουν εντελώς την γεωμετρική φύση του αντίστοιχου μετασχηματισμού Möbius $M(z)$.Πριν δούμε όμως κάτι τέτοιο, ας εξετάσουμε λίγο καλύτερα τις ιδιοτιμές όταν ο $[M]$ είναι κανονικοποιημένος.

Ξέρουμε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα $[M]$ είναι οι λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης: $\det\{[M]-\lambda[I]\}=0$ όπου $[I]$ είναι ο ταυτοτικός πίνακας $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο $[M]$ είναι κανονικοποιημένος, βρίσκουμε ότι η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$\lambda^2-(a+d)\lambda+1=0$ η οποία μπορεί να γραφεί και στην μορφή: $\lambda+\frac{1}{\lambda}=a+d$.

Το πρώτο πράγμα που παρατηρούμε σε αυτήν την εξίσωση είναι ότι τυπικά υπάρχουν δύο ιδιοτιμές και ότι αυτές καθορίζονται από την τιμή της $(a+d)$.

Εξετάζοντας τους συντελεστές της δευτεροβάθμιας εξίσωσης έχουμε ότι $\lambda_1\lambda_2=1$ και $\lambda_1+\lambda_2=(a+d)$. Αν γνωρίζουμε λοιπόν την λ_1 τότε η $\lambda_2=\frac{1}{\lambda_1}$. Τονίζουμε κάτι τέτοιο, διότι δεν γίνεται αμέσως αντιληπτό τι συμβαίνει, αν γράψουμε τον τύπο που δίνει τις τιμές των ιδιοτιμών: $\lambda_1,\lambda_2=\frac{1}{2}\left\{(a+d)\pm\sqrt{(a+d)^2-4}\right\}$.

Αυτοί που έχουν κάποια εμπειρία με την γραμμική άλγεβρα, θα αναγνωρίσουν αμέσως ότι οι πιο πάνω σχέσεις είναι ειδικές περιπτώσεις των γενικότερων τύπων για τις ιδιοτιμές: $\lambda_1\lambda_2\lambda_3,...\lambda_\nu=\det N$ και $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,+...+\lambda_\nu=trN$ όπου με trN συμβολίζουμε το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων του πίνακα N και καλείται ίχνος του πίνακα N.

Αν N και P είναι δύο nxn πίνακες τότε ισχύει ότι: $tr\{N\bullet P\}=tr\{P\bullet N\}$.

Αντιστροφή των μετασχηματισμών Möbius

Θα ξεκινήσουμε με την επίλυση ενός προβλήματος: Έστω M_1 και M_2 δύο μετασχηματισμοί Möbius οι οποίοι καθορίζονται από τους τύπους:

$M_1 = \dfrac{z-i}{iz+2}$ και $M_2 = \dfrac{2z+i}{-iz+1}$. Να βρείτε την σύνθεση $M_1 \circ M_2$.

Θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι την στρατηγική που αναπτύξαμε στην προηγούμενη παράγραφο:

Θα βρούμε πρώτα πους πίνακες που συνδέονται με τους μετασχηματισμούς M_1 και M_2.

Αυτοί είναι $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}$ και $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$.

Ο πίνακας που συνδέεται με τον $M_1 \circ M_2$ είναι ο πίνακας γινόμενο $A_1 \bullet A_2$.

$$A_1 \bullet A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Άρα έχουμε $M_1 \circ M_2(z) = z$.

Στο παράδειγμα αυτό βλέπουμε ότι η σύνθεση $M_1 \circ M_2$ των μετασχηματισμών Möbius M_1 και M_2 οδηγεί στην ταυτοτική συνάρτηση του $\widehat{\mathbb{C}}$.

Αυτό δείχνει ότι ο M_2 είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός του M_1.

Με όρους πινάκων αυτό είναι ισοδύναμο με το να πούμε ότι υπάρχουν πίνακες οι οποίοι αντιστοιχούν στους μετασχηματισμούς Möbius M_1 και M_2 των οποίων το γινόμενο είναι ο μοναδιαίος πίνακας I. Για παράδειγμα: $\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Αυτή η ιδέα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρούμε τον αντίστροφο ενός οποιοδήποτε μετασχηματισμού Möbius.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός M^{-1} του μετασχηματισμού Möbius M υπάρχει όπως προφανώς μπορούμε να διαπιστώσουμε, από την στιγμή που ο M είναι ένας ένα προς ένα μετασχηματισμός από το $\widehat{\mathbb{C}}$ στο $\widehat{\mathbb{C}}$.

Για να βρούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό M^{-1} του μετασχηματισμού M θα θεωρήσουμε έναν πίνακα A που αντιστοιχεί στον μετασχηματισμό Möbius M.

Έστω ότι ο M έχει τύπο $M(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ όπου $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ και $ad - bc \neq 0$ και ως πίνακα A που συνδέεται με τον M ας επιλέξουμε τον $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Είναι $ad - bc \neq 0$ άρα ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, οπότε υπάρχει μοναδικός πίνακας τον οποίο θα συμβολίσουμε με A^{-1}, για τον οποίο ισχύει : $A \bullet A^{-1} = A^{-1} \bullet A = I$.

Ο μετασχηματισμός Möbius ο οποίος συνδέεται με τον A^{-1} είναι ο M^{-1}.

Πράγματι αυτό συμβαίνει διότι:

Έστω T είναι ο μετασχηματισμός που συνδέεται με τον πίνακα A^{-1}.

Τότε η σύνθεση $M \circ T$ παράγει έναν μετασχηματισμό M' για τον οποίο ένας αντίστοιχος πίνακας είναι ο $A \bullet A^{-1}$ δηλαδή ο πίνακας I.

Άρα ο M' είναι ο μετασχηματισμός με τύπο $M'(z) = z$ αφού ο πίνακας I είναι ένας αντίστοιχος πίνακας του.

Άρα $T = M^{-1}$ οπότε ένας πίνακας που αντιστοιχεί στον M^{-1} είναι ο A^{-1}.

Ας θεωρήσουμε και πάλι ότι ο M έχει τύπο $M(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ όπου $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ και

$ad-bc\neq 0$. Ως πίνακα A που συνδέεται με τον M θα επιλέξουμε τον $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Ο αντίστροφος του πίνακα A δίνεται από τον τύπο $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\bullet\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Εκτός από τον πίνακα A^{-1},με τον M^{-1} συνδέεται και κάθε μη μηδενικό πολλαπλάσιο του πίνακα A^{-1}. Άρα με τον M^{-1} συνδέεται και ο πίνακας B με:

$$B=(ad-bc)\bullet A^{-1}=(ad-bc)\bullet\left[\frac{1}{ad-bc}\bullet\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \text{ (αφού } ad-bc\neq 0\text{)}$$

Αφού λοιπόν ένας πίνακας αντίστοιχος με τον μετασχηματισμό M^{-1} είναι ο $B=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$,

μπορούμε να γράψουμε $M^{-1}(z)=\dfrac{dz-b}{-cz+a}$.

Συγκεντρώνοντας τα αποτελέσματα της επεξεργασίας που κάναμε πιο πάνω σε ένα θεώρημα θα έχουμε:

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός ενός μετασχηματισμού Möbius, ο οποίος δίνεται από τον τύπο:

$M(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ όπου $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ και $ad-bc\neq 0$.

είναι επίσης ένας μετασχηματισμός Möbius, ο οποίος ορίζεται από τον τύπο:

$$M^{-1}(z)=\frac{dz-b}{-cz+a}.$$

Ας δούμε και ένα παράδειγμα: Να βρεθεί ο αντίστροφος M^{-1} του μετασχηματισμού Möbius M με τύπο $M(z)=\dfrac{iz+1}{2z-2}$.

Λύση:

Ένας πίνακας που συνδέεται με τον M είναι ο $A=\begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ ο οποίος έχει αντίστροφο τον $A^{-1}=(-2i-2)\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & i \end{pmatrix}$. Άρα ένας πίνακας που συνδέεται με τον M^{-1} είναι ο $B=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & i \end{pmatrix}$. Έτσι ο M^{-1} δίνεται από τον τύπο $M^{-1}(z)=\dfrac{-2z-1}{-2z+i}=\dfrac{2z+1}{2z-i}$.

Η ομάδα αντιστροφής (inversive group) και οι μετασχηματισμοί Möbius

Στο σημείο που βρισκόμαστε έχουμε συλλέξει τα στοιχεία εκείνα τα οποία είναι αναγκαία για να αποδείξουμε το παρακάτω θεώρημα:

Το σύνολο όλων των μετασχηματισμών Möbius σχηματίζει μία ομάδα ως προς την πράξη της σύνθεσης συναρτήσεων.

Απόδειξη:

Θα δείξουμε ότι ισχύουν τα τέσσερα αξιώματα που χαρακτηρίζουν μια ομάδα.

G1 κλειστότητα:

Από προηγούμενο θεώρημα ξέρουμε ότι η σύνθεση δύο μετασχηματισμών Möbius είναι και αυτή ένας μετασχηματισμός Möbius.
G2 ύπαρξη μονάδας:
Η μονάδα είναι ο μετασχηματισμός Möbius ο οποίος δίνεται από τον τύπο $M(z)=\dfrac{1z+0}{0z+1}$
G3 συμμετρικό στοιχείο:
Από θεώρημα που αναφέραμε λίγο πιο πάνω, προκύπτει ότι κάθε μετασχηματισμός Möbius έχει έναν αντίστροφο.
Αν ο μετασχηματισμός είναι ο $M(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ τότε ο M^{-1} είναι ο $M^{-1}(z)=\dfrac{dz-b}{-cz+a}$
G4 προσεταιριστικότητα:
Η σύνθεση συναρτήσεων είναι πάντα προσεταιριστική.
Άρα το σύνολο όλων των μετασχηματισμών Möbius σχηματίζει μια ομάδα ως προς την πράξη της σύνθεσης συναρτήσεων.
Έχοντας δείξει ότι το σύνολο των μετασχηματισμών Möbius σχηματίζει ομάδα θα διερευνήσουμε τώρα την σχέση της ομάδας των μετασχηματισμών Möbius με την ομάδα που σχηματίζουν όλοι οι μετασχηματισμοί αντιστροφής. Γνωρίζουμε (από προηγούμενο θεώρημα) ότι κάθε μετασχηματισμός Möbius είναι και μετασχηματισμός αντίστροφής αλλά το αντίστροφο ισχύει; Δηλαδή κάθε μετασχηματισμός αντιστροφής είναι μετασχηματισμός Möbius;
Η απάντηση όπως θα δούμε είναι όχι. Για παράδειγμα μια αντιστροφή δεν μπορεί να είναι ένας μετασχηματισμός Möbius από την στιγμή που αντιστρέφει τον προσανατολισμό των γωνιών, ενώ ένας μετασχηματισμός Möbius διατηρεί τον προσανατολισμό των γωνιών.
Παρόλο που μια αντιστροφή δεν είναι Möbius υπάρχει μια πολύ στενή σχέση μεταξύ των αντιστροφών και των μετασχηματισμών Möbius.

Θεώρημα:
Κάθε αντιστροφή t έχει τον τύπο $t(z)=M(\bar{z})$ όπου M είναι ένας μετασχηματισμός Möbius.
Απόδειξη :
Αν t είναι μια αντιστροφή του $\widehat{\mathbb{C}}$ ως προς μια επεκτεταμένη ευθεία, τότε (από γνωστή πρόταση η οποία αποδείχθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο) θα πρέπει να έχει την μορφή $t(z)=a\bar{z}+b, |a|=1$ με $t(\infty)=\infty$ (κοίταξε σελίδα 46-47).
Έχουμε λοιπόν ότι $t(z)=M(\bar{z})$ όπου M είναι ο μετασχηματισμός Möbius:
$$M(z)=\frac{az+b}{0z+1}.$$
Από την άλλη μεριά αν t είναι μια αντιστροφή του $\widehat{\mathbb{C}}$ ως προς κύκλο με ακτίνα r και κέντρο c τότε θα έχουμε:
$$t(z)=\frac{r^2}{\overline{z-c}}+c=\frac{r^2+c(\bar{z}-\bar{c})}{\bar{z}-\bar{c}}=\frac{c\bar{z}+(r^2-c\bar{c})}{\bar{z}-\bar{c}}.$$
Οπότε πάλι ο t είναι της μορφής $t(z)=M(\bar{z})$, όπου M είναι και πάλι ένας μετασχηματισμός Möbius και συγκεκριμένα ο μετασχηματισμός:
$$M(z)=\frac{cz+(r^2-c\bar{c})}{z-\bar{c}}.$$
Θα δείξουμε τώρα ότι κάθε μετασχηματισμός αντιστροφής έχει την μορφή:
$t(z)=M(z)$ ή $t(z)=M(\bar{z})$, όπου M είναι ένας μετασχηματισμός Möbius.
Θεώρημα:

Κάθε μετασχηματισμός αντιστροφής t μπορεί να παρασταθεί στο $\widehat{\mathbb{C}}$ με έναν από τους τύπους: $t(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ ή $t(z)=\dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ με $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ και $ad-bc\neq 0$

Απόδειξη:

Πρώτα θα δείξουμε ότι η σύνθεση δυο αντιστροφών t_1, t_2 είναι ένας μετασχηματισμός Möbius. Μπορούμε να γράψουμε $t_1(z)=M_1(\bar{z})$ και $t_2(z)=M_2(\bar{z})$ όπου M_1 και M_2 είναι μετασχηματισμοί Möbius.

Έτσι μπορούμε να γράψουμε: $t_1\circ t_2(z)=t_1(M_2(\bar{z}))=M_1(\overline{M_2(\bar{z})})$

Αλλά αν είναι $M_2(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ τότε μπορούμε να καθορίσουμε έναν μετασχηματισμό Möbius M_3 με $M_3(z)=(\overline{M_2(\bar{z})})=\overline{\left(\dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}\right)}=\dfrac{\bar{a}z+\bar{b}}{\bar{c}z+\bar{d}}$.

Επειδή $t_1\circ t_2(z)=t_1(M_2(\bar{z}))=M_1(\overline{M_2(\bar{z})})=M_1(M_3(z))$ άρα $t_1\circ t_2$ είναι σύνθεση δύο μετασχηματισμών Möbius και ως εκ τούτου είναι και αυτή ένας μετασχηματισμός Möbius.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι t είναι ένας αυθαίρετος μετασχηματισμός αντιστροφής και $t=t_1\circ t_2\circ t_3\circ t_4\ldots\circ t_n$ όπου $t_1,t_2,t_3,t_4\ldots,t_n$ είναι αντιστροφές. Αν n είναι άρτιος αριθμός τότε μπορούμε να ξαναγράψουμε τον t στην μορφή $t=\left(t_1\circ t_2\right)\circ\left(t_3\circ t_4\right)\ldots\circ\left(t_{n-1}\circ t_n\right)$ απ΄ όπου μπορούμε άμεσα να συμπεράνουμε ότι t είναι ένας μετασχηματισμός Möbius, τον οποίο ας ονομάσουμε M. Έτσι μπορούμε να γράψουμε $t(z)=M(z)$.

Για να διαπραγματευτούμε την περίπτωση όπου n είναι περιττός αριθμός ας θεωρήσουμε την επεκτεταμένη συνάρτηση του συζυγούς την οποία ας ονομάσουμε r.

Η συνάρτηση αυτή είναι η: $r(z)=\bar{z}$ για $z\in\mathbb{C}$ και $r(\infty)=\infty$.

Επειδή η r έχει αντίστροφη συνάρτηση την ίδια την r, μπορούμε να γράψουμε: $t=\left(t_1\circ t_2\circ t_3\circ t_4\ldots\circ t_n\circ r\right)\circ r$

Η παράσταση μέσα στις παρενθέσεις περιγράφει την σύνθεση ενός αρτίου αριθμού από αντιστροφές οπότε είναι ένας μετασχηματισμός Möbius, τον οποίο ας ονομάσουμε M. Έτσι $t(z)=M\circ r\left(z\right)=M\left(\bar{z}\right)$.

Το θεώρημα αυτό, μας δίνει την δυνατότητα να δούμε τι συμβαίνει στο εσωτερικό της δομής της ομάδας G, που σχηματίζεται από όλους τους αντίστροφους μετασχηματισμούς.

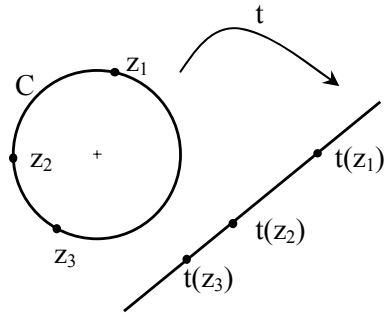
Αυτοί οι μετασχηματισμοί αντιστροφής που μπορούν να γραφούν στην μορφή $t(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$, είναι μετασχηματισμοί Möbius και γνωρίζουμε ότι το σύνολο αυτών των μετασχηματισμών αποτελεί μια υποομάδα της ομάδας G.

Θα αναφερόμαστε σε αυτούς τους μετασχηματισμούς ως άμεσους ή ευθείς (direct) μετασχηματισμούς αντιστροφής διότι διατηρούν τον προσανατολισμό των γωνιών.

Τους υπόλοιπους αντίστροφους μετασχηματισμούς οι οποίοι περιγράφονται από τον γενικό τύπο: $t(z)=\dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ οι οποίοι είναι συνθέσεις μετασχηματισμών Möbius με την επεκτεταμένη συνάρτηση $z\to\bar{z}$ και ως εκ τούτου αντιστρέφουν τον προσανατολισμό των γωνιών, τους ονομάζουμε έμμεσους ή μη ευθείς (indirect) μετασχηματισμούς αντιστροφής.

Εικόνες των γενικευμένων κύκλων

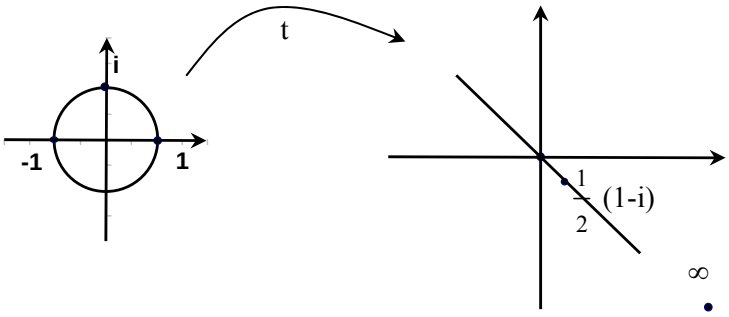
Έχουμε δείξει ότι ένας μετασχηματισμός αντιστροφής απεικονίζει γενικευμένους κύκλους σε γενικευμένους κύκλους.
Ωστόσο, εκτός από την ειδική περίπτωση της αντιστροφής ως προς τον μοναδιαίο κύκλο, δεν έχουμε παρουσιάσει μέχρι τώρα καμία ιδιαίτερη μέθοδο εύρεσης της εικόνας ενός γενικευμένου κύκλου ως προς έναν μετασχηματισμό αντιστροφής.
Μια τέτοια μέθοδος θα μπορούσε να βασιστεί στο γεγονός ότι κάθε γενικευμένος κύκλος στο $\widehat{\mathbb{C}}$ μπορεί να καθοριστεί με τον προσδιορισμό τριών σημείων πάνω σε αυτόν.
Πράγματι αν τρία σημεία του $\mathbb{C}$ είναι μη συγγραμμικά καθορίζουν έναν και μόνο ένα κύκλο στο $\mathbb{C}$. Από την άλλη μεριά αν τρία σημεία είναι συγγραμμικά ή ένα από αυτά τα σημεία είναι το ∞ τότε αυτά καθορίζουν μια και μόνο μία επεκτεταμένη ευθεία.
Για να καθορίσουμε την εικόνα ενός γενικευμένου κύκλου C ως προς έναν μετασχηματισμό αντιστροφής t, κάνουμε τα εξής:



1. Παίρνουμε τρία σημεία $z_1, z_2, z_3 \in C$.
2. Καθορίζουμε τις εικόνες τους $t(z_1), t(z_2), t(z_3)$.
3. Η εικόνα $t(C)$ είναι ο (μοναδικός) γενικευμένος κύκλος που διέρχεται από τα σημεία $t(z_1), t(z_2), t(z_3)$.

Παράδειγμα:
Με χρήση της στρατηγικής που μόλις περιγράψαμε, να βρεθεί η εικόνα του μοναδιαίου κύκλου C ως προς τον μετασχηματισμό αντιστροφής που ορίζεται από τον τύπο: $t(z) = \dfrac{\bar{z}+i}{\bar{z}-1}$.

Λύση:
Πρώτα θα επιλέξουμε τρία σημεία διαφορετικά μεταξύ τους τα οποία ανήκουν στον μοναδιαίο κύκλο.
Δεν υπάρχει κάποιο κριτήριο το οποίο να καθορίζει με αυστηρό τρόπο ποια σημεία θα πρέπει να επιλεγούν, έτσι για μην αναγκαστούμε να κάνουμε περίπλοκους υπολογισμούς, θα επιλέξουμε τα σημεία 1, i και -1.



Είναι $t(1) = \infty$ $\qquad t(i) = \dfrac{\bar{i}+i}{\bar{i}-1} = 0$ $\qquad$ και $t(-1) = \dfrac{\overline{-1}+i}{\overline{-1}-1} = \dfrac{1}{2}(1-i)$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η εικόνα του μοναδιαίου κύκλου C είναι ένας γενικευμένος κύκλος που διέρχεται από τα σημεία $\infty, 0, \dfrac{1}{2}(1-i)$.

Αυτός ο γενικευμένος κύκλος δεν είναι τίποτα άλλο από την επεκτεταμένη ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων O (origin) και η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης λ=-1.

Σύγκριση της ομοπαραλληλικής γεωμετρίας (affine geometry) με την γεωμετρία της αντιστροφής
Θα κάνουμε αρχικά μια γενική περιγραφή της ομοπαραλληλικής γεωμετρίας.

Σε προηγούμενο κεφάλαιο αναφερθήκαμε στην ιδέα του F. Klein για το τι είναι γεωμετρία[1]. Μένοντας πιστοί στο πνεύμα του F. Klein, θα αναφερθούμε στους μετασχηματισμούς που πρέπει να εισαχθούν για να καθοριστεί η ομοπαραλληλική γεωμετρία. Οι μετασχηματισμοί αυτοί είναι οι ομοπαραλληλικοί μετασχηματισμοί.

Ορισμός: Ένας ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός (affine transformation) του $\mathbb{R}^2$ είναι μια συνάρτηση $t:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ η οποία περιγράφεται από τον τύπο $t(x) = Ax + b$ όπου A είναι ένας αντιστρέψιμος 2×2 πίνακας και $b \in \mathbb{R}^2$.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι κάθε Ευκλείδειος μετασχηματισμός είναι και ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός αφού κάθε ορθογώνιος πίνακας είναι και αντιστρέψιμος. Αυτό σημαίνει ότι κάθε ιδιότητα των σχημάτων που διατηρείται από τους ομοπαραλληλικούς μετασχηματισμούς διατηρείται επίσης και από τους Ευκλείδειους μετασχηματισμούς.

Αποδεικνύεται ότι το σύνολο των ομοπαραλληλικών μετασχηματισμών αποτελεί μια ομάδα ως προς την πράξη της σύνθεσης συναρτήσεων.

Βασικές ιδιότητες των ομοπαραλληλικών μετασχηματισμών είναι οι εξής:

1. απεικονίζουν ευθείες σε ευθείες.
2. απεικονίζουν παράλληλες ευθείες σε παράλληλες ευθείες.
3. διατηρούν το λόγο των ευθυγράμμων τμημάτων πάνω σε μια ευθεία γραμμή.
4. οι εικόνες των τεμνόμενων ευθειών παραμένουν τεμνόμενες ευθείες.
5. ο λόγος των εμβαδών δύο τριγώνων παραμένει σταθερός.
6. Οι ελλείψεις παραμένουν ελλείψεις, οι υπερβολές παραμένουν υπερβολές, οι παραβολές παραμένουν παραβολές.
7. Τα βαρύκεντρα των τρίγωνων απεικονίζονται στα βαρύκεντρα των εικόνων τους.

Ομοπαραλληλική γεωμετρία λοιπόν είναι η μελέτη των ιδιοτήτων των σχημάτων του χώρου που μένουν αναλλοίωτες κάτω από τους ομοπαραλληλικούς μετασχηματισμούς.

Η Ομοπαραλληλική γεωμετρία καταλαμβάνει το χώρο μεταξύ της Ευκλείδειας και της προβολικής γεωμετρίας. Είναι στην ουσία η γεωμετρία η οποία μελετά τις ιδιότητες των σχημάτων που μένουν αναλλοίωτες κάτω από τις παράλληλες προβολές[2] (parallel projections).

---

[1] Βασικό στοιχείο αυτής της αντίληψης για την ανάπτυξη της γεωμετρίας είναι η ιδέα ότι μια γεωμετρία μπορεί να ειδωθεί μέσα από μια συγκεκριμένη ομάδα μετασχηματισμών η οποία και την χαρακτηρίζει. Αντικείμενο μελέτης μιας συγκεκριμένης γεωμετρίας είναι το σύνολο των ιδιοτήτων των σχημάτων του χώρου οι οποίες μένουν αναλλοίωτες κάτω από την ομάδα μετασχηματισμών που χαρακτηρίζουν την γεωμετρία αυτή. Υπό αυτό το πρίσμα μελέτης χαρακτηρίσαμε ως Ευκλείδεια γεωμετρία την μελέτη εκείνων των ιδιοτήτων των σχημάτων οι οποίες μένουν αναλλοίωτες κάτω από την ομάδα των ισομετριών. Αυτές οι ιδιότητες καλούνται και Ευκλείδειες ιδιότητες. Κάθε ισομετρία μπορεί να γραφεί ως μια συνάρτηση $t:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $t(x) = Ux + a$ όπου U είναι ένας ορθογώνιος 2×2 πίνακας και $a \in \mathbb{R}^2$

Αντίστροφα κάθε συνάρτηση $t:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $t(x) = Ux + a$ όπου U είναι ένας ορθογώνιος 2×2 πίνακας και $a \in \mathbb{R}^2$ είναι μια ισομετρία. Οι ισομετρίες καλούνται και Ευκλείδειοι μετασχηματισμοί. Οι Ευκλείδειοι μετασχηματισμοί αποδεικνύεται ότι αποτελούν ομάδα.

[2] <u>Παράλληλη προβολή:</u>

Παράλληλη προβολή είναι μια ένα προς ένα απεικόνιση από το $\mathbb{R}^2$ στο $\mathbb{R}^2$ που ορίζεται κατά τον ακόλουθο τρόπο:

Πρώτα ας φανταστούμε το πεδίο ορισμού του μετασχηματισμού αυτού καθώς και το πεδίο τιμών του ως δύο διαφορετικές κόπιες του $\mathbb{R}^2$.

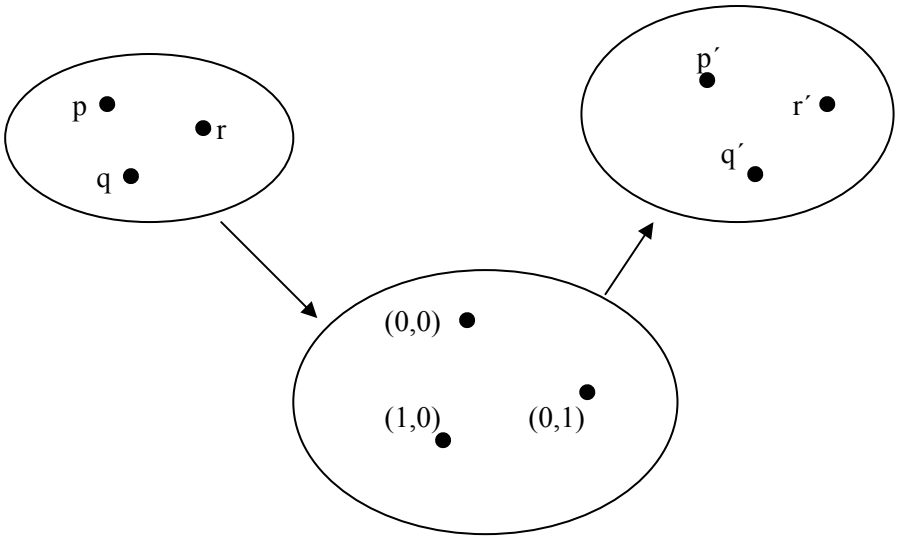
Γεωμετρικά μπορούμε να παραστήσουμε αυτές τις διαφορετικές κόπιες ως δύο διαφορετικά επίπεδα κάθε ένα από τα οποία είναι εξοπλισμένο με ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. Κατόπιν τοποθετούμε τα δύο αυτά επίπεδα στον τρισδιάστατο χώρο και ονομάζουμε το πρώτο επίπεδο P_1 και το δεύτερο P_2. Ας φανταστούμε τώρα ακτίνες φωτός που διαπερνούν και τα δύο επίπεδα. Για κάθε σημείο p του επιπέδου P_1 υπάρχει μοναδική ακτίνα η οποία το διαπερνάει και η οποία επίσης διαπερνάει και ένα μοναδικό σημείο p' του επιπέδου P_2. Έτσι έχουμε μια ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των σημείων των δύο επιπέδων Αυτή την ένα προς ένα απεικόνιση των σημείων των δύο επιπέδων την οποία ας συμβολίσουμε με το γράμμα $\wp$ την λέμε παράλληλο προβολή από το επίπεδο P_1 στο επίπεδο P_2.

Θεμελιώδη θεωρήματα της ομοπαραλληλικής γεωμετρίας και της γεωμετρίας της αντιστροφής. Διπλός λόγος τεσσάρων σημείων.

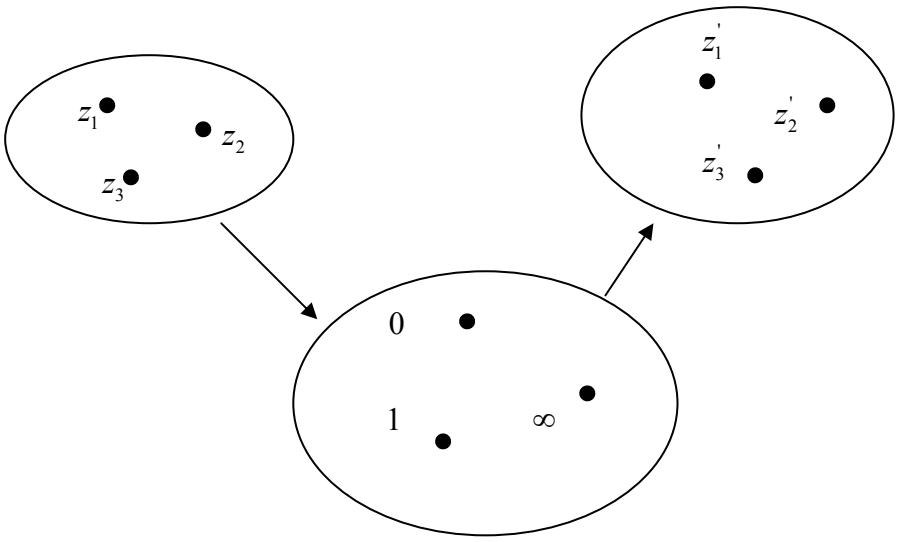
Θεμελιώδες θεώρημα ομοπαραλληλικής γεωμετρίας:

Έστω p ,r ,q και p΄,q΄,r΄ δύο τριάδες μη συγγραμμικών μεταξύ τους σημείων του $\mathbb{R}^2$.
Τότε υπάρχει ένας ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός t οποίος απεικονίζει τα p ,q , r στα p΄ , q΄, r΄αντίστοιχα. Ο μετασχηματισμός t είναι μοναδικός.
Στην γεωμετρία της αντιστροφής υπάρχει ένα ανάλογο θεμελιώδες θεώρημα με αυτό της ομοπαραλληλικής γεωμετρίας.
Στο θεώρημα αυτό αποδεικνύεται ότι αν δοθούν τρία οποιαδήποτε σημεία του επεκτεταμένου μιγαδικού επιπέδου $\widehat{\mathbb{C}}$, υπάρχει πάντα ένας μετασχηματισμός αντιστροφής (στη πραγματικότητα αυτός ο μετασχηματισμός είναι ένας μετασχηματισμός Möbius), ο οποίος απεικονίζει αυτά τα σημεία σε τρία άλλα δοθέντα σημεία του επεκτεταμένου μιγαδικού επιπέδου.
Επειδή ένας γενικευμένος κύκλος καθορίζεται από τρία σημεία του και καθώς οι μετασχηματισμοί αντιστροφής απεικονίζουν γενικευμένους κύκλους σε γενικευμένους κύκλους, μπορούμε να δείξουμε ότι αν δοθούν δύο οποιοιδήποτε γενικευμένοι κύκλοι C_1 και C_2 στο επεκτεταμένο επίπεδο, είναι πάντα εφικτό να βρούμε έναν μετασχηματισμό αντιστροφής (στην πραγματικότητα έναν μετασχηματισμό Möbius) που απεικονίζει τον C_1 στον C_2.

ομοπαραλληλική γεωμετρία



Γεωμετρία αντιστροφής



Η απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος της Γεωμετρίας της αντιστροφής είναι αρκετά όμοια με την απόδειξη του αντίστοιχου θεωρήματος της ομοπαραλληλικής γεωμετρίας. Στην απόδειξη του θεωρήματος για την ομοπαραλληλική γεωμετρία βασικό στοιχείο είναι η κατασκευή ενός ομοπαραλληλικού μετασχηματισμού ο οποίος απεικονίζει ένα δοσμένο σύνολο τριών σημείων του $\mathbb{R}^2$ (τα οποία είναι μη συγγραμμικά) σε ένα άλλο τέτοιο σύνολο (δηλαδή ένα άλλο σύνολο τριών δοσμένων σημείων μη συγγραμμικών). Κάτι τέτοιο γίνεται με την κατασκευή της σύνθεσης δύο ομοπαραλληλικών μετασχηματισμών οι οποίοι αντιστοιχούν τις δύο τριάδες σημείων (που αναφέραμε πιο πάνω) μεταξύ τους, μέσω των βοηθητικών σημείων (0,0), (1,0), (0,1).
Μια παρόμοια ιδέα αναπτύσσεται και στην περίπτωση του θεμελιώδους θεωρήματος για την γεωμετρία της αντιστροφής.

Στην γεωμετρία αυτή υπάρχει το $\widehat{\mathbb{C}}$ αντί για το $\mathbb{R}^2$ και απεικονίζουμε μέσω των βοηθητικών σημείων $0,1,\infty$.

Θα αρχίσουμε την απόδειξη με την κατασκευή ενός μετασχηματισμού Möbius ο οποίος απεικονίζει τρία δοσμένα σημεία $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$, στα σημεία $0,1,\infty$ αντίστοιχα.

Πρώτα απ΄ όλα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι αν τα $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ τότε κάθε μετασχηματισμός Möbius με τύπο $M(z) = k\dfrac{z - z_1}{z - z_3}$ απεικονίζει το z_1 στο 0 και το z_3 στο ∞. Μένει λοιπόν να πάρουμε τον μετασχηματισμό Möbius που χρειαζόμαστε, μέσω κατάλληλης επιλογής της σταθεράς k, έτσι ώστε να ισχύει $M(z_2) = 1$.
Το επόμενο παράδειγμα περιγράφει πως μπορεί να γίνει κάτι τέτοιο. Επίσης παρουσιάζει τον τρόπο εργασίας που είναι αναγκαίος στην περίπτωση που ένα από τα σημεία z_1, z_2, z_3 είναι το ∞.
Παράδειγμα :
Για κάθε μια από τις παρακάτω τριάδες σημείων να βρείτε τον μετασχηματισμό Möbius ο οποίος απεικονίζει τις τριάδες αυτές στη τριάδα σημείων $0,1,\infty$ αντίστοιχα.

$a)\ \dfrac{1}{2}, -1, 3 \quad b)\ \infty, i, 2 \quad c)\ i, \infty, 3 \quad d)\ 5, 2, \infty$

Λύση:

α) Για να εξασφαλίσουμε ότι $M\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$ και $M(3) = \infty$ θα δώσουμε στον μετασχηματισμό Möbius την μορφή $M(z) = k\dfrac{z - \frac{1}{2}}{z - 3}$ και θα υπολογίσουμε την τιμή του μιγαδικού αριθμού k.

Αφού πρέπει να είναι $M(-1) = 1$ θα πρέπει $1 = k\dfrac{-1 - \frac{1}{2}}{-1 - 3} \Rightarrow k = \dfrac{8}{3}$.

Οπότε ο απαιτούμενος μετασχηματισμός είναι $M(z) = \dfrac{8z - 4}{3z - 9}$.

β) Για να εξασφαλίσουμε ότι $M(\infty) = 0$ και $M(2) = \infty$ ο μετασχηματισμός Möbius πρέπει να έχει την μορφή $M(z) = \dfrac{k}{z - 2}$.

Επειδή $M(i) = 1$ θα πρέπει να έχουμε: $1 = \dfrac{k}{i - 2} \Rightarrow k = i - 2$

Ο μετασχηματισμός Möbius πρέπει λοιπόν να έχει την μορφή $M(z) = \dfrac{i - 2}{z - 2}$.

γ) Για να εξασφαλίσουμε ότι $M(i)=0$ και $M(3)=\infty$ ο μετασχηματισμός Möbius πρέπει να έχει την μορφή $M(z)=\dfrac{z-i}{z-3}$.

Στη περίπτωση αυτή δεν χρειάζεται να συμπεριλάβουμε την σταθερά k διότι ήδη $M(\infty)=1$.

δ) Για να εξασφαλίσουμε ότι $M(5)=0$ και $M(\infty)=\infty$ ο μετασχηματισμός Möbius πρέπει να έχει την μορφή $M(z)=k(z-5)$.

Επειδή $M(2)=1$ θα πρέπει να έχουμε: $1=k(2-5)\Rightarrow k=\dfrac{-1}{3}$.

Ο μετασχηματισμός Möbius έχει λοιπόν την μορφή $M(z)=\dfrac{-1}{3}(z-5)$.

Τυποποίηση της διαδικασίας Μ: $z_1,z_2,z_3\to 0,1,\infty$

Για να βρούμε τον μετασχηματισμό Möbius M ο οποίος απεικονίζει τρία δοσμένα σημεία z_1,z_2,z_3 στα σημεία $0,1,\infty$ αντίστοιχα ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1. Επιλέγουμε πρώτα τον κατάλληλο τύπο για τον μετασχηματισμό Möbius ο οποίος θα είναι ένας από τους κάτωθι ανάλογα με την τριάδα των αριθμών που έχει δοθεί:

- Γι την τριάδα σημείων $z_1,z_2,z_3\to 0,1,\infty$ χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό $M(z)=k\dfrac{z-z_1}{z-z_3}$.
- Για την τριάδα σημείων $\infty,z_2,z_3\to 0,1,\infty$ χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό $M(z)=\dfrac{k}{z-z_3}$.
- Για την τριάδα σημείων $z_1,\infty,z_3\to 0,1,\infty$ χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό $M(z)=\dfrac{z-z_1}{z-z_3}$.
- Για την τριάδα σημείων $z_1,z_2,\infty\to 0,1,\infty$ χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό $M(z)=k(z-z_1)$.

2. Έπειτα βρίσκουμε τον μιγαδικό αριθμό k για τον οποίο $M(z_2)=1$

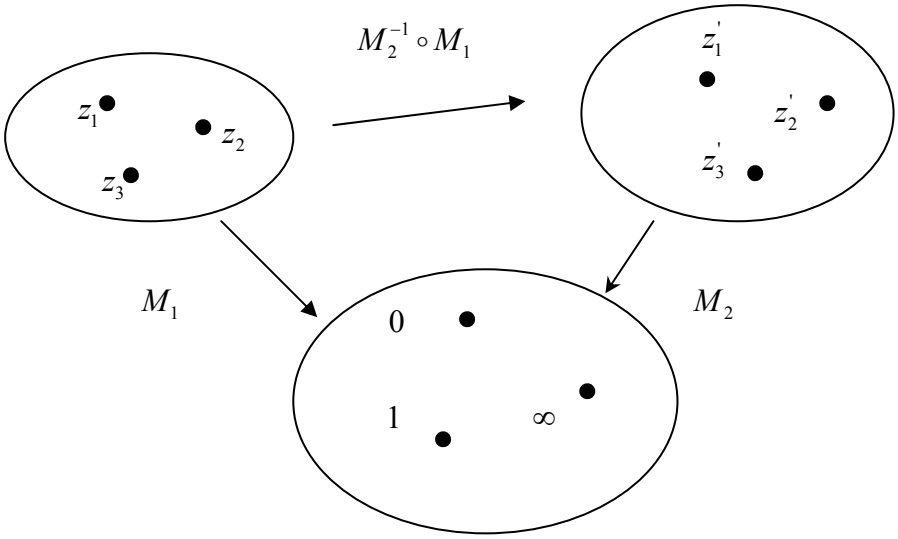
Τώρα είμαστε στην θέση να αποδείξουμε το θεμελιώδες θεώρημα της γεωμετρίας της αντιστροφής:

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο τριάδες αριθμών z_1,z_2,z_3 και w_1,w_2,w_3 του επεκτεταμένου μιγαδικού επιπέδου $\widehat{\mathbb{C}}$. Τότε υπάρχει μοναδικός μετασχηματισμός Möbius M, ο οποίος απεικονίζει τον z_1 στον w_1, τον z_2 στον w_2 και τον z_3 στον w_3.

Απόδειξη:

Σύμφωνα με τα όσα είπαμε πιο πάνω υπάρχει ένας μετασχηματισμός Möbius τον οποίο ας πούμε M_1, ο οποίος απεικονίζει τα σημεία z_1,z_2,z_3 στα σημεία $0,1,\infty$ αντίστοιχα.

Παρομοίως υπάρχει ένας μετασχηματισμός Möbius τον οποίο ας πούμε M_2, ο οποίος απεικονίζει τα σημεία w_1,w_2,w_3 στα σημεία $0,1,\infty$ αντίστοιχα.



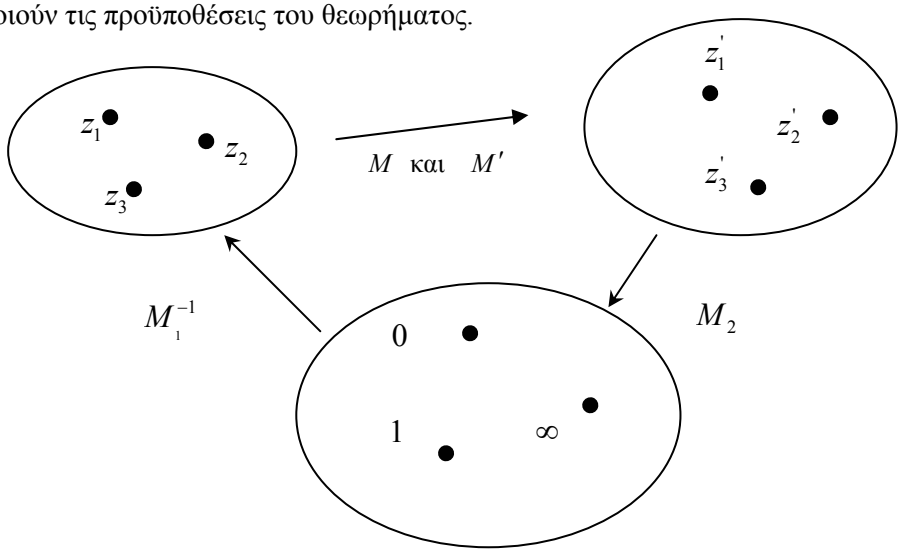
1. Η σύνθεση $M = M_2^{-1} \circ M_1$ είναι ο ζητούμενος μετασχηματισμός Möbius ο οποίος απεικονίζει τα σημεία z_1, z_2, z_3 στα σημεία w_1, w_2, w_3 αντίστοιχα.

2. Για εξετάσουμε την μοναδικότητα πρέπει πρώτα να παρατηρήσουμε ότι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός είναι ο μοναδικός μετασχηματισμός Möbius ο οποίος απεικονίζει κάθε ένα από τα σημεία $0, 1, \infty$ στον εαυτό τους. Πράγματι, αν $M(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ είναι ένας μετασχηματισμός Möbius ο οποίος απεικονίζει το ∞ στον εαυτό του τότε πρέπει να είναι $c = 0$. Επίσης αν ο M απεικονίζει το 0 στον εαυτό του τότε πρέπει $M(0) = \dfrac{b}{d} = 0$, οπότε θα είναι $b = 0$. Ο μετασχηματισμός είναι λοιπόν της μορφής $M(z) = \left(\dfrac{a}{d}\right) z$.

Αν όμως ο M απεικονίζει το 1 στον εαυτό του τότε $M(1) = \left(\dfrac{a}{d}\right) 1 = \dfrac{a}{d} \Rightarrow a = d$.

Τελικά πρέπει $M(z) = z$ όπως ακριβώς θέλαμε.

Ακολούθως ας υποθέσουμε ότι M και M' είναι δύο μετασχηματισμοί Möbius οι οποίοι ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του θεωρήματος.



Σε τέτοια περίπτωση οι συνθέσεις $M_2 \circ M \circ M_1^{-1}$ και $M_2 \circ M' \circ M_1^{-1}$ πρέπει <u>*και οι δύο*</u> να είναι μετασχηματισμοί Möbius οι οποίοι απεικονίζουν τα σημεία $0,1,\infty$ στον εαυτό τους, οπότε οι απεικονίσεις αυτές θα ισούνται με την ταυτοτική απεικόνιση. Έτσι θα έχουμε την ισότητα: $M_2 \circ M \circ M_1^{-1} = M_2 \circ M' \circ M_1^{-1}$.

Αν τώρα και τα δύο μέλη της ισότητας τα συνθέσουμε με την M_2^{-1} από αριστερά και με την M_1^{-1} από δεξιά παίρνουμε $M = M'$.

Αν θέλουμε να καθορίσουμε τον μετασχηματισμό Möbius ο οποίος απεικονίζει μια δεδομένη τριάδα σημείων, σε μια άλλη επίσης δεδομένη τριάδα σημείων, τότε ακολουθούμε την τακτική που αναπτύξαμε για να αποδείξουμε το πρώτο μέρος του θεμελιώδους θεωρήματος και την οποία θα περιγράψουμε με διεξοδικό τρόπο αμέσως πιο κάτω:

Για να καθορίσουμε λοιπόν τον μετασχηματισμό Möbius ο οποίος απεικονίζει τα σημεία z_1, z_2, z_3 στα σημεία w_1, w_2, w_3 αντίστοιχα, ενεργούμε ως εξής:

1. Βρίσκουμε τον μετασχηματισμό M_1 ο οποίος απεικονίζει τα σημεία z_1, z_2, z_3 στα σημεία $0,1,\infty$ αντίστοιχα.
2. Βρίσκομε τον μετασχηματισμό M_2 ο οποίος απεικονίζει τα σημεία w_1, w_2, w_3 στα $0,1,\infty$ αντίστοιχα.
3. Βρίσκουμε τον μετασχηματισμό $M = M_2^{-1} \circ M_1$.

Για να κάμουμε τα πράγματα πιο κατανοητά ας δουλέψουμε με ένα παράδειγμα:

Παράδειγμα:

Βρείτε τον μετασχηματισμό Möbius ο οποίος απεικονίζει τα σημεία $i, \infty, 3$ στα σημεία $\frac{1}{2}, -1, 3$ αντίστοιχα.

Από προηγούμενο παράδειγμα γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός ο οποίος απεικονίζει τα σημεία $i, \infty, 3$ στα σημεία $0,1,\infty$ αντίστοιχα δίνεται από τον τύπο:

$M_1(z) = \dfrac{z-i}{z-3}$. Επίσης από προηγούμενο παράδειγμα έχουμε ότι ο μετασχηματισμός M_2 ο οποίος απεικονίζει τα σημεία $\frac{1}{2}, -1, 3$ στα σημεία $0,1,\infty$ αντίστοιχα δίνεται από τον τύπο:

$M_2(z) = \dfrac{8z-4}{3z-9}$. Δύο πίνακες που συνδέονται με αυτούς τους δύο μετασχηματισμούς είναι οι εξής: $\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$. Όπως προκύπτει από γνωστό θεώρημα ο πίνακας που συνδέεται με τον αντίστροφο του πίνακα M_2 είναι ο $\begin{pmatrix} -9 & 4 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$.

Άρα ο πίνακας που συνδέεται με τον $M = M_2^{-1} \circ M_1$

είναι ο $\begin{pmatrix} -9 & 4 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -12+9i \\ 5 & -24+3i \end{pmatrix}$.

Ο ζητούμενος μετασχηματισμός Möbius είναι λοιπόν ο εξής: $M(z) = \dfrac{-5z-12+9i}{5z-24+3i}$.

Πριν τελειώσουμε αυτήν την ενότητα αξίζει να κάνουμε ένα πολύ χρήσιμο σχόλιο:

Πιο πάνω δώσαμε την κατασκευή ενός μετασχηματισμού Möbius $M(z)$, ο οποίος απεικονίζει τρία δοσμένα σημεία $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$, στα σημεία $0,1,\infty$ αντίστοιχα. Τον μετασχηματισμό αυτόν ας τον συμβολίσουμε τώρα με το σύμβολο $M(z) = [z, z_1, z_2, z_3]$.

Αν τα $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ τότε κάθε μετασχηματισμός Möbius με τύπο:

$M(z) = k\dfrac{z - z_1}{z - z_3}$ απεικονίζει το z_1 στο 0 και το z_3 στο ∞ οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$[z, z_1, z_2, z_3] = k\dfrac{z - z_1}{z - z_3}$. Απαιτούμε όμως να ισχύει $M(z_2) = 1$ δηλαδή $[z_2, z_1, z_2, z_3] = 1$.

Άρα θα πρέπει να ισχύει: $k\dfrac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3} = 1 \Rightarrow k = \dfrac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$

Έτσι ο τύπος $[z, z_1, z_2, z_3] = k\dfrac{z - z_1}{z - z_3}$ γίνεται $[z, z_1, z_2, z_3] = \dfrac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}\dfrac{z - z_1}{z - z_3}$

Δύο εκατονταετηρίδες πριν από τον Möbius, ο Girard Desargues είχε ανακαλύψει πόσο σημαντική είναι η έκφραση $[z, z_1, z_2, z_3]$ για την προβολική γεωμετρία. Την έκφραση αυτή ο Desargues την ονόμασε διπλό λόγο τεσσάρων σημείων (cross ratio) των z, z_1, z_2, z_3, με αυτήν την σειρά.

Ο μοναδικός μετασχηματισμός Möbius $z \to w = M(z)$ ο οποίος απεικονίζει τρία σημεία z_1, z_2, z_3 σε οποιαδήποτε άλλα σημεία w_1, w_2, w_3 δίνεται από τον τύπο $\dfrac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} = [w, w_1, w_2, w_3] = [z, z_1, z_2, z_3] = \dfrac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}\dfrac{z - z_1}{z - z_3}$. Παρόλο που δε θα μπούμε στην διαδικασία επίλυσης ως προς w θα μπορούσαμε πολύ εύκολα να κάνουμε κάτι τέτοιο και να πάρουμε ένα τύπο της μορφής $w = M(z)$.

Αυτό μπορεί να διατυπωθεί και με διαφορετικούς τρόπους. Για παράδειγμα αν ένας μετασχηματισμός απεικονίζει τέσσερα σημεία e, z_1, z_2, z_3 στα $\tilde{e}, w_1, w_2, w_3$ αντιστοίχως τότε ο διπλός λόγος των τεσσάρων σημείων είναι αναλλοίωτος: $[e, z_1, z_2, z_3] = [\tilde{e}, w_1, w_2, w_3]$.

Αντίστροφα: τέσσερα σημεία e, z_1, z_2, z_3 μπορούν να απεικονιστούν σε τέσσερα άλλα σημεία $\tilde{e}, w_1, w_2, w_3$, αν έχουν ίσους τους διπλούς λόγους των τεσσάρων σημείων. Όπως έχουμε πει και σε άλλη ενότητα, ένας μετασχηματισμός Möbius, άρα και ο $\dfrac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} = \dfrac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}$, απεικονίζει έναν προσανατολισμένο κύκλο C σε έναν προσανατολισμένο κύκλο C΄, με τέτοιο τρόπο ώστε αν διατρέξουμε τους κύκλους C και C΄ σύμφωνα με την φορά που υπαγορεύει ο προσανατολισμός τους, τότε η περιοχή που βρίσκεται στα αριστερά του C να απεικονίζεται στην περιοχή στα αριστερά του C΄.

Τέσσερα διαφορετικά σημεία είναι ομοκυκλικά ή συγγραμμικά αν και μόνο αν ο διπλός λόγος τους είναι πραγματικός:

Έστω $T(z) = \dfrac{(z_1 - z_3)(z_2 - z)}{(z_1 - z)(z_2 - z_3)}$

Ο μετασχηματισμός αυτός απεικονίζει τα z_1, z_2, z_3 στα $\infty, 0, 1$ αντίστοιχα.

Τότε $[z_1,z_2,z_3,z_4] = \dfrac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)} = T(z_4) = [\infty, 0, 1, T(z_4)]$.

Τα $\infty, 0, 1$ είναι συγγραμμικά και μάλιστα ανήκουν στον πραγματικό άξονα.

Ο μετασχηματισμός Möbius T απεικονίζει ευθείες και κύκλους σε ευθείες και κύκλους.

Ο κύκλος ή η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία z_1,z_2,z_3 απεικονίζεται μέσω του T στον πραγματικό άξονα. Το σημείο z_4 θα ανήκει στην ευθεία ή τον κύκλο των υπολοίπων τριών αν και μόνο η εικόνα του $T(z_4)$ βρίσκεται πάνω στον πραγματικό άξονα. Αυτό όμως είναι ισοδύναμο με το ότι ο $[z_1,z_2,z_3,z_4]$ είναι πραγματικός.

Ας δούμε τώρα το αποτέλεσμα της αντιστροφής στο διπλό λόγο τεσσάρων σημείων:
Έστω ότι z_i' είναι τα αντίστροφα σημεία των σημείων z_i $i=1,2,3,4$ μέσω της αντιστροφής ως προς έναν κύκλο C.
Σε αυτήν την περίπτωση θα έχουμε:
$[z_1',z_2',z_3',z_4']=\overline{[z_1,z_2,z_3,z_4]}$
Πράγματι ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια αντιστροφή ως προς τον κύκλο C με κέντρο το z_0 και ακτίνα r.

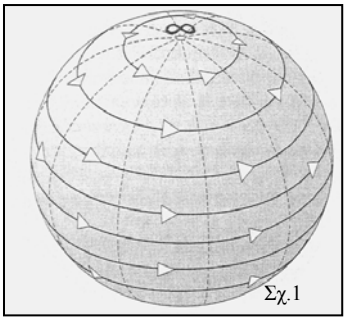
Τότε η αντιστροφή ως προς τον κύκλο C δίνεται από τον τύπο $z'=z_0+\dfrac{r^2}{\overline{z-z_0}}$

Οπότε $z_i'-z_j'=\dfrac{r^2}{\overline{z_i-z_0}}-\dfrac{r^2}{\overline{z_j-z_0}}=\dfrac{r^2\left(\overline{z_j}-\overline{z_i}\right)}{\left(\overline{z_j}-\overline{z_0}\right)\left(\overline{z_i}-\overline{z_0}\right)}$ και το ζητούμενο είναι πλέον προφανές.

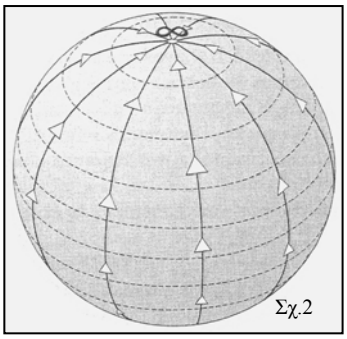
Σταθερά σημεία

Γενικά μιλώντας, ένα σημείο p ονομάζεται σταθερό σημείο ως προς μια απεικόνιση F αν F(p)=p. Σε τέτοια περίπτωση θα λέμε ότι το σημείο p απεικονίζεται στον εαυτό του, ή διατυπώνοντάς το λίγο διαφορετικά, ότι το σημείο p παραμένει σταθερό. Ας σημειώσουμε ότι ως προς τον μετασχηματισμό $z\to E(z)=z$ κάθε σημείο είναι σταθερό σημείο.
Τα σταθερά σημεία ενός μετασχηματισμού Möbius είναι οι λύσεις της εξίσωσης: $z=M(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$.
Αυτή η εξίσωση είναι μια δευτεροβάθμια εξίσωση πράγμα που μας οδηγεί να συμπεράνουμε ότι :
Με την εξαίρεση της ταυτοτικής απεικόνισης ένας μετασχηματισμός Möbius έχει το πολύ δύο σταθερά σημεία. Αν ένας μετασχηματισμός Möbius έχει πάνω από δύο σταθερά σημεία τότε πρέπει να είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός.
Θα περιγράψουμε τώρα τα σταθερά σημεία ενός μετασχηματισμού Möbius με λεπτομέρεια.
Αν ο μετασχηματισμός έχει αναχθεί σε κανονικοποιημένη μορφή $(ad-bc=1)$ τότε τα δύο σταθερά σημεία ξ_+,ξ_- δίνονται από τον τύπο: $\xi_\pm=\dfrac{(a-b)\pm\sqrt{(a+d)^2-4}}{2c}$.
Στην περίπτωση που $(a+d)=\pm 2$ τότε τα δύο σταθερά σημεία ταυτίζονται και γίνονται ένα το $\xi=\dfrac{(a-d)}{2c}$. Στην περίπτωση αυτή ο μετασχηματισμός Möbious καλείται παραβολικός μετασχηματισμός.
Με δεδομένο ότι $c\neq 0$ τότε και τα δύο σταθερά σημεία βρίσκονται στο πεπερασμένο επίπεδο (πεπερασμένα σημεία του $\widehat{\mathbb{C}}$).
Στην περίπτωση όμως που $c=0$ τότε τουλάχιστον το ένα από τα δύο σταθερά σημεία είναι το σημείο στο άπειρο.
Αν $c=0$ τότε ο μετασχηματισμός Möbius παίρνει την μορφή $M(z)=Az+B$. Αν γράψουμε $A=\rho e^{ia}$ τότε τον $M(z)=Az+B$ μπορούμε να τον δούμε ως σύνθεση μιας στροφής ως προς το κέντρο O και γωνίας a, με μια ομοιοθεσία με κέντρο το O κατά συντελεστή ρ και τέλος με μια μεταφορά κατά B.
Θα οπτικοποιήσουμε τους τρεις αυτούς μετασχηματισμούς στη σφαίρα του Riemann:

Αν $a > 0$, παρατηρούμε (από το σχήμα 1) πως η στροφή $z \to e^{ia} z$ προκαλεί μια ίση στροφή της σφαίρας S γύρω από τον κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας.



Σχ.1



Σχ.2

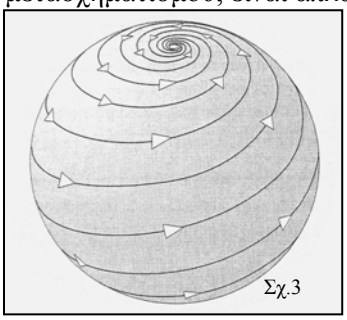
Οι οριζόντιοι κύκλοι πάνω στη σφαίρα, στρέφονται χωρίς να αλλάζουν επίπεδο πάνω στο οποίο βρίσκονται (στο σχήμα η στροφή φαίνεται ότι γίνεται κατά την κατεύθυνση των βελών). Κατά συνέπεια δεν παράγεται κάποιο καινούργιο σχήμα. Το αποτέλεσμα λοιπόν είναι οι ίδιοι κύκλοι. Ως εκ τούτου οι κύκλοι αυτοί λέμε ότι είναι αναλλοίωτες καμπύλες του μετασχηματισμού.

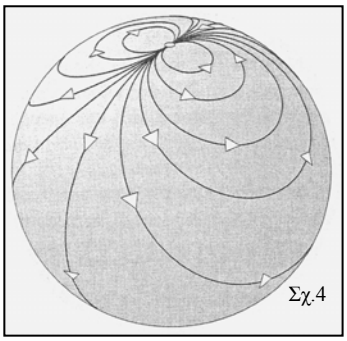
Από το σχήμα 1 φαίνεται καθαρά ότι τα μόνα σταθερά σημεία του μετασχηματισμού είναι το 0 και το ∞. Να σημειώσουμε επίσης ότι οι μέγιστοι κύκλοι που διέρχονται από τα σταθερά σημεία, απλώς αλλάζουν θέση μεταξύ τους, Αυτή η απλή στροφή, είναι το πιο στοιχειώδες παράδειγμα, αρχετυπικό θα μπορούσαμε να πούμε, των μετασχηματισμών εκείνων που ονομάζονται ελλειπτικοί μετασχηματισμοί Möbius.

Με $\rho > 1$ το σχήμα 2 δίνει την μορφή του μετασχηματισμού που παράγεται πάνω στην σφαίρα S από την διαστολή, πάνω στο μιγαδικό επίπεδο, με κέντρο την αρχή O(0,0) και τύπο τον $z \to \rho z$. Αν $\rho < 1$ έχουμε μια συστολή του μιγαδικού επιπέδου και τα σημεία της σφαίρας κινούνται προς τον Νότο αντί να κινούνται προς τον Βορρά. Πάλι τα δύο σταθερά σημεία είναι τα 0 και ∞, όμως τώρα, οι αναλλοίωτοι κύκλοι είναι οι μέγιστοι κύκλοι που διέρχονται από τα σταθερά σημεία στους πόλους και οι ορθογώνιοι κύκλοι προς αυτούς τους κύκλους, αλλάζουν θέσεις μεταξύ τους. Αυτό είναι ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα ενός υπερβολικού μετασχηματισμού Möbius.

Το σχήμα 3 δείχνει το συνδυαστικό αποτέλεσμα μιας στροφής και μιας διαστολής των δύο προηγούμενων περιπτώσεων. Εδώ οι αναλλοίωτες καμπύλες είναι οι σχεδιασμένες σπείρες.

Αυτός ο μετασχηματισμός είναι ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα λοξοδρομικού μετασχηματισμού Möbius, ενώ οι περιπτώσεις του ελλειπτικού και του υπερβολικού μετασχηματισμού, είναι απλά ειδικές περιπτώσεις του.


Σχ.3


Σχ.4

Τέλος, το σχήμα 4 δίνει το αποτέλεσμα πάνω στην σφαίρα του Riemann, μιας μεταφοράς του μιγαδικού επιπέδου.

Επειδή οι αναλλοίωτες καμπύλες στο μιγαδικό επίπεδο είναι οι παράλληλες ευθείες στην διεύθυνση της μεταφοράς, άρα το σύνολο των αναλλοίωτων γραμμών πάνω στη σφαίρα είναι η οικογένεια των κύκλων των οποίων η κοινή εφαπτόμενη στο ∞ είναι παράλληλη στις αναλλοίωτες ευθείες του μιγαδικού επιπέδου. Το ∞ είναι το μόνο αναλλοίωτο σημείο στην περίπτωση αυτή. Η μεταφορά είναι ένα παράδειγμα ενός παραβολικού μετασχηματισμού Möbius.

Ας διατυπώσουμε τώρα το συμπέρασμα το οποίο προκύπτει από την πιο πάνω επεξεργασία:

Ένας μετασχηματισμός Möbius έχει *σταθερό σημείο στο* ∞ τότε και μόνο τότε όταν είναι μια ομοιότητα: $\mathrm{M}(z) = (az + b)$. Επιπλέον το ∞ *είναι* <u>*το μόνο*</u> *σταθερό σημείο* αν και μόνο αν το $M(z)$ είναι μια μεταφορά: $M(z) = (z + b)$.

Κάθε μετασχηματισμός Möbius είναι ισοδύναμος με μια και μόνο μια από αυτές τις τέσσερις μορφές.

Μια διαφορετική απόδειξη *της μοναδικότητας* στο θεμελιώδες θεώρημα η οποία στηρίζεται στην ιδέα των σταθερών σημείων

Η απόδειξη του ισχυρισμού ότι αν υπάρχει ένας μετασχηματισμός Möbius ο οποίος απεικονίζει τρία οποιαδήποτε σημεία σε τρία οποιαδήποτε άλλα σημεία τότε θα είναι μοναδικός μπορεί να γίνει μέσω μιας τελείως διαφορετικής προσέγγισης.
Η απόδειξη αυτή στηρίζεται ουσιαστικά στην ιδέα των σταθερών σημείων ενός μετασχηματισμού Möbius. Όπως είπαμε και πιο πάνω, με την εξαίρεση της ταυτοτικής απεικόνισης, ένας μετασχηματισμός Möbius έχει το πολύ δύο σταθερά σημεία.
Ας υποθέσουμε τώρα ότι M και N είναι δύο μετασχηματισμοί Möbius που και οι δύο απεικονίζουν τρία συγκεκριμένα σημεία (ας πούμε τα q,r,s) σε τρία άλλα συγκεκριμένα σημεία. Ο μετασχηματισμός $N^{-1} \circ M$ είναι ένας μετασχηματισμός Möbius ο οποίος κρατάει τα σημεία q,r,s σταθερά. Ένας μετασχηματισμός Möbius έχει πάνω από δύο σταθερά σημεία μόνο στην περίπτωση που είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός. Άρα ο $N^{-1} \circ M$ είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός και έτσι $N = M$.

Κύκλοι διερχόμενοι από τέσσερα σημεία

Στο σημείο αυτό, θα επεξεργαστούμε μια εφαρμογή του θεμελιώδους θεωρήματος της γεωμετρίας της αντιστροφής, μέσω της οποίας θα μπορούμε να καθορίσουμε αν τέσσερα σημεία $z_1, z_{2,} z_3, z_4$, βρίσκονται πάνω στον ίδιο γενικευμένο κύκλο.

Αν υπάρχει ένα γενικευμένος κύκλος C ο οποίος διέρχεται από τέσσερα σημεία z_1, z_2, z_3, z_4 τα οποία μας έχουν δοθεί, τότε αυτός ο κύκλος θα είναι και ο μοναδικός κύκλος ο οποίος θα διέρχεται από τα τρία σημεία $z_1, z_{2,} z_3$. Έτσι αυτό που μένει να κάνουμε είναι να αποφανθούμε αν ο κύκλος C περνάει και από το τέταρτο σημείο.
Για να απαντήσουμε σε κάτι τέτοιο θα θεωρήσουμε τον μετασχηματισμό Möbius M ο οποίος απεικονίζει τα σημεία $z_1, z_{2,} z_3$ στα σημεία $0, 1, \infty$ αντίστοιχα.

Μέσω του M η εικόνα του C είναι ο επεκτεταμένος πραγματικός άξονας, διότι αυτός είναι ο μοναδικός γενικευμένος κύκλος που διέρχεται από τα σημεία $0, 1, \infty$.

Αν το z_4 κείται πάνω στον κύκλο C τότε η εικόνα του μέσω του μετασχηματισμού M πρέπει να κείται και αυτή στον πραγματικό άξονα. Αντιθέτως αν το z_4 δεν κείται πάνω στον κύκλο C τότε και η εικόνα του μέσω του μετασχηματισμού M επίσης δεν κείται στον πραγματικό άξονα.
παράδειγμα 3:
Να καθοριστεί αν τα τέσσερα σημεία $i,\ 1+4i,\ 3,\ 4+3i$ βρίσκονται σε ένα γενικευμένο κύκλο.
Λύση: Πρώτα θα καθορίσουμε αν το μετασχηματισμό Möbius M ο οποίος απεικονίζει τα σημεία $z_1, z_{2,} z_3$ στα σημεία $0, 1, \infty$ αντίστοιχα.
Ακολουθώντας την μέθοδο που έχουμε αναπτύξει στην προηγούμενη παράγραφο παρατηρούμε ότι αυτός ο μετασχηματισμός πρέπει να έχει την μορφή :
$M(z) = k\dfrac{z-i}{z-3}$. Το επόμενο βήμα είναι να υπολογίσουμε την μεταβλητή k .

Επειδή $M(1+4i) = 1$ θα έχουμε: $1 = k\dfrac{(1+4i)-i}{(1+4i)-3} = k\dfrac{1+3i}{-2+4i}$

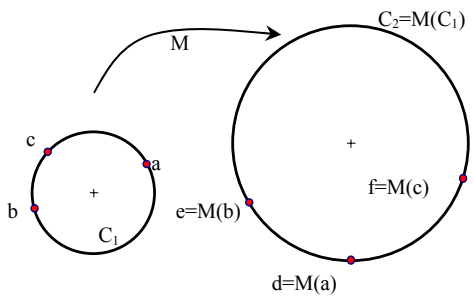
Άρα $k = \dfrac{-2+4i}{1+3i} = \dfrac{(-2+4i)(1-3i)}{10} = 1+i$

Έτσι έχουμε τον μετασχηματισμό: $M(z) = \dfrac{(z-i)(1+i)}{z-3}$

Αυτό που μένει τώρα είναι να εξετάσουμε αν και το τέταρτο σημείο, βρίσκεται επίσης στον γενικευμένο κύκλο που ορίζεται από τα άλλα τρία σημεία.
Θα υπολογίσουμε λοιπόν την εικόνα του $4+3i$ μέσω του μετασχηματισμού M :
$M(4+3i)=\dfrac{(4+2i)(1+i)}{1+3i}=\dfrac{2+6i}{1+3i}=2$. Άρα η εικόνα του 4+3i είναι πραγματικός αριθμός. Αφού λοιπόν το σημείο 2 είναι σημείο του γενικευμένου πραγματικού άξονα, άρα τα τέσσερα σημεία $i,\quad 1+4i,\quad 3,\quad 4+3i$ βρίσκονται στον ίδιο γενικευμένο κύκλο.
Στο πιο πάνω παράδειγμα παρουσιάσαμε μια μέθοδο μέσω της οποίας διερευνήσαμε κατά πόσον τα τέσσερα σημεία $i,\quad 1+4i,\quad 3,\quad 4+3i$ βρίσκονται στον ίδιο γενικευμένο κύκλο.
Όμως το ερώτημα το οποίο δεν έχει ακόμα απαντηθεί είναι το τι γίνεται στην περίπτωση που θέλουμε να δείξουμε ότι τα σημεία αυτά βρίσκονται σε ένα κανονικό κύκλο. Για να γίνει κάτι τέτοιο θα πρέπει να δειχθεί ότι ο γενικευμένος κύκλος ο οποίος περνάει από τα τέσσερα σημεία δεν είναι μια επεκτεταμένη ευθεία.
Στην περίπτωση που είναι μια επεκτεταμένη ευθεία τότε υποχρεωτικά περνάει από το ∞. Σε τέτοια περίπτωση το $M(\infty)$ πρέπει να είναι πραγματικός αριθμός και αυτό διότι $M(\infty)\neq\infty$, αφού ο M είναι ένας ένα προς ένα μετασχηματισμός και $M(3)=\infty$.
Στην συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε $M(\infty)=1+i$ που δεν είναι πραγματικός αριθμός. Έτσι τα τέσσερα σημεία $i,\ 1+4i,\ 3,\ 4+3i$ κείνται σε έναν κανονικό κύκλο.
Μετά από όσα είπαμε πιο πάνω και συνοψίζοντας έχουμε την ακόλουθη μέθοδο:
1. Βρίσκουμε ένα μετασχηματισμό ο οποίος απεικονίζει τα σημεία $z_1, z_{2,} z_3$ στα σημεία $0,1,\infty$ αντίστοιχα.
2. Τα σημεία $z_1, z_{2,} z_3, z_4$ βρίσκονται πάνω στον ίδιο γενικευμένο κύκλο αν και μόνο αν το $M(z_4)$ είναι πραγματικός αριθμός.
3. Ο γενικευμένος κύκλος του βήματος 2 είναι ένας κανονικός κύκλος αν το $M(\infty)\in\mathbb{R}$.

Συμφωνία (congruence) γενικευμένων κύκλων

Θα τελειώσουμε αυτήν την ενότητα με την αναφορά σε μια σημαντική συνέπεια του θεμελιώδους θεωρήματος της γεωμετρίας της αντιστροφής.
Θεώρημα:
Ας υποθέσουμε ότι C_1 και C_2 είναι δύο γενικευμένοι κύκλοι του επεκτεταμένου μιγαδικού επιπέδου. Τότε υπάρχει ένας μετασχηματισμός Möbius ο οποίος απεικονίζει τον κύκλο C_1 στον κύκλο C_2.
Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι a,b,c είναι τρία οποιαδήποτε σημεία του κύκλου C_1 και d,e,f είναι τρία οποιαδήποτε σημεία του κύκλου C_2.
Από το θεμελιώδες θεώρημα της γεωμετρίας της αντιστροφής, γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένας μετασχηματισμός Möbius M ο οποίος απεικονίζει τα a,b,c στα d,e,f αντίστοιχα.

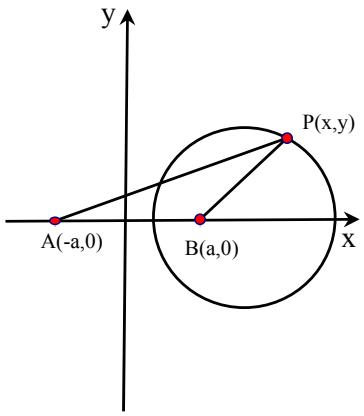


Επειδή ο M απεικονίζει γενικευμένους κύκλους σε γενικευμένους κύκλους άρα ο M θα πρέπει να απεικονίζει τον C_1 σε έναν γενικευμένο κύκλο που διέρχεται από τα σημεία d,e,f. Όμως ένας γενικευμένος κύκλος καθορίζεται μονοσήμαντα από τρία σημεία του, έτσι ο κύκλος C_2 είναι ο μοναδικός κύκλος ο οποίος διέρχεται από τα σημεία d,e,f. Άρα έχουμε ότι ο μετασχηματισμός M απεικονίζει τον κύκλο C_1 στον κύκλο C_2.

Μια πολύ σημαντική συνέπεια αυτού του θεωρήματος είναι ότι όλοι οι γενικευμένοι κύκλοι είναι σύμφωνοι στην γεωμετρία της αντιστροφής.
Είναι χρήσιμο να τονιστεί ότι ένας οποιοσδήποτε κανονικός κύκλος είναι σύμφωνος με οποιαδήποτε επεκτεταμένη ευθεία .
Επειδή οι ευθείες είναι γεωμετρικά αντικείμενα που είναι πιο εύκολο να μελετηθούν, σε σχέση με τους κύκλους, αρκετές φορές ένα πρόβλημα στο οποίο παρουσιάζονται ιδιότητες που είναι αντικείμενο μελέτης της γεωμετρίας της αντιστροφής απλοποιείται, χρησιμοποιώντας ένα μετασχηματισμό αντιστροφής, που απεικονίζει έναν ή περισσότερους κύκλους των σχημάτων του προβλήματος σε επεκτεταμένες ευθείες.
Στα επόμενα κεφάλαια θα δούμε αρκετά τέτοια παραδείγματα, πολλά από τα οποία θα αντλήσουμε από το πεδίο της ιστορίας των μαθηματικών, ενώ κάποια άλλα από την σύγχρονη μαθηματική και εκπαιδευτική πράξη.

Ομοαξονικοί κύκλοι (coaxal circles)

Ένα πολύ γνωστό θεώρημα το οποίο μάλιστα αναφέραμε σε προηγούμενο κεφάλαιο είναι το θεώρημα των απολλώνιων κύκλων: Η αντιστροφή όπως θα δούμε είναι το κλειδί για μια κομψή και εύκολη απόδειξη.



Θεώρημα: (Απολλώνιοι κύκλοι)
Ας υποθέσουμε ότι Α και Β είναι δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία του επιπέδου και έστω ότι k είναι ένας τυχαίος θετικός πραγματικός αριθμός διαφορετικός από το 1.
Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων P τα οποία ικανοποιούν την σχέση $\frac{PA}{PB}=\frac{k}{1}$ είναι ένας κύκλος του οποίου το κέντρο βρίσκεται πάνω στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B.

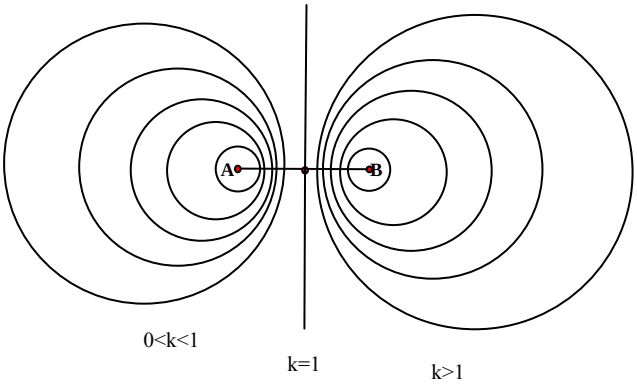
Πρώτη απόδειξη: (αναλυτική γεωμετρία)
Για να απλοποιήσουμε τις αλγεβρικές διαδικασίες θα επιλέξουμε τους x- και y-άξονες έτσι ώστε τα σημεία A και B να έχουν συντεταγμένες (-α,0) και (α,0) αντίστοιχα, με α >0.
Έστω k ένας σταθερός θετικός πραγματικός αριθμός ($k\in\mathbb{R}, k>0$) και $k\neq 1$. Ας υποθέσουμε ότι C είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Q τα οποία ικανοποιούν την σχέση: $\frac{QA}{QB}=\frac{k}{1}$.
Ένα σημείο P ανήκει στον γεωμετρικό τόπο C αν και μόνο αν $PA=k\bullet PB$ (1).
Επειδή $k>0$ η σχέση (1) είναι ισοδύναμη με την $PA^2=k^2\bullet PB^2$.
Με χρήση του τύπου για την απόσταση έχουμε:
$$(x+a)^2+y^2=k^2\left((x-a)^2+y^2\right).$$
Κάνοντας τις πράξεις στις παρενθέσεις και βγάζοντας κοινούς παράγοντες τους x^2, y^2, x παίρνουμε την σχέση $x^2(1-k^2)+y^2(1-k^2)=2ax(1+k^2)+a^2(1-k^2)=0$.
Είναι $k\neq 1$ άρα διαιρώντας με την $(1-k^2)$ προκύπτει ισοδύναμα:
$$x^2+y^2+2a\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)x+a^2=0.$$

Από την σχέση στην οποία καταλήξαμε, προκύπτει ότι ο γεωμετρικός τόπος C είναι ένας κύκλος, ο οποίος έχει κέντρο c και ακτίνα r όπου $c = \left(-a\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right), 0 \right)$

και $r = \sqrt{a^2\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 - a^2} = \frac{2ak}{\left|1-k^2\right|}$.

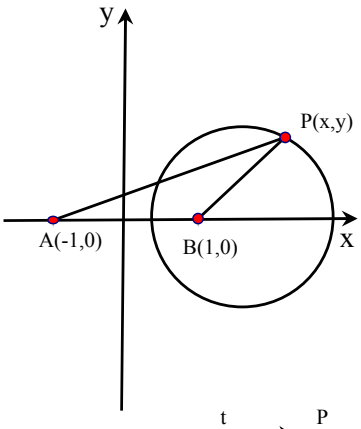
Παρατηρούμε δε ότι το κέντρο του κύκλου αυτού βρίσκεται πάνω στον x-άξονα ο οποίος με την επιλογή αξόνων που κάναμε είναι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B.
Αν $k = 1$, τότε πολύ εύκολα βρίσκουμε ότι ο γεωμετρικός τόπος είναι η μεσοκάθετος ευθεία L του τμήματος AB.
Αν υιοθετήσουμε την σύμβαση ότι ο γεωμετρικός τόπος (για $k = 1$) περιέχει και το ∞ μπορούμε να μιλάμε για επεκτεταμένη ευθεία $L \cup \{\infty\}$.

Με αυτήν την σύμβαση κάθε θετική τιμή για το k δίνει και έναν γενικευμένο κύκλο ο οποίος και είναι γνωστός ως κύκλος του Απολλώνιου.
Η οικογένεια όλων αυτών των κύκλων είναι γνωστή ως οικογένεια των Απολλώνιων κύκλων που ορίζεται από τα σημεία A και B.



Καθώς το k αυξάνεται και παίρνει κάθε τιμή από το διάστημα $(0, \infty)$ οι αντίστοιχοι κύκλοι διατρέχουν όλη την οικογένεια των Απολλώνιων κύκλων.
Η μεσοκάθετος L του τμήματος AB χωρίζει το επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα. Το ένα ημιεπίπεδο περιέχει το σημείο Α και το άλλο ημιεπίπεδο περιέχει το σημείο Β.
Θα συμβολίσουμε με Π_A το ημιεπίπεδο που περιέχει το σημείο A και με Π_B το ημιεπίπεδο που περιέχει το σημείο B.
Όταν $0 < k < 1$ τότε έχουμε $PA < PB$ και έτσι το P είναι πιο κοντά στο A από ότι είναι στο B. Οι κύκλοι που αντιστοιχούν σε αυτές τις τιμές του k βρίσκονται στο ημιεπίπεδο Π_A (δηλαδή βρίσκονται στην ίδια μεριά με το σημείο A).
Για τιμές του k πολύ κοντά στο 0, από τον τύπο $PA = k \bullet PB$, προκύπτει ότι το PA είναι πολύ μικρό οπότε οι αντίστοιχοι κύκλοι βρίσκονται πολύ κοντά στο σημείο A.
Καθώς το k τείνει προς το 1 οι κύκλοι μεγαλώνουν και τείνουν όλο και περισσότερο προς την ευθεία L.
Όταν $k = 1$ ο αντίστοιχος κύκλος είναι η επεκτεταμένη ευθεία $L \cup \{\infty\}$.
Όταν $k > 1$ έχουμε ότι $PA > PB$ οπότε το P είναι στο ημιεπίπεδο Π_B και κατά συνέπεια οι κύκλοι που αντιστοιχούν σε αυτές τις τιμές του k βρίσκονται και αυτοί στο ημιεπίπεδο Π_B.
Καθώς το k αυξάνεται παίρνοντας τιμές απεριόριστα μεγαλύτερες από το 1 τότε το $PB = \frac{1}{k} PA$ γίνεται μικρότερο και οι αντίστοιχοι κύκλοι συρρικνώνονται και πλησιάζουν όλο και πιο πολύ προς το B.
Υπό το φως των πιο πάνω περιγραφών, είναι πολλές φορές βολικό, όταν αναφερόμαστε στα σημεία A και B να τα βλέπουμε ως σημειακούς κύκλους (point circles), οι οποίοι αντιστοιχούν στις τιμές $k = 0$ και $k = \infty$ αντίστοιχα.

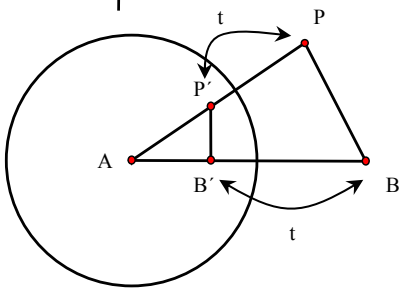
Αυτή η σύμβαση είναι χρήσιμη διότι με αυτόν τον τρόπο κάθε σημείο του επιπέδου ανήκει σε έναν μοναδικό κύκλο που συνδέεται με την οικογένεια των Απολλώνιων κύκλων.
Παράδειγμα :
Όπως είπαμε και πιο πριν κάθε δύο σημεία του επιπέδου τα οποία είναι διαφορετικά μεταξύ τους καθορίζουν και μια οικογένεια Απολλώνιων κύκλων.
Ας υποθέσουμε ότι έχουμε την οικογένεια των Απολλώνιων κύκλων η οποία ορίζεται από τα σημεία (-1,0) και (1,0). Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου της οικογένειας που διέρχεται από το σημείο (2,1).
Λύση:
Ας υποθέσουμε ότι P (x,y) είναι ένα σημείο στο επίπεδο του οποίου η απόσταση από το (-1,0) είναι k φορές η απόσταση από το σημείο (1,0).



Τότε αν χρησιμοποιήσουμε τον Ευκλείδειο τύπο για την απόσταση παίρνουμε :

$$(x+1)^2 + y^2 = k^2\left((x-1)^2 + y^2\right) \qquad (1)$$

Για κάθε τιμή του k η εξίσωση (1) παράγει την εξίσωση ενός συγκεκριμένου κύκλου της οικογένειας. Αυτό που πρέπει να κάνουμε είναι να βρούμε την τιμή εκείνη για το k, η οποία δίνει την εξίσωση του κύκλου που ψάχνουμε, δηλαδή του κύκλου που διέρχεται από το σημείο (2,1).



Για x=2 και y=1 στον τύπο (1) έχουμε:

$$(2+1)^2 + 1^2 = k^2\left((2-1)^2 + 1^2\right) \Rightarrow 10 = 2k^2 \Rightarrow k = \sqrt{5}$$

Άρα η εξίσωση του κύκλου που ψάχνουμε προκύπτει από τον τύπο:

$$(x+1)^2 + y^2 = k^2\left((x-1)^2 + y^2\right) \text{ για } k = \sqrt{5}$$

Έτσι η εξίσωση $(x+1)^2 + y^2 = k^2\left((x-1)^2 + y^2\right)$

γίνεται $(x+1)^2 + y^2 = 5\left((x-1)^2 + y^2\right)$ η οποία μετά τις πράξεις απλοποιείται στην εξίσωση : $x^2 + y^2 - 3x + 1 = 0$

Θα δώσουμε τώρα μια απόδειξη του ίδιου θεωρήματος χρησιμοποιώντας γεωμετρία αντιστροφής.

Δεύτερη απόδειξη:
Ας υποθέσουμε ότι C είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων P τα οποία ικανοποιούν την ισότητα: $PA = kPB$ και ας θεωρήσουμε ότι t είναι η αντιστροφή ως προς κύκλο κέντρου A και ακτίνας 1.
Θα δείξουμε ότι $C' = t(C)$ είναι κύκλος οπότε $C = t^{-1}(C')$ είναι ένας γενικευμένος κύκλος .
Ας υποθέσουμε ότι P είναι ένα τυχαίο σημείο του επεκτεταμένου επιπέδου και έστω $t(B) = B'$ και $t(P) = P'$
Από το ορισμό της αντιστροφής έχουμε ότι $AB \cdot AB' = 1$ και $AP \cdot AP' = 1$
άρα $\dfrac{AB}{AP'} = \dfrac{AP}{AB'}$
Τα τρίγωνα $\triangle AB'P'$ και $\triangle ABP$ είναι όμοια διότι:
1. οι γωνίες $\sphericalangle B'AP'$ και $\sphericalangle BAP$ είναι ίσες και 2. $\dfrac{AB}{AP'} = \dfrac{AP}{AB'}$

Από την ομοιότητα των τριγώνων προκύπτει ότι: $\frac{B'P'}{PB}=\frac{AP'}{AB}$ (1)

Από την ισότητα: $AP\cdot AP'=1$ προκύπτει ότι: $AP'=\frac{1}{AP}$ (2)

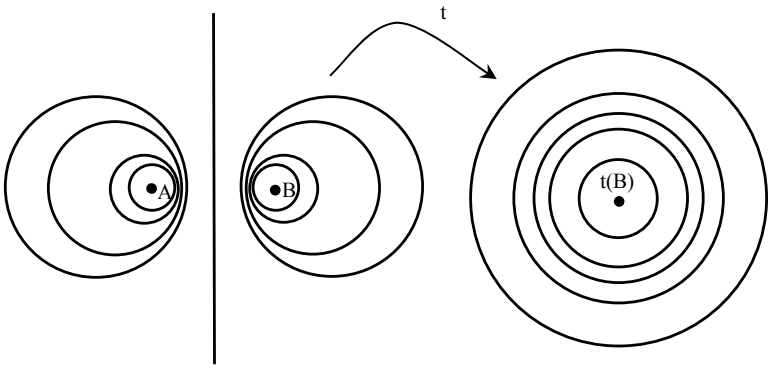
Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι: $B'P'=\frac{PB}{AB\cdot AP}$ (3)

Το σημείο P βρίσκεται στον γεωμετρικό τόπο C οπότε $AP=k\cdot PB$ (4)

Από τις (3) και (4) προκύπτει ότι $B'P'=\frac{1}{k\cdot AB}$ (5). Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι το P' βρίσκεται σε κύκλο C' κέντρου B' και ακτίνας $\frac{1}{k\cdot AB}$.

Αντίστροφα αν το P' κείται πάνω στον κύκλο C' τότε $B'P'=\frac{1}{k\cdot AB}$ οπότε από την $B'P'=\frac{PB}{AB\cdot AP}$ έχουμε ότι $\frac{1}{k\cdot AB}=\frac{PB}{AB\cdot AP}$ και τελικά $AP=k\cdot PB$ άρα το P βρίσκεται στον γεωμετρικό τόπο C.

Ως συνέπεια των ανωτέρω έχουμε ότι η αντιστροφή t απεικονίζει τον γεωμετρικό τόπο C στον κύκλο C'.



Όμως η $t^{-1}=t$ απεικονίζει γενικευμένους κύκλους σε γενικευμένους κύκλους.

Άρα $C=t^{-1}(C')$ είναι ένας γενικευμένος κύκλος.

Αυτή η απόδειξη δείχνει ότι υπάρχει μια ένα προς ένα και επί αντιστοιχία μεταξύ της οικογένειας των Απολλώνιων κύκλων και μιας οικογένειας ομόκεντρων κύκλων. Κάθε Απολλώνιος κύκλος αντιστοιχεί σε μια τιμή του k και αυτή η σταθερά k αντιστοιχεί σε έναν κύκλο ακτίνας $\frac{1}{k\cdot AB}$ και κέντρου $B'=t(B)$.

❖ Η επεκτεταμένη ευθεία της οικογένειας των Απολλώνιων κύκλων αντιστοιχεί στην τιμή 1 της σταθεράς k. Η τιμή αυτή αντιστοιχεί σε κύκλο (της οικογένειας των ομόκεντρων κύκλων) ακτίνας $\frac{1}{AB}$ και κέντρου $B'=t(B)$.

Όμως $\frac{1}{AB}=AB'$ άρα αυτός ο κύκλος διέρχεται από το κέντρο A του κύκλου αντιστροφής (όπως είναι και αναμενόμενο).

▸ Η αξία αυτής της αντιστοίχισης, που περιγράψαμε πιο πάνω, έγκειται στο ότι μας επιτρέπει να χαρακτηρίσουμε τις οικογένειες των Απολλώνιων κύκλων με όρους μετασχηματισμών αντιστροφής. Αυτός ο χαρακτηρισμός είναι απαραίτητος για την αντιμετώπιση πολλών ζητημάτων της γεωμετρίας της αντιστροφής και έτσι θα διατυπώσουμε τα παραπάνω με την μορφή θεωρήματος:

Θεώρημα: Έστω ότι τα A και B είναι διακεκριμένα μεταξύ τους σημεία του επιπέδου και t είναι ο μετασχηματισμός αντιστροφής ως προς τον κύκλο μοναδιαίας ακτίνας και κέντρου A.

Τότε η οικογένεια του Απολλώνιου κύκλου η οποία ορίζεται από τα σημεία A και B απεικονίζεται με την αντιστροφή t σε μια οικογένεια ομόκεντρων κύκλων οι οποίοι έχουν κέντρο το σημείο $t(B)$.

■ Μια αξιοσημείωτη συνέπεια αυτού του θεωρήματος είναι ότι στην γεωμετρία της αντιστροφής όλες οι Απολλώνιες και ομόκεντρες οικογένειες κύκλων είναι σύμφωνες (Congruent) μεταξύ τους. Πράγματι το θεώρημα αυτό δείχνει, ότι κάθε Απολλώνια ομάδα κύκλων είναι σύμφωνη με μια οικογένεια ομόκεντρων κύκλων και έτσι είναι αρκετό να δείξει κάποιος ότι όλες οι ομόκεντρες οικογένειες κύκλων είναι μεταξύ τους σύμφωνες. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί πολύ εύκολα, αρκεί να παρατηρήσει κανείς ότι κάθε οικογένεια ομόκεντρων κύκλων, μπορεί να απεικονιστεί σε οποιαδήποτε άλλη οικογένεια ομόκεντρων κύκλων μέσω μιας μεταφοράς η οποία κάνει τα αντίστοιχα κέντρα τους να συμπίπτουν.
(Ας θυμηθούμε ότι η μεταφορά είναι ένας μετασχηματισμός αντιστροφής αρκεί να υιοθετήσουμε την σύμβαση ότι το ∞ απεικονίζεται στο ∞.

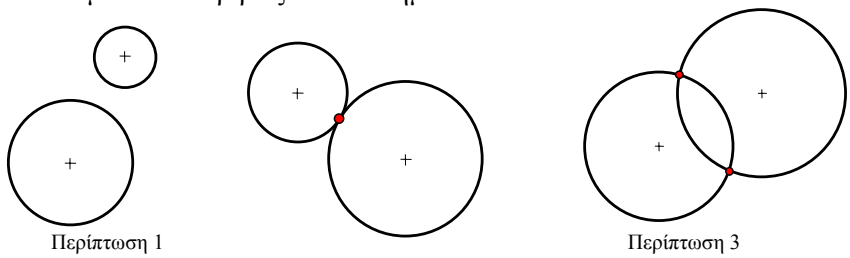
Οικογένειες κύκλων

Δύο οποιοιδήποτε γενικευμένοι κύκλοι του επεκτεταμένου επιπέδου συνδέονται με έναν ακριβώς από τους κάτωθι τρόπους:

1. Οι κύκλοι δεν τέμνονται.

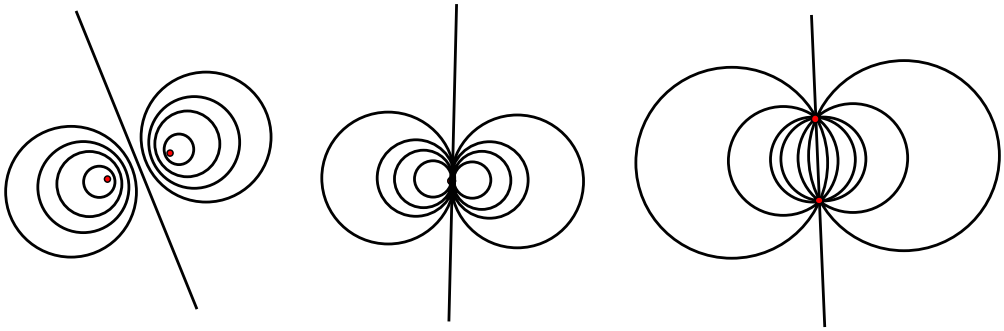
2. Οι κύκλοι τέμνονται (εφάπτονται) ακριβώς σε ένα σημείο.

3. Οι κύκλοι τέμνονται ακριβώς σε δύο σημεία.



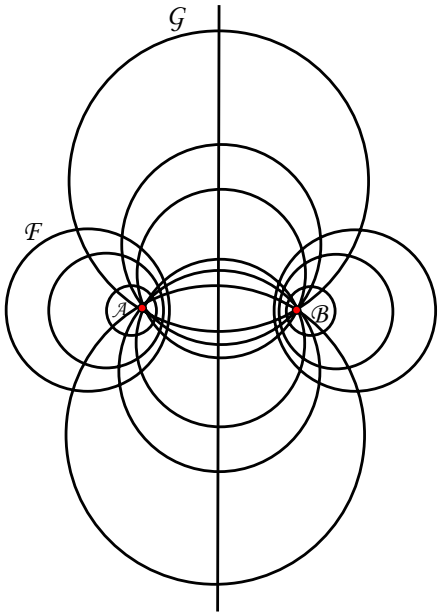
Περίπτωση 1 Περίπτωση 2 Περίπτωση 3

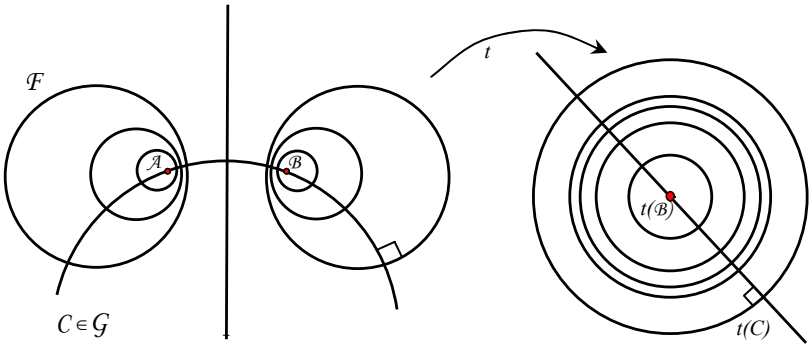
Στην προηγούμενη ενότητα συναντήσαμε τις Απολλώνιες οικογένειες κύκλων, των οποίων δύο τυχαίοι κύκλοι δεν τέμνονται.
Τώρα θα θεωρήσουμε τις δύο άλλες οικογένειες, δηλαδή τις οικογένειες των γενικευμένων κύκλων των οποίων οι κύκλοι έχουν ένα κοινό σημείο, όπως επίσης και τις οικογένειες των γενικευμένων κύκλων των οποίων οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία.



Σε κάθε οικογένεια ανήκει μια ακριβώς επεκτεταμένη ευθεία η οποία είναι γνωστή ως ριζικός άξονας της οικογένειας. Τα κέντρα των κύκλων κάθε οικογένειας κείνται πάνω σε μια ευθεία ή άξονα ο οποίος είναι κάθετος στον ριζικό άξονα. Όλοι οι κύκλοι κάθε οικογένειας είναι συμμετρικοί ως προς τον άξονα ο οποίος διέρχεται από τα κέντρα τους. Επειδή όλα τα ζεύγη κύκλων των εν λόγω οικογενειών έχουν τον ίδιο ριζικό άξονα, οι οικογένειες αυτές είναι γνωστές και ως ομοαξονικές οικογένειες (coaxal families) ή και ως δέσμες κύκλων.

Ορισμός:
Μια ομοαξονική οικογένεια κύκλων του επιπέδου είναι μια οικογένεια γενικευμένων κύκλων η οποία ανήκει σε μια από τις κάτωθι κατηγορίες:
1. Μια Απολλώνια οικογένεια με δύο συγκεκριμένους σημειακούς κύκλους.
2. Μια οικογένεια της οποίας όλοι οι κύκλοι έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.
3. Μια οικογένεια κύκλων οι οποίοι διέρχονται από δύο συγκεκριμένα και διαφορετικά μεταξύ τους σημεία.
Ο κύκλος κάθε οικογένειας, ο οποίος είναι επεκτεταμένη ευθεία, λέγεται ριζικός άξονας της οικογένειας.
Αν δοθεί μια οικογένεια Απολλώνιων κύκλων $\mathcal{F}$ η οποία ορίζεται από δύο σημειακούς κύκλους $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$, τότε υπάρχει μια οικογένεια ομοαξονικών κύκλων $\mathcal{G}$, η οποία περνάει από τα $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ και είναι η οικογένεια των κύκλων *η οποία (θεωρούμε) ότι*

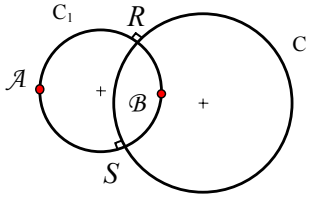




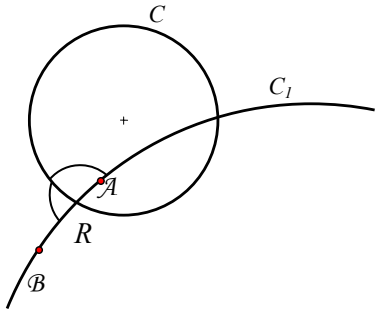
αντιστοιχεί στην Απολλώνια οικογένεια κύκλων $\mathcal{F}$.
Στο επόμενο θεώρημα περιγράφεται μια σημαντική σχέση μεταξύ δύο τέτοιων ομάδων κύκλων, δηλαδή μιας Απολλώνιας οικογένειας και της αντίστοιχης ομοαξονικής ομάδας που διέρχεται από τους σημειακούς κύκλους της Απολλώνιας οικογένειας.
Θεώρημα:
(ομοαξονικών κύκλων)
Έστω $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία του επιπέδου. Αν $\mathcal{F}$ είναι η ομάδα Απολλώνιων κύκλων η οποία ορίζεται από τα σημεία $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ και $\mathcal{G}$ η αντίστοιχη ομάδα των γενικευμένων κύκλων οι οποίοι διέρχονται από τα σημεία $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$, τότε κάθε κύκλος της ομάδας $\mathcal{F}$ είναι ορθογώνιος προς κάθε κύκλο της ομάδας $\mathcal{G}$.
Απόδειξη:
Έστω t είναι η αντιστροφή ως προς τον κύκλο μοναδιαίας ακτίνας και κέντρου $\mathcal{A}$.
Από γνωστό θεώρημα έχουμε ότι η απολλώνια ομάδα $\mathcal{F}$ απεικονίζεται μέσω της t, στην οικογένεια ομόκεντρων κύκλων οι οποίοι έχουν κέντρο το σημείο $t(B)$.
Έστω C ένα τυχαίο μέλος της οικογένειας $\mathcal{G}$ των ομοαξονικών κύκλων.
Αφού ο C είναι ένας γενικευμένος κύκλος ο οποίος διέρχεται από τα $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ θα έχουμε ότι $t(C)$ είναι ένας γενικευμένος κύκλος που διέρχεται από το $t(A)=\infty$ (εδώ ας θυμηθούμε ποιος είναι ο κύκλος της αντιστροφής) και το $t(B)$. Με άλλα λόγια το $t(C)$ είναι μια επεκτεταμένη ευθεία που διέρχεται από το $t(B)$.
Η ευθεία $t(C)$ τέμνει κάθε έναν από τους ομόκεντρους κύκλους κέντρου $t(B)$ κατά ορθή γωνία (αφού διέρχεται από το κέντρο $t(B)$ όλων αυτών των ομόκεντρων κύκλων). Επειδή

όμως η αντιστροφή διατηρεί το μέγεθος των γωνιών προκύπτει πολύ εύκολα ότι ο C τέμνει κάθε έναν από τους Απολλώνιους κύκλους κατά ορθή γωνία.
Το θεώρημα των ομοαξονικών κύκλων δηλώνει ότι κάθε γενικευμένος κύκλος που διέρχεται από τα σημεία $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ τέμνει κάθε κύκλο που ανήκει στην Απολλώνια οικογένεια κύκλων που ορίζεται από τα σημεία $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$, κατά ορθή γωνία.
Το επόμενο θεώρημα μας δίνει την δυνατότητα να συμπεράνουμε ότι τα $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ είναι αντίστροφα σημεία ως προς *κάθε έναν* από τους κύκλους της οικογένειας των Απολλώνιων κύκλων η οποία ορίζεται από τα $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$.
Θεώρημα:
Δύο σημεία $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ του επεκτεταμένου επιπέδου είναι αντίστροφα σημεία ως προς έναν γενικευμένο κύκλο C αν και μόνο αν κάθε γενικευμένος κύκλος που διέρχεται από τα $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ τέμνει τον C κατά ορθή γωνία.
Απόδειξη :
έχει γίνει σε προηγούμενο σημείο της εργασίας μας.

Μια λίγο διαφορετική απόδειξη είναι η εξής:
Πρώτα θα αποδείξουμε ότι τα $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ είναι αντίστροφα σημεία αν κάθε γενικευμένος κύκλος που διέρχεται από τα $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ τέμνει τον C κατά ορθή γωνία.

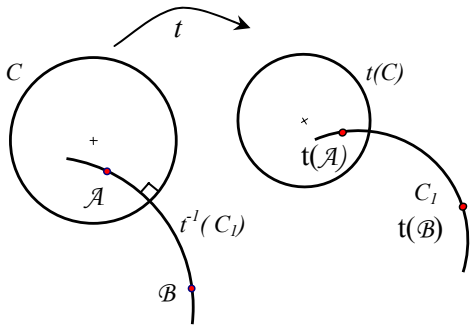


Έστω C_1 ένας γενικευμένος κύκλος που διέρχεται από τα $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ και τέμνει τον κύκλο C κατά ορθές γωνίες στα σημεία R και S. Θα αντιστρέψουμε το σχήμα ως προς τον γενικευμένο κύκλο C. Αφού τα σημεία R και S παραμένουν σταθερά τότε ο C_1 απεικονίζεται σε έναν γενικευμένο κύκλο ο οποίος τέμνει τον C κατά ορθές γωνίες στα σημεία R και S. Οπότε ο κύκλος C_1 απεικονίζεται στον εαυτό του (διότι κάθε κύκλος που διέρχεται από τα R και S τέμνει τον C κατά διαφορετική γωνία). Δείξαμε λοιπόν ότι κάθε γενικευμένος κύκλος που διέρχεται από τα $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ και τέμνει τον C κατά ορθές γωνίες απεικονίζεται στον εαυτό του.



Όταν όμως συμβαίνει κάτι τέτοιο, πρέπει το $\mathcal{A}$ να είναι αναγκαστικά αντίστροφο του $\mathcal{B}$ διότι στην περίπτωση που το $\mathcal{A}$ είχε ως αντίστροφό του κάποιο άλλο σημείο $\mathcal{D}$ τότε το $\mathcal{D}$ θα ανήκε σε όλους τους κύκλους οι οποίοι είναι ορθογώνιοι με τον C και διέρχονται από τα σημεία $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ (αυτό θα συνέβαινε γιατί οι κύκλοι αντιστρέφονται στον εαυτό τους άρα το αντίστροφο κάθε σημείου τους είναι και πάλι σημείο τους) οπότε οι κύκλοι θα είχαν τρία κοινά σημεία και έτσι θα ταυτίζονταν.
Ακολούθως θα αποδείξουμε το αντίστροφο, δηλαδή ότι αν τα σημεία $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ είναι αντίστροφα σημεία το ένα του άλλου, τότε κάθε γενικευμένος κύκλος που διέρχεται από τα $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ τέμνει τον κύκλο C κατά ορθές γωνίες.
Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι τα $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ είναι αντίστροφα μεταξύ τους σημεία και ας δεχθούμε ότι C_1 είναι ένας γενικευμένος κύκλος ο οποίος διέρχεται από τα $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ και τέμνει τον C στο R. Τότε με αντιστροφή ως προς τον κύκλο C θα έχουμε ότι τα σημεία $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ είναι το ένα αντίστροφο του άλλου ενώ το σημείο R παραμένει σταθερό (δηλαδή είναι το αντίστροφο του εαυτού του) και ως εκ τούτου ο C_1 απεικονίζεται στον εαυτό του. Έτσι οι γωνίες που σχηματίζει ο C_1 με τον κύκλο C στο σημείο R πρέπει να είναι ίσες και ως εκ τούτου πρέπει να είναι ορθές.
Δύο πολύ σπουδαία πορίσματα είναι τα εξής:

Πόρισμα 1:
Αν C είναι ένας κύκλος της Απολλώνιας οικογένειας που ορίζεται από τα σημεία $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ τότε τα $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ είναι αντίστροφα ως προς τον κύκλο C.
Ας υποθέσουμε ότι ο C είναι ένας κύκλος της οικογένειας που ορίζουν τα σημεία $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$. Τότε από το θεώρημα των ομοαξονικών κύκλων συμπεραίνουμε ότι κάθε γενικευμένος κύκλος που διέρχεται από τα $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ τέμνει τον C κατά ορθές γωνίες. Από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι τα $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ είναι αντίστροφα σημεία μέσω της αντιστροφής ως προς τον κύκλο C.
Το δεύτερο, επίσης πολύ σημαντικό πόρισμα, είναι το εξής:
Έστω τα σημεία $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ είναι αντίστροφα σημεία μέσω της αντιστροφής ως προς τον γενικευμένο κύκλο C. Έστω ότι t είναι ένας μετασχηματισμός αντιστροφής. Οι εικόνες $t(\mathcal{A})$ και $t(\mathcal{B})$ των σημείων $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ είναι αντίστροφα σημεία ως προς τον γενικευμένο κύκλο $t(C)$ (αρχή της συμμετρίας).



Ας υποθέσουμε ότι C_1 είναι ένας τυχαίος γενικευμένος κύκλος που διέρχεται από τα σημεία $t(\mathcal{A})$ και $t(\mathcal{B})$ τότε $t^{-1}(C_1)$ είναι ένας γενικευμένος κύκλος που περνάει από τα σημεία $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$. Από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι προκύπτει ότι $t^{-1}(C_1)$ τέμνει τον κύκλο C κατά ορθές γωνίες.
Αλλά η t διατηρεί το μέγεθος των γωνιών και έτσι ο C_1 τέμνει τον κύκλο $t(C)$ κατά ορθές γωνίες.
Επειδή ο C_1 είναι ένας αυθαίρετος γενικευμένος κύκλος που διέρχεται από τα $t(\mathcal{A})$ και $t(\mathcal{B})$ προκύπτει ότι τα $t(\mathcal{A})$ και $t(\mathcal{B})$ είναι αντίστροφα σημεία μέσω της αντιστροφής ως προς τον κύκλο $t(C)$.
Ένα άμεσο αποτέλεσμα το πορίσματος 2 είναι ότι αν $\mathcal{F}$ είναι η οικογένεια των γενικευμένων κύκλων ως προς τους οποίους τα σημεία $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ είναι το ένα αντίστροφο του άλλου, τότε μέσω του μετασχηματισμού αντιστροφής t η οικογένεια $\mathcal{F}$ απεικονίζεται στην οικογένεια των γενικευμένων κύκλων ως προς τους οποίους τα σημεία $t(\mathcal{A})$ και $t(\mathcal{B})$ είναι αντίστροφα μεταξύ τους σημεία.
Με μια πρώτη ματιά αυτή η παρατήρηση που κάναμε μοιάζει να είναι απλά μια αναδιατύπωση του πορίσματος. Ωστόσο αυτή η αναδιατύπωση έχει μια πολύ ιδιαίτερη σημασία όπως δείχνει και το ακόλουθο θεώρημα:
Θεώρημα:
Έστω $\mathcal{F}$ είναι η οικογένεια των γενικευμένων κύκλων και $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ είναι αντίστροφα σημεία ως προς αυτούς τους κύκλους.
Τότε η $\mathcal{F}$ είναι είτε μια οικογένεια ομόκεντρων κύκλων με κέντρο το σημείο $\mathcal{A}$ ή το $\mathcal{B}$ ή μια ομάδα Απολλώνιων κύκλων η οποία έχει ως σημειακούς κύκλους τους κύκλους $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$.
Απόδειξη:
Αρχικά ας υποθέσουμε ότι είτε το $\mathcal{A}$ είτε το $\mathcal{B}$ είναι το ∞. Για να είμαστε πιο σαφείς ας υποθέσουμε ότι $\mathcal{A}=\infty$.
Τότε κάθε κύκλος από την οικογένεια $\mathcal{F}$ έχει το ∞ και το $\mathcal{B}$ ως αντίστροφα σημεία.
Αυτό όμως μπορεί να συμβεί μόνο όταν το $\mathcal{B}$ είναι το κέντρο κάθε κύκλου της οικογένειας $\mathcal{F}$. Με άλλα λόγια η οικογένεια $\mathcal{F}$ είναι μια οικογένεια ομόκεντρων κύκλων των οποίων το κέντρο είναι το σημείο $\mathcal{B}$. Με τον ίδιο τρόπο σκεφτόμαστε και στην περίπτωση που $\mathcal{B}=\infty$.
Κατόπιν υποθέτουμε ότι ούτε το $\mathcal{A}$ ούτε το $\mathcal{B}$ είναι το σημείο στο άπειρο και έστω ότι t είναι η αντιστροφή ως προς τον κύκλο με κέντρο το $\mathcal{A}$ και μοναδιαία ακτίνα. Από προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι η t απεικονίζει την οικογένεια $\mathcal{F}$ στην οικογένεια όλων των

γενικευμένων κύκλων ως προς τους οποίους το $t(\mathcal{A})=\infty$ και το $t(\mathcal{B})$ είναι μεταξύ τους αντίστροφα σημεία. Η οικογένεια αυτή είναι στην ουσία, η οικογένεια των ομόκεντρων κύκλων που έχουν κέντρο το $t(\mathcal{B})$.

Από προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι η οικογένεια $\mathcal{F}$ είναι η Απολλώνια οικογένεια των κύκλων που ορίζονται από τους σημειακούς κύκλους $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$.

Υπό το πρίσμα των παρατηρήσεων που προηγήθηκαν του θεωρήματος αυτού έχουμε σαν συνέπεια ότι μέσω ενός μετασχηματισμού αντιστροφής t, μία Απολλώνια οικογένεια κύκλων που ορίζεται από τους σημειακούς κύκλους $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ απεικονίζεται:

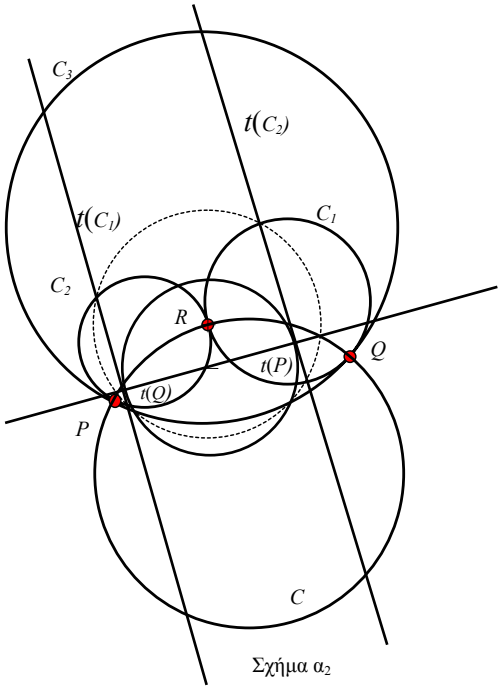
<u>είτε</u>

σε μια Απολλώνια οικογένεια κύκλων που
ορίζεται από τους σημειακούς κύκλους t(A) και t(B)

<u>ή</u>

σε μια ομόκεντρη οικογένεια κύκλων που
έχουν κοινό κέντρο το $t(\mathcal{A})$ ή το $t(\mathcal{B})$.

Παρομοίως μια ομόκεντρη οικογένεια κύκλων των οποίων το κοινό κέντρο είναι το σημείο $\mathcal{A}$ απεικονίζεται σε μια Απολλώνια οικογένεια κύκλων που ορίζεται από τα σημεία $t(\mathcal{A})$ και $t(\infty)$ είτε σε μια ομόκεντρη οικογένεια κύκλων οι οποίοι έχουν κέντρο το $t(\mathcal{A})$ ή το $t(\infty)$.



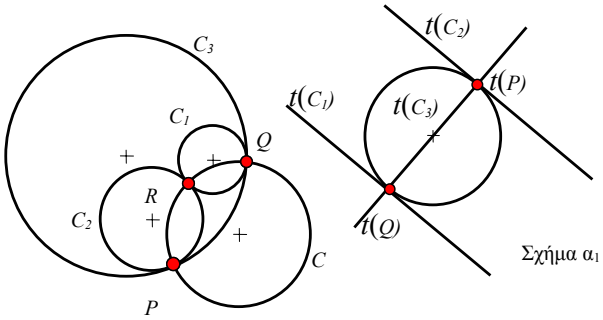
Σχήμα α2

Μέχρι τώρα έχουμε χρησιμοποιήσει γεωμετρία αντιστροφής για να αποδείξουμε προτάσεις για τις Απολλώνιες οικογένειες κύκλων αλλά παρόμοιες μεθόδους μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να κάνουμε αποδείξεις και για άλλα επίπεδα σχήματα.

Η τεχνική που εφαρμόζεται είναι να πάρουμε έναν μετασχηματισμό αντιστροφής (συχνά μια αντιστροφή) για να απεικονίσουμε μέσω αυτού του μετασχηματισμού έναν ή περισσότερους κύκλους του σχήματος σε μια επεκτεταμένη ευθεία γραμμή.

Η επιπρόσθετη συμμετρία που προκύπτει από αυτόν τον μετασχηματισμό χρησιμοποιείται συχνά για να πάρουμε το αποτέλεσμα που επιθυμούμε.

Ας υποθέσουμε ότι οι C_1, C_2, C_3 (σχήμα α1 ή α2) είναι κύκλοι του επιπέδου τέτοιοι ώστε οι C_2, C_3 να εφάπτονται στο σημείο P, οι κύκλοι C_1, C_3 να εφάπτονται στο σημείο Q και οι κύκλοι C_1, C_2 εφάπτονται στο σημείο R. Ας υποθέσουμε ότι C είναι ο κύκλος ο οποίος διέρχεται από τα σημεία P, Q και R. Να αποδείξετε ότι ο C τέμνει τους C_1, C_2, C_3 κατά ορθές γωνίες.



Σχήμα α1

Λύση:

Ας υποθέσουμε ότι t είναι μια αντιστροφή ως προς έναν κύκλο του οποίου ο κέντρο είναι το R. Τότε τα $t(C_1)$ και $t(C_2)$ είναι ευθείες γραμμές . Επιπλέον επειδή οι C_1 και C_2 δεν τέμνονται σε κανένα άλλο σημείο εκτός του P αυτό που προκύπτει είναι ότι οι $t(C_1)$ και $t(C_2)$ δεν τέμνονται πάνω στον C και ως εκ τούτου πρέπει να είναι παράλληλες.

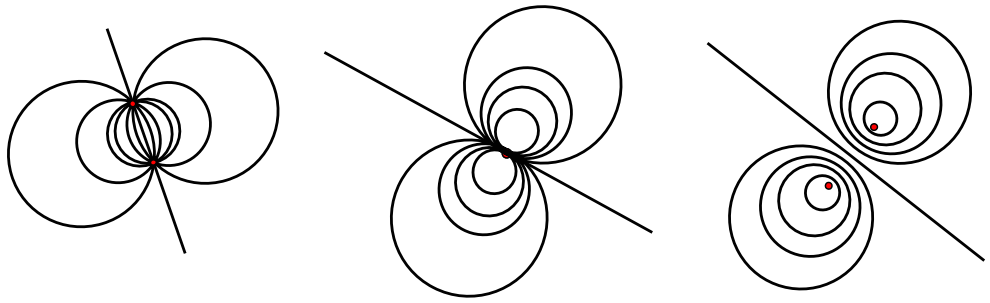
Έστω ότι ο C_3 είναι εφαπτόμενος κύκλος στον C_1 και στον C_2 και δε περνάει από το σημείο R ,οπότε η εικόνα του $t(C_3)$ είναι ένας κύκλος ο οποίος εφάπτεται στις $t(C_1)$ και $t(C_2)$ στα σημεία $t(Q)$ και $t(P)$ αντίστοιχα.

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι ο C διέρχεται από το R και ως εκ τούτου η εικόνα $t(C)$ είναι μια επεκτεταμένη ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $t(Q)$ και $t(P)$. Επειδή το σχήμα που προκύπτει μέσω του μετασχηματισμού έχει ανακλαστική συμμετρία ως προς την $t(C)$ έχουμε σαν συνέπεια ότι η $t(C)$ τέμνει τις εικόνες $t(C_1)$ $t(C_2)$ και $t(C_3)$ κατά ορθές γωνίες στα σημεία $t(P)$ και $t(Q)$. Όμως η t διατηρεί τις γωνίες άρα ο κύκλος C κόβει τους κύκλους C_1, C_2 και C_3 κατά ορθές γωνίες στα σημεία P και Q.

Με παρόμοιο τρόπο και αντικαθιστώντας την t με μια άλλη αντιστροφή ως προς ένα κύκλο ο οποίος έχει κέντρο το P ή το Q δείχνει ότι ο κύκλος C τέμνει τους C_1 και C_2 κατά ορθές γωνίες στο R.

Δύο κύκλοι καθορίζουν μια οικογένεια ομοαξονικών κύκλων.

Έστω ότι δίνεται μια οικογένεια ομοαξονικών κύκλων που εφάπτονται. Αν πάρουμε δύο κύκλους αυτής της οικογένειας είναι ξεκάθαρο ότι αυτοί οι κύκλοι καθορίζουν και όλη την οικογένεια. Το ίδιο ξεκάθαρα είναι τα πράγματα επίσης όταν η οικογένεια των ομοαξονικών κύκλων διέρχεται από δύο σταθερά σημεία.



Το ερώτημα που αναδύεται τώρα με ξεκάθαρο τρόπο είναι: αν δύο κύκλοι μιας οικογένειας Απολλώνιων κύκλων είναι αρκετοί για να καθορίσουν ολόκληρη την οικογένεια των κύκλων;

Θα αποδείξουμε ότι πράγματι κάτι τέτοιο συμβαίνει.

θα χρειαστεί πρώτα να αποδείξουμε το παρακάτω σημαντικό λήμμα:

Έστω C_1 και C_2 είναι δύο κύκλοι του επιπέδου οι οποίοι δεν έχουν κοινά σημεία.

Υπάρχει ένας μετασχηματισμός Möbius ο οποίος απεικονίζει τους κύκλους C_1 και C_2 σε ένα ζεύγος ομόκεντρων κύκλων.

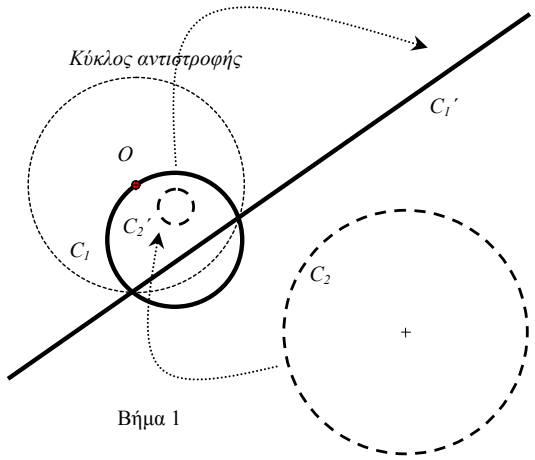
Απόδειξη:

Αν οι κύκλοι είναι ομόκεντροι τότε δεν υπάρχει τίποτα που πρέπει να αποδειχθεί αφού ο μετασχηματισμός Möbius που χρειαζόμαστε είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός.

Θα υποθέσουμε λοιπόν ότι οι κύκλοι δεν είναι ομόκεντροι.

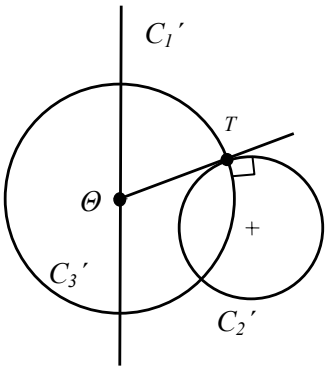
Βήμα 1: Παίρνουμε ένα σημείο Ο πάνω στον κύκλο C_1 και αντιστρέφουμε και τους δύο κύκλους ως προς τον κύκλο με μοναδιαία ακτίνα και κέντρο το Ο.

Μέσω αυτής της αντιστροφής ο κύκλος C_1 απεικονίζεται σε μια ευθεία C'_1 και ο κύκλος C_2 απεικονίζεται στον κύκλο C'_2.

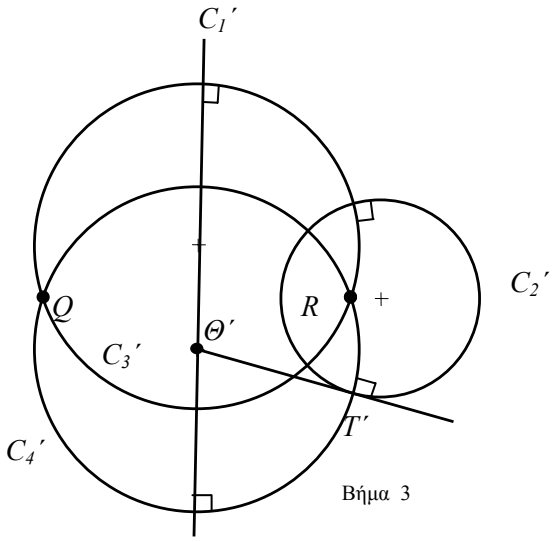


Βήμα 1

Βήμα 2: Επιλέγουμε το σημείο T πάνω στον κύκλο C'_2 που δεν κείται πάνω στην κάθετη από το κέντρο του C'_2 προς την ευθεία C'_1 και φέρνουμε την εφαπτόμενη προς τον κύκλο C'_2 η οποία περνάει από το σημείο T και η οποία τέμνει την C'_1 στο σημείο Θ. Χαράσσουμε τον κύκλο C'_3 ο οποίος έχει κέντρο το σημείο Θ και ακτίνα την ΘT.
Ο κύκλος αυτός είναι κάθετος προς τον C'_2 στο σημείο T (διότι η εφαπτομένη ενός κύκλου είναι κάθετη προς την ακτίνα του κύκλου στο σημείο επαφής). Ο κύκλος C'_3 είναι κάθετος προς την ευθεία C'_1 διότι το κέντρο του βρίσκεται πάνω στην ευθεία αυτή.
Βήμα 3: επαναλαμβάνουμε την κατασκευή η οποία περιγράφεται στο βήμα 2 παίρνοντας το T σε διαφορετική θέση από την θέση που το πήραμε προηγουμένως. Το σημείο αυτό τώρα θα το ονομάσουμε T'. Παίρνουμε έτσι ένα κύκλο C'_4 κάθετο στον C'_2 στο αντίστοιχο σημείο T'.
Έστω ότι οι κύκλοι C'_3 και C'_4 τέμνονται στα σημεία Q και R
.



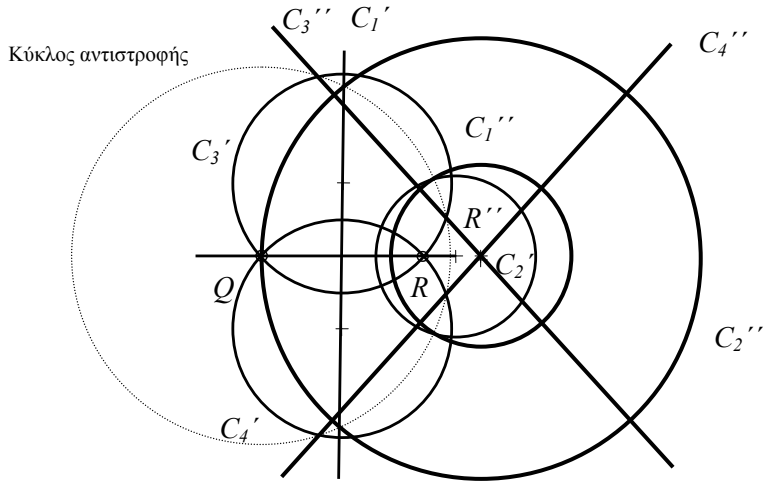
Βήμα 2



Βήμα 3

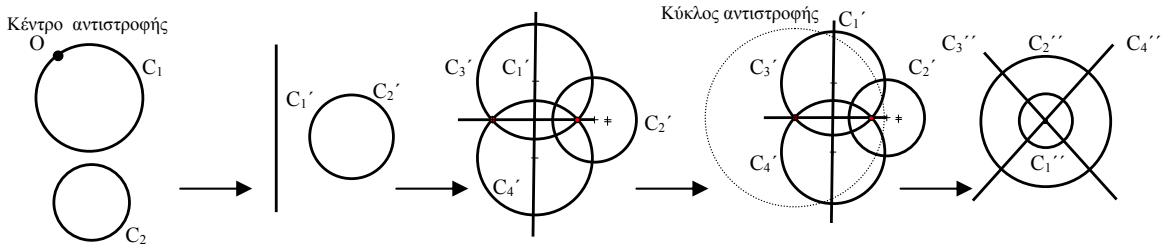
Βήμα 4: Αντιστρέφουμε το σχήμα πάλι. Αυτή τη φορά η αντιστροφή γίνεται ως προς τον κύκλο μοναδιαίας ακτίνας και κέντρο το σημείο Q, δηλαδή τον κύκλο (Q,1). Τότε η ευθεία C'_1 απεικονίζεται στον κύκλο C''_1 και ο κύκλος C'_2 απεικονίζεται στον κύκλο C''_2. Οι κύκλοι C'_3 και C'_4 διέρχονται από το σημείο Q οπότε μέσω της αντιστροφής απεικονίζονται σε ευθείες γραμμές οι οποίες σχηματίζουν ορθές γωνίες με τους C''_1 και C''_2 (οι κύκλοι C'_3 και C'_4 έχουν το κέντρο τους πάνω στην ευθεία C'_1 άρα είναι κάθετοι με αυτήν. Κατά την αντιστροφή λοιπόν η σχέση της καθετότητας θα διατηρηθεί. Αυτό σημαίνει ότι οι εικόνες των C'_3 και C'_4 θα είναι κάθετες προς την εικόνα της C'_1. Άρα οι ευθείες C''_3 και C''_4 (εικόνες των C'_3 και C'_4) θα είναι κάθετες προς τον κύκλο C''_1. Οι κύκλοι C'_3 και C'_4

είναι κάθετοι με τον κύκλο C'_2 οπότε αυτή η καθετότητα διατηρείται και μετά την αντιστροφή και από τις αντίστοιχες εικόνες τους. Οπότε οι ευθείες C_3'' και C_4'' είναι κάθετες με τον κύκλο C''_2 .
Αυτές οι ευθείες γραμμές είναι ως εκ τούτου διάμετροι (διότι μόνο τότε μια ευθεία είναι κάθετη με έναν κύκλο) των C''_1 και C''_2 οπότε το σημείο τομής τους είναι το κέντρο και των δύο κύκλων.



Βήμα 4

Στο σχήμα ο κύκλος αντιστροφής είναι ο κύκλος που έχει χαραχθεί με διακεκομμένες γραμμές.
Βήμα 5: Συνθέτοντας την αντιστροφή του βήματος 1 με την αντιστροφή του βήματος 4 παίρνουμε έναν μετασχηματισμό αντιστροφής που απεικονίζει τους κύκλους C_1 και C_2 επί του ζεύγους των ομόκεντρων κύκλων C''_1 και C''_2 .



1ο βήμα 2ο βήμα 3ο βήμα 4ο βήμα 5ο βήμα

Σχ.Α

Στα σχήματα που έχουμε χαράξει πιο πάνω βλέπουμε τα 5 βήματα της διαδικασίας.
Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το παρακάτω σπουδαίο θεώρημα:
Θεώρημα:
Έστω δύο κύκλοι C_1 και C_2 μη τεμνόμενοι και οι οποίοι δεν είναι ομόκεντροι. Τότε υπάρχει μοναδική οικογένεια Απολλώνιων κύκλων η οποία περιέχει τους C_1 και C_2 .
Απόδειξη:
Από το προηγούμενο λήμμα προκύπτει ότι υπάρχει ένας μετασχηματισμός αντιστροφής t ο οποίος απεικονίζει τους κύκλους C_1 και C_2 επί ενός ζεύγους ομόκεντρων κύκλων $t(C_1)$

και $t(C_2)$. Έστω O_1 είναι το κοινό κέντρο αυτών των κύκλων και έστω $\mathcal{F}$ η οικογένεια των ομόκεντρων κύκλων με κέντρο το O_1.
Μέσω του μετασχηματισμού αντιστροφής t^{-1} η οικογένεια $\mathcal{F}$ απεικονίζεται στην οικογένεια όλων των γενικευμένων κύκλων που έχουν $t^{-1}(O_1)$ και $t^{-1}(\infty)$ αντίστροφα[3] μεταξύ τους σημεία. Θα συμβολίσουμε την οικογένεια αυτή με το γράμμα $\mathcal{G}$. Η οικογένεια $\mathcal{G}$ δεν μπορεί να είναι οικογένεια ομόκεντρων κύκλων διότι περιέχει τους κύκλους C_1 και C_2. Έτσι από προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι είναι μια οικογένεια Απολλώνιων κύκλων.
Για να συμπληρώσουμε την απόδειξη πρέπει να δείξουμε ότι η $\mathcal{G}$ είναι η μόνη Απολλώνια οικογένεια κύκλων που περιέχει τους κύκλους C_1 και C_2. Για να γίνει αυτό ας υποθέσουμε ότι $\mathcal{G}'$ είναι μια οικογένεια Απολλώνιων κύκλων η οποία η οποία περιέχει τους κύκλους C_1 και C_2. Τότε η οικογένεια $\mathcal{G}'$ απεικονίζεται μέσω της t είτε σε μια οικογένεια Απολλώνιων κύκλων είτε σε μια ομοκεντρική οικογένεια κύκλων. Στην πραγματικότητα η εικόνα της $\mathcal{G}'$ μέσω της t περιλαμβάνει τους ομόκεντρους κύκλους $t(C_1)$ και $t(C_2)$ πρέπει ως εκ τούτου να είναι η οικογένεια $\mathcal{F}$ των ομόκεντρων κύκλων οι οποίοι έχουν κέντρο το Ο. Προκύπτει λοιπόν ότι η $\mathcal{G}$ και η $\mathcal{G}'$ είναι η ίδια οικογένεια κύκλων διότι και οι δύο απεικονίζονται στην $\mathcal{F}$ μέσω της t.
Στο σημείο που έχουμε φτάσει προκύπτει άμεσα ότι αν δοθούν δύο μη τεμνόμενοι κύκλοι C_1 και C_2 υπάρχει εκτός από μετασχηματισμό Möbius και αντιστροφή ως προς κάποιο κύκλο C που αντιστρέφει τους κύκλους C_1 και C_2 σε δύο ομόκεντρους κύκλους. Πράγματι οι κύκλοι C_1 και C_2 ορίζουν μοναδική απολλώνια οικογένεια κύκλων. Έστω ότι οι σημειακοί κύκλοι της οικογένειας αυτής είναι οι κύκλοι Α και Β. Η αντιστροφή ως προς ένα από τα σημεία Α και Β αντιστρέφει την απολλώνια αυτή οικογένεια σε μια ομόκεντρη οικογένεια όπως έχει δειχθεί σε αντίστοιχο θεώρημα.

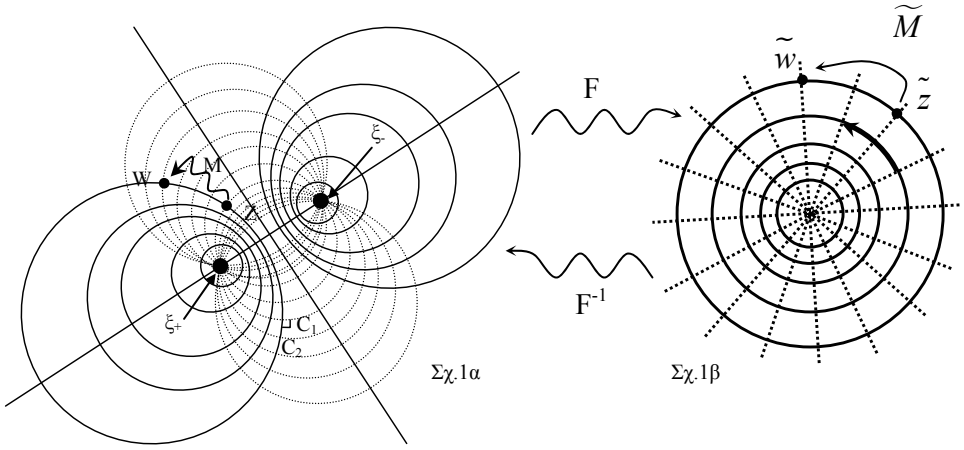
Ταξινόμηση των μετασχηματισμών Möbius-Οπτικοποίηση

Η βασική ιδέα:

Παρόλο που η αποδόμηση ενός γενικού μετασχηματισμού Möbius σε απλούστερους μετασχηματισμούς έχει αποδειχθεί πολύτιμη, έχει το μειονέκτημα να παρουσιάζει τους μετασχηματισμούς αυτούς πιο πολύπλοκους από ότι είναι στην πραγματικότητα.
Σε αυτήν την υποενότητα θα αναδείξουμε την κρυμμένη απλότητα των μετασχηματισμών Möbius εξετάζοντας τα σταθερά σημεία με λεπτομέρεια. Η εξέταση αυτή θα μας βοηθήσει να οπτικοποιήσουμε τους μετασχηματισμούς Möbius με έναν ιδιαίτερα σαφή τρόπο. Στην πορεία θα αποσαφηνίσουμε αυτό που είχαμε πει σε προηγούμενο σημείο της εργασίας μας, δηλαδή ότι οι μετασχηματισμοί Möbius μπορούν να ταξινομηθούν σε τέσσερις τύπους, καθένας από τους οποίους είναι ισοδύναμος με έναν από τους τέσσερις τύπους μετασχηματισμών που παρουσιάσαμε τότε .Η ιδέα πίσω από την ταξινόμηση οφείλεται στον F. Klein.
Για να ξεκινήσουμε, θα υποθέσουμε ότι ο M(z) έχει δύο διαφορετικά σταθερά σημεία τα ξ_+ και ξ_-.

---

[3] Αν θεωρήσουμε ως κύκλο αντιστροφής τον κύκλο C_2'' του σχήματος Α τότε τα σημεία O_1 και ∞ είναι μεταξύ τους αντίστροφα. Θα συμβολίσουμε με t_2 την αντιστροφή ως προς τον κύκλο (Q,1). Οι εικόνες $t_2(O_1)=R$ και $t_2(\infty)=Q$ είναι αντίστροφες ως προς την εικόνα $t_2(C_2'')= C_2'$. Όμως τα R και Q είναι αντίστροφα και ως προς την γενικευμένη ευθεία C_1'. Συμβολίζουμε με t_1 την αντιστροφή ως προς τον κύκλο (Ο,1). Τα $t_1(R)$ και $t_1(Q)$ είναι αντίστροφα ως προς τους κύκλους $t_1(C_2')$ και $t_1(C_1')$ δηλαδή ως προς τους κύκλους C_1 και C_2. Ο μετασχηματισμός αντιστροφής t^{-1} ισούται με: $t^{-1}=t_1 \circ t_2$ άρα τα $t^{-1}(O_1)$ και $t^{-1}(\infty)$ αντίστροφα μεταξύ τους σημεία.



Ας δούμε τώρα το σχήμα 1α και πιο συγκεκριμένα την οικογένεια κύκλων C_1. Στο σχήμα οι κύκλοι της οικογένειας C_1 παρουσιάζονται με διακεκομμένες γραμμές και όπως βλέπουμε διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, τα ξ_+ και ξ_-.

Αν υποθέσουμε ότι ο μετασχηματισμός M(z) είναι μια απεικόνιση $z \to w = M(z)$ του εν λόγω σχήματος στον εαυτό του, τότε κάθε κύκλος της οικογένειας (C_1) απεικονίζεται σε ένα άλλο μέλος της οικογένειας αυτής. Αυτό συμπεραίνεται εύκολα αρκεί να σκεφτούμε ότι ο μετασχηματισμός M(z) έχει δύο σταθερά σημεία και κάθε μετασχηματισμός Möbius διατηρεί τους κύκλους.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το σημείο *p* είναι ένα σημείο το οποίο βρίσκεται πάνω στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία ξ_+ και ξ_- αλλά είναι ταυτόχρονα και εξωτερικό σημείο του τμήματος που έχει άκρα τα σημεία αυτά. Αν K είναι ο κύκλος με ακτίνα $\sqrt{[p\xi_+][p\xi_-]}$ και κέντρο *p* τότε τα σημεία ξ_+ και ξ_- είναι συμμετρικά με την αντιστροφή ως προς τον κύκλο με κέντρο το *p* και ακτίνα $\sqrt{[p\xi_+][p\xi_-]}$. Από γνωστή πρόταση προκύπτει ότι ο κύκλος K τέμνει κάθε μέλος της οικογένειας κύκλων C_1 κατά ορθή γωνία. Ένας τρόπος για να πάρουμε μέλη της οικογένειας C_2 (η οποία είναι Απολλώνια οικογένεια με σημειακούς κύκλους τα σημεία ξ_+ και ξ_-) είναι να αλλάζουμε κάθε φορά την θέση του σημείου *p*. Η οικογένεια αυτή παρουσιάζεται στο σχήμα 1α με μη διακεκομμένες γραμμές. *Τα σημεία ξ_+ και ξ_- είναι συμμετρικά ως προς την αντιστροφή ως προς κάθε μέλος της οικογένειας των κύκλων C_2 και κάθε μέλος της οικογένειας C_2 είναι ορθογώνιο ως προς κάθε μέλος της οικογένειας C_1.*

Ας έρθουμε τώρα στο βασικό στόχο της τρέχουσας ενότητας:

Στο σχήμα 1α εφαρμόζουμε ένα μετασχηματισμό Möbius $F(z)$ ο οποίος απεικονίζει το ένα σταθερό σημείο, ας πούμε το ξ_+, στο O(0,0) και το άλλο σταθερό σημείο ξ_-, στο ∞. Το σχήμα 1β δείχνει το αποτέλεσμα μιας τέτοιας απεικόνισης το απλούστερο παράδειγμα της οποίας είναι ο μετασχηματισμός με τύπο $F(z) = \dfrac{z-\xi_+}{z-\xi_-}$ τον οποίο δεν έχουμε γράψει στην κανονική του μορφή. Επειδή η F είναι μετασχηματισμός Möbius θα απεικονίζει τα μέλη της οικογένειας C_1 στους κύκλους που διέρχονται από τα σημεία O(0,0) και ∞ οι οποίοι δεν είναι τίποτα άλλο από τις ευθείες που διέρχονται από την αρχή O. Επιπλέον επειδή η F είναι σύμμορφη κάθε δύο τέτοιες ευθείες πρέπει να σχηματίζουν στο O(0,0) γωνία ίση με την γωνία την οποία σχηματίζουν οι αντίστοιχοι κύκλοι στο ξ_+. Η οικογένεια των κύκλων C_2 απεικονίζεται στην οικογένεια των ομόκεντρων κύκλων με κέντρο το O(0,0) (αυτά είναι πράγματα που έχουμε συζητήσει και στην ενότητα των ομοαξονικών κύκλων). Ας υποθέσουμε τώρα ότι τα $\tilde{z} = F(z)$ και $\tilde{w} = F(w)$ είναι οι εικόνες, μέσω της F, των z και $w = M(z)$. Αυτό που πρέπει προσέξουμε τώρα είναι ότι η F απεικονίζει (μεταφέρει)

τον αρχικό μετασχηματισμό Möbius $z \to w = M(z)$, του σχήματος 1α σε ένα μετασχηματισμό $\widetilde{M}$ του σχήματος 1β και συγκεκριμένα στον $\tilde{z} \to \widetilde{w} = \widetilde{M}(\tilde{z})$. Πιο συγκεκριμένα $\widetilde{w} = F(w) = F\left(M[z]\right) = F\left(M[F^{-1}(\tilde{z})]\right)$ και έτσι $\widetilde{M} = F \circ M \circ F^{-1}$.

Επειδή ο $\widetilde{M}$ είναι σύνθεση τριών μετασχηματισμών Möbius είναι και αυτός ένας μετασχηματισμός Möbius. Επίσης από την $\widetilde{M} = F \circ M \circ F^{-1}$ προκύπτει ότι τα σταθερά σημεία του $\widetilde{M}$ είναι τα O(0,0) και ∞. Πράγματι αν είναι $F(\xi_+) = 0$ θα έχουμε:

$\widetilde{M}(0) = F \circ M \circ F^{-1}(0) = F(M(F^{-1}(0)) = F(M(\xi_+)) = F(\xi_+) = 0$

$\widetilde{M}(\infty) = F \circ M \circ F^{-1}(\infty) = F(M(F^{-1}(\infty)) = F(M(\xi_-)) = F(\xi_-) = \infty$.

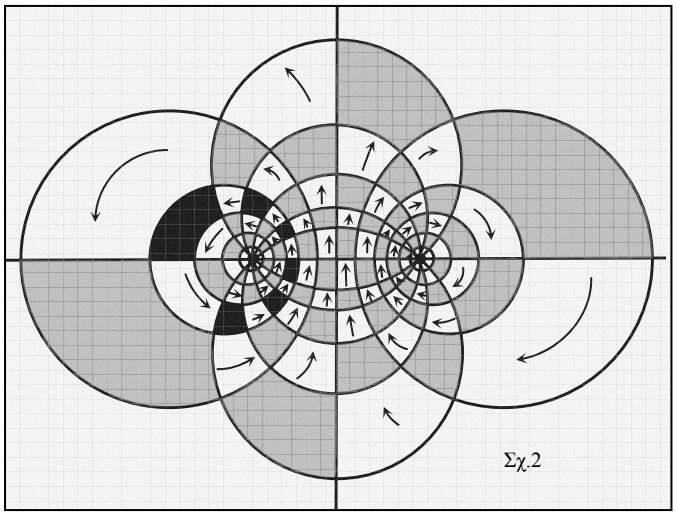
Σε προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι αν ένας μετασχηματισμός Möbius αφήνει αυτά τα σημεία σταθερά δεν μπορεί να έχει άλλη μορφή από την $\widetilde{M}(\tilde{z}) = m\tilde{z}$ με $m = \rho e^{ia}$. Γεωμετρικά λοιπόν ο $\widetilde{M}$ είναι απλά μια στροφή κατά a σε συνδυασμό με μια διαστολή κατά ρ.

Στο σημείο αυτό πρέπει να πούμε ότι έχουμε καταλήξει σε ένα πολύ σημαντικό συμπέρασμα, διότι όπως θα δούμε ο αριθμός m χαρακτηρίζει όχι μόνο τον μετασχηματισμό $\widetilde{M}$, αλλά χαρακτηρίζει επίσης πλήρως και την γεωμετρική φύση του αρχικού μετασχηματισμού M. Ο αριθμός αυτός λέγεται και πολλαπλασιαστής του $M(z)$.

Ελλειπτικοί υπερβολικοί και λοξοδρομικοί μετασχηματισμοί.

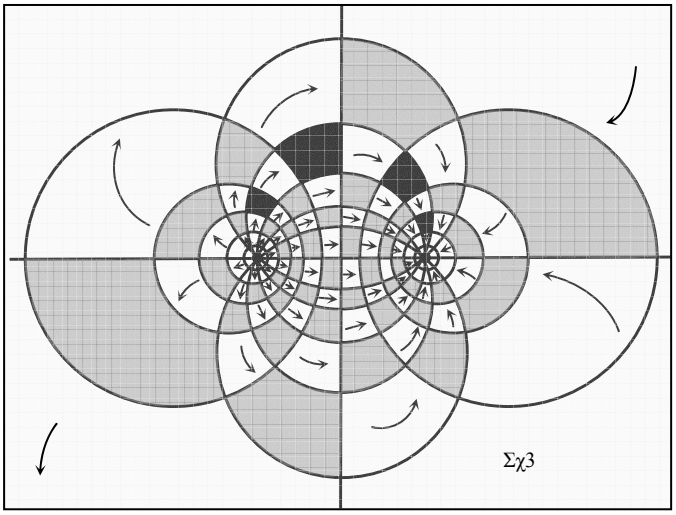
Πριν προχωρήσουμε παρακάτω ας θυμηθούμε την ταξινόμηση που παρουσιάσαμε και σχηματικά στα προηγούμενα: 1) $z \to e^{ia} z$,στροφή, ελλειπτικός μετασχηματισμός. 2) $z \to \rho z$, διαστολή, υπερβολικός μετασχηματισμός 3) $z \to \rho e^{ia} z$,συνδυασμός στροφής και διαστολής, λοξοδρομικός μετασχηματισμός 4) $z \to z + c$ μεταφορά, παραβολικός μετασχηματισμός.

Θα λέμε τον μετασχηματισμό $M(z)$ ελλειπτικό αν ο $\widetilde{M}$ είναι ελλειπτικός πράγμα που σημαίνει ότι ο $\widetilde{M}$ είναι μια καθαρή στροφή που αντιστοιχεί στον $m = e^{ia}$. Επειδή ο $\widetilde{M}$ είναι μια στροφή αν και μόνο αν απεικονίζει κάθε κύκλο ο οποίος έχει κέντρο την αρχή O(0,0) στον εαυτό του, ο $M(z)$ είναι ελλειπτικός αν και μόνο αν απεικονίζει κάθε κύκλο C_2 της οικογένειας (C_2) στον εαυτό του. Το σχήμα 1β δίνει μια οπτική αναπαράσταση του αποτελέσματος της δράσης του $\widetilde{M}$ στο $\tilde{z}$, έχοντας δώσει στην γωνία a (της ισότητας $m = e^{ia}$) μια συγκεκριμένη τιμή, έστω $\alpha = \theta$ (π.χ $\alpha = \frac{\pi}{3}$). Στο σχήμα 1α μπορούμε να δούμε το αποτέλεσμα της δράσης του M στο z. Αυτός μετατοπίζει το z κατά μήκος του αντίστοιχου κύκλου του της οικογένειας (C_2) μέχρι αυτό να βρεθεί πάνω στον αντίστοιχο κύκλο της οικογένειας (C_1) που σχηματίζει γωνία θ, με τον κύκλο της οικογενείας (C_1) ο οποίος διέρχεται από το z.



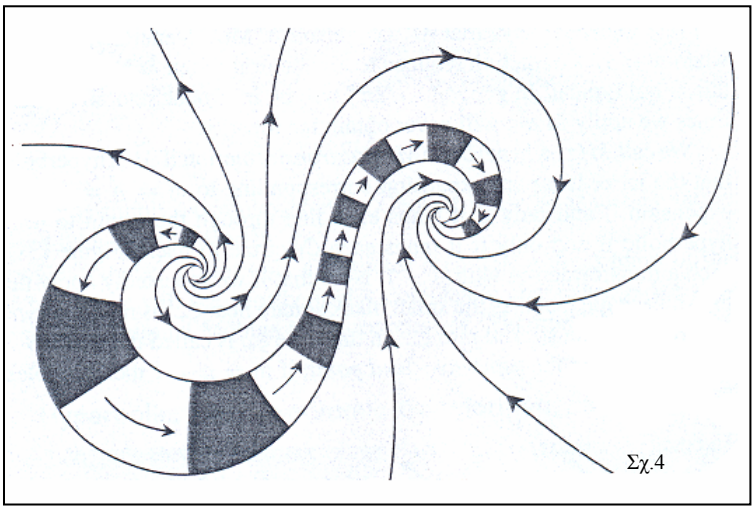
Σχ.2

Το σχήμα 2 έχει σκοπό να δώσει μια περισσότερο ζωηρή εικόνα του ίδιου ελλειπτικού μετασχηματισμού.
Κάθε σκιασμένο 'τετράπλευρο' απεικονίζεται από τον $M(z)$ στο επόμενο σκιασμένο με τον ίδιο τρόπο 'τετράπλευρο' κατά την διεύθυνση των βελών (μερικά από αυτά τα τετράπλευρα έχουν χρωματιστεί μαύρα για να γίνει πιο εμφατικό το αποτέλεσμα στην εικόνα. Ας παρατηρήσουμε ένα μαύρο 'τετράπλευρο'. Αυτό μετακινείται στο επόμενο μαύρο 'τετράπλευρο' κατά την διεύθυνση των βελών, στρίβοντας κατά γωνία $\alpha = \theta$. Αν επιλέξουμε $a = \frac{\pi}{3}$ τότε έξι διαδοχικές εφαρμογές του M παράγουν τον ταυτοτικό μετασχηματισμό και ως εκ τούτου θα λέμε ότι ο μετασχηματισμός M έχει περίοδο 6.
Γενικά αν επιλέξουμε $a = \frac{m}{n} 2\pi$ (με το κλάσμα $\frac{m}{n}$ να είναι ανάγωγο) τότε ο μετασχηματισμός M έχει περίοδο n. Βέβαια αυτό δεν είναι κάτι το οποίο συμβαίνει κάθε φορά, διότι στην γενική περίπτωση το $\frac{a}{2\pi}$ είναι άρρητος οπότε όσες φορές και να εφαρμοστεί ο μετασχηματισμός δεν παράγεται η ταυτοτική απεικόνιση.
Ο M(z) μετασχηματισμός Möbius είναι υπερβολικός μετασχηματισμός αν ο $\widetilde{M}$ είναι υπερβολικός και αυτό συμβαίνει όταν ο $\widetilde{M}$ είναι η καθαρή διαστολή η οποία φυσικά αντιστοιχεί σε $m = \rho \neq 1$. Επειδή όμως ο μετασχηματισμός $\widetilde{M}$ είναι μια διαστολή αν και μόνο αν απεικονίζει κάθε ευθεία που διέρχεται από το κέντρο στον εαυτό της, τότε ο M είναι υπερβολικός μετασχηματισμός αν και μόνο αν απεικονίζει κάθε κύκλο της οικογένειας (C_1) στον εαυτό του. Τα σχήμα 3 μας δίνει ένα παράδειγμα τέτοιου μετασχηματισμού με $\rho > 1$.



Παρατηρούμε πως αν επαναλάβουμε την απεικόνιση αυτή αρκετές φορές, τότε τα σχήματα όπως π.χ τα μικρά μαύρα 'τετράγωνα' κοντά στο ξ_+, απομακρύνονται από το ξ_+ και τελικά απορροφώνται από το ξ_-. Σε αυτήν την περίπτωση το ξ_+ θα το ονομάσουμε απωθητικό σταθερό σημείο και το ξ_- θα το ονομάσουμε ελκτικό σταθερό σημείο.
Αν $m = \rho < 1$ τότε οι ρόλοι των ξ_+ και ξ_- αλλάζουν αμοιβαία.
Τέλος αν ο $m = \rho e^{ia}$ έχει μια τυχαία τιμή τότε ο $\widetilde{M}$ είναι μια σύνθεση στροφής και διαστολής και σε αυτήν την περίπτωση ο M καλείται λοξοδρομικός μετασχηματισμός Möbius. Σε αυτήν την περίπτωση κανένας κύκλος από τις οικογένειες των κύκλων C_1 και C_2 δεν μένει αναλλοίωτος. Οι οικογένειες των καμπυλών που μένουν αναλλοίωτες εμφανίζονται στο σχήμα 4 το οποίο επίσης δείχνει το αποτέλεσμα διαδοχικών εφαρμογών του μετασχηματισμού M σε ένα μικρό τετράγωνο κοντά στο ξ_+.Ο λοξοδρομικός μετασχηματισμός Möbius με σταθερά σημεία τα $\xi_\pm$ και πολλαπλασιαστή το $m = \rho e^{ia}$ είναι μια σύνθεση (χωρίς να παίζει ρόλο η σειρά) του ελλειπτικού μετασχηματισμού Möbius με πολλαπλασιαστή $m = e^{ia}$ και σταθερά σημεία $\xi_\pm$ και του υπερβολικού μετασχηματισμού Möbius με πολλαπλασιαστή το $m = \rho$ και σταθερά σημεία τα $\xi_\pm$. Ακριβώς όπως και στη περίπτωση του υπερβολικού μετασχηματισμού πρέπει να πούμε ότι το ένα σημείο είναι

απωθητικό και το άλλο σημείο είναι ελκτικό. Σε αυτό το σχήμα (σχήμα 4) έχουμε πάρει $\alpha > 0, \rho > 1$.



Σχ.4

Τοπική γεωμετρική ερμηνεία του πολλαπλασιαστή.

Προηγουμένως επιλέξαμε <u>αυθαίρετα</u> να στείλουμε το ξ_+ στο O(0,0) αντί να το στείλουμε στο ξ_-. Από αυτήν την άποψη ο ορισμός που δώσαμε για τον πολλαπλασιαστή είναι αμφιλεγόμενος.
Πως θα μπορούσε η καινούργια τιμή του m να συνδέεται με την παλαιά αν αντί να στέλναμε το ξ_+ στο O(0,0) στέλναμε το ξ_- στο O(0,0);
Ας σημειωθεί πως η σχέση $\widetilde{M} = F \circ M \circ F^{-1}$ μπορεί να εκφραστεί με την μορφή: $(F \circ M) = (\widetilde{M} \circ F)$. Γράφοντας $w = M(z)$ και έχοντας στο μυαλό μας τον ορισμό της F θα έχουμε ότι $\dfrac{M(z)-\xi_+}{M(z)-\xi_-} = mF(z) \Rightarrow \dfrac{w-\xi_+}{w-\xi_-} = m\left(\dfrac{z-\xi_+}{z-\xi_-}\right)$. Αυτή η μορφή είναι η κανονική μορφή του μετασχηματισμού Möbius.
Αλλάζοντας την θέση των ξ_+ και ξ_- σε αυτόν τον τύπο, πράγμα που ισοδυναμεί με το να στείλουμε το ξ_- στο O(0,0) και το ξ_+ στο ∞, παίρνουμε τον τύπο $\dfrac{w-\xi_+}{w-\xi_-} = \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{z-\xi_+}{z-\xi_-}\right)$.
Παρατηρούμε ότι ο πολλαπλασιαστής έχει αλλάξει από m σε $\dfrac{1}{m}$ και κάλλιστα θα μπορούσε κάποιος να ισχυριστεί ότι οποιαδήποτε από τις δύο αυτές τιμές είναι τελικά ο πολλαπλασιαστής. Θα αποκαλέσουμε την τιμή που παίρνουμε για τον m από τον τύπο $\dfrac{w-\xi_+}{\varsigma-\xi_-} = m\left(\dfrac{z-\xi_+}{z-\xi_-}\right)$ ως τον πολλαπλασιαστή που συνδέεται με το ξ_+. Θα γράφουμε αυτόν τον πολλαπλασιαστή με το σύμβολο m_+ για να τονίζεται κάτι τέτοιο. Στο σημείο αυτό έχουμε δείξει ότι οι πολλαπλασιαστές που σχετίζονται με τα δύο σταθερά σημεία του μετασχηματισμού είναι αντίστροφοι αριθμοί μεταξύ τους.
Θα προσπαθήσουμε να ερμηνεύσουμε κάτι τέτοιο γεωμετρικά: Ας ξαναφέρουμε στο μυαλό μας την περίπτωση του σχήματος 1 στην οποία ο πολλαπλασιαστής που σχετίζεται με το ξ_+ είναι $m = e^{i\theta}$. Ας υποθέσουμε ότι $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ οπότε $m = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Ας προσπαθήσουμε τώρα να ερμηνεύσουμε το m μέσω του σχήματος 2 χωρίς όμως την βοήθεια του σχήματος 1β. Έχουμε λοιπόν: όσο πιο κοντά βρισκόμαστε στο ξ_+ τόσο περισσότερο οι κύκλοι της οικογένειας C_2 μοιάζουν να είναι ομόκεντροι και μάλιστα με κοινό κέντρο το ξ_+. Αυτό είναι εύκολο να το καταλάβουμε αν εξετάζουμε συνέχεια μικρότερες και μικρότερες περιοχές του ξ_+ οπότε οι κύκλοι της οικογένειας C_1 μοιάζουν όλο και περισσότερο στις εφαπτόμενες ευθείες τους στο σημείο ξ_+ ενώ οι κύκλοι της οικογένειας C_2 είναι ορθογώνιοι με τους κύκλους της οικογένειας C_1.
Έτσι ξεκαθαρίζεται ότι το τοπικό αποτέλεσμα του M σε μια απειροστή περιοχή του ξ_+ είναι μια στροφή με κέντρο το ξ_+ και κατά γωνία $\frac{\pi}{3}$. Αυτό είναι το γεωμετρικό νόημα του πολλαπλασιαστή $m_+ = e^{i\frac{\pi}{3}}$ που σχετίζεται με το ξ_+. Ανάλογα συμπεράσματα μπορούμε να βγάλουμε αν ασχοληθούμε με μια απειροστή γειτονία γύρω από το ξ_-, αλλά βλέπουμε επίσης από το σχήμα 2 ότι μια θετική στροφή γύρω από το ξ_+ προκαλεί μια ίση στροφή αντίθετης όμως φοράς γύρω από το ξ_-. Έτσι το τοπικό αποτέλεσμα του μετασχηματισμού M στην γειτονιά του ξ_- είναι μια στροφή κατά γωνία $-\frac{\pi}{3}$ και ο σχετικός πολλαπλασιαστής είναι ο $m_- = e^{-i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{m_+}$.
Αν κοιτάξουμε το σχήμα 3 θα παρατηρήσουμε το ίδιο φαινόμενο και στην περίπτωση του υπερβολικού μετασχηματισμού. Σε αυτό το σχήμα ο πολλαπλασιαστής που σχετίζεται με το ξ_+ είναι ο $m = \rho > 1$ Μπορούμε να δώσουμε μια ερμηνεία στο σχήμα λέγοντας ότι το τοπικό αποτέλεσμα του M σε μια γειτονιά του ξ_+ είναι μια διαστολή που έχει κέντρο το σημείο αυτό. Είναι επίσης φανερό ότι το τοπικό αποτέλεσμα στο ξ_- είναι μια συρρίκνωση οπότε ο πολλαπλασιαστής που συνδέεται με αυτό το σημείο είναι πραγματικός και μικρότερος του 1. Η τιμή του είναι $\frac{1}{\rho}$ πράγμα που δεν φαίνεται όμως καθαρά.
Ας θέσουμε $Z = (z - \xi_+)$ και $W = (w - \xi_+)$ για τους μιγαδικούς αριθμούς που προκύπτουν από τον ξ_+ συνδέοντας τον μιγαδικό αυτό με τον μιγαδικό z καθώς και με την εικόνα του, δηλαδή τον μιγαδικό αριθμό $w = M(z)$. Υποστηρίζουμε (και εν μέρει έχουμε επαληθεύσει) ότι αν ο μιγαδικός Z έχει πολύ μικρό μέτρο τότε το αποτέλεσμα της δράσης του μετασχηματισμού M στον Z είναι η στροφή του Z κατά γωνία a και η διαστολή κατά ρ: με άλλα λόγια $W = mZ$. Για να το βεβαιώσουμε αυτό μπορούμε να δούμε την $\frac{w-\xi_+}{w-\xi_-} = m\left(\frac{z-\xi_+}{z-\xi_-}\right)$ γραμμένη στην μορφή $\frac{W}{Z} = m\left(\frac{w-\xi_-}{z-\xi_-}\right)$. Καθώς το Z τείνει στο μηδέν τότε και τα z και w τείνουν στο ξ_+ και έτσι το κλάσμα στο δεξί μέλος τείνει στο 1 οπότε ισχύει η σχέση $W = mZ$.

Παραβολικοί μετασχηματισμοί

Έχουμε μέχρι τώρα παρουσιάσει τους μετασχηματισμούς Möbius με δύο σταθερά σημεία, όποτε αυτό που μένει πλέον είναι να ξεκαθαρίσουμε τα πράγματα στην περίπτωση που ο μετασχηματισμός M έχει ένα σταθερό σημείο ξ. Στην περίπτωση αυτή ο μετασχηματισμός Möbius όπως είπαμε καλείται παραβολικός μετασχηματισμός Möbius. Ας θεωρήσουμε το αριστερό μέρος του σχήματος 5 (σχήμα 5α) αλλά ας αγνοήσουμε προς το παρόν τα βέλη που

υπάρχουν στο σχήμα. Εδώ έχουμε δύο οικογένειες κύκλων: τους κύκλους με το έντονο περίγραμμα, που εφάπτονται μεταξύ τους στο σημείο ξ έχοντας τα κέντρα τους πάνω σε μια συγκεκριμένη ευθεία και την οικογένεια των κύκλων με το διακεκομμένο περίγραμμα, που εφάπτονται μεταξύ τους στο σημείο ξ ενώ τα κέντρα τους βρίσκονται πάνω στην κάθετη ευθεία προς την προηγούμενη. Ας σημειώσουμε ότι αφού οι δύο οικογένειες αποτελούνται από κύκλους που είναι ορθογώνιοι μεταξύ τους στο σημείο ξ (και αυτό συμβαίνει διότι τα κέντρα τους βρίσκονται σε κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις) οπότε λόγω συμμετρίας θα είναι ορθογώνιοι μεταξύ τους και στο άλλο κοινό τους σημείο. Το σχήμα 5β μας δίνει μια εικόνα για το τι συμβαίνει κατά την απεικόνιση μέσω του μετασχηματισμού Möbius $G(z)=\dfrac{1}{z-\xi}$.

Οι δύο ορθογώνιες μεταξύ τους οικογένειες κύκλων γίνονται δύο ορθογώνιες οικογένειες παραλλήλων ευθειών (γίνονται ευθείες διότι διέρχονται από το σημείο στο άπειρο). Αντίστροφα αν εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό G^{-1} σε δύο οποιεσδήποτε ορθογώνιες οικογένειες ευθειών (όπως στο σχήμα 5β) τότε θα έχουμε (σχήμα 5α) δύο ορθογώνιες οικογένειες κύκλων που διέρχονται από το σημείο ξ. Όπως και πιο πριν ας υποθέσουμε ότι $\tilde{z}=G(z)$ και $\tilde{w}=G(w)$ είναι οι εικόνες των z και $w=M(z)$ μέσω του μετασχηματισμού G. Έτσι ο μετασχηματισμός Möbius $z\to w=M(z)$ (σχήμα 5α) παράγει μέσω της G έναν άλλο μετασχηματισμό Möbius $\tilde{z}\to\tilde{w}=M(\tilde{z})$ και $\widetilde{M}=G\circ M\circ G^{-1}$.

Επειδή το ∞ είναι το μοναδικό σταθερό σημείο του $\widetilde{M}$, ο $\widetilde{M}$ δεν μπορεί να είναι τίποτα άλλο παρά μόνο μεταφορά: $\widetilde{M}(\tilde{z})=\tilde{z}+T$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι τα βέλη στο σχήμα 5β αντιπροσωπεύουν μεταφορά κατά Τ. Στο σχήμα αυτό έχουμε χαράξει ένα πλέγμα, το οποίο να αντιστοιχεί στην μεταφορά Τ, με το κάθε σκιασμένο τετράγωνο να μεταφέρεται στο επόμενο μέσω του $\widetilde{M}$. Η μια οικογένεια παραλλήλων ευθειών (η οικογένεια που έχουμε χαράξει με έντονες γραμμές) έχει την διεύθυνση του διανύσματος μεταφοράς Τ οπότε οι αντίστοιχες ευθείες της μένουν αναλλοίωτες, ενώ οι ευθείες της άλλης οικογένειας μεταφέρονται κατά Τ. Εφαρμόζουμε την G^{-1} οπότε πάμε πίσω πάλι στο σχήμα 5α όπου ο κάθε έντονος κύκλος (εικόνες των έντονων γραμμών μέσω της G^{-1}) μεταφέρεται στον εαυτό του, ο κάθε διακεκομμένος κύκλος (εικόνες των διακεκομμένων γραμμών μέσω της G^{-1}) μεταφέρεται σε έναν άλλο διακεκομμένο κύκλο, ενώ κάθε σκιασμένη περιοχή μεταφέρεται στην επομένη σκιασμένη περιοχή και μάλιστα κατά την διεύθυνση που δείχνουν τα βέλη. Αν ο μετασχηματισμός $M(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ είναι κανονικοποιημένος, τότε τα σταθερά σημεία δίνονται από τον τύπο $\xi_{\pm}=\dfrac{(a-d)\pm\sqrt{(a+d)^2-4}}{2c}$. Ο μετασχηματισμός αυτός είναι παραβολικός αν και μόνο αν $(a+d)=\pm 2$ και σε τέτοια περίπτωση το σταθερό σημείο είναι το $\xi=\dfrac{a-d}{2c}$. Θα υπολογίσουμε την σταθερά Τ του τύπου της μεταφοράς $\widetilde{M}(\tilde{z})=\tilde{z}+T$ μέσω των συντελεστών. Επειδή $(G\circ M)=(\widetilde{M}\circ G)$ τότε η κανονική μορφή του Μ είναι : $\dfrac{1}{w-\xi}=\dfrac{1}{z-\xi}+T$.

Πράγμα που προκύπτει πολύ εύκολα ως εξής:

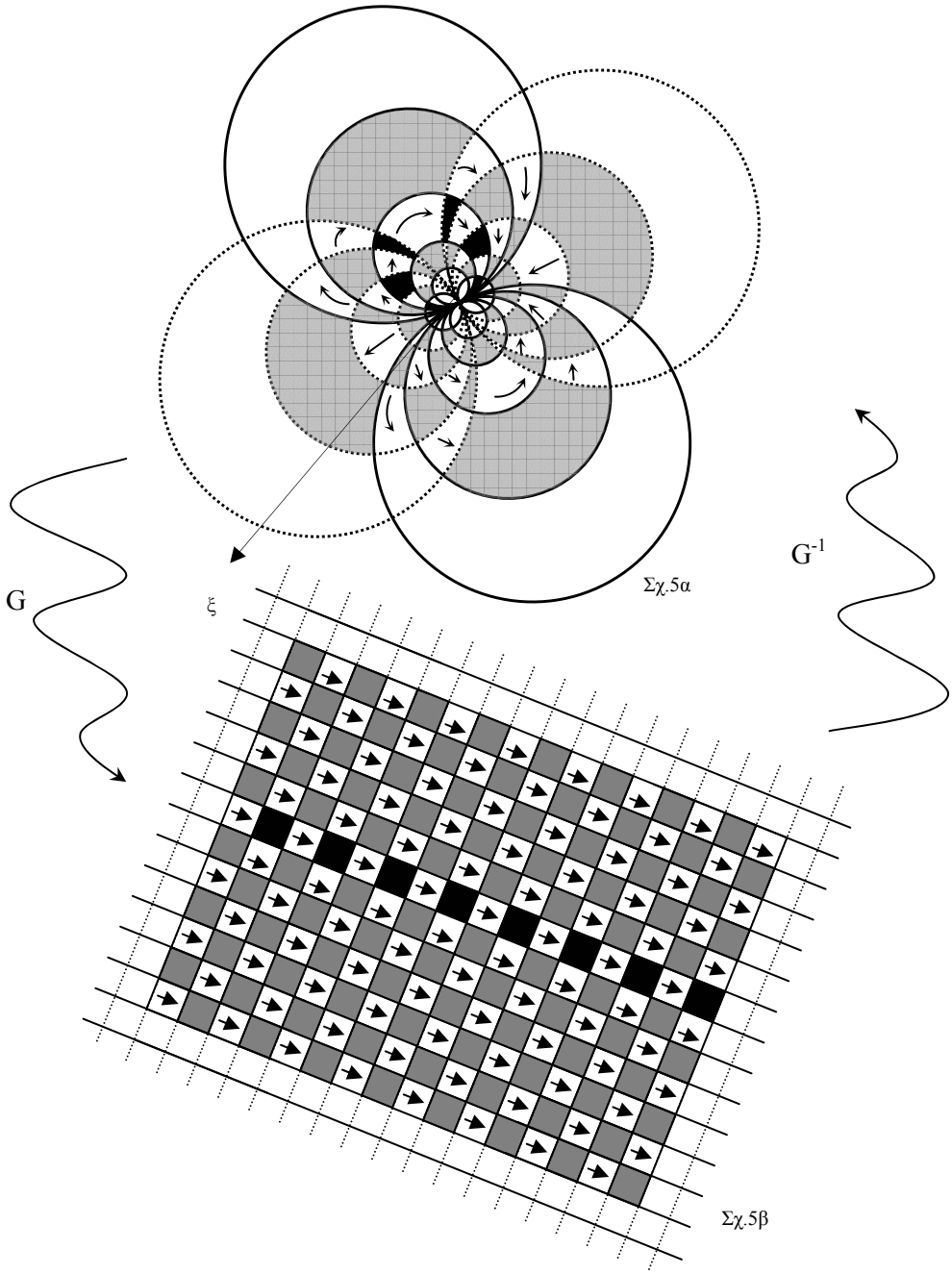
$$G(z)=\frac{1}{z-\xi},M(z)=\frac{az+b}{cz+d},\widetilde{M}(\tilde{z})=\tilde{z}+T$$

$$(G\circ M)=(\widetilde{M}\circ G)$$

άρα $G(M(z)) = \widetilde{M}(G(z)) \Rightarrow \dfrac{1}{M(z)-\xi} = G(z) + T \Rightarrow \dfrac{1}{w-\xi} = \dfrac{1}{z-\xi} + T$

Επειδή ο M απεικονίζει το $z = \infty$ στο $w = \dfrac{a}{c}$ έχουμε:

$$T = \frac{1}{\frac{a}{c} - \xi} = \frac{1}{\frac{a}{c} - \frac{a-d}{2c}} = \frac{1}{\frac{2a}{2c} - \frac{a-d}{2c}} = \frac{1}{\frac{a+d}{2c}} = \frac{2c}{a+d} = \frac{2c}{\pm 2} = \pm c\ .$$



Υπολογισμός του πολλαπλασιαστή.

Έχουμε δει πως ο πολλαπλασιαστής m καθορίζει τον χαρακτήρα του μετασχηματισμού Möbius ενώ στο σημείο αυτό θα δούμε πως μπορούμε να υπολογίσουμε τον m κατευθείαν από τους συντελεστές του μετασχηματισμού Möbius $M(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε κιόλας υπολογίσει το $\xi_{\pm}$: $\xi_{\pm}=\dfrac{(a-d)\pm\sqrt{(a+d)^2-4}}{2c}$.

Επειδή ο $M(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ απεικονίζει το $z=\infty$ στο $w=\dfrac{a}{c}$ συμπεραίνουμε από την κανονική μορφή: $\dfrac{w-\xi_+}{w-\xi_-}=m\left(\dfrac{z-\xi_+}{z-\xi_-}\right)$ ότι ο πολλαπλασιαστής που συνδέεται με το ξ_+ είναι ο $m=\dfrac{a-c\xi_+}{a-c\xi_-}$, αφού για $w=\dfrac{a}{c}$ και $z=\infty$ θα έχουμε $\dfrac{\frac{a}{c}-\xi_+}{\frac{a}{c}-\xi_-}=m\left(\dfrac{1-0}{1-0}\right)$.

Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε την μιγαδική αντιστροφή $z\to\dfrac{1}{z}$. Τα σταθερά σημεία είναι οι λύσεις της $z=\dfrac{1}{z}$ δηλαδή τα $\xi_{\pm}=\pm1$.

Έτσι ο πολλαπλασιαστής που συνδέεται με το $\xi_+=1$ είναι ο $m=-1=e^{i\pi}$ που είναι ο ίδιος με τον πολλαπλασιαστή $\dfrac{1}{m}$ που αντιστοιχεί για $\xi_-=-1$.

Έτσι η μιγαδική αντιστροφή είναι ελλειπτική και μια απειροστική περιοχή γύρω από κάθε ένα από τα σταθερά σημεία, απλά στέφεται γύρω από τα σταθερά σημεία κατά γωνία π.

Αν θέλουμε μπορούμε να πετύχουμε ένα ακριβή τύπο για τον μετασχηματισμό Möbius με την αντικατάσταση του $\xi_{\pm}=\dfrac{(a-d)\pm\sqrt{(a+d)^2-4}}{2c}$ στον $m=\dfrac{a-c\xi_+}{a-c\xi_-}$.

Αν θέλουμε να πετύχουμε την γνώση του χαρακτήρα και μόνο του μετασχηματισμού Möbius τότε πρέπει να προχωρήσουμε ως εξής:

Αποδεικνύεται ότι ο πολλαπλασιαστής m συνδέεται με τους συντελεστές ενός κανονικοποιημένου μετασχηματισμού Möbius με την εξίσωση: $\sqrt{m}+\dfrac{1}{\sqrt{m}}=a+d$.

Ας σημειωθεί ότι η συμμετρία αυτής της εξίσωσης υπονοεί ότι αν ο m είναι λύση της τότε λύση της είναι και ο $\dfrac{1}{m}$.

Ένας κανονικοποιημένος μετασχηματισμός Möbius $M(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ είναι :

1. ελλειπτικός αν και μόνο αν $a+d$ είναι πραγματικός και $|a+d|<2$
2. παραβολικός αν και μόνο αν $a+d=\pm2$
3. υπερβολικός αν και μόνο αν $a+d$ είναι πραγματικός $|a+d|>2$
4. λοξοδρομικός αν και μόνο αν $a+d$ είναι μιγαδικός

Για να πάρουμε τον τύπο $\sqrt{m}+\dfrac{1}{\sqrt{m}}=a+d$ θα χρησιμοποιήσουμε πίνακες:

$$[\widetilde{M}]=[F][M][F^{-1}]\Rightarrow \det[\widetilde{M}]=\det\left\{[F][F^{-1}]\right\}\det[M]=\det[M].$$

Έτσι ανεξάρτητα από το αν $[F]$ είναι κανονικοποιημένος ο $[M]$ είναι κανονικοποιημένος αν και μόνο αν ο $\left[\widetilde{M}\right]$ είναι κανονικοποιημένος.

Μιας και $\widetilde{M}(z) = mz$ ο κανονικοποιημένος του πίνακας είναι $\widetilde{M} = \begin{pmatrix} \sqrt{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{m}} \end{pmatrix}$.

Γνωρίζουμε όμως ότι ισχύει η σχέση: tr{NP}=tr{PN} (όπου N,P είναι και οι δύο πίνακες 2x2) οπότε έχουμε:

$$\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}} = tr\left\{[F][M][F]^{-1}\right\} = tr\left\{[F]^{-1}[M][F]\right\} =$$

$$tr[M] = a + d$$

Ερμηνεία του πολλαπλασιαστή μέσω ιδιοτιμών

Αν $[M]$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός του $\mathbb{C}^2$, τότε όπως είδαμε, τα ιδιοδιανύσματα του είναι οι ομογενείς συντεταγμένες των σταθερών σημείων του αντίστοιχου μετασχηματισμού $M(z)$. Επίσης αν $[M]$ είναι κανονικοποιημένος τότε οι ιδιοτιμές καθορίζουν πλήρως τον γεωμετρικό χαρακτήρα του μετασχηματισμού $M(z)$. Πιο συγκεκριμένα έχουμε την ακόλουθη πρόταση: Αν ένα σταθερό σημείο του $M(z)$ αναπαρίσταται ως ένα ιδιοδιάνυσμα (με ιδιοτιμή λ) του κανονικοποιημένου πίνακα $[M]$, τότε ο πολλαπλασιαστής m που συνδέεται με το σταθερό σημείο δίνεται από τον τύπο $m = \frac{1}{\lambda^2}$

Πριν να αποδείξουμε τον τύπο αυτόν θα δώσουμε ένα παράδειγμα που θα βοηθήσει αρκετά στην κατανόηση της απόδειξης.

Ας πάρουμε πάλι το παράδειγμα της μιγαδικής αντιστροφής $z \to \frac{1}{z}$.

Ξέρουμε ότι τα σταθερά σημεία του μετασχηματισμού είναι ± 1 και οι συσχετισμένοι με αυτά τα σημεία πολλαπλασιαστές είναι τελικά ο πολλαπλασιαστής: $m = -1$.Ο κανονικοποιημένος πίνακας είναι ο $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. Αν επιλέξουμε ως διάνυσμα ομογενών συντεταγμένων που αντιστοιχεί στο πεπερασμένο σημείο z το $\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}$, τότε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στα σταθερά σημεία $z = \pm 1$ είναι $\begin{pmatrix} \pm 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Επειδή: $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Βλέπουμε ότι οι ιδιοτιμές δίνονται από την ισότητα $\lambda = \pm i$ που συμφωνεί με την $m = \frac{1}{\lambda^2}$.

Αν επιστρέψουμε στην γενική περίπτωση μια σύγκριση των $\frac{1}{\lambda} + \lambda = a + d$ (σχέση που είχαμε πάρει στο κεφάλαιο που αναφερθήκαμε διεξοδικότερα στα ιδιοδιανύσματα και τις

ιδιοτιμές) με τον τύπο $\sqrt{m}+\frac{1}{\sqrt{m}}=a+d$ αποκαλύπτει ότι $\sqrt{m}$ και λ ικανοποιούν την ίδια δευτεροβάθμια εξίσωση πράγμα που μας οδηγεί να συμπεράνουμε ότι οι δύο αντίστροφες τιμές του m είναι ίσες με τις δύο αντίστροφες τιμές του λ^2, όμως δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ποια τιμή του λ^2 παράγει ποια τιμή του m. Για αυτόν τον λόγο αλλά και για λόγους μεγαλύτερης σαφήνειας θα επιχειρήσουμε μια άλλη προσέγγιση:
Θα ξεκινήσουμε θυμίζοντας μια κλασική πρόταση από την γραμμική άλγεβρα η οποία ισχύει για nxn πίνακες:
Αν ε είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $[\mathrm{A}]$ με ιδιοτιμή λ, τότε $\tilde{\varepsilon}\equiv[\mathrm{B}]\varepsilon$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του $\left[\widetilde{\mathrm{A}}\right]\equiv[\mathrm{B}][\mathrm{A}][\mathrm{B}]^{-1}$ και η ιδιοτιμή του είναι επίσης λ.
Αυτό επαληθεύεται εύκολα:

$$\left[\widetilde{\mathrm{A}}\right]\tilde{\varepsilon}=\left\{[\mathrm{B}][\mathrm{A}][\mathrm{B}]^{-1}\right\}[\mathrm{B}]\varepsilon=[\mathrm{B}][\mathrm{A}]\varepsilon=$$

$$=[\mathrm{B}]\lambda\varepsilon=\lambda\tilde{\varepsilon}$$

Ας γυρίσουμε τώρα στο σχήμα 1α όπου το σταθερό σημείο ξ_+ του μετασχηματισμού M (που συνδέεται με τον πολλαπλασιαστή m_+) απεικονίζονταν στο σταθερό σημείο 0 του $\widetilde{M}=\left(F\circ M\circ F^{-1}\right)$ μέσω του $z\to\tilde{z}=F(z)=\frac{z-\xi_+}{z-\xi_-}$.

Αν μιλήσουμε με όρους γραμμικών μετασχηματισμών του $\mathbb{C}^2$ το ιδιοδιάνυσμα $\begin{pmatrix}\xi_+\\1\end{pmatrix}$ του $[M]$ απεικονίζεται μέσω της $[F]$ στο ιδιοδιάνυσμα $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ του $\left[\widetilde{M}\right]=[F][M][F]^{-1}$

Από την γραμμική άλγεβρα έχουμε τώρα: αν η ιδιοτιμή λ_+ αντιστοιχεί στο ιδιοδιάνυσμα $\begin{pmatrix}\xi_+\\1\end{pmatrix}$ τότε $\left[\widetilde{M}\right]\bullet\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\lambda_+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ και αυτό αληθεύει ανεξάρτητα από το αν οι πίνακες είναι κανονικοποιημένοι.
Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο πίνακας $[M]$ είναι κανονικοποιημένος. Ανεξάρτητα από το αν ο $[F]$ είναι κανονικοποιημένος ο $[M]$ είναι κανονικοποιημένος αν και μόνο αν ο $\left[\widetilde{M}\right]$ είναι κανονικοποιημένος. Επειδή ο κανονικοποιημένος πίνακας $\left[\widetilde{M}\right]$ του $\widetilde{M}(z)=m_+\tilde{z}$ δίνεται από την ισότητα $\left[\widetilde{M}\right]=\begin{pmatrix}\sqrt{m_+} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{m_+}}\end{pmatrix}$ θα έχουμε ότι :

$$\left[\widetilde{M}\right]\bullet\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\lambda_+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\lambda_+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\left[\widetilde{M}\right]=\begin{pmatrix}\sqrt{m_+} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{m_+}}\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{m_+}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

έτσι έχουμε: $m_+=\frac{1}{\lambda_+^{\,2}}$

Ανάλυση σε δύο ή τέσσερις ανακλάσεις.
(σχέση της αντιστροφής με τις τέσσερις μορφές των μετασχηματισμών Möbius που αναλύσαμε προηγουμένως)

Ας θυμηθούμε ότι:
1) Ο τύπος της αντιστροφής ως προς κύκλο K είναι ο εξής:

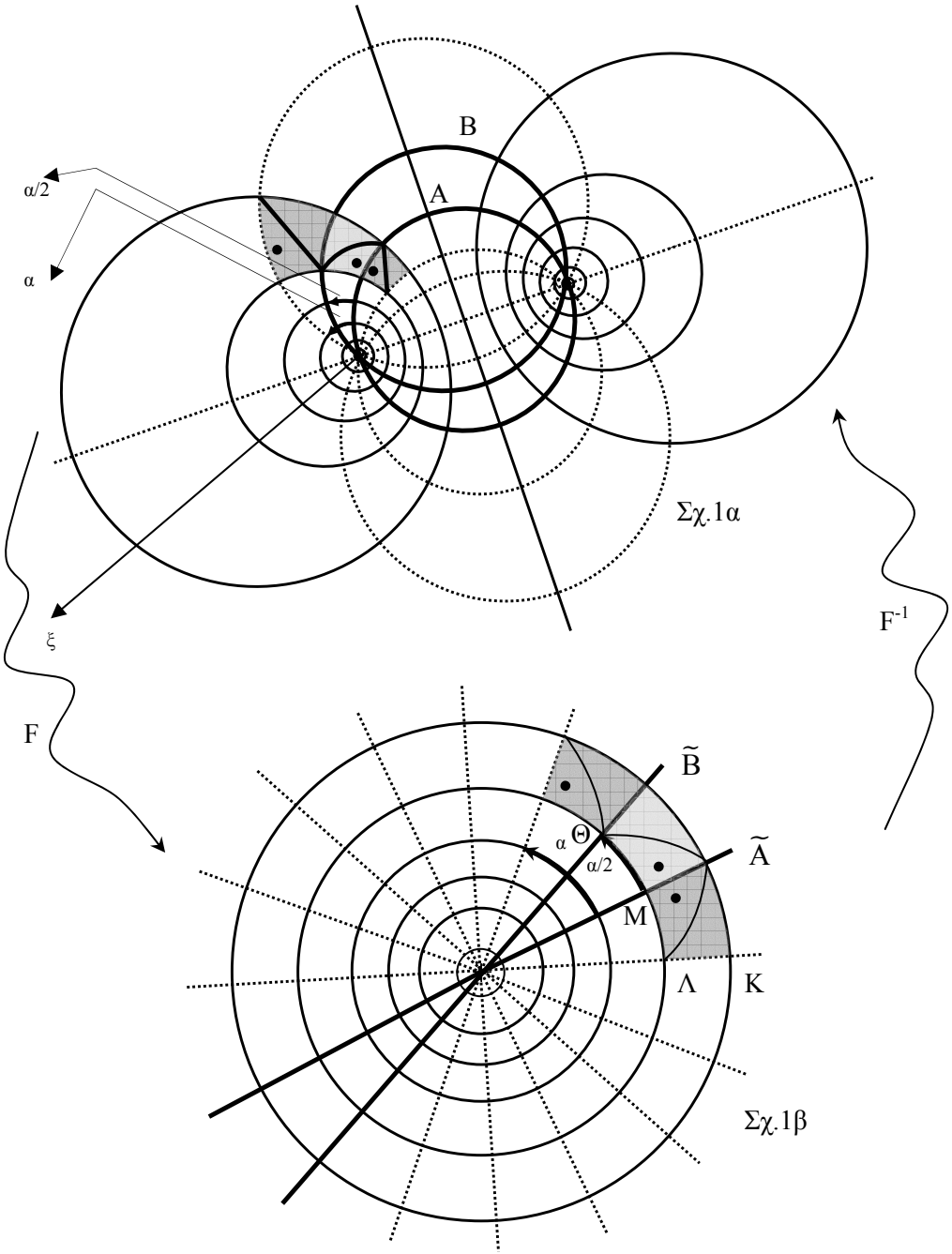
$$I_K(z) = \frac{A\bar{z} + B}{C\bar{z} + D}$$

2) Η σύνθεση δύο ανακλάσεων (ως προς κύκλο ή ευθεία) είναι ένας μετασχηματισμός Möbius. Επειδή πάλι, η σύνθεση δύο μετασχηματισμών Möbius είναι επίσης ένας μετασχηματισμός Möbius, έχουμε ότι η σύνθεση ενός άρτιου αριθμού ανακλάσεων είναι ένας μετασχηματισμός Möbius.
3) Αρχή συμμετρίας: Αν δύο σημεία είναι συμμετρικά ως προς ένα κύκλο, τότε οι εικόνες τους μέσω ενός μετασχηματισμού Möbius είναι επίσης συμμετρικές, ως προς τον κύκλο εικόνα του κύκλου αντιστροφής.
Χρησιμοποιώντας την αρχή της συμμετρίας θα αποδείξουμε στην παράγραφο αυτή το εξής:
Κάθε μη λοξοδρομικός μετασχηματισμός Möbius μπορεί να εκφραστεί ως σύνθεση δύο ανακλάσεων και κάθε λοξοδρομικός μετασχηματισμός μπορεί να εκφραστεί ως σύνθεση τεσσάρων ανακλάσεων.
1. Ελλειπτική περίπτωση
Το σχήμα 1α (πιο κάτω) περιγράφει έναν ελλειπτικό μετασχηματισμό. Το σχήμα αυτό δείχνει ένα μετασχηματισμό Möbius M από τον οποίο προκύπτει, μέσω του μετασχηματισμού $F(z) = \frac{z - \xi_+}{z - \xi_-}$ ο οποίος απεικονίζει τα ξ_+ και ξ_- στα 0 και ∞ αντίστοιχα, ένας νέος μετασχηματισμός $\widetilde{M}$ ο οποίος είναι μια "καθαρή" στροφή $\widetilde{M}\left(\tilde{z}\right) = e^{ia}\tilde{z}$. Στο σχήμα υποθέτουμε ότι $a = \frac{\pi}{8}$ και το μαύρο 'τετραγωνάκι' που συνορεύει με την γραμμή $\widetilde{\mathrm{A}}$ μεταφέρεται στο μαύρο 'τετραγωνάκι' που συνορεύει με την γραμμή $\widetilde{\mathrm{B}}$.
Έχουμε αναλύσει σε πολύ πρώιμο κεφάλαιο, τον μετασχηματισμό στροφής με κέντρο ένα σημείο Κ και γωνία στροφής φ, έχοντας καταλήξει στο συμπέρασμα ότι είναι ισοδύναμη με την σύνθεση δύο ανακλάσεων ως προς δύο ευθείες που τέμνονται στο σημείο Κ και σχηματίζουν γωνία $\frac{\phi}{2}$.
Στην περίπτωσή μας, έχουμε μια στροφή με κέντρο την αρχή Ο(0,0) και γωνία στροφής a και καταλήγουμε με βάση τα παραπάνω, στο συμπέρασμα ότι αυτή είναι ισοδύναμη με την σύνθεση δύο ανακλάσεων ως προς δύο ευθείες που τέμνονται στην αρχή Ο(0,0) σχηματίζοντας γωνία $\frac{a}{2}$ μεταξύ τους. Συμβολικά έχουμε: $\widetilde{M} = \Re_{\tilde{B}} \circ \Re_{\tilde{A}}$.
Πιο συγκεκριμένα η $\Re_{\tilde{A}}$ απεικονίζει το σκούρο 'τετραγωνάκι' $\widetilde{\mathrm{A}}$ ΚΛΜ στο πιο ανοιχτόχρωμο τετραγωνάκι $\widetilde{\mathrm{B}}$ $\widetilde{\mathrm{A}}$ ΜΘ. Το σχήμα προσπαθεί να κάνει σαφή την διαδικασία δείχνοντας επίσης τις διαδοχικές εικόνες ενός σημείου αλλά και ενός διαγώνιου κυκλικού τόξου του αρχικού σκουρόχρωμου τετραγώνου.
Ας σκεφτούμε τώρα πως μεταφράζεται το σχήμα 1β στο σχήμα 1α.
Η αρχή της συμμετρίας λέει πως αν δύο σημεία είναι συμμετρικά ως προς μια ευθεία $\widetilde{\mathrm{A}}$ τότε οι εικόνες τους ως προς ένα μετασχηματισμό Möbius F^{-1} είναι συμμετρικές ως προς $\mathrm{A} = F^{-1}(\widetilde{\mathrm{A}})$ (εικόνα της ευθείας $\widetilde{\mathrm{A}}$) που διέρχεται από τα σταθερά σημεία (ας θυμηθούμε ότι την οικογένεια των κύκλων αυτών στο σχήμα 1α την είχαμε ονομάσει οικογένεια (C_1). Έτσι η ανάκλαση ως προς την ευθεία $\widetilde{\mathrm{A}}$ στο σχήμα 1β γίνεται ανάκλαση (αντιστροφή) ως

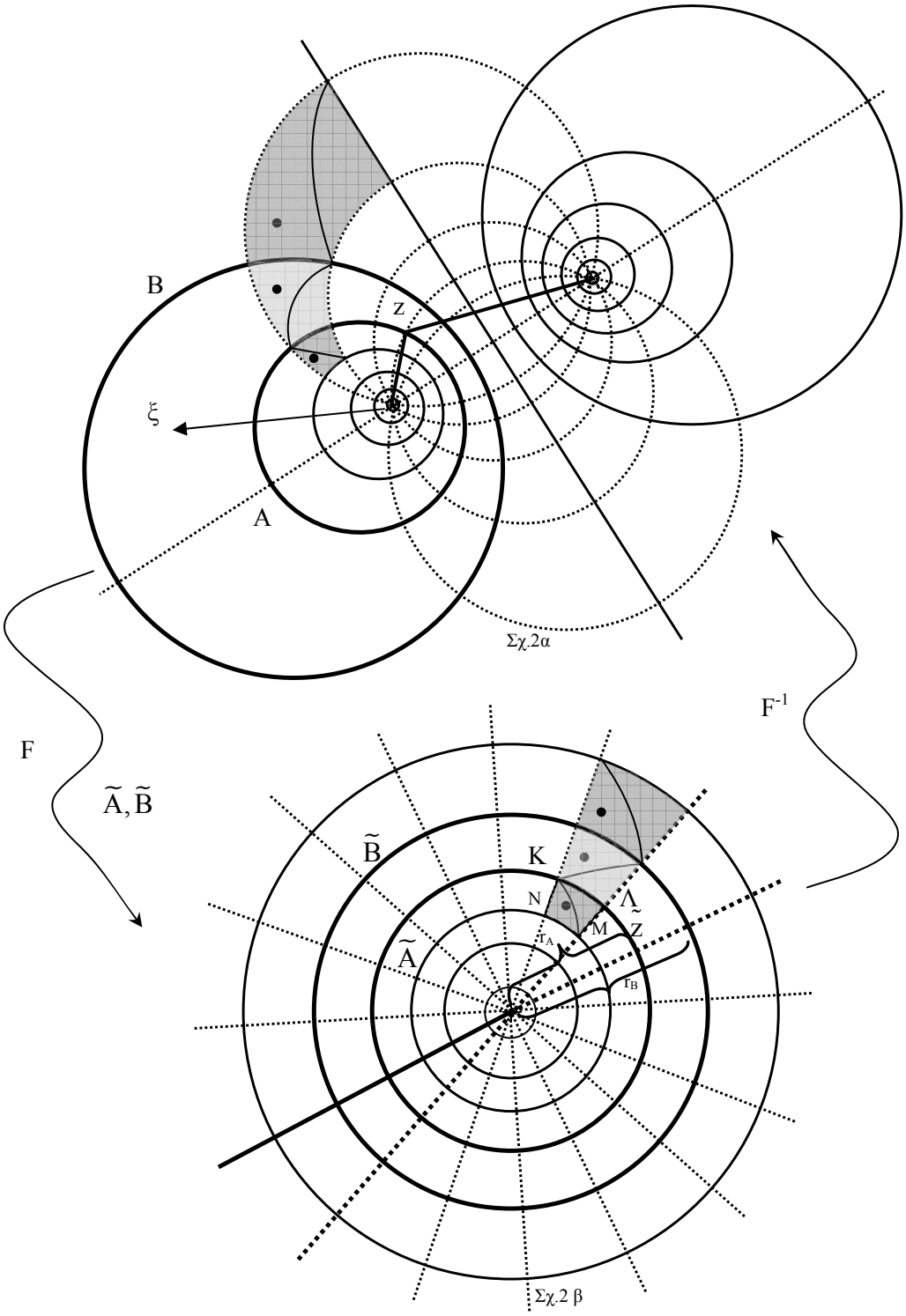
προς τον κύκλο $\mathrm{A} = F^{-1}(\widetilde{\mathrm{A}})$ στο σχήμα 1β. Το ίδιο συμβαίνει και κατά την δεύτερη ανάκλαση ως προς την ευθεία $\widetilde{\mathrm{B}}$.

Ισχύει λοιπόν η επόμενη πρόταση:

Αν M είναι ένας ελλειπτικός μετασχηματισμός Möbius και ο πολλαπλασιαστής που συνδέεται με ένα από τα σταθερά σημεία, έστω το ξ_+, είναι ο $m = e^{ia}$ τότε ο μετασχηματισμός M γράφεται: $M = I_B \circ I_A$ όπου A, B είναι δύο κύκλοι που διέρχονται από τα σταθερά σημεία και μάλιστα είναι τέτοιοι ώστε η γωνία που σχηματίζουν μεταξύ τους να είναι $\frac{a}{2}$.



Περίπτωση Υπερβολικού μετασχηματισμού Möbius



Τα σχήματα 2α και 2β παρουσιάζουν τα αντίστοιχα αποτελέσματα στην περίπτωση του υπερβολικού μετασχηματισμού. Στην περίπτωση αυτή ο πολλαπλασιαστής που συνδέεται με το ξ_+ είναι ένας πραγματικός αριθμός και ο μετασχηματισμός στο σχήμα 2β είναι μια διαστολή $\widetilde{M}(\tilde{z}) = \rho\tilde{z}$. Όπως και με την περίπτωση της στροφής έτσι και η διαστολή μπορεί να εκφραστεί ως σύνθεση δύο ανακλάσεων. Αν $\widetilde{A}, \widetilde{B}$ είναι δύο κύκλοι οι οποίοι έχουν κέντρο την αρχή και τέτοιοι ώστε:

$$\frac{r_B}{r_A} = (\text{Ακτίνα του } \widetilde{B})/(\text{Ακτίνα του } \widetilde{A}) = \sqrt{\rho}$$

τότε η ανάκλαση ως προς τον κύκλο $\widetilde{A}$ που ακολουθείται από ανάκλαση ως προς τον κύκλο $\widetilde{B}$ παράγει μια διαστολή με κέντρο την αρχή O(0,0) και συντελεστή ρ. Συμβολικά κάτι τέτοιο θα το γράψουμε $\widetilde{M} = I_{\widetilde{B}} \circ I_{\widetilde{A}}$.

Τα σχήμα 2β περιγράφει το διαδοχικό αποτέλεσμα των δύο αυτών ανακλάσεων στο σκουρόχρωμο 'τετραγωνάκι' που ορίζεται από τα K,Λ,M,N. Ακριβώς όπως και πριν έτσι και τώρα αν εφαρμοστεί η αρχή της συμμετρίας στην F^{-1} θα προκύψει ότι ο αρχικός μετασχηματισμός Möbius μπορεί να εκφραστεί ως $M = I_B \circ I_A$ με I_B, I_A ανακλάσεις (αντιστροφές) ως προς τους κύκλους B, A αντίστοιχα. Αν παρατηρήσουμε πάλι τώρα το σχήμα 2α θα δούμε ότι οι κύκλοι B, A ανήκουν στην οικογένεια κύκλων (C_2) οι οποίοι είναι ορθογώνιοι στην οικογένεια κύκλων (C_1) που διέρχονται από τα σταθερά σημεία.

Για την οικογένεια των κύκλων (C_2) και σε σχέση με τα σταθερά σημεία ισχύει η εξής ιδιότητα: Τα σταθερά σημεία είναι συμμετρικά (αντίστροφα) ως προς κάθε μέλος της οικογένειας των κύκλων (C_2). Αυτό έρχεται να εξηγήσει το γιατί η $I_B \circ I_A$ αφήνει τα σημεία ξ_+, ξ_- σταθερά. Στην ελλειπτική περίπτωση που εξετάσαμε προηγουμένως κάτι τέτοιο ήταν φανερό, διότι κάθε ανάκλαση ξεχωριστά άφηνε τα σημεία σταθερά, αφού οι κύκλοι ως προς τους οποίους γίνονταν η ανάκλαση διέρχονταν από αυτά τα σημεία. Στην παρούσα περίπτωση όμως, η ανάκλαση I_B *"αλλάζει θέση"* στα δύο αυτά σημεία και μετά πάλι η I_A τα *"στέλνει στις αρχικές τους θέσεις"*, οπότε το συνδυαστικό αποτέλεσμα των δύο ανακλάσεων τα αφήνει αναλλοίωτα.

Στη περίπτωση του ελλειπτικού μετασχηματισμού είχαμε καταλήξει στο εξής: Αν M είναι ένας ελλειπτικός μετασχηματισμός και ο πολλαπλασιαστής που συνδέεται με το ένα από τα σταθερά σημεία ξ_+ είναι ο0 $m = e^{ia}$ τότε $M = I_B \circ I_A$ όπου B, A είναι κύκλοι που διέρχονται από τα σταθερά σημεία και η γωνία από τον A στον B με κορυφή το σημείο ξ_+ είναι $\frac{a}{2}$. Αυτός είναι ένας τρόπος για να βρούμε δύο κύκλους της οικογένειας C_1 που σχηματίζουν μια δεδομένη γωνία a. Μπορούμε να πούμε ότι κάτι αντίστοιχο συμβαίνει και στην περίπτωση του υπερβολικού μετασχηματισμού; Πως μπορούμε να πάρουμε ένα ζεύγος κύκλων από την οικογένεια C_2 το οποίο να αντιστοιχεί σε δεδομένη τιμή του ρ; Η απάντηση κρύβεται στην ιδιότητα που έχουν οι κύκλοι C_2. Αυτοί είναι Απολλώνιοι κύκλοι με σημειακούς κύκλους τα σταθερά σημεία ξ_+, ξ_-. Ας θυμίσουμε πάλι την ανακάλυψη αυτή του Απολλώνιου, την οποία έχουμε αναφέρει κατά κόρον σε προηγούμενα σημεία της εργασίας αυτής: αν ένα σημείο z κινείται κατά τέτοιο τρόπο ώστε ο λόγος των αποστάσεων του από δύο σταθερά σημεία ξ_+, ξ_- να παραμένει σταθερός τότε το z κινείται σε κύκλο. Αν το z διαγράφει τον κύκλο A τότε το $\tilde{z} = F(z)$ κινείται πάνω στο κύκλο $\widetilde{A}$ ο οποίος έχει κέντρο την αρχή και ακτίνα r_A.

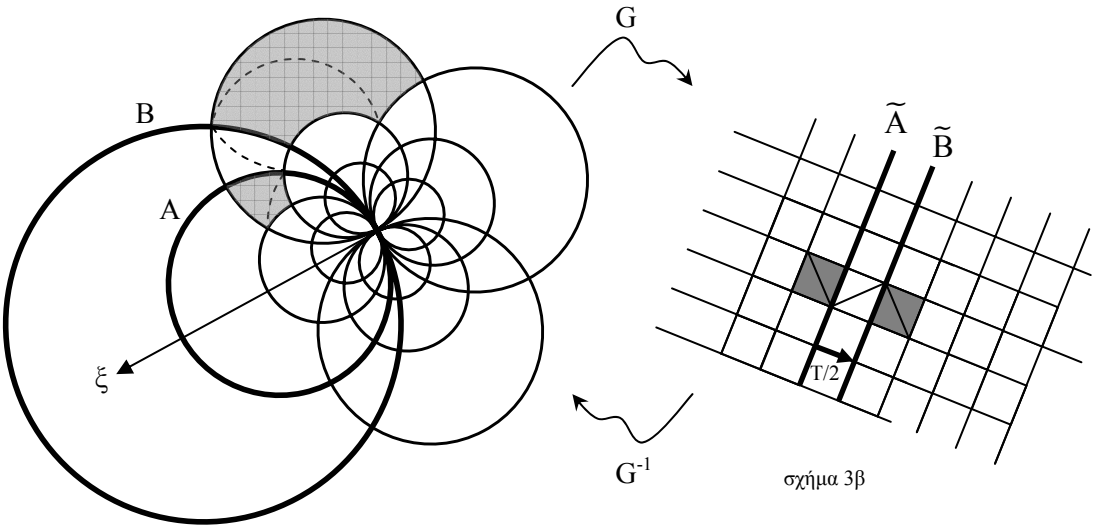
Όμως $r_A = \left|\tilde{z}\right| = \left|F(z)\right| = \dfrac{\left|z-\xi_+\right|}{\left|z-\xi_-\right|}$ δηλαδή το r_A (ακτίνα του $\tilde{A}$) είναι ο λόγος των αποστάσεων του z από τα δύο σταθερά σημεία ξ_+, ξ_-

Καθώς το r_A (ακτίνα του $\tilde{A}$) τείνει στο 0 ο αντίστοιχος Απολλώνιος κύκλος A τείνει να ταυτιστεί με το σημείο ξ_+ ενώ όταν το r_A (ακτίνα του $\tilde{A}$) τείνει στο άπειρο τότε ο κύκλος A τείνει να γίνει το σημείο ξ_-.

Επίσης τα σταθερά σημεία ξ_+, ξ_- που καθορίζουν την Απολλώνια οικογένεια είναι συμμετρικά ως προς κάθε έναν από τους κύκλους της οικογένειας αυτής.

Ας πάρουμε πάλι τον τύπο $\dfrac{r_B}{r_A} =$(Ακτίνα του $\tilde{B}$)/(Ακτίνα του $\tilde{A}$)$=\sqrt{\rho}$. Ερμηνεύσαμε γεωμετρικά τις ποσότητες r_A, r_B οπότε το πρόβλημα της επιλογής από την οικογένεια των κύκλων C_2 του ζεύγους κύκλων που αντιστοιχεί στην τιμή ρ έχει την εξής λύση:

Αν M είναι ένας υπερβολικός μετασχηματισμός Möbius και ο πολλαπλασιαστής που συνδέεται με ένα από τα δύο σταθερά σημεία, έστω το ξ_+, είναι ο $m = \rho$ τότε $M = I_B \circ I_A$ όπου B, A είναι δύο κύκλοι της Απολλώνιας οικογένειας με σημειακούς κύκλους τα $\xi_\pm$ και τέτοιοι ώστε $\dfrac{r_B}{r_A} = \sqrt{\rho}$.



σχήμα 3β

σχήμα 3α

Παραβολική περίπτωση

Τα σχήματα 3α και 3β περιγράφουν πως η ίδια ιδέα βρίσκει εφαρμογή στην περίπτωση των παραβολικών μετασχηματισμών. Ας θυμηθούμε ότι μέσω του μετασχηματισμού $z \to \tilde{z} = G(z) = \dfrac{1}{z-\xi}$ απεικονίσαμε το σταθερό σημείο ξ στο ∞ οπότε ο μετασχηματισμός $\widetilde{\mathrm{M}}$ που προκύπτει είναι η μεταφορά $\widetilde{M}(\tilde{z}) = \tilde{z} + T$. Γνωρίζουμε από προηγούμενο κεφάλαιο ότι μια τέτοια μεταφορά μπορεί να εκφραστεί ως σύνθεση

$\widetilde{M} = \Re_{\widetilde{B}} \circ \Re_{\widetilde{A}}$ όπου $\widetilde{A}, \widetilde{B}$ είναι παράλληλες ευθείες και τέτοιες ώστε η απόστασή τους να είναι $\frac{T}{2}$. Εφαρμόζοντας την αρχή της συμμετρίας έχουμε ότι: Ο παραβολικός μετασχηματισμός Möbius M με σταθερό σημείο ξ μπορεί να εκφραστεί ως σύνθεση $M = I_B \circ I_A$ όπου A και B είναι κύκλοι που εφάπτονται μεταξύ τους στο ξ.

Σύνοψη: Η απλότητα των όσων μέχρι τώρα έχουμε περιγράψει ίσως συσκοτίζεται από το πλήθος των λεπτομερειών που έχουμε δώσει. Θα χρειαστεί λοιπόν να συνοψίσουμε κατά κάποιον τρόπο τα αποτελέσματά μας.

Έχουμε λοιπόν τα εξής:

Ένας μη λοξοδρομικός μετασχηματισμός Möbius M μπορεί να εκφραστεί πάντοτε ως σύνθεση δύο ανακλάσεων ως προς κύκλους A και B που είναι ορθογώνιοι στους αναλλοίωτους κύκλους του M. Επιπλέον ο μετασχηματισμός αυτός είναι ελλειπτικός παραβολικός ή υπερβολικός αναλόγως με το αν οι κύκλοι A και B τέμνονται εφάπτονται ή δε τέμνονται.

Επίσης ένας λοξοδρομικός μετασχηματισμός μπορεί πάντα να γραφεί ως σύνθεση τεσσάρων ανακλάσεων $M = \left(I_{B'} \circ I_{A'}\right) \circ \left(I_B \circ I_A\right) = \left(I_B \circ I_A\right) \circ \left(I_{B'} \circ I_{A'}\right)$ ως προς κύκλους Α, Β, Α΄, Β΄. Οι κύκλοι Α και Β περνάνε από τα σταθερά σημεία του μετασχηματισμού και οι Α΄ και Β΄ είναι ορθογώνιοι στους Α, Β.

Μιλάμε βέβαια κάθε φόρα για τον ελάχιστο αριθμό συνθέσεων με προς τους οποίους μπορούμε να χτίσουμε τον μετασχηματισμό. Αυτό που θέλουμε να πούμε είναι ότι αν για παράδειγμα ένας μετασχηματισμός Möbius γράφεται ως σύνθεση τεσσάρων ανακλάσεων δεν είναι απαραίτητα ένας λοξοδρομικός μετασχηματισμός αφού ο αριθμός των ανακλάσεων ου συνθέτουν το μετασχηματισμό ίσως να μπορέσει να μειωθεί στους δύο.

Για παράδειγμα αν Α, Β είναι δύο ευθείες που τέμνονται στο Ο(0,0) σχηματίζοντας γωνία $\frac{\pi}{12}$ και Α΄ και Β΄ είναι δύο ευθείες που τέμνονται στο Ο(0,0) σχηματίζοντας γωνία $\frac{\pi}{6}$ τότε ο μετασχηματισμός Möbius $M = \Re_{B'} \circ \Re_{A'} \circ \Re_B \circ \Re_A$ είναι μια στροφή κατά $\frac{\pi}{2}$ η οποία μπορεί να αναχθεί σε σύνθεση δύο ανακλάσεων ως προς δύο τεμνόμενες ευθείες που σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία $\frac{\pi}{4}$.

Κάποιοι πολύ σημαντικοί μετασχηματισμοί Möbius

Αυτομορφισμοί του μοναδιαίου δίσκου:

Αν ο R είναι ένας δίσκος (ή ένα ημιεπίπεδο) τότε μπορούμε να τον απεικονίσουμε στον εαυτό του με την βοήθεια ενός μετασχηματισμού Möbius M. Σε αυτήν την ενότητα θα βρούμε όλους τους πιθανούς μετασχηματισμούς Möbius του μοναδιαίου δίσκου. Αυτοί οι μετασχηματισμοί Möbius είναι σημαντικοί για δύο λόγους:

1. Διότι παίζουν ένα σημαντικό ρόλο στην μη Ευκλείδεια γεωμετρία.

2. Διότι είναι οι μόνοι αυτομορφισμοί του δίσκου.

Στα επόμενα θα συμβολίσουμε με C τον μοναδιαίο κύκλο και με D τον μοναδιαίο δίσκο (ο D δεχόμαστε ότι περιέχει και τον κύκλο C) ενώ με M(z) θα δηλώνουμε τον οποιοδήποτε μετασχηματισμό Möbius του δίσκου στον εαυτό του. Πριν προσπαθήσουμε να βρούμε ένα τύπο για την γενική μορφή μετασχηματισμού Möbius θα προσπαθήσουμε να βρούμε πόσοι τέτοιοι μετασχηματισμοί υπάρχουν. Με άλλα λόγια πόσοι πραγματικοί αριθμοί (παράμετροι) απαιτούνται για να καθορίσουμε ένα τέτοιο συγκεκριμένο μετασχηματισμό Möbius. Πρώτα

λοιπόν θα δείξουμε ότι όλοι οι μετασχηματισμοί Möbius σχηματίζουν μια οικογένεια που αποτελείται από έξι παραμέτρους. Από την στιγμή που έχουμε επιλέξει τρία σημεία στο $\mathbb{C}$ υπάρχει ένας και μοναδικός μετασχηματισμός Möbius που απεικονίζει αυτά τα σημεία σε τρία άλλα τυχαία επιλεγμένα σημεία τα οποία είναι οι εικόνες τους. Κάθε ένα από αυτά τα τρία σημεία εικόνες $w = u + vi$ απαιτεί δύο πραγματικούς αριθμούς (τους u, v) για να παρασταθεί. Αν σκεφτούμε πως τα τρία αρχικά σημεία έχουν σταθερές θέσεις και τα τρία σημεία εικόνες είναι επιλεγμένα ελεύθερα τότε ο συνολικός αριθμός παραμέτρων που χρειαζόμαστε για να καθορίσουμε ένα συγκεκριμένο μετασχηματισμό Möbius είναι 2x3=6 παράμετροι.
Με άλλα λόγια μπορούμε να πούμε ότι η γενικότερη μορφή μετασχηματισμού Möbius έχει έξι βαθμούς ελευθερίας. (Πρόταση 1)
Επιστρέφοντας στο αρχικό πρόβλημα είναι ξεκάθαρο ότι θα χάσουμε μερικούς από αυτούς τους βαθμούς ελευθερίας όταν απαιτήσουμε να ισχύσει η συνθήκη ο μετασχηματισμός M(z) να απεικονίζει τον δίσκο D στον εαυτό του.
Στην πραγματικότητα χάνουμε τους μισούς από αυτούς: Οι αυτομορφισμοί Möbius του D στον D έχουν τρεις βαθμούς ελευθερίας.
Ας δούμε όμως γιατί συμβαίνει κάτι τέτοιο. Ένας μετασχηματισμός Möbius άρα και ο $\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$ απεικονίζει έναν προσανατολισμένο κύκλο C σε έναν προσανατολισμένο κύκλο C΄ με τέτοιο τρόπο ώστε αν διατρέξουμε του κύκλους C και C΄ σύμφωνα με την φορά που υπαγορεύει ο προσανατολισμός τους τότε η περιοχή που βρίσκεται στα αριστερά του C να απεικονίζεται στην περιοχή στα αριστερά του C΄.
Έστω πως έχουμε τα σημεία p, q, r για τα οποία θεωρούμε πως έχουν σταθερές θέσεις πάνω στον C ενώ για τα σημεία $\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}$ θεωρούμε ότι έχουν τυχαίες θέσεις στον C.Υποθέτοντας ότι τα $\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}$ προσδίδουν τον ίδιο[4] προσανατολισμό στον κύκλο με τον προσανατολισμό που προσδίδουν τα σημεία p, q, r τότε όπως γνωρίζουμε υπάρχει ένας μοναδικός αυτομορφισμός Möbius που απεικονίζει τα p, q, r στα $\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}$ και ο οποίος δίνεται από τον τύπο: $z \to \tilde{z} = M(z)$ όπου $\left[\tilde{z}, \tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}\right] = \left[z, p, q, r\right]$. Επειδή τρεις πραγματικοί αριθμοί χρειάζονται για να καθοριστούν οι p, q, r - οι γωνίες τους για παράδειγμα- η πρόταση 1 έχει κατοχυρωθεί.

Τύπος μέσω της αρχής της συμμετρίας:

Σύμφωνα με την πιο πάνω πρόταση ο καθορισμός ενός συγκεκριμένου ομοιομορφισμού M απαιτεί τρία ανεξάρτητα μεταξύ τους “bits” πληροφορίας (τρεις ανεξάρτητες μεταξύ τους συνθήκες) . Ωστόσο δεν είμαστε υποχρεωμένοι να δώσουμε αυτές τις πληροφορίες με την μορφή τριών σημείων πάνω στον C. Οποιασδήποτε μορφής δεδομένα τα οποία είναι ισοδύναμα με τρεις πραγματικούς αριθμούς είναι επαρκή. Μια αρκετά χρήσιμη εναλλακτική μορφή είναι αυτή που περιγράφεται αμέσως πιο κάτω: Καθορίζουμε ποιο σημείο *α* στο εσωτερικό του δίσκου D πρόκειται να απεικονιστεί στην αρχή και επίσης καθορίζουμε ποιο σημείο *p* πάνω στον κύκλο πρόκειται να είναι η εικόνα του 1 (ή κάποιου άλλου καθορισμένου σημείου στον κύκλο C). Με την επιλογή του *α* χρησιμοποιούμε τους δύο βαθμούς ελευθερίας.

---

[4] γιατί αλλιώς ο μετασχηματισμός Möbius με $z \to \tilde{z} = M(z)$ όπου $\left[\tilde{z}, \tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}\right] = \left[z, p, q, r\right]$ που απεικονίζει τα p, q, r στα $\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}$ δεν είναι μετασχηματισμός του δίσκου D.

Πριν το αναλύσουμε περισσότερο αυτό θα αναφέρουμε μια άλλη συνέπεια της Πρότασης 1. Δεν μπορούμε γενικά να βρούμε έναν αυτομορφισμό Möbius M, ο οποίος να απεικονίζει ταυτόχρονα το εσωτερικό σημείο α στο 0 και να απεικονίζει ένα άλλο εσωτερικό σημείο σε κάποιο άλλο εσωτερικό σημείο. Αυτές οι απαιτήσεις κάνουν τέσσερις τις προϋποθέσεις που απαιτούμε για τον μετασχηματισμό M ενώ η πρόταση 1 μας λέει πως μόνο τρεις συνθήκες χρειάζονται. Αυτό μοιάζει πολύ με την απαίτηση να χαράξουμε ένα κύκλο που να διέρχεται από τέσσερα αυθαιρέτως δοσμένα σημεία. Αυτό απλά δεν γίνεται πάντα. Ας υποθέσουμε ότι σε κάποια περίπτωση είμαστε τόσο τυχεροί που καταφέρνουμε να χαράξουμε έναν κύκλο που να διέρχεται από τέσσερα δεδομένα σημεία. Σε μια τέτοια περίπτωση ο κύκλος που χαράξαμε είναι μοναδικός (διότι από τρία διαφορετικά μεταξύ τους σημεία διέρχεται ένας και μόνο κύκλος). Αυτό συμβαίνει και για δύο αυτομορφισμούς Möbius: αν δύο αυτομορφισμοί Möbius απεικονίζουν δύο εσωτερικά σημεία στις ίδιες εικόνες τότε είναι ίσοι (αφού περιέχουν τέσσερα bits κοινής πληροφορίας οπότε ισούνται αφού για να είναι δύο μετασχηματισμοί Möbius του D ίσοι απαιτούνται τρία bits κοινής πληροφορίας όπως έχουμε κατοχυρώσει μέσω της πρότασης 1). Αυτό το τελευταίο συμπέρασμα θα το ονομάσουμε πρόταση 2.

Αν ο μοναδιαίος κύκλος C απεικονίζεται μέσω του αυτομορφισμού M στον εαυτό του τότε από την αρχή της συμμετρίας έχουμε ότι: αν ένα ζεύγος σημείων είναι συμμετρικά κατά την αντιστροφή ως προς τον κύκλο C το ίδιο θα συμβαίνει και για τις εικόνες τους. Ας εφαρμόσουμε τώρα την αρχή αυτή στα συμμετρικά σημεία a και $\frac{1}{\bar{a}}$. Επειδή το a απεικονίζεται στο 0 το $\frac{1}{\bar{a}}$ πρέπει να απεικονίζεται στο σημείο που είναι το αντίστροφο του 0 μέσω της αντιστροφής ως προς τον κύκλο C δηλαδή στο σημείο ∞.

Ο μετασχηματισμός M λοιπόν πρέπει να έχει τον τύπο $M(z) = k\left(\frac{z-a}{\bar{a}z-1}\right)$ όπου το k είναι μια σταθερά. Επειδή απαιτούμε το $p = M(1)$ να είναι ένα σημείο του κύκλου C θα έχουμε $1 = |p| = |k|\frac{|1-a|}{|\bar{a}-1|} = |k| \Rightarrow k = e^{i\phi}$. Έτσι η επιλογή του p είναι ισοδύναμη με την επιλογή του ϕ. Χρησιμοποιώντας το a και το ϕ για να ονομάσουμε τον αυτομορφισμό M θα έχουμε $M_\alpha^\phi(z) = e^{i\phi}\left(\frac{z-a}{\bar{a}z-1}\right)$ ο οποίος είναι και η πιο γενική μορφή αυτομορφισμού του D.

Ας σημειωθεί ότι ο $M_0^\phi(z) = -e^{i\phi}z = e^{i(\pi+\phi)}z$ απλά στρέφει τον δίσκο D γύρω από το κέντρο του κατά γωνία $(\pi+\phi)$. Ο γενικός μετασχηματισμός Möbius M_a^ϕ μπορεί να ερμηνευθεί ως ο μετασχηματισμός M_a^0 ακολουθούμενος από μια στροφή κατά ϕ και από αυτήν την οπτική γωνία το πραγματικά ενδιαφέρον κομμάτι του μετασχηματισμού είναι το M_a^0 που θα το γράφουμε πιο σύντομα ως M_a.

Θα προσπαθήσουμε τώρα να βρούμε το γεωμετρικό νόημα του $M_\alpha(z) = \left(\frac{z-a}{\bar{a}z-1}\right)$ [σχέση (α)].

Θα αρχίσουμε με την παρατήρηση ότι ο M_a έχει την ιδιότητα να αλλάζει το a με το 0. Δεν είναι μόνο το ότι έχουμε $M_a(a) = 0$ αλλά και ότι $M_a(0) = a$ όπως πολύ εύκολα προκύπτει από την σχέση (α). Σύμφωνα με την πρόταση 2 υπάρχει μόνο ένας αυτομορφισμός που ικανοποιεί αυτή την ιδιότητα οπότε αν κατασκευάσουμε γεωμετρικά ένα αυτομορφισμό Möbius με αυτήν την ιδιότητα (να αλλάζει αμοιβαία το a με το 0) τότε δεν μπορεί παρά να είναι ο μετασχηματισμός M_a.

Έχουμε αναφέρει σε προηγούμενες σελίδες ότι η ανάκλαση I_j ως προς έναν οποιοδήποτε κύκλο j ορθογώνιο προς τον κύκλο C, θα απεικονίσει τον αντίστοιχο κυκλικό δίσκο D του C στον εαυτό του και κατά τέτοιον τρόπο ώστε τα δύο μέρη του δίσκου που χωρίζονται από τον J να αλλάζουν αμοιβαία θέση (δηλαδή το εσωτερικό στον J κομμάτι του D θα απεικονίζεται στο εξωτερικό και αντίστροφα). Σε αυτό το σημείο φαίνεται ξεκάθαρα πως αυτό που πρέπει να κάνουμε είναι να βρούμε τον κύκλο J που είναι ορθογώνιος στον C και η αντίστοιχη ανάκλαση I_j να απεικονίζει το a στο 0 και αντίστροφα . Το κέντρο q του κύκλου J θα βρίσκεται στην ευθεία L που διέρχεται από τα a και 0. Πρέπει όμως να προσδιορίσουμε την ακριβή θέση του. Επειδή τα σημεία a και $\frac{1}{\bar{a}}$ είναι συμμετρικά ως προς τον κύκλο C οι εικόνες τους μέσω της ανάκλασης I_j είναι συμμετρικές ως προς τον κύκλο $I_j(\mathrm{C}) = \mathrm{C}$ (από αρχή της συμμετρίας) . Επειδή θέλουμε $I_j(a) = 0$ συμπεραίνουμε ότι $I_j(\frac{1}{\bar{a}}) = \infty$.

Αλλά το σημείο που απεικονίζεται με την I_j στο ∞ είναι το κέντρο του κύκλου J έτσι το κέντρο του J είναι το $q = \frac{1}{\bar{a}}$.

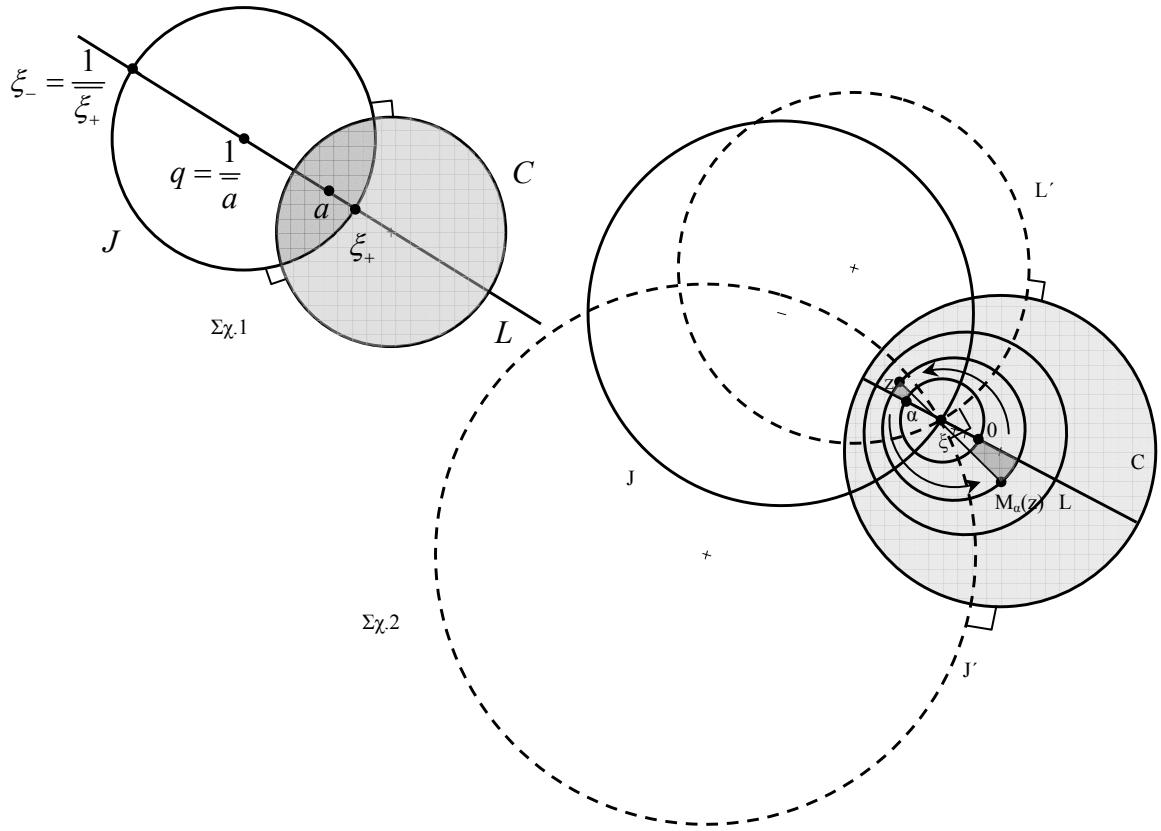
Επειδή η I_j είναι μια αντισύμμορφη απεικόνιση για να μπορέσουμε να πάρουμε ένα σύμμορφο αυτομορφισμό Möbius πρέπει να συνθέσουμε την I_j με μια άλλη ανάκλαση. Επειδή έχουμε καταφέρει μέχρι τώρα να αλλάξουμε αμοιβαία το a με το 0 θα πρέπει να προσέξουμε ώστε και η δεύτερη ανάκλαση να αφήνει αυτά τα δύο σημεία σταθερά. Η μόνη επιλογή μας σε αυτήν την περίπτωση είναι η ανάκλαση ως προς την ευθεία L που διέρχεται από τα a και 0. Φτάσαμε έτσι στην γεωμετρική μας ερμηνεία για τον αυτομορφισμό M_a:

$$M_a = \Re_{\mathrm{L}} \circ I_J$$

Θα παρατηρήσουμε (και είναι κάτι πολύ εύκολο να αποδείξουμε) ότι η σειρά με την οποία κάνουμε την σύνθεση δεν παίζει κανένα ρόλο. Θα μπορούσαμε λοιπόν να γράψουμε και: $M_a = I_J \circ \Re_{\mathrm{L}}$

Τα σταθερά σημεία $\xi_{\pm}$ είναι τα σημεία τομής του κύκλου J με την ευθεία L τα οποία φυσικά είναι συμμετρικά μεταξύ τους ως προς τον κύκλο C. Επειδή οι ανακλάσεις λαμβάνουν χώρα ως προς ορθογώνιους κύκλους (τους J και L) που διέρχονται από τα σημεία $\xi_{\pm}$ ο αυτομορφισμός M_a είναι ελλειπτικός και οι πολλαπλασιαστές που συνδέονται με τα σημεία $\xi_{\pm}$ δίνονται από τον τύπο: $m = e^{i\pi} = -1$. Έτσι η δράση του M_a σε μια απειροστική περιοχή του σημείου ξ_+ είναι στροφή κατά γωνία π. Το ότι ο αυτομορφισμός M_a αλλάζει την θέση αμοιβαία των α και 0 μπορεί να θεωρηθεί ως αποτέλεσμα του γεγονότος ότι ο M_a είναι ενειλικτικός : ($M_a \circ M_a = \mathrm{I}$ όπου I είναι ο ταυτοτικός αυτομορφισμός) και κάθε ζεύγος σημείων $z, M_a(z)$ αλλάζουν θέση αμοιβαία μέσω του M_a.

Μπορούμε επίσης να γράψουμε τον M_a ως εξής: $M_a = I_{L'} \circ I_{J'}$ όπου τα L', J' είναι δύο κύκλοι που διέρχονται από το ξ_+ και είναι ορθογώνιοι με τον C. Όλα αυτά περιγράφονται στο σχήμα 2 το οποίο επίσης δείχνει μερικούς κύκλους οι οποίοι είναι αναλλοίωτοι καθώς και το αποτέλεσμα της δράσης του M_a σε ένα 'τετραγωνάκι' του D.



Μια διαφορετική προσέγγιση των αυτομορφισμών του μοναδιαίου δίσκου είναι η εξής:

Πρώτα θα πάρουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό T^{-1} του $\mathrm{T}(z) = e^{i\theta}\dfrac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}$, οπότε $\mathrm{T}^{-1}(z) = \dfrac{\overline{z_0}z - e^{i\theta}z_0}{z - e^{i\theta}}$. Ας θεωρήσουμε έναν συγκεκριμένο μετασχηματισμό αυτής της μορφής. Για παράδειγμα: $S(z) = -i\dfrac{z-1}{z+1}$ τότε ο $U(z) = (\mathrm{T} \circ S)(z)$ απεικονίζει το μοναδιαίο δίσκο στο μοναδιαίο δίσκο. Επειδή $\mathrm{T} = U \circ S^{-1}$ και ο T είναι ο γενικότερος μετασχηματισμός που απεικονίζει το άνω ημιεπίπεδο στον μοναδιαίο δίσκο άρα και ο U είναι ο γενικότερος μετασχηματισμός του μοναδιαίου δίσκου στον εαυτό του.

Θα έχουμε $U(z) = (\mathrm{T} \circ S)(z) = e^{i\theta}\dfrac{-i\dfrac{z-1}{z+1} - z_0}{-i\dfrac{z-1}{z+1} - \overline{z_0}} = \ldots = e^{i\theta}\dfrac{(z_0 + i)(-1)}{(\overline{z_0}i + 1)(-i)}\dfrac{z + \dfrac{z_0 - i}{z_0 + i}}{-\dfrac{\overline{z_0} - i}{\overline{z_0} + i}z - 1}$

Ας σημειωθεί ότι $\left|\dfrac{z_0 - i}{z_0 + i}\right| < 1$ επειδή το z_0 να ανήκει στο άνω ημιεπίπεδο. Αν $a = -\dfrac{z_0 - i}{z_0 + i}$ έχουμε: $U(z) = e^{i\phi}\dfrac{z - a}{\overline{a}z - 1}$ (αφού αποδεικνύεται ότι $\left|\dfrac{a - b}{1 - \overline{b}a}\right| = 1 \Leftrightarrow |a| = 1$ ή $|b| = 1$)

Ο γενικότερος μετασχηματισμός που απεικονίζει το άνω ημιεπίπεδο {z/Imz≥0} στον μοναδιαίο δίσκο {w/|w|≤1}.

Επειδή οι μετασχηματισμοί Möbius απεικονίζουν ευθείες σε ευθείες ή κύκλους, η εικόνα του πραγματικού άξονα πρέπει να είναι κύκλος. Επιπλέον επειδή ο πραγματικός άξονας είναι το σύνορο του άνω ημιεπιπέδου και οι μετασχηματισμοί αυτοί είναι συνεχείς, η εικόνα του πραγματικού άξονα πρέπει να είναι ο μοναδιαίος κύκλος $|w|=1$. Αν ο μετασχηματισμός είναι ο $T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ τότε $|T(0)|=|T(\infty)|=1$ οπότε $|b|=|d|$ και $|a|=|c|$. Έχοντας υπ΄ όψιν μας την ισότητα $|a|=|c|$, μπορούμε γράψουμε: $\dfrac{a}{c}=e^{i\theta}$, όπου θ είναι κάποια γωνία και έτσι ο μετασχηματισμός T γίνεται: $\mathrm{T}(z)=e^{i\theta}\dfrac{z+\dfrac{b}{a}}{z+\dfrac{d}{c}}$. Επειδή έχουμε $|b|=|d|$ παίρνουμε $\left|\dfrac{b}{a}\right|=\left|\dfrac{d}{c}\right|$.

Έστω τώρα ένα τυχαίο σημείο x πάνω στον πραγματικό άξονα.

Τότε $|T(x)|=1\Rightarrow\left|x+\dfrac{b}{a}\right|=\left|x+\dfrac{d}{c}\right|\Rightarrow\left(x+\dfrac{b}{a}\right)\left(x+\dfrac{\overline{b}}{\overline{a}}\right)=\left(x+\dfrac{d}{c}\right)\left(x+\dfrac{\overline{d}}{\overline{c}}\right)$.

Άρα: $\left(\dfrac{\overline{b}}{\overline{a}}+\dfrac{b}{a}\right)x=\left(\dfrac{\overline{d}}{\overline{c}}+\dfrac{d}{c}\right)x$. Ισχύει: $\left(\dfrac{\overline{b}}{\overline{a}}+\dfrac{b}{a}\right)=2\,\mathrm{Re}\left(\dfrac{b}{a}\right)$ και $\left(\dfrac{\overline{d}}{\overline{c}}+\dfrac{d}{c}\right)=2\,\mathrm{Re}\left(\dfrac{d}{c}\right)$.

Τα $\dfrac{b}{a},\dfrac{d}{c}$ έχουν λοιπόν το ίδιο πραγματικό μέρος και το ίδιο μέτρο οπότε $\dfrac{b}{a}=\dfrac{d}{c}$ ή $\dfrac{b}{a}=\dfrac{\overline{d}}{\overline{c}}$.

Αν $\dfrac{b}{a}=\dfrac{d}{c}$ τότε $\mathrm{T}(z)=e^{i\theta}$.Για την δεύτερη περίπτωση: $\dfrac{b}{a}=\dfrac{\overline{d}}{\overline{c}}$ θέτοντας: $z_0=-\dfrac{b}{a}$, έχουμε: $\mathrm{T}(z)=e^{i\theta}\dfrac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}$.

Αυτός ο μετασχηματισμός είναι η γενικότερη μορφή μετασχηματισμού που απεικονίζει το άνω ημιεπίπεδο στον μοναδιαίο δίσκο. Πρέπει όμως το z_0 να ανήκει στο άνω ημιεπίπεδο. Αν το z_0 ανήκει στο κάτω ημιεπίπεδο τότε το άνω ημιεπίπεδο απεικονίζεται στο εξωτερικό του μοναδιαίου δίσκου.

Η γενικότερη απεικόνιση του άνω ημιεπιπέδου στον εαυτό του

Η ερώτηση για το ποια είναι η γενικότερη απεικόνιση του άνω ημιεπιπέδου στον εαυτό του επίσης μπορεί πολύ εύκολα να απαντηθεί Αν το ∞ είναι ένα σταθερό σημείο τότε ο $w=az+b, a>0$ και b πραγματικός απεικονίζει το άνω ημιεπίπεδο στον εαυτό του. Πιο γενικά επειδή ο πραγματικός άξονας πρέπει να απεικονίζεται στον πραγματικό άξονα ας υποθέσουμε ότι τα 0,1, ∞ είναι οι εικόνες των πραγματικών αριθμών x_1,x_2,x_3 αντίστοιχα .

Τώρα εξισώνοντας το διπλό λόγο $[w,1,0,\infty]=[z,x_1,x_2,x_3]$ θα έχουμε $w=\dfrac{z-x_1}{z-x_3}\dfrac{x_2-x_3}{x_2-x_1}$

Επειδή η απεικόνιση πρέπει να αντιστοιχίζει το άνω ημιεπίπεδο στον εαυτό του πρέπει η εικόνα του i να είναι θετική οπότε $\dfrac{x_2-x_3}{x_2-x_1}\dfrac{x_1-x_3}{x_3^2+1}>0$. Έτσι γράφοντας τον μετασχηματισμό στην μορφή $w=\dfrac{az+b}{cz+d}, ad-bc>0, a,b,c,d\in\mathbb{R}$ έχουμε την γενική μορφή του μετασχηματισμού που απεικονίζει το άνω ημιεπίπεδο στον εαυτό του.

Θεώρημα Καραθεοδωρή:
Έστω $Z = f(z)$ μια απεικόνιση 1-1 που απεικονίζει το επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο στον εαυτό του έτσι ώστε κάθε κύκλος ή ευθεία να απεικονίζεται σε έναν κύκλο ή ευθεία γραμμή. Τότε η $Z = f(z)$ θα είναι απεικόνιση της μορφής $f(z) = M(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ ή απεικόνιση της μορφής $f(z) = M(\bar{z}) = \dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, όπου $M(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ είναι ένας μετασχηματισμός Möbius. Η $f(z) = \dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ λέγεται και αντιομογραφία.

Απόδειξη:
Η σύνθεση δύο μετασχηματισμών που διατηρούν τους κύκλους είναι επίσης ένας μετασχηματισμός που διατηρεί τους κύκλους. Όλοι αυτοί οι μετασχηματισμοί σχηματίζουν μια ομάδα που περιέχει την ομάδα όλων των μετασχηματισμών Möbius και των αντιομαγραφιών.
Έστω ότι *M* είναι ο μετασχηματισμός Möbius που απεικονίζει τα *f(0), f(1), f(∞)* στα *0,1,∞* αντίστοιχα. Τότε οι $M(f(z))$ και $\overline{M(f(z))}$ είναι επίσης 1-1 απεικονίσεις του επεκτεταμένου επιπέδου στον εαυτό του που μετασχηματίζουν κύκλους σε κύκλους. Αυτοί θα έχουν τα *0,1,∞* σταθερά σημεία. Μια από αυτές τις απεικονίσεις, την οποία θα πούμε $g(z)$, απεικονίζει το $z = i$ στο πάνω ημιεπίπεδο: $\operatorname{Im} g(i) > 0$.
Επειδή $g(\infty) = \infty$ οι ευθείες (κύκλοι που διέρχονται από το ∞) απεικονίζονται σε ευθείες. Επειδή $g(0) = 0$ ευθείες που διέρχονται από το 0 απεικονίζονται σε ευθείες που διέρχονται από το 0. Πιο συγκεκριμένα ο πραγματικός άξονας (η ευθεία που διέρχεται από τα σταθερά σημεία της g) θα απεικονίζεται στον εαυτό της μέσω της $g(z)$. Οι εφαπτόμενοι μεταξύ τους κύκλοι έχουν μόνο ένα κοινό σημείο, οπότε οι εικόνες τους θα εφάπτονται επίσης. Πιο συγκεκριμένα παράλληλες ευθείες (κύκλοι που εφάπτονται στο ∞) θα απεικονίζονται σε παράλληλες ευθείες (ας θυμηθούμε ότι παράλληλες ευθείες στο επεκτεταμένο επίπεδο αντιστοιχούν στερεογραφικά σε κύκλους που διέρχονται από τον Βόρειο Πόλο N- το κέντρο της στερεογραφικής προβολής).
Ας υποθέσουμε ότι τρία σημεία z_0, z_1, z_2 είναι μη συγγραμμικά, τότε η ευθεία γραμμή που διέρχεται από το z_1 και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\overrightarrow{z_0 z_2}$ και η ευθεία γραμμή που διέρχεται από το z_2 και είναι παράλληλη προς το $\overrightarrow{z_0 z_1}$ τέμνονται στο $z_1 + z_2 - z_0$. Οι εικόνες τους είναι ευθείες γραμμές που διέρχονται: η πρώτη από το $g(z_1)$ και είναι παράλληλη προς το $\overrightarrow{g(z_0)g(z_2)}$ και η δεύτερη από το $g(z_2)$ και είναι παράλληλη προς το $\overrightarrow{g(z_0)g(z_1)}$. Η τομή τους είναι το $g(z_1)+g(z_2)-g(z_0)$ και είναι η εικόνα του $z_1 + z_2 - z_0$ οπότε: $g(z_1+z_2-z_0) = g(z_1)+g(z_2)-g(z_0)$.
Ισχύει ότι $g(z_1 \pm z_2) = g(z_1) \pm g(z_2)$, αν τα $0, z_1, z_2$ δεν είναι συγγραμμικά.
Από την $g(z_1 \pm z_2) = g(z_1) \pm g(z_2)$ έχουμε ότι:
$g(z_1) - g(z) = g(z_1 - z) = g(z_1 + (-z)) = g(z_1) + g(-z)$ οπότε $g(-z) = -g(z)$.
Τώρα ας υποθέσουμε ότι τα $0, z_1, z_2$ είναι συγγραμμικά. Τότε τα $z_1 - iz_1, z_2 \pm iz_1$ δεν είναι συγγραμμικά με το 0 εκτός από την περίπτωση που $z_2 = \mp z_1$ (προφανείς περιπτώσεις).
Θα αντικαταστήσουμε με τα $z_1 - iz_1, z_2 \pm iz_1$ στην $g(z_1 \pm z_2) = g(z_1) \pm g(z_2)$ οπότε θα έχουμε:

$g(z_1 \pm z_2) = g((z_1 - iz_1) \pm (z_2 \pm iz_1)) = g(z_1 - iz_1) \pm g(z_2 \pm iz_1) =$
$g(z_1) - g(iz_1) \pm [g(z_2) \pm g(iz_1)] = g(z_1) \pm g(z_2)$

Οπότε η $g(z_1 \pm z_2) = g(z_1) \pm g(z_2)$ αληθεύει για όλα τα z_1, z_2.

Από τις $g(z_1 \pm z_2) = g(z_1) \pm g(z_2)$, $g(-z) = -g(z)$ προκύπτει ότι:

$g(nz) = ng(z), n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

Επίσης $g(z) = g\left(m\frac{z}{m}\right) = mg\left(\frac{z}{m}\right)$ οπότε $\frac{1}{m}g(z) = g\left(\frac{z}{m}\right)$.

$g\left(\frac{n}{m}z\right) = g\left(n\frac{z}{m}\right) = ng\left(\frac{z}{m}\right) = \frac{n}{m}g(z)$ οπότε: $g(rz) = rg(z)$ για κάθε ρητό r.

Ειδικότερα $g(r) = rg(1) = r$ και έτσι έχουμε ότι όλα τα ρητά σημεία είναι σταθερά σημεία.

Το επόμενο βήμα είναι να αποδείξουμε ότι η $Z = g(z)$ διατηρεί την ορθογωνιότητα.

Ας υποθέσουμε πως l_1, l_2 είναι δύο κάθετες μεταξύ τους ευθείες. Φέρνουμε τις l_1', l_2' τέτοιες ώστε $l_1' \parallel l_1, l_2 \parallel l_2'$ $l_1' \neq l_1, l_2 \neq l_2'$. Οι τέσσερις ευθείες τέμνονται στις κορυφές ενός ορθογωνίου. Οι εικόνες τους είναι οι κορυφές ενός παραλληλογράμμου. Επειδή οι τέσσερις κορυφές ενός ορθογωνίου βρίσκονται σε κύκλο αυτό θα συμβαίνει και για τις εικόνες τους. Έτσι η εικόνα του παραλληλόγραμμου είναι επίσης ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Οπότε η $g(l_1)$ είναι κάθετη με την $g(l_2)$.

Από εδώ έχουμε ότι ο φανταστικός άξονας απεικονίζεται στον εαυτό του. Πιο συγκεκριμένα $g(i) = \lambda i$ και από την $g(z_1 \pm z_2) = g(z_1) \pm g(z_2)$ προκύπτει ότι $g(\pm 1 + i) = \pm 1 + \lambda i$ με λ πραγματικό. Οι ευθείες που διέρχονται από το 0 και από το $\pm 1 + i$ είναι ορθογώνιες και το ίδιο συμβαίνει και για τις εικόνες τους που διέρχονται από τα $\pm 1 + \lambda i$ αντίστοιχα. Οπότε $\lambda = \pm 1$. Όμως έχουμε ότι $\operatorname{Im} g(i) > 0$ άρα $\lambda = 1$ οπότε $g(i) = i$. Έχουμε όμως πως ισχύει: $g(rz) = rg(z)$ για κάθε ρητό r άρα θα έχουμε $g(r + si) = r + si$ για κάθε ρητό r, s.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι a είναι ένας άρρητος αριθμός. Έστω r_0, r_1, r_2 είναι ρητοί και $r_0 < r_1 < a < r_2$. Ας υποθέσουμε ότι C είναι ο κύκλος που διέρχεται από τα r_1, r_2 και από το i. Κάθε κύκλος που διέρχεται από τα r_0, a θα τέμνει τον C. Οπότε κάθε κύκλος που διέρχεται από τα $g(a), g(r_0) = r_0$ θα τέμνει την εικόνα $g(C)$ του κύκλου C. Η εικόνα του C είναι όμως ο C. Επειδή $g(r) = rg(1) = r$ -με r ρητό- και η εικόνα ευθείας είναι ευθεία θα έχουμε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$ τότε $g(a) \in \mathbb{R}$ άρα θα έχουμε $r_1 < g(a) < r_2$ (αφού πρέπει απαραίτητα κάθε κύκλος που διέρχεται από τα σημεία $g(a), g(r_0) = r_0$ να τέμνει τον κύκλο C). Η διπλή ανισότητα $r_1 < g(a) < r_2$ αληθεύει για κάθε r_1, r_2 που ικανοποιούν την $r_0 < r_1 < a < r_2$ άρα $g(a) = a$.

Παρομοίως θα έχουμε ότι $g(ia) = ia$ και $g(z) = g(x + yi) = g(x) + g(yi) = x + yi = z$.

Η g είναι ταυτότητα και έτσι $f(z) = M^{-1}(z)$ ή $f(z) = \overline{M^{-1}(z)}$

Ανώτερη ανάλυση και σύμμορφες απεικονίσεις

Επανάληψη κάποιων στοιχείων από τον Απειροστικό Λογισμό – Γραμμική Άλγεβρα

Θα συμβολίζουμε με $\mathbb{R}^n$ το σύνολο των n-άδων $\left(x^1, x^2, ..., x^n\right)$ όπου κάθε ένας από τους $x^i, i = 1, 2, ...n$ είναι πραγματικός αριθμός. Για συντομία θα γράφουμε $\boldsymbol{x}$ για να συμβολίσουμε το στοιχείο $\left(x^1, x^2, ..., x^n\right)$. Θα συμβολίζουμε την απόσταση του $\boldsymbol{x}$ από την αρχή με $|\boldsymbol{x}|$ και έχουμε την ισότητα: $|\boldsymbol{x}| = \left(\sum_{i=1}^{n}\left(x^i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Ο αριθμός $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$ είναι η απόσταση μεταξύ των $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{y}$.

Η ανοιχτή σφαίρα στο $\mathbb{R}^n$ με κέντρο $\boldsymbol{x}_0 = \left(x_0^1, x_0^2, ..., x_0^n\right)$ και ακτίνα r συμβολίζεται με $B_r(\boldsymbol{x}_0)$ και ορίζεται ως το σύνολο $B_r(\boldsymbol{x}_0) = \{\boldsymbol{x} / |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < r\}$.

Ένα υποσύνολο $U \subset \mathbb{R}^n$ λέμε ότι είναι ανοιχτό αν για κάθε σημείο $\boldsymbol{x} \in U$ υπάρχει σφαίρα $B_r(\boldsymbol{x}) \subset U$.

Ένα σύνολο $S \subset \mathbb{R}^n$ λέμε ότι είναι συνεκτικό αν και μόνο αν κάθε ζεύγος σημείων του S μπορεί να συνδεθεί με μια συνεχή καμπύλη που βρίσκεται ολόκληρη στο S.

Ένα σύνολο S θα λέμε ότι είναι φραγμένο όταν υπάρχει ανοιχτή σφαίρα $B_r(\boldsymbol{x})$ τέτοια ώστε $S \subset B_r(\boldsymbol{x})$.

Ένα σημείο $\boldsymbol{x}_0$ θα λέμε ότι είναι σημείο συσσώρευσης ή οριακό σημείο ενός συνόλου S αν κάθε ανοιχτή σφαίρα $B_r(\boldsymbol{x}_0)$ περιέχει ένα σημείο $\boldsymbol{x} \in S$ τέτοιο ώστε $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0$.

Ας θεωρήσουμε τώρα μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα ανοιχτό σύνολο $U \subset \mathbb{R}^n$ η οποία παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}^m$. Μια τέτοια συνάρτηση μπορεί να περιγραφεί μέσω m πραγματικών συναρτήσεων $f^1, f^2, f^3, ..., f^m$ που ορίζονται στο U. Έστω $\boldsymbol{x} = \left(x^1, x^2, ..., x^n\right) \in U$ και $f(\boldsymbol{x}) = \left(y^1, y^2, ..., y^m\right) \in \mathbb{R}^m$.

Τότε η f δίνεται από τα :

$y^1 = f^1\left(x^1, x^2, ..., x^n\right), y^2 = f^2\left(x^1, x^2, ..., x^n\right), ..., y^m = f^m\left(x^1, x^2, ..., x^n\right)$. Οι συναρτήσεις $f^1, f^2, f^3, ..., f^m$ είναι οι συναρτήσεις συνιστώσες της f.

Δηλαδή $f(\boldsymbol{x}) = \left(f^1\left(x^1, x^2, ..., x^n\right), f^2\left(x^1, x^2, ..., x^n\right), ..., f^m\left(x^1, x^2, ..., x^n\right)\right)$.

Ας δούμε ένα παράδειγμα:

Η αντιστροφή ως προς τον μοναδιαίο κύκλο είναι μια απεικόνιση:

$$f : \mathbb{R}^2 - \{0,0\} \to \mathbb{R}^2 \quad \text{με} \quad f(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

Έστω ότι $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα σύνολο $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x}_0$ ένα σημείο συσσώρευσης του S και $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^m$, τότε $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f\left(\boldsymbol{x}\right) = \boldsymbol{y}_0$ σημαίνει ότι για κάθε ανοιχτή σφαίρα $B_\varepsilon(\boldsymbol{y}_0) \subset \mathbb{R}^m$ υπάρχει $B_\delta(\boldsymbol{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $f(\boldsymbol{x}) \in B_\varepsilon(\boldsymbol{y}_0)$ για κάθε $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0$ που ανήκει στο $B_\delta(\boldsymbol{x}_0) \cap S$.

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι $\lim_{x\to x_0} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}_0$ αν και μόνο αν κάθε συνιστώσα συνάρτηση f^i της f έχει όριο το y_0^i.

Θα λέμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\boldsymbol{x}_0$ αν το $f(\boldsymbol{x}_0)$ ορίζεται και ισχύει ότι $\lim_{x\to x_0} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0)$. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε κάθε σημείο ενός συνόλου S τότε θα λέμε ότι είναι συνεχής στο σύνολο S.

Ας θεωρήσουμε ότι η f είναι μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοιχτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{R}^n$ που παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$, δηλαδή $f : U \to \mathbb{R}$. Έστω $\boldsymbol{x}_0 = \left(x_0^1, x_0^2, ..., x_0^n\right) \in U$.

Μερική παράγωγος της f στο $\boldsymbol{x}_0$ ως προς την μεταβλητή x^i λέγεται το όριο:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f\left(x_0^1, x_0^2, ...x_0^i + h, x_0^{i+1}, ...x_0^n\right) - f\left(x_0^1, x_0^2, ...x_0^i, x_0^{i+1}, ...x_0^n\right)}{h}$$ αν αυτό υπάρχει και το συμβολίζουμε με $\frac{\partial f}{\partial x^i}(\boldsymbol{x}_0)$.

Ας θυμηθούμε ότι στον λογισμό συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής η ύπαρξη παραγώγου σε ένα σημείο συνεπάγεται την συνέχεια της συνάρτησης σε αυτό το σημείο. Αυτό δεν είναι αλήθεια για συναρτήσεις περισσότερων μεταβλητών.

Θα ακολουθήσουμε τον πιο κάτω συμβολισμό:

Η συνάρτηση f είναι κλάσης C^0 σε ένα σημείο ή σε ένα σύνολο, αν είναι συνεχής στο σημείο ή το σύνολο αυτό.

Η συνάρτηση f είναι κλάσης C^k σε ένα σημείο ή σε ένα σύνολο, αν οι μερικές παράγωγοι τάξης k υπάρχουν και είναι συνεχείς στο σημείο ή το σύνολο αυτό.

Η συνάρτηση f είναι κλάσης C^∞ σε ένα σημείο ή σε ένα σύνολο, αν οι μερικές παράγωγοι κάθε τάξης υπάρχουν και είναι συνεχείς στο σημείο ή το σύνολο αυτό.

Τέλος θα λέμε μια συνάρτηση f είναι κλάσης C^ω ή πραγματική αναλυτική σε ένα σημείο, αν μπορεί να παρασταθεί με σειρά Taylor σε κάποια γειτονιά αυτού του σημείου. Για παράδειγμα η $f(x) = e^{\frac{-1}{x^2}}, x \neq 0$ και $f(0) = 0$ είναι C^∞ στο $x = 0$ αλλά δεν είναι αναλυτική εκεί.

Μιλώντας όχι τυπικά, μια συνάρτηση θα την λέμε λεία, αν έχει επαρκώς πολλές συνεχείς παραγώγους.

Θεώρημα:

Αν η συνάρτηση f είναι κλάσης C^2 σε μια γειτονιά του $\boldsymbol{x}_0$ τότε $\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(\boldsymbol{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(\boldsymbol{x}_0)$

Ας θεωρήσουμε ότι η f είναι μια πραγματική συνάρτηση (παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$) ορισμένη σε ένα ανοιχτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Έστω $\boldsymbol{x}_0 = \left(x_0^1, x_0^2, ..., x_0^n\right) \in U$.

Θα λέμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $\boldsymbol{x}_0$ αν υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση $df_{x_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lim_{x\to x_0} \frac{\left|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) - df_{x_0}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)\right|}{\left|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\right|} = 0$

Η γραμμική απεικόνιση df_{x_0} λέγεται διαφορικό της f στο $\boldsymbol{x}_0$.

Για ένα διάνυσμα $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ θα γράφουμε $df_{x_0}(\boldsymbol{v})$ ή απλά $df_{x_0}\boldsymbol{v}$.

Θεώρημα:

Αν η f έχει διαφορικό στο $\boldsymbol{x}_0$ τότε οι μερικοί παράγωγοι της f υπάρχουν στο $\boldsymbol{x}_0$ και $df_{x_0}(\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(\boldsymbol{x}_0)v^i$ όπου $\boldsymbol{v} = (v^1, v^2, v^3, \ldots v^n)$

Θεώρημα:

Αν η f είναι κλάσης C^1 στο $\boldsymbol{x}_0$ τότε η f έχει διαφορικό στο $\boldsymbol{x}_0$. Αν η f έχει διαφορικό στο $\boldsymbol{x}_0$ τότε η f είναι συνεχής στο $\boldsymbol{x}_0$.

Θεώρημα:
Αν η f έχει $df_{\boldsymbol{x}} = 0$ σε μια περιοχή τότε η f είναι σταθερή στην περιοχή αυτή.

<u>Γενικότερα:</u> Αν $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι μια συνάρτηση και $\boldsymbol{x}_0 \in U$ τότε λέμε ότι το διαφορικό της συνάρτησης στο $\boldsymbol{x}_0$ είναι η απεικόνιση $df_{x_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (αν αυτή υπάρχει) η οποία είναι γραμμική και $\lim_{x \to x_0} \frac{\left| f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) - df_{x_0}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \right|}{\left| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \right|} = 0$.

Όπως είχαμε πιο πάνω έτσι και τώρα θα έχουμε:

$$df_{x_0}(\boldsymbol{v}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^1}{\partial x^i}(\boldsymbol{x}_0)v^i, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^2}{\partial x^i}(\boldsymbol{x}_0)v^i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^m}{\partial x^i}(\boldsymbol{x}_0)v^i \right)$$

Ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης df_{x_0} ως προς τις standard[1] βάσεις των $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ είναι ο

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(\boldsymbol{x}_0) & \ldots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n}(\boldsymbol{x}_0) \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1}(\boldsymbol{x}_0) & \ldots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n}(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix}$$

Στην περίπτωση που έχουμε $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ η ορίζουσα του πιο πάνω πίνακα λέγεται ιακωβιανή της f στο $\boldsymbol{x}_0$ και υποδηλώνεται με $j(\boldsymbol{x}_0)$.

Θεώρημα: Έστω η $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι κλάσης C^1 και $U \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα ανοιχτό σύνολο και $\boldsymbol{x}_0 \in U$. Έστω $j(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$. Τότε υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο V το οποίο περιέχει το $\boldsymbol{x}_0$ και ένα ανοιχτό σύνολο W που περιέχει το $f(\boldsymbol{x}_0)$, έτσι ώστε η $f : V \to W$ να είναι ένα προς ένα και επί. Επιπλέον η $f^{-1} : W \to V$ είναι κλάσης C^1.

Η ιακωβιανή $j(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$ συνεπάγεται ότι η f είναι τοπικά ένα προς ένα και επί. Αυτό είναι ένα συμπέρασμα που ισχύει <u>μόνο τοπικά</u>.

Έστω τώρα ότι $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ και $g : V \subset \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^n$ είναι δύο απεικονίσεις με $g(V) \subset U$. Τότε η σύνθεση $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ υπάρχει. Αν η g είναι διαφορίσιμη

---

[1] $\{e^1=(1,0,0,\ldots,0), e^2=(0,1,0,0,\ldots 0),\ldots, e^k=(0,0,0,\ldots 1)\}$ είναι η standard βάση του $\mathbb{R}^k$

στο $\boldsymbol{x}_0$ και η f είναι διαφορίσιμη στο $y_0 = g(\boldsymbol{x}_0)$ τότε η $f \circ g$ είναι διαφορίσιμη στο $\boldsymbol{x}_0$ και έχουμε τον κανόνα της αλυσίδας: $d(f \circ g)_{x_0} = df_{g(x_0)} \circ dg_{x_0}$

Με όρους πινάκων έχουμε:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial (f\circ g)^1}{\partial x^1}(\boldsymbol{x}_0) & \dots & \frac{\partial (f\circ g)^1}{\partial x^r}(\boldsymbol{x}_0) \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ \frac{\partial (f\circ g)^p}{\partial x^1}(\boldsymbol{x}_0) & \dots & \frac{\partial (f\circ g)^p}{\partial x^r}(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial y^1}(\boldsymbol{y}_0) & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial y^n}(\boldsymbol{y}_0) \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ \frac{\partial f^p}{\partial y^1}(\boldsymbol{y}_0) & \dots & \frac{\partial f^p}{\partial y^n}(\boldsymbol{y}_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g^1}{\partial x^1}(\boldsymbol{x}_0) & \dots & \frac{\partial g^1}{\partial x^r}(\boldsymbol{x}_0) \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ \frac{\partial g^n}{\partial x^1}(\boldsymbol{x}_0) & \dots & \frac{\partial g^n}{\partial x^r}(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix}$$

Αν $r = n = p$ τότε $j_{(f\circ g)}(\boldsymbol{x}_0) = j_f(\boldsymbol{y}_0)\, j_g(\boldsymbol{x}_0)$

Αν $\boldsymbol{x}(t) = \left(x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)\right)$ τότε $\boldsymbol{x}'(t) = \left(\left(x^1\right)'(t), \left(x^2\right)'(t), \dots, \left(x^n\right)'(t)\right)$ είναι το διάνυσμα της ταχύτητας της καμπύλης στο σημείο $\boldsymbol{x}(t)$. Αν $\boldsymbol{x}'(t) \neq 0$ τότε η καμπύλη λέγεται κανονική (regular) και το διάνυσμα $\boldsymbol{x}'(t)$ λέγεται εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης.

Έστω $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι διαφορίσιμη και $df_{\boldsymbol{x}}$ το διαφορικό της με $j(\boldsymbol{x}) \neq 0$ $\forall \boldsymbol{x} \in U$. Αν $\boldsymbol{x}(t) \in U$, $\forall t \in I$ όπου I είναι ένα διάστημα τότε $\boldsymbol{y}(t) = f(\boldsymbol{x}(t))$ είναι μια καμπύλη στο I και το εφαπτόμενο της διάνυσμα δίνεται από την:

$$\boldsymbol{y}'(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^1}{\partial x^i}\left(\boldsymbol{x}^i(t)\right)', \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^2}{\partial x^i}\left(\boldsymbol{x}^i(t)\right)', \dots, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial fn}{\partial x^i}\left(\boldsymbol{x}^i(t)\right)' \right) = df_{x(t)}\left(\boldsymbol{x}'(t)\right)$$

Μήκος τόξου μιας καμπύλης

Έστω s είναι το μήκος τόξου μιας καμπύλης

τότε $\frac{ds}{dt} = \left|\boldsymbol{x}'(t)\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x^{i\prime}(t)\right)^2}$ και για μια κανονική καμπύλη το μήκος από το $\boldsymbol{x}(t_1)$ μέχρι το $\boldsymbol{x}(t_2)$ είναι $\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{x}'(t)dt$.

Αν $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι μια συνάρτηση και $\boldsymbol{x_0} \in U$ τότε λέμε ότι το διαφορικό δεύτερης τάξης της συνάρτησης στο $\boldsymbol{x}_0$ είναι η απεικόνιση $d^2 f_{x_0} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ με τύπο:

$$d^2 f_{x_0}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = \left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f^1}{\partial x^j \partial x^i}(\boldsymbol{x}_0) v^i w^j, \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f^2}{\partial x^j \partial x^i}(\boldsymbol{x}_0) v^i w^j, \dots, \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f^m}{\partial x^j \partial x^i}(\boldsymbol{x}_0) v^i w^j \right).$$

Το $d^2 f$ είναι το $d(d(f))$ με την ακόλουθη έννοια: Για ένα διάνυσμα $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ θεωρούμε την απεικόνιση $df(\boldsymbol{v}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ που ορίζεται από την ισότητα $df(\boldsymbol{v})(\boldsymbol{x}) = df_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{v})$ τότε $d^2 f_{x_0}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = d\left(df(\boldsymbol{v})\right)_{x_0}(\boldsymbol{w})$.

Παρομοίως ορίζουμε το διαφορικό 3,4,…τάξης.

Εδώ θα πρέπει να τονίσουμε κάτι που θα χρειαστούμε πιο κάτω: Αν η f είναι κλάσης C^k τότε τα $d^2 f_{x_0}(\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2}), d^3 f_{x_0}(\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\boldsymbol{v_3}),...,d^k f_{x_0}(\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},...,\boldsymbol{v_k})$ είναι συμμετρικά ως προς τα $\boldsymbol{v_i}$.

Θεώρημα: Έστω $f:U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ είναι κλάσης C^k. Ας υποθέσουμε ότι $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ είναι σημεία του U τέτοια ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $l(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ που συνδέει τα $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ κείται στο U.

Τότε υπάρχει ένα σημείο $\boldsymbol{z}\in l(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ και τέτοιο ώστε:

$$f(\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x})+\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i!}d^i f_x(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})+\frac{1}{k!}d^k f_z(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})$$

Στη περίπτωση που $k=1$ έχουμε το θεώρημα μέσης τιμής.
Για παράδειγμα αν $f:U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ υπάρχει ένα σημείο $(\xi,\eta)\in l((x,y),(x_0,y_0))$ τέτοιο ώστε

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(\eta,\xi)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(\eta,\xi)(y-y_0)$$

Εσωτερικά γινόμενα:

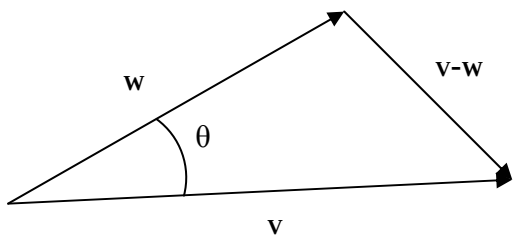
Έστω δύο στοιχεία $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε ως εσωτερικό γινόμενο τους $\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle$ τον αριθμό που δίνεται από τον τύπο:

$$\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle=\sum_{i=1}^{n}v^i w^i \text{ όπου } \boldsymbol{v}=(v^1,v^2,v^3,...,v^n),\boldsymbol{w}=(w^1,w^2,w^3,...,w^n)$$

Ισχύει ότι: $\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle=|\boldsymbol{v}|^2$. Δηλαδή το εσωτερικό γινόμενο του $\boldsymbol{v}$ με τον εαυτό του είναι το τετράγωνο της απόστασης του $\boldsymbol{v}$ από την αρχή και $\langle\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\rangle=|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}|^2$ είναι το τετράγωνο της απόστασης των $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ μεταξύ τους .

Προφανώς έχουμε $\langle\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\rangle^{\frac{1}{2}}=|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}|$.

Το εσωτερικό γινόμενο είναι συμμετρικό και διγραμμικό: $\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle=\langle\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}\rangle$ και $\langle a\boldsymbol{v}+b\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}\rangle=a\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle+b\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}\rangle$



$$|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}|^2=|\boldsymbol{v}|^2+|\boldsymbol{w}|^2-2\boldsymbol{v}\bullet\boldsymbol{w}cos\theta$$

$$|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}|^2=\langle\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\rangle=\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle-2\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle+\langle\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}\rangle$$

$$cos\theta=\frac{\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle}{|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{w}|}.$$

Είναι $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\neq 0,\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle=0$ αν και μόνο αν $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ είναι ορθογώνια.

Έστω $f,g:U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ όπου U είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$
Τότε η

$$\left\langle f(\boldsymbol{x}),g(\boldsymbol{x})\right\rangle=\sum_{j=1}^{m}f^j(x)g^j(x)$$

ορίζει μια απεικόνιση: $\left\langle f,g\right\rangle:U\to R$.

Είναι δε: $\dfrac{\partial}{\partial x^i}\left\langle f(\boldsymbol{x}),g(\boldsymbol{x})\right\rangle=\sum_{j=1}^{m}\left(g^j(\boldsymbol{x})\dfrac{\partial f^j}{\partial x^i}(\boldsymbol{x})+f^j(\boldsymbol{x})\dfrac{\partial g^j}{\partial x^i}(\boldsymbol{x})\right)$

Άρα και για το διαφορικό θα έχουμε

$$d\left\langle f,g\right\rangle_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{v})=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f^j}{\partial x^i}\left\langle f(\boldsymbol{x}),g(\boldsymbol{x})\right\rangle v^i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i}(\boldsymbol{x})v^ig^j(\boldsymbol{x})+f^j(\boldsymbol{x})\frac{\partial g^j}{\partial x^i}(\boldsymbol{x})v^i\right)=$$

$$\left\langle df_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{v}),g(\boldsymbol{x})\right\rangle+\left\langle f(\boldsymbol{x}),dg_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{v})\right\rangle$$

μπορούμε να διαφορίσουμε τα εσωτερικά γινόμενα:

$$d\left\langle df(\boldsymbol{u}),dg(\boldsymbol{v})\right\rangle_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{w})=\left\langle d^2f_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}),dg_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{v})\right\rangle+\left\langle df_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{u}),d^2g_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\right\rangle$$

Σε κάθε διανυσματικό χώρο V διάστασης n, μια βάση του χώρου αποτελείται από n γραμμικώς ανεξάρτητα μεταξύ τους διανύσματα.
Επιπλέον αν δοθεί μια βάση $\{e_1,e_2,e_3,,...,e_n\}$ του V τότε κάθε διάνυσμα $\boldsymbol{v}$ του V έχει μοναδική έκφραση της μορφής:

$$\boldsymbol{v}=\sum_{i=1}^{n}v^ie_i\,.$$

Επίσης αν δοθούν τα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4,...,\boldsymbol{v}_p,\ p\le n$ μπορούμε να βρούμε μια βάση του V τέτοια ώστε τα $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4,...,\boldsymbol{v}_p$ να ανήκουν στην βάση αυτή.

Αν θεωρήσουμε το $\mathbb{R}^n$ ως διανυσματικό χώρο, και αν B είναι μια διγραμμική συμμετρική μορφή, δηλαδή μια μορφή που έχει τις εξής ιδιότητες:

$$B(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=B(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})\ \text{ και }\ B(a\boldsymbol{v}+b\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})=aB(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})+bB(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})$$

τότε θα ισχύει το ακόλουθο θεώρημα: Έστω B είναι μια συμμετρική διγραμμική μορφή του $\mathbb{R}^n$ που μηδενίζεται για κάθε ζεύγος ορθογωνίων διανυσμάτων. Τότε υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός a τέτοιος ώστε $B(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=a\left\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\right\rangle$

Απόδειξη: Έστω $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n,\boldsymbol{v}\ne 0$ ένα σταθερό διάνυσμα.

Αν $L(\boldsymbol{w})=B(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})-\dfrac{B(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})}{\left\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\right\rangle}\left\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\right\rangle$ τότε $L(\boldsymbol{v})=0,\quad L(\boldsymbol{w})=0$ για κάθε $\boldsymbol{w}$ ορθογώνιο στο $\boldsymbol{v}$, οπότε το L γίνεται μηδέν για κάθε στοιχείο μιας βάσης, οπότε είναι μηδέν: $L(\boldsymbol{w})=B(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})-\dfrac{B(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})}{\left\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\right\rangle}\left\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\right\rangle=0$. Ομοίως αν κρατήσουμε σταθερό το $\boldsymbol{w}\ne 0$, έχουμε

$B(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})-\dfrac{B(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w})}{\left\langle\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}\right\rangle}\left\langle\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}\right\rangle=0$ για κάθε $\boldsymbol{v}$, άρα $\dfrac{B(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w})}{\left\langle\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}\right\rangle}=\dfrac{B(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})}{\left\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\right\rangle}$ για κάθε $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\ne 0$.

Αν θέσουμε τον λόγο αυτόν a τότε έχουμε το ζητούμενο.

Σημείωση:
Σε πολλά βιβλία μιγαδικής ανάλυσης, όπως και στην παρούσα εργασία, στον όρο συμμορφικότητα περιλαμβάνεται και η απαίτηση διατήρησης του προσανατολισμού οπότε η αντιολομορφικότητα (όρος που θα δούμε πιο κάτω, όπως και τον όρο ολομορφικότητα) δεν περιλαμβάνεται στον όρο συμμορφικότητα. Εμείς με τον όρο συμμορφικότητα, *στην συγκεκριμένη ενότητα της εργασίας μας,* θα θεωρούμε την διατήρηση του μεγέθους των γωνιών και όχι του προσανατολισμού και αυτό απλά για λόγους ευκολίας στην σύνταξη του κειμένου και συγκεκριμένα αντί να ψάχνουμε για νέο όρο που να περιγράφει την διατήρηση των γωνιών ανεξάρτητα από τον

προσανατολισμό κάναμε χρήση του όρου συμμορφικότητα που σε άλλα σημεία της εργασίας μας θεωρήσαμε ότι ο όρος αυτός απαιτεί και την διατήρηση του προσανατολισμού και αυτό γιατί ο όρος ολομορφικότητα, στην συγκεκριμένη ενότητα, θα υπονοεί την διατήρηση του προσανατολισμού ενώ ο όρος αντιολομορφικότητα θα υπονοεί την αντιστροφή του προσανατολισμού.

Θεώρημα:

Έστω ότι f είναι μια ένα προς ένα απεικόνιση ενός ανοιχτού συνόλου $U \subseteq \mathbb{R}^n$ επί του συνόλου $f(U)$ και τέτοια ώστε το διαφορικό df_x να έχει ιακωβιανή $j(\boldsymbol{x}) \neq 0$ για κάθε $\boldsymbol{x} \in U$. Τότε η f θα είναι σύμμορφη αν και μόνο αν για κάθε $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ $\langle df_x \boldsymbol{v}, df_x \boldsymbol{w} \rangle = e^{2\sigma(x)} \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$, για κάποια πραγματική συνάρτηση σ στο U

Απόδειξη:

Υποθέτουμε ότι : $\langle df_x \boldsymbol{v}, df_x \boldsymbol{w} \rangle = e^{2\sigma} \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$

Αν θ είναι η γωνία μεταξύ των $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ και ϕ είναι η γωνία μεταξύ των $df_x \boldsymbol{v}, df_x \boldsymbol{w}$ τότε επειδή $|df_x \boldsymbol{v}| = e^{\sigma(x)} |\boldsymbol{v}|$ θα έχουμε:

$$\cos\phi = \frac{\langle df_x \boldsymbol{v}, df_x \boldsymbol{w} \rangle}{|df_x \boldsymbol{v}||df_x \boldsymbol{w}|} = \frac{e^{2\sigma(x)} \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle}{e^{\sigma(x)} |\boldsymbol{v}| e^{\sigma(x)} |\boldsymbol{w}|} = \cos\theta$$ οπότε η f διατηρεί τη γωνία.

Αντίστροφα: Ας υποθέσουμε ότι η f διατηρεί τη γωνία. Τότε σε κάθε $\boldsymbol{x} \in U$ η μορφή $\langle df_x \boldsymbol{v}, df_x \boldsymbol{w} \rangle = B(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ είναι μια συμμετρική διγραμμική μορφή που μηδενίζεται για κάθε ορθογώνιο ζεύγος $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$. Άρα από το θεώρημα που αποδείξαμε πιο πάνω θα έχουμε $\langle df_x \boldsymbol{v}, df_x \boldsymbol{w} \rangle = a \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$ για κάθε ζεύγος $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$. Επειδή η f διατηρεί τη γωνία θα έχουμε ότι $\langle df_x \boldsymbol{v}, df_x \boldsymbol{w} \rangle, \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$ έχουν το ίδιο πρόσημο. Παριστάνοντας τον συντελεστή αναλογίας ως $a = e^{2\sigma(x)}$ έχουμε το ζητούμενο.

Έχουμε δει σε προηγούμενα κεφάλαια ότι οι μετασχηματισμοί Möbius είναι σύμμορφες απεικονίσεις. Όπως θα δούμε στην παρούσα ενότητα υπάρχουν παρά πολλές απεικονίσεις που είναι σύμμορφες.

Για αυτόν τον σκοπό θα δώσουμε λίγα πράγματα από την θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων.

Ας θεωρήσουμε ότι η f είναι μια συνάρτηση που παίρνει μιγαδικές μεταβλητές. $z = x + iy$. Θα συμβολίσουμε με u, v το πραγματικό και το φανταστικό μέρος αντίστοιχα της συνάρτησης f δηλαδή θα γράψουμε: $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Με αυτόν τον τρόπο η f είναι μια απεικόνιση της μορφής $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με συνιστώσες συναρτήσεις τις u, v και το U είναι ένα ανοιχτό σύνολο.

Η παράγωγος της f στο σημείο $z_0 \in U$ ορίζεται ως $f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$ με δεδομένο όμως ότι το όριο αυτό υπάρχει (και φυσικά το $h \in \mathbb{C}$ ανήκει σε μια γειτονιά του $0 \in \mathbb{C}$). Θα λέμε ότι η f είναι ολόμορφη ή αναλυτική στο z_0 αν η f έχει παράγωγο σε κάθε σημείο που ανήκει σε μια γειτονιά του z_0. Αν η f έχει παράγωγο σε κάθε σημείο του U θα λέμε ότι είναι ολόμορφη στο U. Επειδή το όριο είναι ανεξάρτητο από το πώς το h τείνει στο μηδέν η ύπαρξη της $f'(z_0)$ συνεπάγεται την συνέχεια της f στο z_0.

Οι κανόνες παραγώγισης στις μιγαδικές συναρτήσεις είναι οι ίδιοι με τους κανόνες που γνωρίζουμε για τις πραγματικές συναρτήσεις.

Θεώρημα (εξισώσεις του Cauchy Riemann):

Έστω f είναι ορισμένη και συνεχής σε ένα ανοιχτό σύνολο U και έστω $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$. Αν υποθέσουμε ότι η $f'(z_0)$ υπάρχει τότε θα ισχύουν οι ισότητες:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \text{ και } \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Αντίστροφα: αν $u(x, y)$ και $v(x, y)$ είναι τάξης C^1 σε μια περιοχή του z_0 και ισχύουν οι:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

τότε η $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ έχει παράγωγο στο z_0.

Απόδειξη:

Ας υποθέσουμε ότι η $f'(z_0)$ υπάρχει και παίρνοντας h πραγματικό θα έχουμε

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + i\frac{v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h}$$

Και έτσι έχουμε $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$

Παρομοίως παίρνοντας $h = ik, k \in \mathbb{R}$ θα έχουμε:

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{1}{i}\frac{u(x_0, y_0 + k) - u(x_0, y_0)}{k} + \frac{v(x_0, y_0 + k) - v(x_0, y_0)}{h}$$

οπότε $f'(z_0) = -i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$

οπότε, συγκρίνοντας τις δύο εκφράσεις για την παράγωγο, έχουμε ότι:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \text{ και } \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Αυτές οι τελευταίες εξισώσεις λέγονται εξισώσεις του Cauchy Riemann.
Αντίστροφα:
Αν $u(x, y)$, $v(x, y)$ είναι τάξης C^1 στο δίσκο $B_\varepsilon(z_0)$ (δίσκος ακτίνας ε και κέντρου z_0). Η έκφραση $h \to 0$ αντιστοιχεί στην $z_0 \to 0$ όποτε μπορούμε να θεωρήσουμε $z \in B_\varepsilon(z_0)$.
Γράφουμε το h ως $a + ib$ οπότε:

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{u(x_0 + a, y_0 + b) - u(x_0, y_0)}{a + ib} + i\frac{v(x_0 + a, y_0 + b) - v(x_0, y_0)}{a + ib} =$$

$$\frac{a}{a + ib}\left(\frac{u(x_0 + a, y_0 + b) - u(x_0, y_0 + b)}{a} + i\frac{v(x_0 + a, y_0 + b) - v(x_0, y_0 + b)}{a}\right) +$$

$$\frac{a}{a + ib}\left(\frac{u(x_0, y_0 + b) - u(x_0, y_0)}{b} + i\frac{v(x_0, y_0 + b) - v(x_0, y_0)}{b}\right)$$

Από το θεώρημα μέσης τιμής προκύπτει ότι υπάρχουν σημεία $(\xi_1, y_0 + b), (\xi_2, y_0 + b)$ πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $l((x_0 + a, y_0 + b), (x_0, y_0 + b))$ και σημεία $(x_0, \eta_1), (x_0, \eta_2)$ πάνω

στο ευθύγραμμο τμήμα $l\left(\left(x_0, y_0+b\right),\left(x_0, y_0\right)\right)$ τέτοια ώστε η $\dfrac{f\left(z_0+h\right)-f\left(z_0\right)}{h}$ να γίνεται :

$$\frac{f\left(z_0+h\right)-f\left(z_0\right)}{h}=\frac{a}{a+ib}\left(\frac{\partial u\left(\xi_1, y_0+b\right)}{\partial x}+i\frac{\partial v\left(\xi_2, y_0+b\right)}{\partial x}\right)+\frac{a}{a+ib}\left(\frac{\partial u\left(x_0, \eta_1\right)}{\partial y}+i\frac{\partial v\left(x_0, \eta_2\right)}{b}\right)$$

Τώρα επειδή $u(x,y)$ και $v(x,y)$ είναι τάξης C^1 μπορούμε να γράψουμε:

$\dfrac{\partial u\left(\xi_1, y_0+b\right)}{\partial x}=\dfrac{\partial u\left(x_0, y_0\right)}{\partial x}+\varepsilon_1$ όπου $\varepsilon_1 \to 0$ καθώς $h \to 0$

παίρνοντας όμοιες εκφράσεις για κάθε μια από τις άλλες μερικές παραγώγους θα έχουμε:

$$\frac{f\left(z_0+h\right)-f\left(z_0\right)}{h}=\frac{a}{a+ib}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)+\varepsilon_1+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)+i\varepsilon_2\right)+$$

$$+\frac{a}{a+ib}\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)+\varepsilon_3+i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)+i\varepsilon_4\right)$$

Έτσι χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις των Cauchy Riemann έχουμε:

$$\frac{f\left(z_0+h\right)-f\left(z_0\right)}{h}=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)+\frac{a\varepsilon_1+ia\varepsilon_2+b\varepsilon_3+ib\varepsilon_4}{a+ib}$$

Είναι $|a| \le |a+ib|, |b| \le |a+ib|$

άρα $\left|\dfrac{a\varepsilon_1+ia\varepsilon_2+b\varepsilon_3+ib\varepsilon_4}{a+ib}\right| \le \left|\varepsilon_1+i\varepsilon_2\right|+\left|\varepsilon_3+i\varepsilon_4\right|$

και παίρνοντας το όριο $h \to 0$ έχουμε $f'\left(z_0\right)=\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)+i\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα αυτό παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f(z)=\overline{z}=x-iy$ δεν είναι ολόμορφη. Όμως αν η $g(z)=\phi(x,y)+i\psi(x,y)$ είναι ολόμορφη τότε η $f\left(z\right)=u(x,y)+iv(x,y)=\overline{g(z)}$ ικανοποιεί την $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{\partial v}{\partial y}$ και $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

Αντίστροφα: αν $f\left(z\right)=u(x,y)+iv(x,y)$ είναι κλάσης C^1 και ικανοποιεί τις $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{\partial v}{\partial y}$ και $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x}$ τότε είναι συζυγής κάποιας ολόμορφης συνάρτησης.

Πράγματι θέτοντας $\phi(x,y)=u(x,y)$ και $\psi(x,y)=-v(x,y)$ βρίσκουμε ότι $\dfrac{\partial \phi}{\partial x}=\dfrac{\partial \psi}{\partial y}$ και $\dfrac{\partial \phi}{\partial y}=-\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$. Έτσι η συνάρτηση $g=\phi+i\psi=\overline{f}$ είναι ολόμορφη και $f=\overline{g}$. Θα λέμε ότι η f είναι αντιολόμορφη αν είναι η συζυγής ολόμορφης συνάρτησης.

Αμέσως πιο κάτω θα βρούμε την σχέση μεταξύ της συμμορφικότητας (με την έννοια της διατήρησης του μεγέθους της γωνίας, ανεξάρτητα από προσανατολισμό) και της ολομορφικότητας - αντιολομορφικότητας.

Θεώρημα (σχέση συμμορφικότητας και ολομορφικότητας - αντιολομορφικότητας):
Ας υποθέσουμε ότι $f: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ είναι κλάσης C^1 με ιακωβιανή διαφορετική από το μηδέν. Τότε η f ως απεικόνιση θα είναι σύμμορφη αν και μόνο αν η f ως συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής z είναι ολόμορφη ή αντιολόμορφη συνάρτηση.

Απόδειξη:

Από το θεώρημα της αντίστροφης συνάρτησης[2] θα έχουμε ότι η f είναι τοπικά ένα προς ένα. Θα πρέπει να δείξουμε ότι ικανοποιεί την $\langle df_z\boldsymbol{v}, df_z\boldsymbol{w}\rangle = e^{2\sigma(z)}\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle$ για κάποια συνάρτηση σ και για κάθε ζεύγος διανυσμάτων $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ αν και μόνο αν οι συνιστώσες συναρτήσεις της f ικανοποιούν τις ισότητες $\frac{\partial u}{\partial x} = \pm\frac{\partial v}{\partial y}$ και $\frac{\partial u}{\partial y} = \mp\frac{\partial v}{\partial x}$

Ας θυμηθούμε ότι $df_z\boldsymbol{v}$ δίνεται από $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}v^1 + \frac{\partial u}{\partial y}v^2 \\ \frac{\partial v}{\partial x}v^1 + \frac{\partial v}{\partial y}v^2 \end{pmatrix}$

και η $\langle df_z\boldsymbol{v}, df_z\boldsymbol{w}\rangle = e^{2\sigma(x)}\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle$ γίνεται

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}v^1 + \frac{\partial u}{\partial y}v^2\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}w^1 + \frac{\partial u}{\partial y}w^2\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}v^1 + \frac{\partial v}{\partial y}v^2\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}w^1 + \frac{\partial v}{\partial y}w^2\right) = e^{2\sigma(z)}(v^1w^1 + v^2w^2)$$

Αν αυτή ισχύει για όλα τα ζεύγη διανυσμάτων $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$, τότε αν $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

θα έχουμε $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = e^{2\sigma}$, $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = e^{2\sigma}$.

Επίσης για $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ θα έχουμε $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = 0$.

Έχουμε $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$ και πολλαπλασιάζοντας με $\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$ παίρνουμε:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^4 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

οπότε $\frac{\partial u}{\partial x} = \pm\frac{\partial v}{\partial y}$. Αν $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ τότε η $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ δίνει: $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ εκτός και αν:

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ οπότε οι $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = e^{2\sigma}, \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = e^{2\sigma}$ δίνουν: $\frac{\partial v}{\partial x} = \pm\frac{\partial u}{\partial y}$.

Παρομοίως αν $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$ τότε $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$ εκτός και αν: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

οπότε οι $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = e^{2\sigma}, \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = e^{2\sigma}$ δίνουν: $\frac{\partial v}{\partial x} = \pm\frac{\partial u}{\partial y}$

οπότε η συμμορφικότητα συνεπάγεται την ολομορφικότητα ή αντιολομορφικότητα.

---

[2] Έστω η $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι κλάσης C^1, το $U \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα ανοιχτό σύνολο και $\boldsymbol{x}_0 \in U$. Έστω $j(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$. Τότε υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο V το οποίο περιέχει το $\boldsymbol{x}_0$ και ένα ανοιχτό σύνολο W που περιέχει το $f(\boldsymbol{x}_0)$ και τέτοιο ώστε $f : V \to W$ είναι ένα προς ένα και επί. Επιπλέον η $f^{-1} : W \to V$ είναι κλάσης C^1.

Για το αντίστροφο αν πάρουμε την:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}v^1+\frac{\partial u}{\partial y}v^2\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}w^1+\frac{\partial u}{\partial y}w^2\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial x}v^1+\frac{\partial v}{\partial y}v^2\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}w^1+\frac{\partial v}{\partial y}w^2\right)=e^{2\sigma(z)}(v^1w^1+v^2w^2)\ \text{(I)}$$

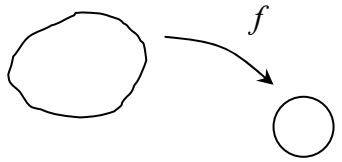
και αντικαταστήσουμε στο μέλος που βρίσκεται προς τα αριστερά τις $\frac{\partial u}{\partial x}=\pm\frac{\partial v}{\partial y}$ και

$\frac{\partial u}{\partial y}=\mp\frac{\partial v}{\partial x}$ παράγουμε το μέλος που βρίσκεται προς τα δεξιά της (I) .

Θα λέμε ότι ένα σύνολο $U\subset\mathbb{R}^2$ είναι απλά συνεκτικό αν κάθε απλή (που δεν έχει αυτοτομές) κλειστή καμπύλη στο U έχει το εσωτερικό της στο U .

Θεώρημα (Riemann):

Έστω U είναι ένα ανοιχτό συνεκτικό , απλά συνεκτικό σύνολο και $U\subset\mathbb{R}^2$ και $U\neq\mathbb{R}^2$. Τότε υπάρχει μια ένα προς ένα απεικόνιση f του U επί του μοναδιαίου δίσκου.



Έχοντας δει την αφθονία των σύμμορφων απεικονίσεων στο επίπεδο το ερώτημα που προκύπτει είναι αν υπάρχει η ίδια αφθονία σύμμορφων απεικονίσεων στο $\mathbb{R}^n$. Θα παρατηρήσουμε ότι η αφθονία σύμμορφων απεικονίσεων στον $\mathbb{R}^2$ είναι η εξαίρεση και ότι οι μόνες σύμμορφες απεικονίσεις του Ευκλείδειου χώρου είναι αυτές που γενικεύουν τους μετασχηματισμούς Möbius δηλαδή απεικονίσεις που παράγονται από ομοιότητες και αντιστροφές ως προς σφαίρες.
Αυτό αποδείχθηκε πρώτα από τον Liouville το 1850. Η κλασική απόδειξη απαιτεί την γνώση διαφορικής γεωμετρίας και απαιτεί οι απεικονίσεις να είναι τουλάχιστον κλάσης C^3. Μια πιο πρόσφατη απόδειξη δόθηκε από τον Huff και έχει ως απαίτηση απεικονίσεις κλάσης C^3. Το αποτέλεσμα είναι γνωστό και για κλάσεις C^1. Το 1960 ο Nevanlinna έδωσε απόδειξη για κλάση C^4.
Για να αποφύγουμε την παράθεση των προαπαιτούμενων γνώσεων της διαφορικής γεωμετρίας που είναι απαραίτητες για την κλασική απόδειξη του Liouville θα περιοριστούμε στην απόδειξη του Nevanlinna.

Θεώρημα Liouville

Αντιστροφή ως προς σφαίρα:
Ας υποθέσουμε ότι $S_r(x_0)$ είναι μια σφαίρα με κέντρο το x_0 και ακτίνα r .

Δηλαδή $S_r(x_0)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n/\left|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0}\right|=r\}$

Η αντιστροφή ως προς την $S_r(x_0)$ είναι η απεικόνιση $g:\mathbb{R}^n-\{\boldsymbol{x}_0\}\to\mathbb{R}^n$ που δίνεται από τον τύπο $g(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}_0+r\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0}{\left|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\right|^2}$

Τα $\boldsymbol{x},g(\boldsymbol{x})$ είναι στην ίδια ημιευθεία με αρχή το $\boldsymbol{x}_0$, ενώ το γινόμενο των αποστάσεων των $\boldsymbol{x},g(\boldsymbol{x})$ από το $\boldsymbol{x}_0$, είναι ίση με r^2.

Επειδή η g απεικονίζει το $\mathbb{R}^n - \{\boldsymbol{x}_0\}$ στο $\mathbb{R}^n - \{\boldsymbol{x}_0\}$ τότε η $g \circ g$ ορίζεται στο $\mathbb{R}^n - \{\boldsymbol{x}_0\}$ και είναι η ταυτοτική. Ο πίνακας της $dg_{g(x)} \circ dg_{\boldsymbol{x}}$ είναι ο ταυτοτικός και η ιακωβιανή της g στο $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n - \{\boldsymbol{x}_0\}$ είναι μη μηδενική (g non singular).

Χωρίς να χαθεί τίποτα από το πνεύμα της γενικότητας μπορούμε να πάρουμε το $\boldsymbol{x}_0$ ως αρχή του καρτεσιανού συστήματος και ακτίνα $r = 1$, πράγμα που μπορούμε να πούμε πως προκύπτει ως το αποτέλεσμα της σύνθεσης της g με ομοιότητες.

Τότε $g(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^2}$.

Ο πίνακας της $dg_{\boldsymbol{x}}$ είναι τότε $\dfrac{1}{|\boldsymbol{x}|^4}\begin{pmatrix} |\boldsymbol{x}|^2 - 2(x^1)^2 & -2x^1x^2 & .... \\ -2x^2x^1 & |\boldsymbol{x}|^2 - 2(x^2)^2 & .... \\ .... & -2x^nx^{n-1} & |\boldsymbol{x}|^2 - 2(x^n)^2 \end{pmatrix}$

Εφαρμόζοντας αυτόν τον πίνακα σε ένα διάνυσμα (διάνυσμα στήλη) $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{\nu}$ παίρνουμε τον πίνακα:

$$\frac{1}{|\boldsymbol{x}|^4}\begin{pmatrix} v^1|\boldsymbol{x}|^2 - 2x^1\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{v}\rangle \\ v^2|\boldsymbol{x}|^2 - 2x^2\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{v}\rangle \\ . \\ . \\ . \\ v^n|\boldsymbol{x}|^2 - 2x^n\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{v}\rangle \end{pmatrix}$$

οπότε $\langle dg_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{v}, dg_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{v}\rangle = \dfrac{1}{|\boldsymbol{x}|^8}\sum_{i=1}^{n}\left(v^i|\boldsymbol{x}|^2 - 2x^i\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{v}\rangle\right)^2 = \dfrac{|\boldsymbol{v}|^2}{|\boldsymbol{x}|^2}$

Έχουμε $\langle dg_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{v}, dg_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{v}\rangle = e^{2\sigma}\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle$ για κάθε $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ και για κάθε $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n - \{(0,0,0,0,...,0)$

όπου $e^{2\sigma} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{x}|^2}$.

Αντικαθιστώντας το $\boldsymbol{v}$ με το $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ βλέπουμε ότι $\langle dg_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{v}, dg_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{w}\rangle = e^{2\sigma}\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle$

Άρα έχουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα (Η αντιστροφή ως προς μια σφαίρα στον $\mathbb{R}^n$ είναι ένας σύμμορφος μετασχηματισμός):

Η αντιστροφή ως προς μια σφαίρα είναι ένας σύμμορφος μετασχηματισμός (διατηρεί το μέγεθος των γωνιών -δεν αναφερόμαστε στον προσανατολισμό).

Γενικά η χαρακτηριστική συνάρτηση e^{σ} της αντιστροφής ως προς σφαίρα ακτίνας r και κέντρου στο $\boldsymbol{x}_0$ είναι $\dfrac{r^2}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|}$.

Θα δείξουμε τώρα ότι η αντιστροφή απεικονίζει υπερεπίπεδα και υπερφαίρες του $\mathbb{R}^n$ σε υπερεπίπεδα και υπερφαίρες . Με τον όρο υπερεπίπεδο εννοούμε ένα $(n-1)$ διάστασης υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και δίνεται από μια εξίσωση της μορφής $\sum_{i=1}^{n} A_i x^i = D, \quad A_i, D \in \mathbb{R}$

Η σφαίρα $S_r(x_0) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n / |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}| = r\}$ δίνεται από μια εξίσωση της μορφής $\sum_{i=1}^{n}\left(x^i - x_0^i\right)^2 = r^2$ ή αλλιώς $A\sum_{i=1}^{n}\left(x^i\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} B_i x^i + C = 0, A \neq 0$

Αν $D = 0$ τότε $\sum_{i=1}^{n} A_i x^i = 0$ και είναι ένα υπερεπίπεδο που διέρχεται από την αρχή και έτσι θεωρώντας την αντιστροφή ως προς την μοναδιαία σφαίρα με κέντρο την αρχή του συστήματος αξόνων κάθε ημιευθεία που έχει αρχή την αρχή του συστήματος των αξόνων και βρίσκεται πάνω στο υπερεπίπεδο θα παραμένει στο υπερεπίπεδο.

Αν $\boldsymbol{y} = g(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^2}$ τότε $|\boldsymbol{x}|^2 = \dfrac{1}{|\boldsymbol{y}|^2}$ οπότε αν $D \neq 0$ τότε η g απεικονίζει το $\sum_{i=1}^{n} A_i x^i = D$ στο $D|\boldsymbol{y}|^2 - \sum_{i=1}^{n} A_i y^i = 0$ που είναι σφαίρα η οποία διέρχεται από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων.

Παρομοίως μια σφαίρα που διέρχεται από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων ($C = 0$) απεικονίζεται στο $\sum_{i=1}^{n} B_i y^i = -A$ το οποίο είναι ένα επίπεδο.

Τέλος η σφαίρα $A\sum_{i=1}^{n}\left(x^i\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} B_i x^i + C = 0, A \neq 0$ απεικονίζεται στην σφαίρα $C|\boldsymbol{y}|^2 + \sum_{i=1}^{n} B_i y^i + A = 0$

Έτσι έχουμε το ακόλουθο θεώρημα για την αντιστροφή ως προς σφαίρα:

Θεώρημα (για την αντιστροφή ως προς σφαίρα στον $\mathbb{R}^n$):

1. Η αντιστροφή ενός υπερεπιπέδου που διέρχεται από το κέντρο της σφαίρα αντιστροφής είναι το αυτό υπερεπίπεδο.
2. Η αντιστροφή ενός υπερεπιπέδου που δεν διέρχεται από το κέντρο της αντιστροφής είναι μια σφαίρα που διέρχεται από το κέντρο της αντιστροφής.
3. Η αντιστροφή μιας σφαίρας που διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας αντιστροφής είναι ένα υπερεπίπεδο που δεν διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας αντιστροφής.
4. Η αντιστροφή μιας σφαίρας που δεν περνάει οπό το κέντρο της σφαίρας αντιστροφής είναι μια σφαίρα που δεν περνάει από το κέντρο της σφαίρας αντιστροφής.

Πόρισμα: Η αντιστροφή ως προς σφαίρα στον $\mathbb{R}^n$ απεικονίζει κύκλους και ευθείες σε κύκλους και ευθείες.

Απόδειξη:

Μια ευθεία στο $\mathbb{R}^n$ είναι η τομή $(n-1)$ υπερεπιπέδων και ένας κύκλος είναι η τομή $(n-1)$ υπερεπιπέδων και σφαιρών όπου έχουμε τουλάχιστον μια σφαίρα. Σε κάθε περίπτωση η αντιστροφή αυτών των $(n-1)$ υπερεπιπέδων και σφαιρών είναι ένα σύνολο $(n-1)$ τεμνόμενων υπερεπιπέδων και σφαιρών.

Θεώρημα:

Αν δύο αντιστροφές g_1, g_2 έχουν το ίδιο κέντρο τότε η σύνθεσή τους είναι ομοιοθεσία.

Απόδειξη:
Ας υποθέσουμε ότι $g_1(\boldsymbol{x}) = r^2 \dfrac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^2}$ και $g_2(\boldsymbol{x}) = R^2 \dfrac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^2}$ τότε

$$g_2(g_1(\boldsymbol{x})) = R^2 \frac{r^2 \dfrac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^2}}{\left| r^2 \dfrac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^2} \right|^2} = \frac{R^2}{r^2} \boldsymbol{x}$$

Θεώρημα:

Αν δύο αντιστροφές g_1, g_2 έχουν κέντρα $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0$ αντίστοιχα και αν $g_2 \circ g_1$ είναι μια ομοιότητα τότε $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{y}_0$.

Απόδειξη:
Υποθέτουμε ότι $\boldsymbol{x}_0 \neq \boldsymbol{y}_0$ και θεωρούμε ένα υπερεπίπεδο το οποίο δεν περνάει από το $\boldsymbol{x}_0$ και είναι τέτοιο ώστε η εικόνα του με την αντιστροφή ως προς την σφαίρα g_1 είναι μια σφαίρα που διέρχεται από το $\boldsymbol{x}_0$ και δεν διέρχεται από το $\boldsymbol{y}_0$. Τότε η εικόνα του υπερεπιπέδου με την αντιστροφή ως προς την $g_2 \circ g_1$ είναι μια σφαίρα και επειδή οι ομοιότητες απεικονίζουν υπερεπίπεδα σε υπερεπίπεδα τότε η $g_2 \circ g_1$ δεν είναι ομοιότητα.

Σύμμορφες απεικονίσεις στο Ευκλείδειο επίπεδο

Θα αναπτύξουμε σε αυτή την ενότητα το βασικό μας θεώρημα που είναι ότι οι μοναδικές σύμμορφες απεικονίσεις στον $\mathbb{R}^n$ είναι οι ομοιότητες και οι αντιστροφές.
Ας υποθέσουμε ότι $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι μια σύμμορφη απεικόνιση ορισμένη σε ένα ανοιχτό σύνολο $U \subset \mathbb{R}^n$, τότε όπως έχουμε δείξει και σε προηγούμενη ενότητα, θα έχουμε: $\langle df_x \boldsymbol{v}, df_x \boldsymbol{w} \rangle = e^{2\sigma(x)} \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$ για κάθε ζεύγος διανυσμάτων $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ και για κάποια πραγματική συνάρτηση σ στο σύνολο U.
Πιο συγκεκριμένα η χαρακτηριστική συνάρτηση e^{σ} συνδέεται με την f με τον τύπο $e^{\sigma(x)} = \dfrac{|df_x \boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|}$ για κάθε $\boldsymbol{v} \neq 0$.

Λήμμα:
Ας υποθέσουμε ότι f είναι μια σύμμορφη απεικόνιση με χαρακτηριστική συνάρτηση $e^{\sigma(x)}$. Αν σ δεν είναι σταθερή τότε $d^2\left(e^{-\sigma}\right)_x (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = a \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$ για κάποια σταθερά a.

Απόδειξη:

Έστω $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ είναι n ορθογώνια μεταξύ τους μοναδιαία διανύσματα στο $\mathbb{R}^n$

τότε $\left\langle df_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{v}_i, df_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{v}_j\right\rangle = e^{2\sigma(x)}\left\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j\right\rangle$. Διαφορίζοντας θα έχουμε:

$$\left\langle d^2 f_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_k\right), df_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{v}_j\right\rangle + \left\langle df_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_i\right), d^2 f_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_k\right)\right\rangle = e^{2\sigma(x)}\left\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j\right\rangle d\sigma_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_\kappa\right)$$

Με κυκλική εναλλαγή των δεικτών i, j, k θα έχουμε επίσης

$$\left\langle d^2 f_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_j\right), df_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{v}_i\right\rangle + \left\langle df_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_k\right), d^2 f_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j\right)\right\rangle = e^{2\sigma(x)}\left\langle \boldsymbol{v}_\kappa, \boldsymbol{v}_i\right\rangle d\sigma_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_j\right)$$

$$\left\langle d^2 f_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_i\right), df_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{v}_k\right\rangle + \left\langle df_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_j\right), d^2 f_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_i\right)\right\rangle = e^{2\sigma(x)}\left\langle \boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_\kappa\right\rangle d\sigma_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_i\right)$$

Προσθέτοντας τις δύο τελευταίες και αφαιρώντας την πρώτη θα πάρουμε:

$$\left\langle d^2 f_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_i\right), df_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{v}_k\right\rangle =$$

$$= e^{2\sigma(x)}\left(\left\langle \boldsymbol{v}_\kappa, \boldsymbol{v}_i\right\rangle d\sigma_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_j\right) + \left\langle \boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_\kappa\right\rangle d\sigma_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_i\right) - \left\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j\right\rangle d\sigma_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_\kappa\right)\right).$$

Επειδή η $\left\{df_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{v}_k\right\}$ είναι μια ορθογώνια βάση στο $\mathbb{R}^n$ αυτό που προκύπτει είναι ότι και η $\left\{e^{-\sigma} df_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{v}_k\right\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση και για $i \neq j$ θα έχουμε:

$$d^2 f_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_i\right) = d\sigma_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_j\right) df_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_i\right) + d\sigma_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_i\right) df_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_j\right)$$

και για $i = j$ $\quad d^2 f_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i\right) = d\sigma_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_i\right) df_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_i\right) - \sum_{k \neq i} d\sigma_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_k\right) df_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_k\right).$

Μέχρι τώρα δεν έχουμε απαιτήσει η σ να μην είναι σταθερά.
Ας υποθέσουμε τώρα ότι $i \neq j$.

Τότε, πολλαπλασιάζοντας την $d^2 f_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_i\right) = d\sigma_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_j\right) df_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_i\right) + d\sigma_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_i\right) df_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_j\right)$ με το $e^{-\sigma}$ θα έχουμε: $e^{-\sigma} d^2 f_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_i\right) + d\left(e^{-\sigma}\right)_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_j\right) df_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_i\right) + d\left(e^{-\sigma}\right)_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_i\right) df_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_j\right) = 0$.

Διαφορίζοντας πάλι θα έχουμε:

$$d\left(e^{-\sigma}\right)_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_k\right) d^2 f_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_i\right) + e^{-\sigma} d^3 f_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_k\right) + d^2\left(e^{-\sigma}\right)_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_k\right) df_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_i\right) +$$

$$+ d\left(e^{-\sigma}\right)_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_j\right) d^2 f_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_k\right) + d^2\left(e^{-\sigma}\right)_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_k\right) df_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_j\right) + d\left(e^{-\sigma}\right)_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_i\right) d^2 f_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_k\right) = 0.$$

Ο δεύτερος, ο τέταρτος και ο πέμπτος και το άθροισμα του πρώτου και του έκτου όρου είναι συμμετρικοί ως προς i, k, θα πρέπει λοιπόν υποχρεωτικά και ο τρίτος όρος να είναι συμμετρικός ως προς i, k. Έτσι για διαφορετικά i, j, k θα έχουμε:

$$d^2\left(e^{-\sigma}\right)_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_k\right) df_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_i\right) = d^2\left(e^{-\sigma}\right)_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_i\right) df_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_k\right)$$

Αφού $k \neq i$ άρα τα $df_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_i\right)$ και $df_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_k\right)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και έτσι:

$d^2\left(e^{-\sigma}\right)_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_k\right) = d^2\left(e^{-\sigma}\right)_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_i\right) = 0$ οπότε $d^2\left(e^{-\sigma}\right)_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\right) = 0$ για όλα τα ορθογώνια μεταξύ τους διανύσματα $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$.

Ας θυμίσουμε ότι έχουμε χρησιμοποιήσει $n \geq 3$.

Από προηγούμενο θεώρημα[3] θα έχουμε ότι $d^2\left(e^{-\sigma}\right)_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\right) = a\left\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\right\rangle$

Αυτό που μένει να αποδείξουμε τώρα είναι ότι το a είναι σταθερά.

Διαφορίσουμε και θα έχουμε $d^3\left(e^{-\sigma}\right)_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\right) = da_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{w})\left\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\right\rangle$.

Αλλάζοντας μεταξύ τους τα $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}$ θα έχουμε: $\left\langle da_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{w})\boldsymbol{u} - da_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}\right\rangle = 0$ για κάθε $\boldsymbol{v}$.

---

[3] Αν B είναι μια συμμετρική διγραμμική μορφή του $\mathbb{R}^n$ που μηδενίζεται για κάθε ζεύγος ορθογωνίων διανυσμάτων. Τότε υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός a τέτοιος ώστε $B\left(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\right) = a\left\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\right\rangle$

Άρα $da_x(\boldsymbol{w})\boldsymbol{u} - da_x(\boldsymbol{u})\boldsymbol{w} = 0$ όμως έχοντας τα $\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}$ επιλεγμένα ανεξάρτητα θα έχουμε $da_x(\boldsymbol{w})$ για κάθε $\boldsymbol{w}$ άρα το a είναι σταθερά.

<u>Θα διατυπώσουμε τώρα και θα αποδείξουμε το βασικό θεώρημα:</u>

Έστω f μια ένα προς ένα κλάσης C^4 σύμμορφη απεικόνιση[4] ενός ανοιχτού συνόλου $U \subseteq \mathbb{R}^3$ επί του $f(U)$ και ας υποθέσουμε ότι $n \geq 3$. Τότε η f είναι σύνθεση αντιστροφών και ομοιοτήτων.

Απόδειξη:

Από το προηγούμενο λήμμα έχουμε ότι $d^2\left(e^{-\sigma}\right)_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = a\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle$ με το a να είναι μια σταθερά.

Θεωρώντας το $d^2\left(e^{-\sigma}\right)_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ ως $d\left(d\left(e^{-\sigma}\right)(\boldsymbol{v})\right)_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{w})$

βλέπουμε ότι:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial e^{-\sigma}}{\partial x^i}v^i\right)w^j = a\sum_{j=1}^{n}v^j w^j \quad \text{για κάθε } \boldsymbol{v},\boldsymbol{w}.$$

Άρα θα έχουμε $\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial e^{-\sigma}}{\partial x^i}v^i\right) = av^j$ για κάθε j και έτσι $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial e^{-\sigma}}{\partial x^i}v^i = \sum_{j=1}^{n}av^j(x^j - x_0^j)$.

Για κάποιο σταθερό διάνυσμα $\boldsymbol{x}_0$ και για όλα τα διανύσματα $\boldsymbol{v}$.

Οπότε $\frac{\partial e^{-\sigma}}{\partial x^i} = a(x^i - x_0^i)$ και ολοκληρώνοντας θα έχουμε $e^{-\sigma(\boldsymbol{x})} = A\left|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\right|^2 + B$ όπου $A = \frac{a}{2}, B$ είναι σταθερές.

Επειδή η f είναι μια ένα προς ένα απεικόνιση του U επί του $f(U)$ με $df_{\boldsymbol{x}}$ non singular (μη σταθερή) για κάθε $\boldsymbol{x} \in U$, θα έχουμε ότι και η $f^{-1}: f(U) \to U$ ικανοποιεί επίσης την συνθήκη η $df_{\boldsymbol{y}}^{-1}$ να είναι μη σταθερή.

Αν θέσουμε $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ τότε $\left\langle df_{\boldsymbol{y}}^{-1}\boldsymbol{v}, df_{\boldsymbol{y}}^{-1}\boldsymbol{w}\right\rangle = e^{-2\sigma\circ f(\boldsymbol{y})}\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle$, δηλαδή η f^{-1} είναι μια σύμμορφη απεικόνιση με χαρακτηριστική συνάρτηση $e^{-\sigma\circ f^{-1}}$. (Σημείωση: αποδεικνύεται ότι αν η $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι σύμμορφη με χαρακτηριστική συνάρτηση την e^{σ} τότε και η $f^{-1}: f(U) \to U$ είναι σύμμορφη με χαρακτηριστική συνάρτηση την $e^{-\sigma\circ f^{-1}}$).

---

[4] Μετασχηματισμοί που διατηρούν τις σφαίρες:
Σε προηγούμενη ενότητα αποδείξαμε το θεώρημα του Καραθεοδωρή το οποίο λέει πως οι μετασχηματισμοί που απεικονίζουν κύκλους του επιπέδου σε κύκλους είναι επεκταμένοι μετασχηματισμοί Möbius (γραμμικοί κλασματικοί μετασχηματισμοί του z ή του $\bar{z}$) οι οποίοι είναι σύνθεση αντιστροφών ή ομοιοτήτων. Στο ίδιο πνεύμα θα αναφέρουμε το ακόλουθο θεώρημα του Möbius το οποίο προϋποθέτει την συνέχεια της απεικόνισης.
Θεώρημα:
Έστω $f: U \to f(U)$ είναι μια συνεχής 1-1 απεικόνιση ορισμένη σε ένα ανοιχτό σύνολο του $\mathbb{R}^n$ και ας υποθέσουμε ότι η f απεικονίζει μέρη επιπέδων και σφαίρες του U σε μέρη επιπέδων και σφαίρες του $f(U)$ (όχι απαραίτητα αντίστοιχα). Τότε η f είναι σύνθεση ομοιοτήτων και αντιστροφών.

. Εφαρμόζοντάς το αυτό στην f^{-1} έχουμε ότι $e^{\sigma(\boldsymbol{x})} = e^{-\left(-\sigma\circ f^{-1}\right)(y)} = C\left|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0\right|^2 + D$ και έτσι $\left(A\left|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\right|^2 + B\right)\left(C\left|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0\right|^2 + D\right) = 1$. Έτσι αν $A \neq 0$ η f απεικονίζει την σφαίρα $\left|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\right| = r$ στην σφαίρα $\left|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0\right| = R$ με $\left(Ar^2 + B\right)\left(CR^2 + D\right) = 1$.

Ας θεωρήσουμε ένα τμήμα σε μια ημιευθεία που έχει αρχή το $\boldsymbol{x}_0$ και βρίσκεται μέσα στο U και έστω πως είναι το $\boldsymbol{x}(t) = t\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}_0, t \in \left[t_1, t_2\right]$ με το $\boldsymbol{a}$ να είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση της ημιευθείας μας. Επειδή το $\boldsymbol{x}(t)$ είναι ορθογώνιο προς τις σφαίρες $\left|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\right| = r$ και η f είναι σύμμορφη, τότε η εικόνα $\boldsymbol{y}(t)$ του $\boldsymbol{x}(t)$ είναι ορθογώνια στις ομόκεντρες σφαίρες $\left|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0\right| = R$ και ως εκ τούτου το $\boldsymbol{y}(t)$ είναι ένα τμήμα της ημιευθείας από το $\boldsymbol{y}_0$ (γιατί;).

Το μήκος του $\boldsymbol{y}(t)$ από το t_1 μέχρι ένα τυχαίο $\tau \in \left[t_1, t_2\right]$ είναι $\int_{t_1}^{t_2} \left|\boldsymbol{y}'(t)\right| dt = \int_{t_1}^{\tau} e^{\sigma} \left|\boldsymbol{x}'(t)\right| dt = \int_{t_1}^{\tau} \frac{1}{At^2 + B} dt$ που είναι υπερβατική συνάρτηση του τ για $A \neq 0, B \neq 0$

Από την άλλη μεριά έχουμε

$\left(At_1^2 + B\right)\left(C\left|\boldsymbol{y}\left(t_1\right) - \boldsymbol{y}_0\right|^2 + D\right) = 1$ και $\left(A\tau^2 + B\right)\left(C\left|\boldsymbol{y}\left(\tau\right) - \boldsymbol{y}_0\right|^2 + D\right) = 1$ δηλαδή το μήκος $\left|\boldsymbol{y}\left(\tau\right) - \boldsymbol{y}\left(t_1\right)\right|$ είναι αλγεβρική συνάρτηση του τ άρα θα πρέπει $A = 0$ ή $B = 0$

Ας υποθέσουμε ότι $A = 0$. Τότε $e^{\sigma} = \frac{1}{B}$ που είναι σταθερά.

Στο προηγούμενο λήμμα καταλήξαμε στις δύο πιο κάτω σχέσεις:

1. για $i \neq j$ θα έχουμε $d^2 f_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_i\right) = d\sigma_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_j\right) df_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_i\right) + d\sigma_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_i\right) df_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_j\right)$
2. για $i = j$ θα έχουμε $d^2 f_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i\right) = d\sigma_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_i\right) df_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_i\right) - \sum_{k \neq i} d\sigma_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_k\right) df_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}_k\right)$

οπότε θα έχουμε $d^2 f_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\right) = 0$ για κάθε $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$. Άρα θα έχουμε: $\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^k}{\partial x^i} v^i\right) = 0$ για κάθε $\boldsymbol{v}$ και ως εκ τούτου κάθε $\frac{\partial f^k}{\partial x^i}$ θα είναι μια σταθερά, ας πούμε η S_i^k. Ολοκληρώνοντας έχουμε $f^k(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} S_i^k x^i + T^k$ και αν θεωρήσουμε πως το S είναι ο πίνακας του οποίου τα στοιχεία είναι τα S_i^k (με το k να είναι ο δείκτης των γραμμών) θα έχουμε ότι $f(\boldsymbol{x}) = S\boldsymbol{x} + T$ με T να είναι το διάνυσμα στήλη των T^k.

Το S είναι επίσης ο πίνακας του $df_{\boldsymbol{x}}$ και έτσι $\left\langle S\boldsymbol{v}, S\boldsymbol{w}\right\rangle = \frac{1}{B}\left\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\right\rangle$ για κάθε $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$. Για κάθε δύο σημεία $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ έχουμε $\left|f\left(\boldsymbol{x}_1\right) - f\left(\boldsymbol{x}_2\right)\right| = \left|S\left(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\right)\right| = \frac{1}{B}\left|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\right|$ άρα f ομοιότητα.

Αν $B = 0$ έστω ότι $\boldsymbol{y} = g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_0 + \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0}{\left|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\right|^2}$ είναι η αντιστροφή ως προς την μοναδιαία σφαίρα με κέντρο το $\boldsymbol{x}_0$ και ας θεωρήσουμε την σύμμορφη απεικόνιση

$f^*(\boldsymbol{y}) = (f \circ g^{-1})(\boldsymbol{y})$. Επειδή η χαρακτηριστική συνάρτηση της g είναι η $\dfrac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2}$ τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση της g^{-1} θα είναι η $\dfrac{1}{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0|^2} = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2$ και ως εκ τούτου η χαρακτηριστική συνάρτηση της f^* θα είναι η $e^{\sigma(x)}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2 = \dfrac{1}{A}$ άρα η f^* είναι ομοιότητα. Είναι όμως $f = f^* \circ g$ άρα η f είναι σύνθεση μιας αντιστροφής και μιας ομοιότητας.

Ας σημειωθεί ότι έχουμε δείξει ότι οποιαδήποτε σύνθεση ομοιοτήτων και αντιστροφών είναι ή μια ομοιότητα f ή μια αντιστροφή g ή μια σύνθεση $f \circ g$ μιας ομοιότητας f ή μιας αντιστροφής g με την g να είναι αντιστροφή ως προς μια σφαίρα ακτίνας 1. Η $f \circ g$ είναι μοναδική. Διότι αν ήταν $f \circ g = f_1 \circ g_1$ τότε $g_1 \circ g^{-1} = f_1^{-1} \circ f$ είναι ομοιότητα οπότε οι g_1, g^{-1} έχουν το ίδιο κέντρο. Επειδή και οι δύο είναι αντιστροφές ως προς μοναδιαίες σφαίρες άρα $g_1 = g^{-1}$ οπότε η $f_1^{-1} \circ f$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση άρα $f_1^{-1} = f$.

Β΄ Μέρος

Ιστορικά προβλήματα

Και

Επεξεργασία τους

Με την γεωμετρική αντιστροφή

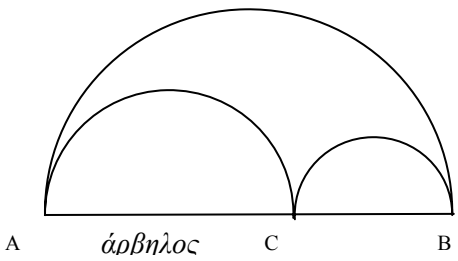
Άρβηλος

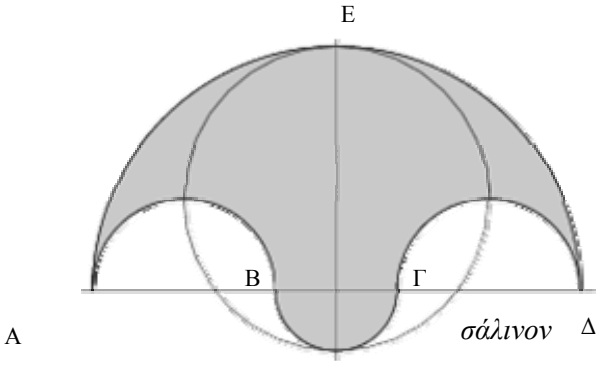
Ιστορικά στοιχεία- διαπραγμάτευση προβλημάτων που έχουν σχέση με την Άρβηλο με την βοήθεια της αντιστροφής.

Ιστορικά στοιχεία - Βιβλίο των λημμάτων

Το σχήμα τριών ανά δύο εφαπτόμενων μεταξύ τους ημικυκλίων, των οποίων τα κέντρα βρίσκονται στην ίδια ευθεία, ήταν γνωστό στους Αρχαίους Έλληνες με το όνομα *άρβηλος*, αλλά και ως *το μαχαίρι του υποδηματοποιού*, γιατί μοιάζει με το εργαλείο που χρησιμοποιούσαν οι τεχνίτες του δέρματος. Τη άρβηλο για πρώτη φορά τη συναντάμε στο βιβλίο των Λημμάτων του Αρχιμήδη. Ειδικότερα οι προτάσεις 4,5,6 του βιβλίου αυτού αναφέρονται σε αυτήν.

Το βιβλίο αυτό (Liber Assumptorum) έφτασε στα χέρια μας μέσα από Αραβική μετάφραση. Εκδόθηκε για πρώτη φορά από τον S. Foster, Miscellanea (London 1659), και κατόπιν από τον Borelli σε ένα βιβλίο με τον τίτλο liber assumptorum Archimedis interprets Thebit ben Kora et exponente doctore Almochtasso Abilhasan (Φλωρεντία 1661). Το βιβλίο αυτό μάλλον δεν πρέπει να έχει γραφεί από τον Αρχιμήδη στην μορφή πού το ξέρουμε, διότι το όνομά του μνημονεύεται μέσα στο ίδιο το βιβλίο, περισσότερο από μία φορά. Υπάρχει μεγάλη πιθανότητα το περιεχόμενο του βιβλίου να συλλέχθηκε από κάποιον Έλληνα συγγραφέα της κατοπινής εποχής, με σκοπό να κάνει πιο σαφή κάποια στοιχεία από το έργο των αρχαίων γεωμετρών, ωστόσο μερικές προτάσεις του είναι σχεδόν βέβαιο ότι είναι Αρχιμήδειες και ειδικότερα οι προτάσεις που αφορούν την *άρβηλο* και το *σάλινον.*[1]





Ο Πάππος (Συναγωγή, σελίδα 208) αναφέρεται στο σχήμα αυτό μέσω μιας πρότασης την οποία αποκαλεί *αρχαία πρότασις*. Το χαρακτηρίζει δε χωρίο και το ονομάζει *άρβηλο* (χωρίον ὃ δὴ καλοῦσιν ἄρβηλον).

Το νόημα της λέξης το έχουμε από τα *Σχόλια στον Νίκανδρο-Scholia to Nicander*, Theriaca 423: *ἄρβηλοι λέγονται τὰ κυκλοτερῆ σιδήρια οἷς οἱ σκυτοτόμοι τέμνουσι καὶ ξύουσι τα δέρματα*. Cf Hesychius, *ἀνάρβηλα,τὰ μὴ ἐξεσμένα δέρματα· ἄρβηλοι γὰρ τα σμιλία.*[2]

Είναι πολύ πιθανόν πως ο οργανωτής του βιβλίου των Λημμάτων, άντλησε σε μεγάλο βαθμό τα στοιχεία του, από την ίδια ή τις ίδιες πηγές με τον Πάππο. Και αυτό διότι οι προτάσεις του βιβλίου παρατίθενται στην ίδια μορφή όπως και στην συλλογή του Πάππου. Ο Tannery θεωρεί ότι μεγάλες ομοιότητες έχουμε στις προτάσεις 1,4,5,6. Ο Heath θεωρεί ότι οι ομοιότητες είναι πολύ μεγαλύτερες από αυτές που αναφέρει ο Tannery.

Η άρβηλος φαίνεται πως έχει μια σειρά από θαυμαστές ιδιότητες, οι περισσότερες από τις οποίες είναι φαινομενικά αντίθετες από την διαίσθησή μας. Όμως όλες αυτές οι ιδιότητες μπορούν να αποδειχθούν με μαθηματικό τρόπο.

Η άρβηλος είναι κάτι περισσότερο από ένα μαθηματικό παιχνίδι. Όπως και πολλά άλλα δημοφιλή θέματα από το πεδίο των ανακατασκευασμένων μαθηματικών, είναι πηγή

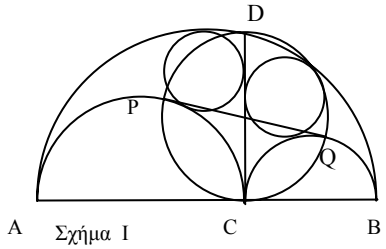
---

[1] T.L. Heath στο βιβλίο του: The Works of Archimedes

[2] T.L. Heath στο βιβλίο του: The Works of Archimedes

μαθηματικής γνώσης. Το σχήμα αυτό μας οδηγεί στην μελέτη γεωμετρικών εννοιών οι οποίες εντάσσονται στο πεδίο της κλασσικής γεωμετρίας. Η μελέτη των ιδιοτήτων της αρβήλου μας φέρνει σε επαφή με την γεωμετρία της αντιστροφής, του ριζικού άξονα, της χρυσής τομής, των γεωμετρικών τόπων κωνικών, με την ομοιότητα, με αλυσίδες εφαπτόμενων μεταξύ τους κύκλων και πολλά άλλα. Δεν είναι λοιπόν τυχαίο το ότι αυτό το σχήμα τράβηξε την προσοχή πολλών σημαντικών μαθηματικών όπως ο Πάππος, ο Vieta, ο Descartes, ο Fermat, ο Newton ο Steiner και στην σύγχρονη εποχή ο Victor Thébault.
Οι πρώτες τρεις προτάσεις του βιβλίου των λημμάτων, είναι στην ουσία βοηθητικά λήμματα αναγκαία για την απόδειξη κάποιων προτάσεων που ακολουθούν. Στην πρόταση 4 (σχήμα I), φέρνουμε την κάθετο προς την AB από το σημείο C η οποία τέμνει το εξωτερικό ημικύκλιο της αρβήλου στο σημείο D. Είναι πολύ εύκολο να αποδειχθεί ότι ο κύκλος που έχει διάμετρο την CD, έχει εμβαδόν που ισούται με το εμβαδόν της αρβήλου (περιοχή που περικλείεται από τα τρία ημικύκλια).

Εἴ κα ἐν ἁμικυκλίῳ σαμεῖόν τι ἐπὶ τᾶς διαμέτρου ᾖ, γραφέωντι δὲ ἀπὸ τῶν τμαμάτων τᾶς διαμέτρου
δύο ἁμικύκλια ἐντός, ἀναστακῇ δὲ ἀπὸ τοῦ λαφθέντος σαμείου εὐθεῖα ποτὶ τᾷ περιφερείᾳ τᾷ διαμέτρῳ
ποτ' ὀρθάς, σχῆμα τὸ ὑπὸ τῶν τριῶν περιφερειῶν περιεχόμενον ἴσον ἐστὶ κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἁ
ἀναστακεῖσα κάθετος.

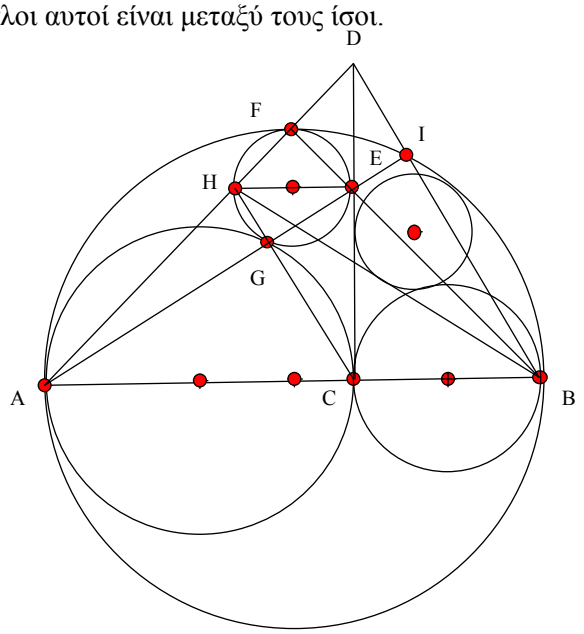
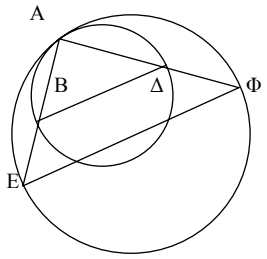


Σχήμα I

Η πρόταση 5 αναφέρεται στους δύο κύκλους οι οποίοι είναι εφαπτόμενοι στην CD (σχήμα I) και καθένας από αυτούς εφάπτεται σε δύο από τα τρία ημικύκλια της αρβήλου. Οι δύο αυτοί κύκλοι, οι οποίοι είναι γνωστοί σήμερα με το όνομα δίδυμοι κύκλοι του Αρχιμήδη είναι μεταξύ τους ίσοι και έχουν διάμετρο $\frac{AC \cdot CB}{AB}$. Παραμένουν δε ίσοι, ανεξάρτητα από την θέση του σημείου C πάνω στην AB.
Στην πρόταση 6 υπολογίζεται η διάμετρος του κύκλου ο οποίος εφάπτεται και στα τρία ημικύκλια της Αρβήλου. Συγκεκριμένα υπολογίζεται η διάμετρος του κύκλου αυτού αν δοθεί η τιμή $\frac{AC}{CB} = \frac{3}{2}$. Αναφέρεται δε σε κάποιο σημείο, πως η ίδια μέθοδος θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για οποιοδήποτε αρχικό λόγο, αντί του λόγου $\frac{3}{2}$, αλλά δεν δίνεται καμία γενίκευση της μεθόδου.
Θα δούμε λεπτομερειακά τις προτάσεις 5 και 6 του βιβλίου των Λημμάτων (Liber Assumptorum -T.L.G) διότι θα μας απασχολήσουν και στα επόμενα οι ίδιες προτάσεις, όταν θα διαπραγματευθούμε την άρβηλο με την βοήθεια της γεωμετρικής αντιστροφής.
Παραθέτουμε το αρχαίο κείμενο, το οποίο βρήκαμε στο Θησαυρό της Ελληνικής Γλώσσας (T.L.G), καθώς και μια ελεύθερη απόδοση του κειμένου στα Νέα Ελληνικά, βασισμένη στο έργο του T.L.Heath: The Works of Archimendes. Χρησιμοποιούμε συμβολισμό που δεν ακολουθεί τις υποδείξεις του αρχαίου κειμένου, η δε παρουσίαση είναι πιο κοντά στον τρόπο που γράφουμε και αποδεικνύουμε σήμερα τις προτάσεις της γεωμετρίας. Επίσης παρεμβάλουμε και κάποια σχόλια και συμπληρώσεις για να διευκολύνουμε την κατανόηση. Όμως, ο σκελετός και το πνεύμα της απόδειξης που υπάρχει στο αρχικό κείμενο (Liber Assumptorum), παραμένει αναλλοίωτο.

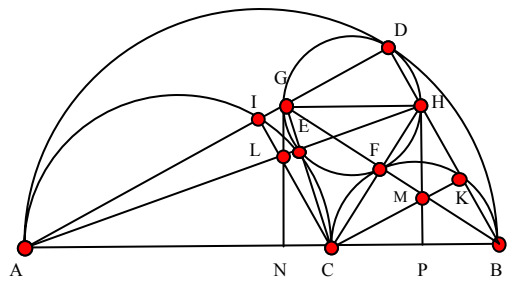
Προτάσεις 5 και 6 του βιβλίου των λημμάτων - Liber Assumptorum:

Πρόταση 5:

Ἔστω ἁμικύκλιον τὸ ΑΒΓ καὶ σαμεῖόν τι ἐπὶ διαμέτρου τᾶς ΑΓ τὸ Δ, καὶ ἀπὸ διαμέτρων τῶν ΓΔ, ΔΑ ἁμικύκλια ἀναγεγράφθων ἐντός, ἀπὸ δὲ τοῦ Δ σαμείου ἀνεστακέτω ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΑΓ ἁ ΔΒ· φαμὶ δή, σχῆμα τὸ ὑπὸ τῶν τριῶν περι- φερειῶν περιεχόμενον, τουτέστι τοῦ μείζονος ἁμι- κυκλίου καὶ τῶν δύο ἀνα- γραφέντων ἐντός, ὅπερ ἄρβηλος καλείσθω, κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἁ ΔΒ, ἴσον ἐστίν. Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ ἑξῆς ἀνάλογόν ἐντι, ἐσσεῖται τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ τῷ ἀπὸ τᾶς ΒΔ ἴσον· κοινὸν ποτικείσθω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τᾶς ὅλας τετράγωνον, του- τέστι τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΓ, τοῖς ἀπὸ τῶν τμαμάτων τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ΒΔ ἐστὶν ἴσον. Καὶ ἐπεὶ οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλάλους ὡς τὰ ἀπὸ τᾶν διαμέτρων τετράγωνά ἐντι, ἐσσεῖται δὴ κύκλος, οὗ διάμετρος ἁ ΑΓ, δυσὶ κύκλοις, ὧν διά- μετρος ἁ ΔΒ, καὶ δυσὶ κύκλοις, ὧν διάμετροι αἱ ΑΔ, ΔΓ, ἴσος, τουτέστιν	Έστω ΑΒ είναι η διάμετρος ενός ημικυκλίου, C ένα οποιοδήποτε σημείο πάνω σε αυτήν, CD η κάθετη προς την διάμετρο ΑΒ και έστω ημικύκλια εγγράφονται στο αρχικό ημικύκλιο με διαμέτρους ΑC και CΒ αντίστοιχα. Αν δύο κύκλοι χαραχθούν, ώστε να εφάπτονται στην CD στις δύο διαφορετικές μεριές αυτής και ο κάθε ένας από αυτούς τους κύκλους εφάπτεται σε δύο από τα τρία ημικύκλια, τότε οι κύκλοι αυτοί είναι μεταξύ τους ίσοι.  Έστω ότι ο ένας από τους κύκλους εφάπτεται με την CD στο σημείο Ε, με το ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ στο σημείο F και με το ημικύκλιο διαμέτρου ΑC στο σημείο G. Χαράσσουμε την διάμετρο ΕΗ του κύκλου, η οποία αφού είναι κάθετη προς την CD, θα είναι παράλληλη προς την ΑΒ. Φέρνουμε τις FH και HA. Επίσης φέρνουμε τις FE και EB. Στο βιβλίο των λημμάτων υπάρχει η πρόταση 1 την οποία απλώς θα αναφέρουμε, γιατί είναι απαραίτητη για την απόδειξη της πρότασης με την οποία ασχολούμαστε, χωρίς όμως να δώσουμε απόδειξη. Πρόταση 1: Αν δύο κύκλοι εφάπτονται και ΒΔ και ΕΦ είναι δύο παράλληλες διάμετροι, τότε τα σημεία Α,Δ,Φ είναι συνευθειακά.  Από την πρόταση 1 θα έχουμε ότι FHA και FEB είναι ευθείες γραμμές αφού οι EH και AB είναι παράλληλες. Για τον ίδιο λόγο, ευθείες είναι και οι AGE, CGH.

ἁμικύκλιον τὸ ΑΓ ἴσον κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἁ ΔΒ, καὶ δυσὶν ἁμικυκλίοις, ὧν διάμετροι αἱ ΑΔ, ΔΓ· κοινὸν ἀφαιρήσθω ἁμικύκλια τὰ ΑΔ, ΔΓ· λοιπὸν ἄρα χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ περιφερειῶν τᾶν ΑΓ, ΑΔ, ΔΓ, ὅπερ ἄρβηλος καλεῖται, κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἁ ΔΒ, ἐστὶν ἴσον· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.	Ας υποθέσουμε τώρα ότι η AF προεκτεινόμενη τέμνει την CD στο σημείο D και ας υποθέσουμε ότι η AE προεκτεινόμενη τέμνει το εξωτερικό ημικύκλιο στο σημείο I. Φέρνουμε τις IB και ID. Οι γωνίες AFB και ACD είναι ορθές και έτσι οι κάθετες ευθείες BF,DC προς τις AD και AB, διέρχονται από το σημείο E. Τα ύψη ενός τριγώνου γνωρίζουμε ότι συντρέχουν οπότε η AE θα είναι κάθετη προς την ευθεία BD (αφού διέρχεται από το ορθόκεντρο E του τριγώνου ADB οπότε είναι ύψος). Η ευθεία AE είναι κάθετη όμως και στην ευθεία BI άρα η BID είναι μια ευθεία γραμμή. Έχουμε για τις γωνίες $\angle AGC, \angle AIB$: $\angle AGC = \angle AIB = 1$ ορθή γωνία άρα οι CH και BD είναι παράλληλες. οπότε: $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DH} = \frac{AC}{HE}$ έτσι $AC \cdot CB = AB \cdot HE$ Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι και η διάμετρος X του άλλου κύκλου ικανοποιεί την σχέση $AC \cdot CB = AB \cdot X$ Άρα οι δύο κύκλοι είναι μεταξύ τους ίσοι.

Πρόταση 6:

Εἴ κα ἐν ἁμικυκλίῳ σαμεῖόν τι ἐπὶ τᾶς διαμέτρου ᾖ, καὶ γραφέωντι ἀπὸ τῶν τμαμάτων τᾶς διαμέτρου δύο ἁμικύκλια ἐντός, γραφῇ δὲ ἐν τῷ ἀρβήλῳ κύκλος ἐπιψαύων τῶν τριῶν ἁμικυκλίων, τὸν λόγον τᾶς διαμέτρου τοῦ δοθέντος ἁμικυκλίου ποτὶ τὰν διάμετρον τοῦ ἐγγραφέντος κύκλου εὑρεῖν. Ἔστω ἁμικύκλιον τὸ ΑΒΓ, σαμεῖον δέ τι ἐπὶ τᾶς διαμέτρου τὸ Δ καὶ πεποιήσθω οὕτως, ὥστε τὸ μεῖζον τμᾶμα τὸ ΑΔ ἐλάσσονος τοῦ ΔΓ ἁμιόλιον εἶμεν, καὶ ἀπὸ τμαμάτων τῶν ΑΔ, ΔΒ ἀναγεγράφθων ἁμικύκλια, γεγράφθω δὲ ἐν τῷ ἀρβήλῳ κύκλος ὁ ΕΖ ἐπιψαύων τῶν τριῶν ἁμικυ-	Έστω ότι AB είναι η διάμετρος ενός ημικυκλίου. Η AB διαιρείται από το σημείο C σε λόγο $\frac{AC}{CB} = \frac{3}{2}$ (ή σε οποιοδήποτε άλλο λόγο). Εγγράφουμε ημικύκλια μέσα στο πρώτο ημικύκλιο με διαμέτρους τις AC και CB. Θεωρούμε έναν κύκλο που εφάπτεται στα τρία αυτά ημικύκλια. Αν GH είναι η διάμετρος αυτού του κύκλου, να βρείτε την σχέση που συνδέει τα ευθύγραμμα τμήματα GH και AB.  Ας υποθέσουμε ότι GH είναι η διάμετρος του κύκλου η οποία είναι παράλληλος προς την AB και ας υποθέσουμε επίσης ότι ο κύκλος εφάπτεται: 1. Στο ημικύκλιο διαμέτρου AB στο σημείο D. 2. Στο ημικύκλιο διαμέτρου AC στο σημείο E. 3. Στο ημικύκλιο διαμέτρου CB στο σημείο F. Φέρνουμε τις AG, GD καθώς και τις BH, HD. Τότε από την πρόταση 1 του βιβλίου των λημμάτων, στην οποία αναφερθήκαμε προηγουμένως, έχουμε ότι οι AGD και

κλίων, καὶ ἄχθω διάμετρος αὐτοῦ παρὰ τὰν ΑΓ ά ΕΖ. Εὑρεῖν τὸν λόγον διαμέτρου τᾶς ΑΓ ποτὶ διάμετρον τὰν ΕΖ. Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ εὐθεῖαι καὶ αἱ ΓΖ, ΖΒ· εὐθεῖαι δή ἐντι αἱ ΑΒ, ΓΒ, ὡς ἐν τοῖς πρότερον ἐδείχθη. Ἐπεζεύχθωσαν ἔτι αἱ ΖΗΑ, ΕΘΓ· δείκνυνται δὴ αὗται εὐθεῖαι οὖσαι· ἔτι δὲ ἐπε-ζεύχθωσαν αἱ ΔΕ, ΔΖ, καὶ αἱ ΔΙ, ΔΛ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΕΜ, ΖΝ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Ο, Ρ σαμεῖα. Ἐπεὶ οὖν ἐν τριγώνῳ τῷ ΑΕΔ ά ΑΗ τᾷ ΕΔ ποτ' ὀρθάς ἐστιν, καὶ ά ΔΙ τᾷ ΑΕ, τέμνοντι δὲ ἀλλάλας κατὰ τὸ Μ σαμεῖον, ά ΕΜΟ τᾷ ΑΓ ἐσσεῖται ποτ' ὀρθάς, ὡς παρ' ἡμῶν ἐν τοῖς Περὶ τριγώνων ἐδείχθη καὶ τῷ πρότερον ὑπέκειτο· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ά ΖΝΡ τᾷ ΓΑ ἐσσεῖται ποτ' ὀρθάς· ἔστι δὲ εὐθεῖα ά ΔΛ παρὰ τὰν ΑΒ καὶ ά ΔΙ παρὰ τὰν ΓΒ· ὥστε τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ά ΑΔ ποτὶ τὰν ΔΓ, ὃν ἔχει ά ΑΜ ποτὶ τὰν ΜΖ, τουτέστιν ά ΑΟ ποτὶ τὰν ΟΡ, καὶ ά ΓΔ ποτὶ τὰν ΔΑ	BHD είναι ευθείες γραμμές. Για τον ίδιο λόγο ευθείες είναι επίσης οι AEH, BFG όπως επίσης και οι CEG, CFH. Ας υποθέσουμε ότι η AD τέμνει το ημικύκλιο διαμέτρου AC στο σημείο I και ότι η BD τέμνει το ημικύκλιο διαμέτρου CB στο σημείο K. Φέρνουμε τις CI, CK οι οποίες τέμνουν την AE και την BF στα σημεία L και M και ας υποθέσουμε ότι οι GL και HM προεκτεινόμενες τέμνουν την AB στα σημεία N,P αντίστοιχα. Στο τρίγωνο AGC οι κάθετες από το A και από το C προς τις απέναντι πλευρές τέμνονται στο L. Άρα (ύψη τριγώνου συντρέχουν) η GLN είναι κάθετη προς την AC. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι και η HMP είναι κάθετη προς την CB. Οι γωνίες $\angle AIC, \angle CKB, \angle ADB$ είναι ορθές. (ως εγγεγραμμένες σε ημικύκλιο). Άρα $\frac{AC}{CB}=\frac{AL}{LH}=\frac{AN}{NP}$ $\frac{BC}{CA}=\frac{BM}{MG}=\frac{BP}{PN}$ οπότε $\frac{AN}{NP}=\frac{NP}{PB}$ και ως εκ τούτου τα AN, NP, PB είναι σε συνεχή αναλογία . Στην περίπτωση που $AC=\frac{3}{2}CB$ τότε και $AN=\frac{3}{2}NP=\frac{9}{4}PB$ Έχουμε λοιπόν: BP:PN:NA:AB=4:6:9:19 Θα έχουμε επίσης: $GH=NP=\frac{6}{19}AB$ Και με παρόμοιο τρόπο η GH μπορεί να βρεθεί όταν AC:CB ισούται με οποιονδήποτε άλλο λόγο. Σημείωση: Αν υποθέσουμε ότι δεν έχει δοθεί: $AC=\frac{3}{2}CB$ αλλά ισχύει: $AC=rCB$ τότε προκύπτει άμεσα ότι $BP:PN:NA:AB=1:r:r^2:(1+r+r^2)$

τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν ἔχει ἁ ΓΝ ποτὶ τὰν ΝΕ, τουτέστιν ἁ ΓΡ ποτὶ τὰν ΡΟ· ἦν δὲ ἁ ΑΔ ἁμιόλιος τᾶς ΔΓ· καὶ ἁ ΑΟ ἄρα τᾶς ΟΡ ἐστὶν ἁμιόλιος, καὶ ἁ ΟΡ τᾶς ΓΡ· εὐθεῖαι ἄρα αἱ ΑΟ, ΟΡ, ΡΓ ἑξῆς ἀνάλογόν ἐντι, ἂν ἁ μὲν ΡΓ ἴσα γίνεται τέσσαρα, ἁ δὲ ΟΡ ἕξ, ἁ δὲ ΑΟ ἐννέα, ἁ δὲ ΓΑ ἐννεακαίδεκα. Ἔστι δὲ ἁ ΡΟ τᾷ ΕΖ ἴσα· ὥστε τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἁ ΑΓ ποτὶ τὰν ΕΖ, ὃν ἔχει τὰ ἐννεακαίδεκα ποτὶ τὰ ἕξ· καί ἐστιν ἁ ΑΓ διάμετρος ἁμικυκλίου τοῦ ΑΒΓ, ἁ δὲ ΕΖ κύκλου τοῦ ΕΒΖ· εὑρέθη ἄρα ὁ αἰτούμενος λόγος. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται εἴ κα ὁ λόγος τᾶς διαμέτρου τοῦ δοθέντος ἁμικυκλίου ποτὶ τὰν διάμετρον τοῦ ἐγγραφέντος κύκλου ἐπιμόριος ᾖ.	

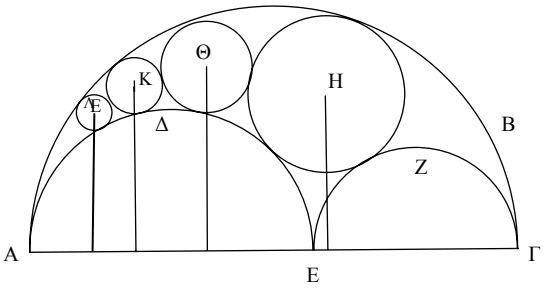
Αλυσίδα του Πάππου και η απόδειξη που παρατίθεται στην συναγωγή

Ενώ ο Αρχιμήδης θεωρείται ο μαθηματικός που απέδειξε αρκετές ιδιότητες της αρβήλου, ο υπεύθυνος για την πιο διάσημη πρόταση σχετικά με την άρβηλο, η οποία αποκαλείται από τον Πάππο στην συναγωγή του *Το αρχαίο θεώρημα*, δεν είναι γνωστός. Το αρχαίο θεώρημα λοιπόν, που μέσα στην πορεία του χρόνου έγινε γνωστό και με το όνομα αλυσίδα του Πάππου είναι το εξής:

Έστω ότι δίνονται δύο κύκλοι c_0 και $\bar{c}$, οι οποίοι είναι εφαπτόμενοι εξωτερικά μεταξύ τους. Έστω επίσης ότι δίνεται και ένας τρίτος κύκλος c ο οποίος έχει διάμετρο το άθροισμα $P_0O = P_oC + CO$, των δύο συγγραμμικών διαμέτρων P_oC και CO των κύκλων c_0 και $\bar{c}$, καθώς και η ακολουθία των κύκλων $c_0, c_1, c_2, ...c_i, ...$ οι οποίοι είναι εφαπτόμενοι μεταξύ τους διαδοχικά, όπως επίσης και στους κύκλους c και $\bar{c}$.

Η απόσταση του κέντρου του n-οστού κύκλου της ακολουθίας των κύκλων $c_0, c_1, c_2, ...c_i, ...$ από την ευθεία P_0O, δίνεται από τον τύπο $h=2nr_n$ όπου r_n είναι η ακτίνα του n-οστού κύκλου της ακολουθίας.

Θα παρουσιάσουμε αρχικά το θεώρημα αυτό, καθώς και την απόδειξή του, όπως αυτά καταγράφονται στην Συναγωγή του Πάππου και πιο συγκεκριμένα στο 4ο βιβλίο (σελίδες 208-32).
Η απόδειξη της πρότασης, αρχίζει με την παράθεση μιας σειράς λημμάτων, τα οποία κρίνονται απαραίτητα για την απόδειξη της.
Η παρουσίαση των λημμάτων θα γίνει με τέτοιο τρόπο, ώστε να είναι αρκετά κοντά στον σύγχρονο τρόπο απόδειξης των προτάσεων της γεωμετρίας.

ιδ. Φέρεται ἔν τισιν ἀρχαία πρότασις τοιαύτη· ὑποκείσθω τρία ἡμικύκλια ἐφαπτόμενα ἀλλήλων τὰ ΑΒΓ ΑΔΕ ΕΖΓ, καὶ εἰς τὸ μεταξὺ τῶν περιφερειῶν αὐτῶν χωρίον, ὃ δὴ καλοῦσιν ἄρβηλον, ἐγγεγράφθωσαν κύκλοι ἐφαπτόμενοι τῶν τε ἡμικυκλίων καὶ ἀλλήλων ὁσοιδηποτοῦν, ὡς οἱ περὶ κέντρα τὰ Η Θ Κ Λ· δεῖξαι τὴν μὲν ἀπὸ τοῦ Η κέντρου κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ ἴσην τῇ διαμέτρῳ τοῦ περὶ τὸ Η κύκλου, τὴν δ' ἀπὸ τοῦ Θ κάθετον διπλασίαν τῆς διαμέτρου τοῦ περὶ τὸ Θ κύκλου, τὴν δ' ἀπὸ τοῦ Κ κάθετον τριπλασίαν, καὶ τὰς ἑξῆς καθέτους τῶν οἰκείων διαμέτρων πολλαπλασίας κατὰ τοὺς ἑξῆς μονάδι ἀλλήλων ὑπερέχοντας ἀριθμοὺς ἐπ' ἄπειρον γινομένης τῆς τῶν κύκλων ἐγγραφῆς. δειχθήσεται δὲ πρότερον τὰ λαμβανόμενα.	Η ακόλουθη πρόταση αναφέρεται σε ορισμένα αρχαία έργα. Υποθέτουμε τρία ημικύκλια ΑΒΓ, ΑΔΕ, ΕΖΓ που εφάπτονται μεταξύ τους. Μεταξύ των ημικυκλίων αυτών θεωρούμε ένα χωρίο που ονομάζουν άρβηλο, εγγράφουμε οσουσδήποτε κύκλους που εφάπτονται στα ημικύκλια και μεταξύ τους, όπως αυτούς με κέντρα Η,Θ,Κ,Λ. Θα δείξουμε ότι η κάθετος από το κέντρο Η στην ΑΓ, είναι ίση με την διάμετρο του κύκλου με κέντρο Η και η κάθετος από το Θ είναι διπλάσια της διαμέτρου με κέντρο το Θ και η κάθετος από το Κ είναι τριπλάσια και η εγγραφή των κύκλων γίνεται επ' άπειρον, οι δε κάθετες διαδοχικά, είναι πολλαπλάσια των αντίστοιχων διαμέτρων κατά το μέτρο των αριθμών που αυξάνονται συνεχώς κατά μια μονάδα. Αλλά τώρα θα αποδείξουμε αρχικά πράγματα, που θα γίνουν αποδεκτά για αυτό. 

Πρόταση 13

ιε. Ἔστωσαν δύο κύκλοι οἱ ΖΒ ΒΜΔ περὶ κέντρα τὰ Α Γ ἐφαπτόμενοι ἀλλήλων κατὰ τὸ Β, καὶ μείζων ἔστω ὁ ΒΜ, ἄλλος δέ τις ἐφαπτόμενος αὐτῶν κατὰ τὰ Κ Λ περὶ κέντρον τὸ Η ὁ ΚΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΗ ΑΗ (πεσοῦνται δὴ διὰ τῶν Κ Λ), καὶ ἡ ἐπὶ τὰ Κ Λ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκβαλλομένη τεμεῖ μὲν τὸν ΖΒ κύκλον,	**Έστω δύο κύκλοι οι ΖΒ, ΒΜ με κέντρα τα σημεία Α, Γ που εφάπτονται μεταξύ τους κατά το σημείο Β και έστω ότι μεγαλύτερος είναι ο κύκλος ΒΜ. Ένας άλλος δε κύκλος, ο ΚΛ, με κέντρο το Η, εφάπτεται σε αυτούς στα σημεία Κ,Λ. Φέρνουμε τα ΓΗ, ΑΗ (τα οποία περνούν από τα σημεία Κ,Λ) και η ευθεία ΚΛ, αν προεκταθεί, θα τμήσει μεν τον κύκλο ΖΒ, θα συναντήσει δε την ευθεία που περνά από τα Α,Γ διότι η πλευρά ΑΚ είναι πιο μεγάλη από την πλευρά ΓΔ του τραπεζίου ΑΚΔΓ. Την τέμνει λοιπόν στο σημείο Ε τέμνοντας τον κύκλο**

συμπίπτει δὲ τῇ διὰ τῶν Α Γ κέντρων ἐκβαλλομένῃ εὐθείᾳ διὰ τὸ μείζονα εἶναι τὴν ΑΚ πλευρὰν τῆς ΓΔ τοῦ ΑΚΔΓ τραπεζίου· συμπιπτέτω οὖν κατὰ τὸ Ε τέμνουσα τὸν κύκλον κατὰ τὸ Δ· δεῖξαι ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ.

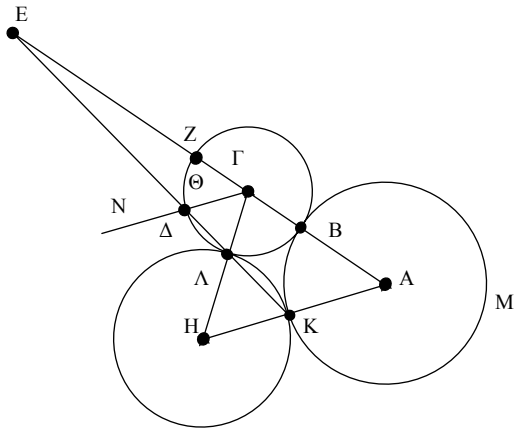
Ἔστιν δὲ φανερόν [ἐπιζευχθείσης τῆς ΓΔ]· γίνεται γὰρ ἰσογώνια τὰ ΓΔΛ ΛΚΗ τρίγωνα τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας [πρὸς τῷ Λ] ἴσας ἔχοντα καὶ περὶ τὰς Γ Η γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον [ἔχοντα], ὥστε ἴσας εἶναι τὰς ὑπὸ ΔΓΗ ΓΗΑ γωνίας ἐναλλάξ, καὶ παράλληλον τὴν ΓΔ τῇ ΑΗ, καὶ ὡς τὴν ΑΕ πρὸς τὴν ΕΓ, τὴν ΑΚ πρὸς ΓΔ, τουτ-έστιν τὴν ΑΒ πρὸς ΒΓ.

Καὶ τὸ ἀναστρόφιον δὲ φανερόν ἐστιν. ἐὰν γὰρ ᾖ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ, ἡ ΚΔ ἐπ' εὐθείας γίνεται τῇ ΔΕ.

Παράλληλός τε γάρ ἐστιν ἡ ΑΚ τῇ ΓΔ καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, τουτέστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ, ἡ ΑΚ πρὸς ΓΔ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΔ τῇ ΔΕ. εἰ γὰρ ἡ διὰ τῶν Κ Ε οὐχ ἥξει καὶ διὰ τοῦ Δ, ἀλλὰ διὰ τοῦ Θ, γίνεται ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ, ἡ ΑΚ πρὸς ΓΘ, ὅπερ ἀδύνα-τον. ὁμοίως οὐδὲ τοῦ Δ ἐκτὸς ἥξει τέμνουσα τὴν ΓΔ ἐκ-βληθεῖσαν, οἷον κατὰ τὸ Ν· ἔσται γὰρ πάλιν γίνεται ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ, ἡ ΑΚ πρὸς ΓΘ, ὅπερ ἀδύνα-τον. ὁμοίως οὐδὲ τοῦ Δ ἐκτὸς ἥξει τέμνουσα τὴν ΓΔ ἐκ-βληθεῖσαν, οἷον κατὰ τὸ Ν ἔσται γὰρ πάλιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ, ἡ ΑΚ πρὸς ΓΝ, ὅπερ ἀδύνατον ἔστιν γὰρ πρὸς τὴν ΓΔ.

Ἢ οὕτως. διὰ τοῦ Κ τῇ ΑΕ παράλληλος ἡ ΚΝ ἤχθω, καὶ γίνεται παραλληλόγραμμον τὸ ΑΓΝΚ, καὶ ἴση ἡ ΑΚ

ΒΖ κατά το σημείο Δ. Θα δείξουμε ότι $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΓ}}$**.**



Είναι δε φανερό [αν φέρουμε το ΓΔ].
Διότι τα τρίγωνα ΓΔΛ, ΛΚΗ τα οποία έχουν τις γωνίες με κορυφή Λ ίσες ως κατακορυφήν και τις πλευρές γύρω από τις γωνίες $\angle\Gamma$, $\angle\text{Η}$ ανάλογες είναι ισογώνια (Ευκλείδου στοιχεία, βιβλίο ΣΤ, πρόταση 7). Άρα οι γωνίες $\angle\Delta\Gamma\text{Η}$, $\angle\Gamma\text{ΗΑ}$ είναι εναλλάξ. Επομένως είναι παράλληλο το ΓΔ στο ΑΗ.
Είναι λοιπόν:

$$\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΓ}} = \frac{\text{ΑΚ}}{\Gamma\Delta} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}} \quad (\text{ΑΚ} = \text{ΑΒ}\,,\ \Gamma\Delta = \text{ΒΓ}).$$

Και το αντίστροφο είναι φανερό.

Διότι αν $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΓ}}$ τότε το ΚΔ βρίσκεται στην προέκταση του τμήματος ΔΕ. Άρα το ΚΔ βρίσκεται στην ευθεία του ΔΕ.

[Σχόλιο-επεξήγηση δική μας:

Έχουμε: $\text{ΑΚ} = \text{ΑΒ}, \Gamma\Delta = \text{ΒΓ}$, οπότε $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{\text{ΑΚ}}{\Gamma\Delta}$.

Από την υπόθεση έχουμε $\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΓ}} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}}$, οπότε:

$\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΓ}} = \frac{\text{ΑΚ}}{\Gamma\Delta}$ (σχέση που εμφανίζεται στο αρχαίο κείμενο), απ΄ όπου και προκύπτουν οι δύο αποδείξεις ότι τα σημεία Κ,Δ,Ε βρίσκονται στο ίδιο τμήμα].

Το ΑΚ είναι παράλληλο προς το ΓΔ και :

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{\text{ΑΚ}}{\Gamma\Delta} = \frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΓ}}.$$

Άρα το ΚΔ βρίσκεται στην προέκταση του ΔΕ. Αν το ΚΕ δεν περάσει από το σημείο Δ, αλλά από το σημείο Θ, τότε $\frac{\text{ΑΚ}}{\Gamma\Theta} = \frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΓ}}$ που είναι αδύνατο. (Επεξήγηση: Αν το ΚΕ περάσει από το σημείο Θ θα έχουμε $\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΓ}} = \frac{\text{ΑΚ}}{\Gamma\Theta}$. Είναι όμως $\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΓ}} = \frac{\text{ΑΚ}}{\Gamma\Delta}$, οπότε θα

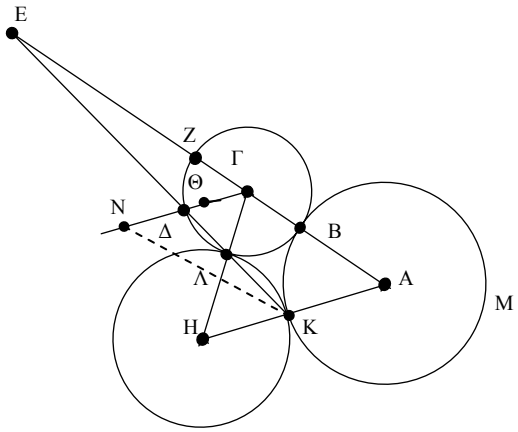
τῇ ΓΝ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ, οὕτως ἡ ΑΚ, τουτέστιν ἡ ΓΝ, πρὸς ΓΔ, διελόντι ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΕ, ἡ ΝΔ πρὸς ΔΓ. ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΑΓ, τουτέστιν ὡς ἡ ΚΝ, πρὸς ΝΔ, οὕτως ἡ ΕΓ πρὸς ΓΔ. καὶ περὶ τὰς ἴσας γω-
νίας τὰς πρὸς τοῖς Ν Γ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν ὅμοιον ἄρα ἐστὶν τὸ ΕΔΓ τρίγωνον τῷ ΔΝΚ τριγώνῳ ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΔΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΝΔΚ. καὶ ἔστιν εὐθεῖα ἡ ΓΝ εὐθεῖα ἄρα καὶ ἡ ΚΔΕ.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ ΚΕΛ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΕΒ.

Ἐπεὶ γὰρ ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, τουτέστιν πρὸς ΓΖ, ἔσται καὶ ἡ λοιπὴ ἡ ΒΕ πρὸς λοιπὴν τὴν ΕΖ ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ, τουτέστιν ὡς ἡ ΚΕ πρὸς ΕΔ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΚΕ πρὸς ΕΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΚΕΛ πρὸς

έχουμε ΓΘ=ΓΔ, που είναι αδύνατον εφόσον ΓΘ<ΓΔ. Όμοια αυτό το ευθύγραμμο τμήμα δεν τέμνει το ΓΔ προεκτεινόμενο πέρα από το Δ παραδείγματος χάρη στο σημείο Ν. Θα είναι δε πάλι $\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΓ}}=\frac{\text{ΑΚ}}{\text{ΓΝ}}$ που είναι αδύνατον διότι $\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΓ}}=\frac{\text{ΑΚ}}{\text{ΓΔ}}$ οπότε θα είναι ΓΝ=ΓΔ που είναι αδύνατον εφόσον ΓΝ>ΓΔ).

Ή ακόμα με αυτόν τον τρόπο (Σημείωση: εδώ δίνει το αρχαίο κείμενο, μιαν άλλη απόδειξη για το ότι τα Κ,Δ,Ε βρίσκονται στο ίδιο ευθύγραμμο τμήμα).



Φέρνουμε από το σημείο Κ το ΚΝ παράλληλο στο ΑΕ. Έτσι σχηματίζεται το παραλληλόγραμμο ΑΓΝΚ και είναι ΑΚ=ΓΝ.

Επειδή

$$\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΓ}}=\frac{\text{ΑΚ}}{\text{ΓΔ}}=\frac{\text{ΓΝ}}{\text{ΓΔ}}\Rightarrow\frac{\text{ΑΕ}-\text{ΕΓ}}{\text{ΕΓ}}=\frac{\text{ΓΝ}-\text{ΓΔ}}{\text{ΓΔ}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΕΓ}}=\frac{\text{ΝΔ}}{\text{ΓΔ}}\Rightarrow\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΝΔ}}=\frac{\text{ΕΓ}}{\text{ΓΔ}}$$

ή $\frac{\text{ΚΝ}}{\text{ΝΔ}}=\frac{\text{ΕΓ}}{\text{ΓΔ}}$ (είναι ΑΓ=ΚΝ) και είναι ανάλογες οι πλευρές των ίσων γωνιών $\angle\text{Ν},\angle\Gamma$. Επομένως το τρίγωνο ΕΔΓ είναι όμοιο με το τρίγωνο ΔΝΚ. Άρα $\angle\text{ΕΔΓ}=\angle\text{ΝΔΚ}$. Είναι λοιπόν ευθεία η ΓΝ. Άρα ευθεία είναι και η ΚΔΕ.

(Σημείωση: από κατασκευή τα σημεία Γ,Δ,Ν βρίσκονται σε μια ευθεία.

Άρα: $\angle\Gamma\Delta\text{Κ}+\angle\text{ΚΔΝ}=2$ ορθές.

Αλλά $\angle\text{ΚΔΝ}=\angle\text{ΕΔΓ}$,

επομένως $\angle\Gamma\Delta\text{Κ}+\angle\text{ΕΔΓ}=2$ ορθές.

Άρα τα σημεία Κ,Δ,Ε βρίσκονται σε ευθεία).

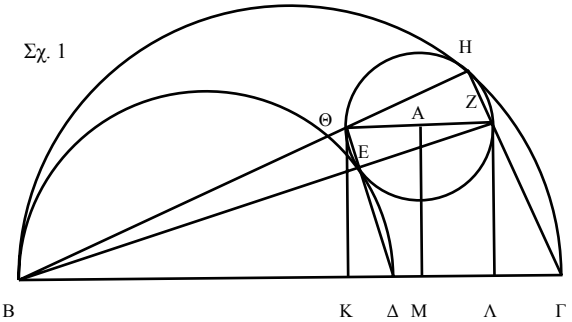
Λέω ότι $\text{ΚΕ}\cdot\text{ΕΛ}=\text{ΕΒ}^2$.

Επειδή $\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΓ}}=\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}},\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΓ}}=\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΖΓ}}=\frac{\text{ΑΕ}-\text{ΑΒ}}{\text{ΕΓ}-\text{ΖΓ}}$, άρα είναι $\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΓ}}=\frac{\text{ΒΕ}}{\text{ΕΖ}}$,

είναι ακόμα

	$\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΓ}}=\frac{\text{ΚΕ}}{\text{ΕΔ}}$ άρα $\frac{\text{ΚΕ}}{\text{ΕΔ}}=\frac{\text{ΒΕ}}{\text{ΕΖ}}$. Είναι όμως $\frac{\text{ΚΕ}}{\text{ΕΔ}}=\frac{\text{ΚΕ}\cdot\text{ΕΛ}}{\text{ΕΔ}\cdot\text{ΕΛ}}$ και $\frac{\text{ΒΕ}}{\text{ΕΖ}}=\frac{\text{ΒΕ}^2}{\text{ΒΕ}\cdot\text{ΕΖ}}$. Άρα $\frac{\text{ΚΕ}\cdot\text{ΕΛ}}{\text{ΕΔ}\cdot\text{ΕΛ}}=\frac{\text{ΒΕ}^2}{\text{ΒΕ}\cdot\text{ΕΖ}}$. Είναι όμως (στοιχεία Ευκλείδη βιβλίο ΙΙΙ πρόταση 36) $\text{ΛΕ}\cdot\text{ΕΔ}=\text{ΒΕ}\cdot\text{ΕΖ}$ και έτσι $\text{ΚΕ}\cdot\text{ΕΛ}=\text{ΒΕ}^2$.

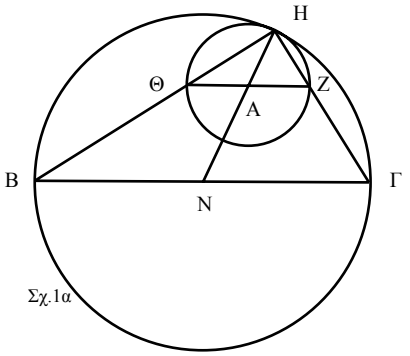
Πρόταση 14

ιϛ. Δύο ἡμικύκλια τὰ ΒΗΓ ΒΕΔ, καὶ ἐφαπτόμενος αὐτῶν κύκλος ὁ ΕΖΗΘ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου αὐτοῦ τοῦ Α κάθετος ἤχθω ἐπὶ τὴν ΒΓ βάσιν τῶν ἡμικυκλίων ἡ ΑΜ· ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΜΒ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου, οὕτως ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης καταγραφῆς ἀμφότερος ἡ ΓΒ ΒΔ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὴν ΓΔ, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας καὶ τρίτης οὕτως ἡ τῶν ΓΒ ΒΔ ὑπεροχὴ πρὸς συναμφότερον τὴν ΓΒ ΒΔ, τουτέστιν τὴν ΓΔ. Ἤχθω διὰ τοῦ Α τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΘΖ. ἐπεὶ οὖν δύο κύκλοι οἱ ΒΗΓ ΕΖΗΘ ἐφάπτονται ἀλλήλων κατὰ τὸ Η, καὶ διάμετροι ἐν αὐτοῖς παράλληλοί εἰσιν αἱ ΒΓ ΖΘ, εὐθεῖα ἔσται ἥ τε διὰ τῶν Η Θ Β καὶ ἡ διὰ τῶν Η Ζ Γ. πάλιν ἐπεὶ δύο κύκλοι οἱ ΒΕΔ ΕΖΗΘ ἐφάπτονται ἀλλή- λων κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐν αὐτοῖς παράλληλοι διάμετροί εἰσιν αἱ ΘΖ ΒΔ, εὐθεῖα ἔσται ἥ τε διὰ τῶν Ζ Ε Β καὶ ἡ διὰ τῶν Θ Ε Δ. ἤχθωσαν καὶ ἀπὸ τῶν Θ Ζ σημείων κάθετοι αἱ ΘΚ ΖΛ· ἔσται δὴ διὰ μὲν τὴν ὁμοιότητα τῶν ΒΗΓ ΒΘΚ τριγώνων ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΒΗ, οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΒΚ, καὶ τὸ ὑπὸ ΓΒ ΒΚ περιεχόμενον χωρίον ἴσον τῷ ὑπὸ ΗΒ ΒΘ, διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΒΖΛ ΒΕΔ τριγώνων ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΒΖ	**Έστω δύο ημικύκλια ΒΗΓ και ΒΕΔ και ένας εφαπτόμενος σε αυτά κύκλος, ο ΕΖΗΘ. Από το κέντρο αυτού, έστω Α, φέρνουμε κάθετη, την ΑΜ, στην βάση ΒΓ των ημικυκλίων (σημείωση δική μας: στα σχήματα που ακολουθούν φαίνεται ότι τα δύο ημικύκλια, ΒΗΓ και ΒΕΔ, εφάπτονται στο σημείο Β).** **Λέω ότι στο πρώτο σχήμα είναι:** $\frac{\text{ΒΜ}}{\text{ΑΖ}}=\frac{\text{ΒΓ}+\text{ΒΔ}}{\text{ΒΓ}-\text{ΒΔ}}=\frac{\text{ΒΓ}+\text{ΒΔ}}{\text{ΓΔ}}$, **στο δεύτερο και στο τρίτο σχήμα είναι :** $\frac{\text{ΒΜ}}{\text{ΑΖ}}=\frac{\text{ΒΓ}-\text{ΒΔ}}{\text{ΒΓ}+\text{ΒΔ}}=\frac{\text{ΒΓ}-\text{ΒΔ}}{\text{ΓΔ}}$. Σχ. 1  Φέρνουμε από το σημείο Α το ΘΖ παράλληλο προς το ΒΓ. Επειδή οι δύο κύκλοι ΒΗΓ και ΕΖΗΘ εφάπτονται μεταξύ τους στο σημείο Η και οι διάμετροι αυτών οι ΒΓ,ΖΘ είναι παράλληλοι, τα σημεία Η,Θ,Β βρίσκονται σε ευθεία, καθώς και τα σημεία Η, Ζ, Γ. (Σημείωση: πρόταση 1, βιβλίο λημμάτων). (Σημείωση δική μας: Αν φέρουμε (σχήμα 1α) την ΗΑ η προέκτασή του θα περάσει από το κέντρο Ν του κύκλου ΒΗΓ. Επομένως αν φέρουμε τα ΒΗ,ΘΗ και καθώς έχουμε ΑΗ=ΘΑ και ΝΗ=ΒΝ άρα $\frac{\text{ΑΗ}}{\text{ΝΗ}}=\frac{\text{ΘΑ}}{\text{ΒΝ}}$. Έχουμε όμως ότι ΒΝ,ΘΑ είναι παράλληλα. Η πρόταση 13 δείχνει ότι τα ΒΗ και ΘΗ βρίσκονται

πρὸς ΒΛ, καὶ τὸ
ὑπὸ ΔΒ ΒΛ ἴσον τῷ ὑπὸ ΖΒ ΒΕ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ὑπὸ
ΗΒ ΒΘ τῷ ὑπὸ ΖΒ ΒΕ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΓΒ ΒΚ
τῷ ὑπὸ ΔΒ ΒΛ, ἂν δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ κάθετος ἐπὶ τὸ Δ
πίπτῃ, τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ. ἐπὶ μὲν ἄρα τῆς πρώτης κατα-
γραφῆς ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΔ, οὕτως ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΒΚ,
ὥστε καὶ συναμφότερος ἡ ΓΒ ΒΔ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐ-
τῶν τὴν ΓΔ, οὕτως καὶ συναμφότερος ἡ ΛΒ ΒΚ πρὸς τὴν
ὑπεροχὴν αὐτῶν τὴν ΚΛ. καὶ ἔστι συναμφοτέρου μὲν τῆς
ΛΒ ΒΚ ἡμίσεια ἡ ΒΜ (διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΚΜ τῇ
ΜΛ), τῆς δὲ ΛΚ ἡμίσεια ἡ ΜΚ· καὶ ὡς ἄρα συναμφό-
τερος ἡ ΓΒ ΒΔ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΒΜ πρὸς ΜΚ,
τουτέστιν πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου.
ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας καὶ τρίτης καταγραφῆς, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ
ΓΒΚ ἴσον ἐδείχθη [καὶ κοινῶς] τῷ ὑπὸ ΔΒΛ, ὡς ἄρα ἡ
ΓΒ πρὸς ΒΔ, οὕτως ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΒΚ. συνθέντι ὡς
ἡ ΓΔ πρὸς ΔΒ, ἡ ΚΛ πρὸς ΚΒ· ὥστε καὶ ὡς ἡ ΓΔ
πρὸς τὴν τῶν ΓΒ ΒΔ ὑπεροχήν, οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς τὴν
τῶν ΛΒ ΒΚ ὑπεροχήν. καὶ ἔστι τῆς μὲν ΚΛ ἡμίσεια ἡ
ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου [ἀντὶ τῆς ΛΜ], ἡ δὲ
ΒΜ ἡμίσεια τῆς τῶν ΛΒ ΒΚ ὑπεροχῆς διὰ τὸ ἴσην εἶναι
τὴν ΛΜ τῇ ΜΚ, ὥστε καὶ ὡς ἡ ΜΒ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ
κέντρου τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου, οὕτως ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης
καταγραφῆς συναμφότερος ἡ ΓΒ ΒΔ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν
αὐτῶν τὴν ΓΔ, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας καὶ τῆς τρίτης ἡ τῶν
ΓΒ ΒΔ ὑπεροχὴ πρὸς συναμφότερον τὴν ΓΒΔ, τουτέστιν
τὴν ΓΔ [ἀνάπαλιν γάρ].

Συνθεωρεῖται δ᾽ ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΚ ΛΓ ἴσον
ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ΑΜ. διὰ γὰρ τὴν

στην ίδια ευθεία. Άρα τα σημεία Η, Θ, Β βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Το ίδιο ισχύει και για τα σημεία Η, Ζ, Γ.
Ανάλογα ισχύουν και στα δύο άλλα σχήματα).



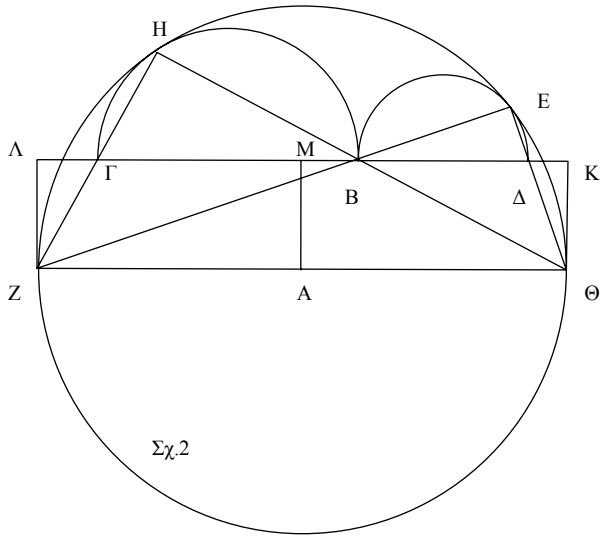
Σχ.1α

Πάλι επειδή δύο κύκλοι οι ΒΕΔ, ΕΖΗΘ εφάπτονται μεταξύ τους στο σημείο Ε και οι διάμετροί τους ΘΖ, ΒΔ είναι παράλληλοι, η γραμμή που περνάει από τα σημεία Ζ,Ε,Β είναι ευθεία. Επίσης η γραμμή που περνάει από τα σημεία Θ,Ε,Δ είναι ευθεία.
Φέρνουμε από τα σημεία Θ, Ζ τις κάθετες ΘΚ ,ΖΛ.
Λόγω της ομοιότητας των τριγώνων ΒΗΓ και ΒΘΚ έχουμε $\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΒΗ}} = \frac{\text{ΒΘ}}{\text{ΒΚ}}$ οπότε είναι:
$\text{ΓΒ}\cdot\text{ΒΚ} = \text{ΗΒ}\cdot\text{ΒΘ}$. Από την ομοιότητα των τριγώνων ΒΖΛ ,ΒΕΔ έχουμε:
$\frac{\text{ΔΒ}}{\text{ΒΕ}} = \frac{\text{ΒΖ}}{\text{ΒΛ}}$ ή $\text{ΔΒ}\cdot\text{ΒΛ} = \text{ΖΒ}\cdot\text{ΒΕ}$.
Είναι όμως:
(Ευκλείδου στοιχεία βιβλίο ΙΙΙ πρόταση 35)
$\text{ΗΒ}\cdot\text{ΒΘ} = \text{ΖΒ}\cdot\text{ΒΕ}$.
Άρα είναι και:
$\text{ΓΒ}\cdot\text{ΒΚ} = \text{ΔΒ}\cdot\text{ΒΛ}$.
Αν δε η κάθετη που άγεται από το σημείο Ζ πέφτει στο σημείο Δ τότε θα είναι
$\text{ΓΒ}\cdot\text{ΒΚ} = \text{ΔΒ}\cdot\text{ΒΛ} = \text{ΒΔ}^2$.
Από το μεν πρώτο σχήμα έχουμε
$\frac{\text{ΓΒ}}{\text{ΒΔ}} = \frac{\text{ΒΛ}}{\text{ΒΚ}}$
ώστε $\frac{\text{ΒΓ}+\text{ΒΔ}}{\text{ΒΓ}-\text{ΒΔ}} = \frac{\text{ΒΛ}+\text{ΒΚ}}{\text{ΒΛ}-\text{ΒΚ}}$

ή $\frac{\text{ΒΓ}+\text{ΒΔ}}{\text{ΓΔ}} = \frac{\text{ΒΛ}+\text{ΒΚ}}{\text{ΛΚ}}$.
Είναι $\frac{1}{2}(\text{ΒΛ}+\text{ΒΚ}) = \text{ΒΜ}$
($2\text{ΒΜ} = \text{ΒΛ}+\text{ΒΚ}+\text{ΚΜ}-\text{ΜΛ} = \text{ΒΛ}+\text{ΒΚ}$ διότι ΚΜ=ΜΛ)
και $\frac{1}{2}\text{ΛΚ} = \text{ΚΜ}$. Άρα $\frac{\text{ΒΓ}+\text{ΒΔ}}{\text{ΓΔ}} = \frac{\text{ΒΜ}}{\text{ΜΚ}} = \frac{\text{ΒΜ}}{\text{ΑΖ}}$.

ὁμοιότητα τῶν ΒΘΚ ΖΛΓ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΒΚ πρὸς ΚΘ, οὕτως ἡ ΖΛ πρὸς τὴν ΛΓ, καὶ τὸ ὑπὸ ΒΚ ΛΓ ἴσον τῷ ὑπὸ ΘΚ ΖΛ, τουτέστιν τῷ ἀπὸ τῆς ΑΜ.

Γίνεται δὲ καὶ διὰ μὲν τὸ εἶναι ὡς τὴν ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως τὴν ΒΛ πρὸς ΚΛ, τὸ ὑπὸ ΒΓ καὶ τῆς ΚΛ, τουτέστιν τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου, ἴσον τῷ ὑπὸ ΒΛ ΔΓ, διὰ δὲ τὸ εἶναι ὡς τὴν ΒΔ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως τὴν ΒΚ πρὸς ΚΛ, τὸ ὑπὸ τῆς ΒΔ καὶ τῆς ΚΛ, τουτέστιν τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου, ἴσον τῷ ὑπὸ ΒΚ ΔΓ.



Σχ.2

Από δε το δεύτερο και το τρίτο σχήμα επειδή *το υπό του ΓΒΚ είναι ίσο εδείχθει [και κοινώς]* (σημείωση δική μας: *[και κοινώς]*, δηλαδή αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο όπως και για το σχήμα 1) *με το υπό του ΔΒΛ* θα έχουμε:

$$\Gamma B \cdot BK = \Delta B \cdot B\Lambda$$

Έπεται ότι

$$\frac{\Gamma B}{B\Delta} = \frac{\Lambda B}{BK} \Rightarrow \frac{\Gamma B + B\Delta}{B\Delta} = \frac{\Lambda B + BK}{BK} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Gamma\Delta}{B\Delta} = \frac{K\Lambda}{BK}.$$

Είναι και:

$$\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma B - B\Delta} = \frac{K\Lambda}{\Lambda B - BK}$$ (Σημείωση δική μας:

$$\frac{\Gamma B}{B\Delta} = \frac{\Lambda B}{BK} \text{ οπότε } \frac{\Gamma B + B\Delta}{\Gamma B - B\Delta} = \frac{\Lambda B + BK}{\Lambda B - BK}$$).

Έχουμε δε $AZ = \frac{1}{2} K\Lambda$ και

$BM = \frac{1}{2}(B\Lambda - BK)$ διότι ΛΜ=ΜΚ.

$\Big($Είναι: $2BM = BM + \Lambda M - (MK - BM) =$

$= B\Lambda - BK \Rightarrow BM = \frac{1}{2}(B\Lambda - BK)\Big)$

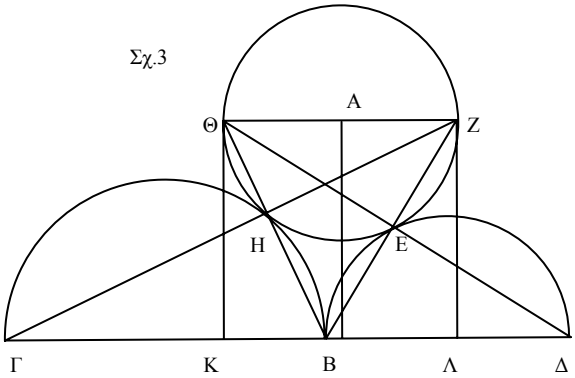
Άρα $\frac{MB}{AZ} = \frac{\Gamma B + B\Delta}{\Gamma\Delta}$ για το πρώτο σχήμα. Για δε το δεύτερο και τρίτο σχήμα είναι:

$$\frac{\Gamma B - B\Delta}{B\Gamma + B\Delta} = \frac{B\Gamma - B\Delta}{\Gamma\Delta}$$

(Σημείωση: αυτό που εννοεί το αρχαίο κείμενο για το δεύτερο και το τρίτο σχήμα είναι:

$$\frac{\text{ΜΒ}}{\text{ΑΖ}}=\frac{\text{ΛΒ}-\text{ΒΚ}}{\text{ΚΛ}}=\frac{\text{ΓΒ}-\text{ΒΔ}}{\text{ΒΓ}+\text{ΒΔ}}=\frac{\text{ΒΓ}-\text{ΒΔ}}{\text{ΓΔ}}).$$

Σχ.3



Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι:
$\text{ΒΚ}\cdot\text{ΛΓ}=\text{ΑΜ}^2$.
Διότι από την ομοιότητα των τριγώνων ΒΘΚ και ΖΛΓ έπεται ότι : $\frac{\text{ΖΛ}}{\text{ΛΓ}}=\frac{\text{ΒΚ}}{\text{ΚΘ}}$.
(Σχόλιο δικό μας: τα τρίγωνα ΒΘΚ και ΖΛΓ είναι όμοια με το τρίγωνο ΒΗΓ άρα είναι και όμοια μεταξύ τους).

Οπότε: $\text{ΒΚ}\cdot\text{ΛΓ}=\text{ΘΚ}\cdot\text{ΖΛ}=\text{ΑΜ}^2$.

(Σχόλιο δικό μας: Είναι ΘΚ=ΛΖ=ΑΜ
άρα $\text{ΒΚ}\cdot\text{ΛΓ}=\text{ΘΚ}\cdot\text{ΖΛ}=\text{ΑΜ}^2$).

Έχουμε:
$\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΓΔ}}=\frac{\text{ΒΛ}}{\text{ΚΛ}}$, δηλαδή $\text{ΒΓ}\cdot\text{ΚΛ}=\text{ΒΛ}\cdot\text{ΔΓ}$.
Είναι όμως $\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΓΔ}}=\frac{\text{ΒΚ}}{\text{ΚΛ}}$,
δηλαδή $\text{ΒΔ}\cdot\text{ΚΛ}=\text{ΒΚ}\cdot\text{ΔΓ}$.

(Σχόλιο: έχουμε δείξει ότι: $\frac{\text{ΒΛ}}{\text{ΒΚ}}=\frac{\text{ΓΒ}}{\text{ΒΔ}}$ οπότε:
$\frac{\text{ΒΛ}}{\text{ΒΛ}-\text{ΒΚ}}=\frac{\text{ΓΒ}}{\text{ΓΒ}-\text{ΒΔ}}$ άρα $\frac{\text{ΒΛ}}{\text{ΚΛ}}=\frac{\text{ΓΒ}}{\text{ΓΔ}}$).
Επίσης η $\frac{\text{ΒΛ}}{\text{ΚΛ}}=\frac{\text{ΓΒ}}{\text{ΓΔ}}$ δίνει:
$$\frac{\text{ΒΛ}-\text{ΚΛ}}{\text{ΚΛ}}=\frac{\text{ΓΒ}-\text{ΓΔ}}{\text{ΓΔ}}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{\text{ΒΚ}}{\text{ΚΛ}}=\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΓΔ}}\Rightarrow\text{ΒΚ}\cdot\text{ΓΔ}=\text{ΒΔ}\cdot\text{ΚΛ}$$
ή $\text{ΒΚ}\cdot\text{ΓΔ}=\text{ΒΔ}\cdot\text{ΘΖ}$)

Πρόταση 15

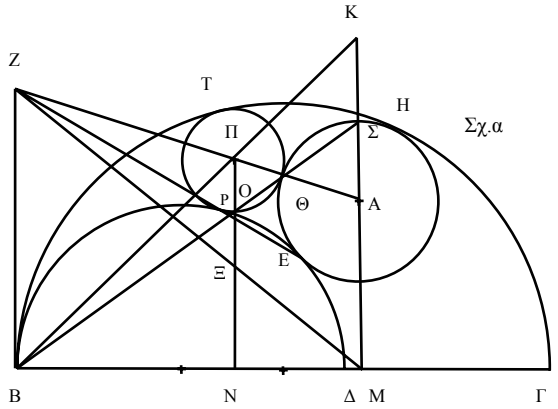
ιζ. Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων γεγράφθω κύκλος ὁ ΘΡΤ ἐφαπτόμενος τῶν τε ἐξ ἀρχῆς ἡμικυκλίων καὶ τοῦ ΕΗΘ κύκλου κατὰ τὰ Θ Ρ Τ σημεῖα, καὶ ἀπὸ τῶν Α Π κέν-
τρων κάθετοι ἤχθωσαν ἐπὶ τὴν ΒΓ βάσιν αἱ ΑΜ ΠΝ·
λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΜ μετὰ τῆς διαμέτρου τοῦ ΕΗ κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον αὐτοῦ, οὕτως ἡ ΠΝ πρὸς τὴν τοῦ ΘΡΤ κύκλου διάμετρον.

Ἤχθω τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΖ· ἐφάπτεται ἄρα τοῦ ΒΗΓ ἡμικυκλίου. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΠ ἐκβεβλήσθω
ἐπὶ τὸ Ζ. ἐπεὶ διὰ τὸ προδειχθὲν ὡς συναμφότερος ἡ ΓΒΔ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὴν ΓΔ, οὕτως καὶ ἡ ΒΜ ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης καταγραφῆς πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου
τοῦ ΕΗΘ κύκλου, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας καὶ τρίτης ὡς ἡ ὑπερ-
οχὴ αὐτῶν πρὸς συναμφότερον, τουτέστιν ὡς ἡ τῶν ΓΒ ΒΔ ὑπεροχὴ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΜΒ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέν-
τρου τοῦ ΕΗΘ κύκλου, καὶ ἡ ΒΝ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΘΡΤ κύκλου, ἔσται ἄρα καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΜΒ πρὸς τὴν ΒΝ, ἡ ΑΘ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΗΘ κύκλου πρὸς τὴν ΘΠ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΘΡΤ κύκλου. ἀλλ' ὡς ἡ ΜΒ πρὸς ΒΝ, ἡ ΑΖ πρὸς ΖΠ (ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς ΖΜ ἔσται
ὡς ἡ ΜΒ πρὸς τὴν ΒΝ, οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ΖΞ). καὶ
ὡς ἄρα ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΠ, οὕτως ἡ ΑΘ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΗΘ κύκλου πρὸς τὴν ΘΠ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΘΡΤ κύκλου. καὶ τῶν ΕΗΘ ΡΘΤ κύκλων ἐφάπτεταί τις κύκλος ὁ ΒΡΕΔ κατὰ τὰ Ρ Ε σημεῖα· διὰ ἄρα τὸ προδειχθὲν ιε θεώρημα ἡ τὰ Ρ Ε σημεῖα

Υπό την προϋπόθεση ότι τα ίδια πράγματα ισχύουν (δηλαδή, όπως και στις προηγούμενες προτάσεις, ότι τα δύο ημικύκλια εφάπτονται στο σημείο Β και ο κύκλος με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΘ εφάπτεται σ΄ αυτά τα δύο ημικύκλια), γράφουμε τον κύκλο ΘΡΤ που εφάπτεται στα αρχικά ημικύκλια και στον κύκλο ΕΗΘ στα σημεία Θ,Ρ,Τ και φέρνουμε από τα κέντρα Α, Π κάθετες ΑΜ, ΠΝ στην βάση ΒΓ.

Λέω ότι

$$\frac{\text{ΑΜ}+2\text{ΑΘ}}{2\text{ΑΘ}}=\frac{\text{ΠΝ}}{2\text{ΠΘ}}$$



Φέρνουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΒΖ κάθετο στο ΒΔ. Άρα εφάπτεται στο ημικύκλιο ΒΗΓ.
Προεκτείνουμε το ΑΠ ως το σημείο Ζ. Σύμφωνα με αυτά που δείξαμε προηγουμένως (πρόταση 14 σχήματα 1,2,3) είναι:

$$\frac{\text{ΜΒ}}{\text{ΑΘ}}=\frac{\text{ΒΓ}+\text{ΒΔ}}{\text{ΒΓ}-\text{ΒΔ}}=\frac{\text{ΒΓ}+\text{ΒΔ}}{\text{ΓΔ}}$$

για το πρώτο σχήμα.
Για το δεύτερο και τρίτο το σχήμα θα έχουμε:

$$\frac{\text{ΒΓ}-\text{ΒΔ}}{\text{ΒΓ}+\text{ΒΔ}}=\frac{\text{ΒΓ}-\text{ΒΔ}}{\text{ΓΔ}}=\frac{\text{ΜΒ}}{\text{ΑΘ}}.$$

Οι λόγοι αυτοί είναι ίσοι με τον λόγο: $\frac{\text{ΒΝ}}{\text{ΠΘ}}$

Άρα και εναλλάξ θα έχουμε:

$$\frac{\text{ΜΒ}}{\text{ΒΝ}}=\frac{\text{ΑΘ}}{\text{ΘΠ}}$$

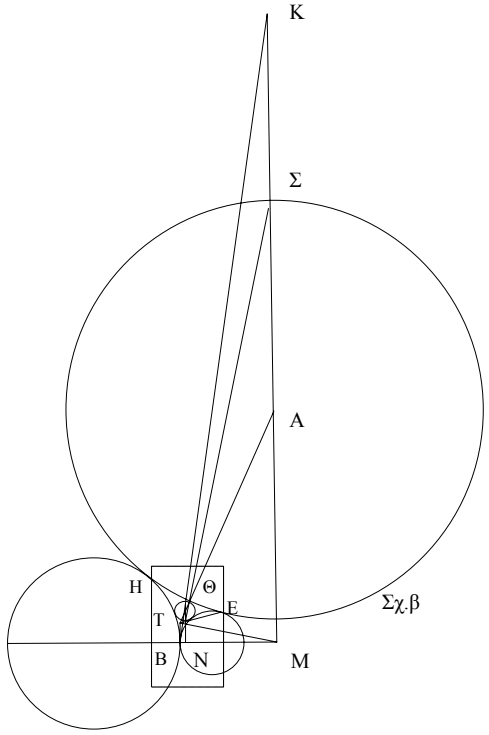
(Σημείωση: Είναι $\frac{\text{ΒΝ}}{\text{ΠΘ}}=\frac{\text{ΒΓ}+\text{ΒΔ}}{\text{ΓΔ}}$ για το πρώτο σχήμα και
$\frac{\text{ΒΝ}}{\text{ΠΘ}}=\frac{\text{ΒΓ}-\text{ΒΔ}}{\text{ΓΔ}}$ για τα δύο άλλα σχήματα.
Άρα $\frac{\text{ΒΝ}}{\text{ΠΘ}}=\frac{\text{ΜΒ}}{\text{ΑΘ}}$ οπότε έχουμε και: $\frac{\text{ΑΘ}}{\text{ΘΠ}}=\frac{\text{ΜΒ}}{\text{ΒΝ}}$)

ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα ἐκβαλλο-
μένη ἐπὶ τὸ Ζ σημεῖον πεσεῖται, καὶ ἴσον ἔσται τὸ ὑπὸ
ΕΖΡ περιεχόμενον ὀρθογώνιον τῷ ἀπὸ τῆς ΘΖ τετραγώνῳ. ἔστιν δὲ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ τετραγώνῳ ἴσον τὸ ὑπὸ ΕΖΡ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΖΒ τῷ ἀπὸ ΖΘ· ἴση ἄρα ἡ ΒΖ τῇ ΖΘ. ἐπεὶ δὲ καὶ ἡ μὲν ΜΑ ἐκβληθεῖσα τέμνει τὴν τοῦ ΕΗΘ κύκλου περιφέρειαν κατὰ τὸ Σ, ἡ δὲ ΠΝ τέμνει τὴν τοῦ ΘΡΤ κύκλου περιφέρειαν κατὰ τὸ Ο σημεῖον, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΑΘ τῇ ΑΣ, ἡ δὲ ΠΟ τῇ ΠΘ, καὶ ἡ τὰ Ο Σ σημεῖα ἐπιζευγνύουσα ἥξει διὰ τοῦ Θ· ἴση γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΘΑΣ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΠΟ γωνίᾳ ἐναλλάξ, καὶ ἰσο-
γώνιόν ἐστιν τὸ ΑΘΣ τρίγωνον τῷ ΠΘΟ τριγώνῳ, καὶ ἔστιν εὐθεῖα ἡ ΑΠ· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ διὰ τῶν Σ Θ Ο σημείων ἀπαγομένη. ἥξει δὲ καὶ διὰ τοῦ Β· εὐ-
θεῖα γὰρ ἡ ΘΟΒ διὰ τὸ εἶναι ὡς τὴν ΒΖ πρὸς ΖΘ, οὕ-
τως τὴν ΟΠ πρὸς τὴν ΠΘ, ἴσων οὐσῶν τῶν ὑπὸ ΒΖΘ ΟΠΘ γωνιῶν ἐν παραλλήλοις ταῖς ΒΖ ΟΠ· καὶ τοῦτο γὰρ προδέδεικται ιε. ἐπιζευχθεῖσα δὲ καὶ ἡ ΒΠ ἐκβεβλή-
σθω καὶ συμπιπτέτω τῇ ΜΑ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Κ. ἐπεὶ οὖν ἦν ὡς ἡ ΜΒ πρὸς ΒΝ, τουτέστιν ὡς ἡ ΚΒ πρὸς τὴν ΒΠ, οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς ΖΠ καὶ ἡ ΑΘ πρὸς ΘΠ, ἔσται καὶ ὡς ἡ ΚΒ πρὸς ΒΠ, ἡ ΑΣ πρὸς ΠΟ καὶ ἡ ΣΚ πρὸς ΠΟ· ἴση ἄρα ἡ ΑΣ τῇ ΣΚ. ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ΑΚ ὅλῃ τῇ διαμέτρῳ τοῦ ΕΗΘ κύκλου ἐστὶν ἴση, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΚΜ πρὸς ΚΣ, οὕτως ἡ ΝΠ πρὸς ΟΠ, ἔσται καὶ ὡς ἡ ΜΚ πρὸς τὴν ΚΑ, τουτέστιν ὡς ἡ ΜΑ μετὰ τῆς διαμέτρου τοῦ ΕΗΘ κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον, οὕτως ἡ ΝΠ πρὸς

Αλλά $\frac{AZ}{ZΠ}=\frac{MB}{BN}$ (διότι αν φέρουμε το ΖΜ είναι $\frac{MB}{BN}=\frac{MZ}{ZH}$).

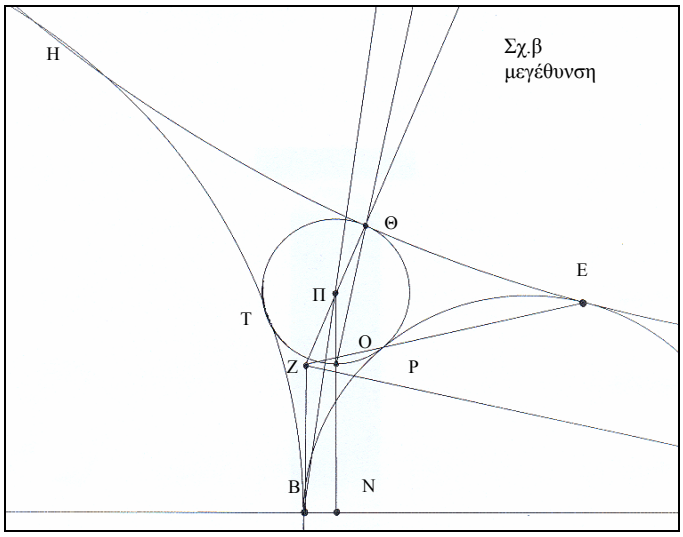
(Σημείωση: από τα όμοια τρίγωνα ΜΖΑ και ΞΖΠ προκύπτει: $\frac{AZ}{ZΠ}=\frac{MZ}{ZΞ}$ και από τα όμοια τρίγωνα ΖΜΒ και ΞΜΝ προκύπτει: $\frac{MZ}{MΞ}=\frac{BM}{MN}$ οπότε είναι $\frac{MZ}{MZ-ZΞ}=\frac{BM}{MB-BN}$ άρα $\frac{MZ}{ZΞ}=\frac{BM}{BN}$ οπότε και $\frac{AZ}{ZΠ}=\frac{BM}{BN}$.

Έχοντας και την αναλογία $\frac{AΘ}{ΘΠ}=\frac{BM}{BN}$ παίρνουμε τελικά $\frac{AZ}{ZΠ}=\frac{AΘ}{ΘΠ}$). Άρα $\frac{AZ}{ZΠ}=\frac{AΘ}{ΘΠ}$.



☛Επειδή το σχήμα β είναι δύσκολο να φανεί καθαρά, έχουμε κάνει μια μεγέθυνση του μέρους που είναι το πιο σημαντικό για την κατανόηση της απόδειξης.

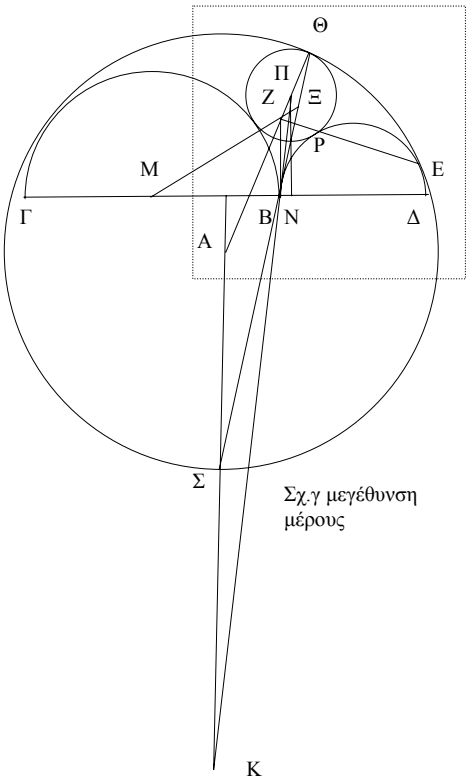
☛Το κομμάτι του σχήματος που είναι μέσα σε ορθογώνιο πλαίσιο φαίνεται σε μεγέθυνση ακριβώς πιο κάτω:

τὴν τοῦ ΘΡΤ κύκλου διάμετρον, ὅπερ.	 Επιπλέον ο κύκλος ΒΡΕΔ εφάπτεται στους κύκλους ΕΗΘ, ΡΘΤ στα σημεία Ρ,Ε (Σχ.α). Επομένως , σύμφωνα με την πρόταση 13 που αποδείξαμε πιο πάνω, η ΡΕ αν προεκταθεί θα πέσει στο σημείο Ζ και είναι $EZ \cdot ZP = \Theta Z^2$ (προκύπτει απο το τελευταίο κομμάτι της 13). Είναι δε: $EZ \cdot ZP = ZB^2$ Άρα $ZB^2 = \Theta Z^2$ οπότε είναι $ZB = \Theta Z$. Επειδή και το ΜΑ προεκτεινόμενο τέμνει την περιφέρεια του κύκλου ΕΗΘ στο σημείο Σ η δε ΠΝ τέμνει την περιφέρεια του κύκλου ΘΡΤ στο σημείο Ο, θα είναι η μεν ΑΘ ίση με την ΑΣ (ΑΘ=ΑΣ), η δε ΠΟ θα είναι ίση με την ΠΘ (ΠΟ=ΠΘ) και το τμήμα που ενώνει τα σημεία Ο και Σ (δηλαδή το ΟΣ) θα περάσει από το σημείο Θ διότι είναι ίσες οι εναλλάξ γωνίες ∠ΘΑΣ, ∠ΘΠΟ και το τρίγωνο ΑΘΣ είναι ισογώνιο με το τρίγωνο ΠΘΟ και η γραμμή ΑΠ είναι ευθεία. Άρα και η γραμμή που διέρχεται από τα σημεία Σ,Θ,Ο είναι ευθεία επίσης. (Σχόλιο: Τα τμήματα ΠΟ, ΣΜ είναι παράλληλα. Οι εναλλάξ γωνίες ∠ΘΑΣ και ∠ΟΠΘ είναι ίσες. Επιπλέον $\frac{\Theta\Pi}{\Pi O} = \frac{A\Theta}{A\Sigma}$. Επομένως (Στοιχεία βιβλίο ΣΤ πρόταση 7) τα τρίγωνα ΑΘΣ, ΟΠΘ είναι όμοια οπότε ∠ΠΘΟ=∠ΣΘΑ. Η γραμμή ΑΘΠ είναι ευθεία. Έχουμε λοιπόν ∠ΣΘΑ+∠ΣΘΠ=2 ορθές. Ισχύει ∠ΠΘΟ=∠ΣΘΑ οπότε ∠ΠΘΟ +∠ΣΘΠ=2 ορθές. Επομένως η ΣΘΟ είναι ευθεία). Αυτή η ευθεία θα περάσει επίσης από το σημείο Β, διότι η ΘΟΒ είναι ευθεία, διότι $BZ = \Theta Z$ οπότε $\frac{BZ}{Z\Theta} = \frac{O\Pi}{\Pi\Theta}$ επίσης οι γωνίες ∠ΒΖΘ, ∠ΟΠΘ είναι ίσες λόγω των παραλλήλων ΒΖ και ΟΠ. Αυτό δείχθηκε στην πρόταση 13.

(Σχόλιο: Τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΖ, ΟΠ είναι παράλληλα..

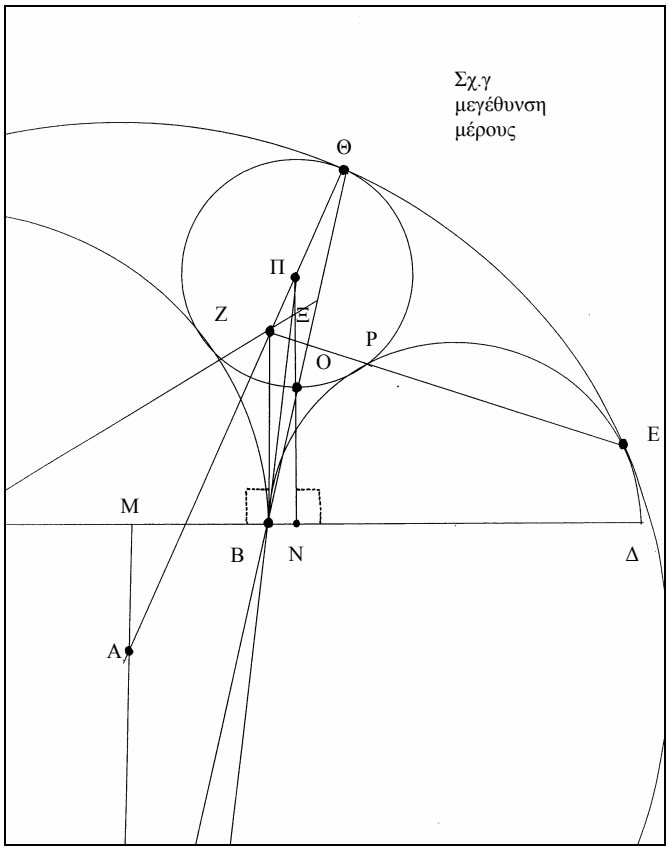
Επίσης $\frac{ΟΠ}{ΠΘ} = \frac{ΒΖ}{ΖΘ}$ ή $\frac{ΖΘ}{ΠΘ} = \frac{ΒΖ}{ΠΟ}$.

Έτσι σύμφωνα με την ισότητα $\frac{ΑΚ}{ΓΔ} = \frac{ΕΑ}{ΕΓ}$ της πρότασης 13 όπου δείξαμε με τις ίδιες συνθήκες (δηλαδή $ΑΚ \| ΓΔ$) ότι τα σημεία Κ, Δ, Ε βρίσκονται σε ευθεία, συμπεραίνουμε και από την ισότητα $\frac{ΒΖ}{ΠΟ} = \frac{ΖΘ}{ΠΘ}$ ότι τα σημεία Θ,Ο,Β βρίσκονται στην ίδια ευθεία).



☛Σχόλιο : Το πιο πάνω σχήμα δεν φαίνεται καθαρά ακόμα και στην περίπτωση που το σχεδιάσουμε σε ολόκληρη την σελίδα Έχουν μεγάλη σημασία οι λεπτομέρειες σε μια περιοχή που δεν μεγαλώνει εύκολα όσο μεγάλο σχήμα και να κάνουμε.
Έτσι επιλέξαμε να δώσουμε πιο κάτω μια μεγέθυνση της πιο σημαντικής περιοχής την οποία επισημαίνουμε με το ορθογώνιο πλαίσιο στο πιο πάνω σχήμα.

☛Σχόλιο: τα σχήματα β,γ παρατίθενται διότι αντιπροσωπεύουν διαφορετικές περιπτώσεις της περίπτωσης του σχήματος α. Εμείς όμως δουλεύουμε κυρίως με το σχήμα α.



Φέρνουμε δε την ΒΠ που προεκτεινόμενη συναντά, την επίσης προεκτεινόμενη ΜΑ, στο σημείο Κ.

Εφόσον $\frac{MB}{BN}=\frac{KB}{B\Pi}=\frac{AZ}{Z\Pi}$

(Σχόλιο: Τα τρίγωνα ΒΜΚ και ΒΝΠ είναι όμοια άρα $\frac{MB}{BN}=\frac{KB}{B\Pi}$. Επίσης τα τρίγωνα ΠΑΚ και ΠΒΖ είναι όμοια άρα $\frac{B\Pi}{\Pi K}=\frac{Z\Pi}{\Pi A}$ οπότε $\frac{B\Pi}{\Pi K+B\Pi}=\frac{Z\Pi}{\Pi A+Z\Pi}$ άρα $\frac{KB}{B\Pi}=\frac{AZ}{Z\Pi}$) και $\frac{AZ}{Z\Pi}=\frac{A\Theta}{\Theta\Pi}$ (πρόταση 13).

Έπεται ότι $\frac{KB}{B\Pi}=\frac{A\Theta}{\Pi\Theta}=\frac{A\Sigma}{\Pi O}=\frac{\Sigma K}{\Pi O}$ (Σχόλιο: Το ΒΟΠ όμοιο με το ΒΣΚ άρα $\frac{KB}{B\Pi}=\frac{K\Sigma}{O\Pi}$) άρα ΑΣ=ΣΚ.

Επειδή λοιπόν το ΑΚ είναι ίσο με την διάμετρο του κύκλου ΕΗΘ και είναι: $\frac{KM}{K\Sigma}=\frac{N\Pi}{O\Pi}$ (Σχόλιο: Τα τρίγωνα ΒΜΚ και ΒΝΠ είναι όμοια άρα $\frac{KM}{\Pi N}=\frac{BK}{B\Pi}$.

Τα τρίγωνα ΒΣΚ και ΒΟΠ είναι όμοια άρα $\frac{K\Sigma}{\Pi O}=\frac{BK}{B\Pi}$) οπότε $\frac{\Pi N}{2\Pi\Theta}=\frac{KA+AM}{AK}=\frac{MA+2A\Theta}{2A\Theta}$.

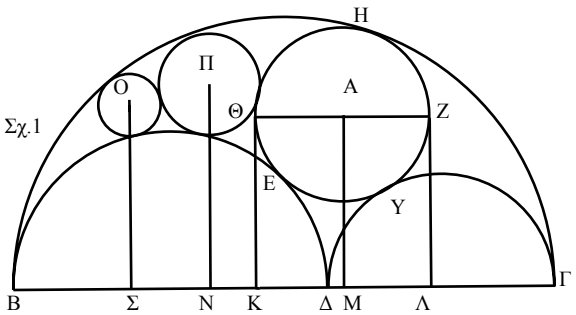
Πρόταση 16

ιη. Τούτων προτεθεωρημένων ὑποκείσθω ἡμικύκλιον τὸ ΒΗΓ, καὶ ἐπὶ τῆς βάσεως αὐτοῦ τυχὸν σημεῖον εἰλήφθω τὸ Δ, καὶ ἐπὶ τῶν ΒΔ ΔΓ ἡμικύκλια γεγράφθω τὰ ΒΕΔ ΔΥΓ, καὶ ἐγγεγράφθωσαν εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῶν τριῶν περιφερειῶν τὸν καλούμενον ἄρβηλον κύκλοι ἐφαπτόμενοι τῶν ἡμικυκλίων καὶ ἀλλήλων ὁσοιδηποτοῦν, ὡς οἱ περὶ τὰ κέντρα τὰ Α Π Ο, καὶ ἀπὸ τῶν κέντρων αὐτῶν κάθετοι ἐπὶ τὴν ΒΓ ἤχθωσαν αἱ ΑΜ ΠΝ ΟΣ· λέγω ὅτι ἡ μὲν ΑΜ ἴση ἐστὶν τῇ διαμέτρῳ τοῦ περὶ τὸ Α κύκλου, ἡ δὲ ΠΝ διπλῆ τῆς διαμέτρου τοῦ περὶ τὸ Π κύκλου, ἡ δὲ ΟΣ τριπλῆ τῆς διαμέτρου τοῦ περὶ τὸ Ο κύκλου, καὶ αἱ ἑξῆς κάθετοι τῶν οἰκείων διαμέτρων πολλαπλάσιαι κατὰ τοὺς ἑξῆς μονάδι ἀλλήλων ὑπερέχοντας ἀριθμούς. Ἤχθω διάμετρος ἡ ΘΖ παράλληλος τῇ ΒΓ, καὶ κάθετοι αἱ ΘΚ ΖΛ· ἔσται δὴ κατὰ τὰ προγεγραμμένα τὸ μὲν ὑπὸ ΓΒ ΒΚ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον τῷ ὑπὸ ΛΒ ΒΔ, τὸ δὲ ὑπὸ ΒΓ ΓΛ τῷ ὑπὸ ΚΓΔ. καὶ διὰ τοῦτο ὡς ἡ ΒΚ πρὸς ΚΛ, οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς ΛΓ· ἑκάτερος γὰρ λόγος ὁ αὐτός ἐστιν τῷ τῆς ΒΔ πρὸς ΔΓ (ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΓΒ ΒΚ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΛΒ ΒΔ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΛ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς ΒΚ· ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΔ, οὕτως ἡ ΛΒ πρὸς ΒΚ· διελόντι ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΒ, ἡ ΛΚ πρὸς ΚΒ· ἀνάπαλιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς ΔΓ, ἡ ΒΚ πρὸς ΚΛ· πάλιν ἐπεὶ τὸ ὑπὸ ΒΓ ΓΛ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΚΓ ΓΔ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΓΚ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς ΓΛ· ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ, ἡ ΚΓ πρὸς τὴν ΓΛ· διελόντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ	**Αφού αυτά αποδείξαμε πιο πριν θεωρούμε ένα ημικύκλιο ΒΗΓ, και στην βάση του παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο Δ και επί των ΒΔ, ΔΓ γράφουμε ημικύκλια τα ΒΕΔ , ΔΥΓ και γράφουμε στον τόπο (χωρίο) μεταξύ των τριών κύκλων που ονομάζεται άρβηλος οσουσδήποτε κύκλους που εφάπτονται στα ημικύκλια και μεταξύ τους. Έστω τέτοιοι με κέντρα τα Α,Π,Ο. Από τα κέντρα αυτά φέρνουμε κάθετα στο ΒΓ τις ΑΜ,ΠΝ,ΟΣ.** **Λέω ότι το μεν ΑΜ είναι ίσο με την διάμετρο του κύκλου που γράφεται γύρω από το σημείο Α. Η δε ΠΝ είναι διπλάσια της διαμέτρου του κύκλου που γράφεται γύρω από το σημείο Π.** **Η δε ΟΣ είναι τριπλάσια της διαμέτρου του κύκλου που γράφεται γύρω από το σημείο Ο. Και γενικά οι επόμενες κάθετοι είναι πολλαπλάσια κατά τους επόμενους αριθμούς που υπερέχουν μεταξύ τους κατά μια μονάδα**. Φέρνουμε την διάμετρο ΘΖ παράλληλη στο ΒΓ και τις κάθετες ΘΚ,ΖΛ. Έχουμε τώρα σύμφωνα με αυτά που αποδείξαμε πιο πριν ότι το ορθογώνιο των ΒΓ και ΒΚ είναι ίσο με το ορθογώνιο των ΛΒ και ΒΔ (δηλαδή $ΒΓ \cdot ΒΚ = ΛΒ \cdot ΒΔ$). Και το ορθογώνιο των ΒΓ,ΓΛ είναι ίσο με το ορθογώνιο των ΚΓ,ΓΔ (δηλαδή $ΒΓ \cdot ΓΛ = ΓΔ \cdot ΓΚ$) και για αυτό είναι και $\frac{ΒΚ}{ΚΛ} = \frac{ΚΛ}{ΛΓ}$. Διότι καθένας λόγος είναι ο ίδιος με τον λόγο $\frac{ΒΔ}{ΔΓ}$. (Σχόλιο: αφού $ΒΓ \cdot ΒΚ = ΛΒ \cdot ΒΔ$ τότε : $\frac{ΓΒ}{ΒΔ} = \frac{ΒΛ}{ΒΚ} \Rightarrow \frac{ΓΒ - ΒΔ}{ΒΔ} = \frac{ΒΛ - ΒΚ}{ΒΚ}$ οπότε $\frac{ΓΔ}{ΒΔ} = \frac{ΛΚ}{ΒΚ}$ και έτσι $\frac{ΒΔ}{ΓΔ} = \frac{ΒΚ}{ΚΛ}$. Επειδή $ΒΓ \cdot ΓΛ = ΓΔ \cdot ΓΚ$ θα είναι και $\frac{ΒΓ}{ΓΔ} = \frac{ΓΚ}{ΓΛ} \Rightarrow \frac{ΒΓ - ΓΔ}{ΓΔ} = \frac{ΓΚ - ΛΓ}{ΛΓ}$ οπότε $\frac{ΒΔ}{ΓΔ} = \frac{ΛΚ}{ΛΓ}$. Είναι δε $\frac{ΒΔ}{ΓΔ} = \frac{ΒΚ}{ΚΛ}$ άρα $\frac{ΒΚ}{ΚΛ} = \frac{ΚΛ}{ΛΓ}$). Άρα $ΒΚ \cdot ΓΛ = ΚΛ^2$. Δείξαμε δε προηγουμένως (πρ. 14) $ΒΚ \cdot ΛΓ = ΑΜ^2$. Επομένως είναι $ΑΜ = ΚΛ = ΖΘ$ όπου ΖΘ είναι η διάμετρος του κύκλου με κέντρο το Α. Δείξαμε προηγουμένως (πρ. 15) ότι:

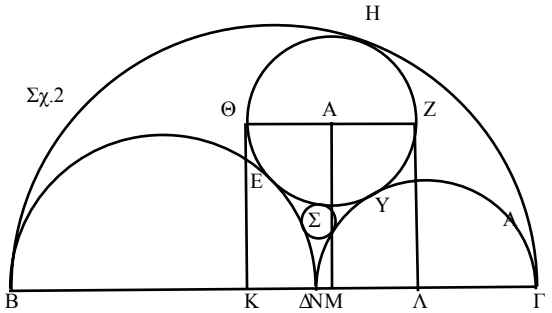
ΒΔ πρὸς ΔΓ, οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΛΓ· ἦν δὲ καὶ ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΓΔ, ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΛ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΛ, οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΛΓ)· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΒΚ ΓΛ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΛ. προδέδεικται δὲ τὸ ὑπὸ ΒΚ ΛΓ ἴσον καὶ τῷ ἀπὸ ΑΜ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΜ τῇ ΚΛ, τουτέστιν τῇ ΖΘ διαμέτρῳ τοῦ περὶ τὸ Α κύκλου. ἐπεὶ δὲ καὶ τοῦτο προδέδεικται ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΜ μετὰ τῆς ΖΘ πρὸς τὴν ΖΘ, οὕτως ἡ ΠΝ πρὸς τὴν τοῦ περὶ τὸ Π κύκλου διάμετρον, καὶ ἔστιν ἡ ΑΜ μετὰ τῆς ΖΘ διπλῆ τῆς ΖΘ, ἔσται καὶ ἡ ΠΝ τῆς διαμέτρου τοῦ περὶ τὸ Π κύκλου διπλῆ. ἡ ΠΝ ἄρα μετὰ τῆς διαμέτρου τοῦ περὶ τὸ Π κύκλου τριπλασία τῆς διαμέτρου, καὶ ἔστιν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἡ ΟΣ πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ περὶ τὸ Ο κύκλου· καὶ ἡ ΟΣ ἄρα τριπλασία τῆς διαμέτρου τοῦ περὶ τὸ Ο κύκλου. καὶ ὁμοίως καὶ ἡ τοῦ ἑξῆς κύκλου κάθετος τῆς διαμέτρου τετραπλασία, καὶ αἱ ἑξῆς κάθετοι τῶν καθ' αὑτὰς διαμέτρων εὑρεθήσονται πολλαπλάσιαι κατὰ τοὺς ἑξῆς μονάδι ἀλλήλων ὑπερέχοντας ἀριθμούς, καὶ τοῦτο συμβαῖνον ἐπὶ τὸ ἄπειρον ἀποδειχθήσεται. Ἂν δ' ἀντὶ τῶν ΒΗΓ ΔΥΓ περιφερειῶν εὐθεῖαι ὦσιν ὀρθαὶ πρὸς τὴν ΒΔ, ὡς ἐπὶ τῆς τρίτης ἔχει καταγραφῆς, τὰ αὐτὰ συμβήσεται περὶ τοὺς ἐγγραφομένους κύκλους· αὐτόθεν γὰρ ἡ ἀπὸ τοῦ Α κέντρου κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΔ ἴση γίνεται τῇ τοῦ περὶ τὸ Α κύκλου διαμέτρῳ.	$\frac{\Pi N}{\delta_{(\Pi)}} = \frac{AM + Z\Theta}{Z\Theta}$. (Σχόλιο: Το $\delta_{(\Pi)}$ είναι η διάμετρος του κύκλου (Π)). Επειδή όμως έχουμε: $AM + Z\Theta = 2Z\Theta$ άρα: $\Pi N = 2\,\delta_{(\Pi)}$. Οπότε $\Pi N + \delta_{(\Pi)} = 3\,\delta_{(\Pi)}$. Οπότε $\frac{O\Sigma}{\delta_{(O)}} = \frac{\Pi N + \delta_{(\Pi)}}{\delta_{(\Pi)}} = 3$ (Σχόλιο: Το $\delta_{(O)}$ είναι η διάμετρος του κύκλου (Ο).) Έτσι έχουμε: $O\Sigma = 3\,\delta_{(O)}$. Όμοια δείχνουμε ότι η κάθετη που άγεται από το κέντρο Π του επόμενου κύκλου είναι τετραπλάσια της διαμέτρου του και οι επόμενες κάθε φορά κάθετες θα είναι 5,6,7,…φορές οι αντίστοιχοι διάμετροι. Και αυτό αποδεικνύεται ότι συμβαίνει επ΄ άπειρο. Επομένως αν στην θέση των ημικυκλίων ΒΗΓ και ΔΥΓ έχουμε ευθύγραμμα τμήματα κάθετα προς την ΒΔ, όπως φαίνεται στο τρίτο σχήμα τα ίδια θα ισχύουν για τους κύκλους που εγγράφουμε. Διότι η κάθετη που άγεται από το κέντρο Α στην διάμετρο ΒΔ είναι ίση με την διάμετρο του κύκλου με κέντρο το Α. (ο κύκλος ΘΕΖ εφάπτεται στον κύκλο ΒΕΔ στο σημείο Ε και εφάπτεται και στις κάθετες ΒΘ και ΔΖ στα σημεία Θ,Ζ. Επομένως η διάμετρος ΘΖ είναι παράλληλη και ίση με την διάμετρο ΒΔ. Άρα η κάθετη ΑΜ είναι ίση με την διάμετρο του κύκλου Α. Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν για τους κύκλους Π,Ο ,κ.λ.π.) Αν δε και τα τόξα ημικυκλίων ΒΗΓ,ΒΕΔ παραμένουν αντί δε του τόξου ημικυκλίου ΔΥΓ υποτεθεί ένα ευθύγραμμο τμήμα ΔΖ κάθετο στο ΒΓ όπως φαίνεται στο τέταρτο σχήμα και αν ο λόγος $\frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta}$ είναι ίσος με το τετράγωνο ενός αριθμού, τότε η κάθετος που άγεται από το σημείο Α είναι σύμμετρη προς την διάμετρο του κύκλου με κέντρο το σημείο Α. Αν όμως ο λόγος δεν είναι, τότε είναι ασύμμετρη. Διότι ο λόγος του τετραγώνου του ΔΖ προς το τετράγωνο της διαμέτρου του κύκλου, που γράφεται γύρω από το σημείο Α είναι γενικά ίδιος με τον λόγο $\frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta}$ όπως θα δείξουμε στα επόμενα (πρόταση 17). [έτσι εφόσον το ΒΓ είναι τετραπλό σε μήκος από το ΓΔ, τότε το ΔΖ, δηλαδή η κάθετη που άγεται από το σημείο Α γίνεται διπλή σε μήκος από την διάμετρο του κύκλου που έχει κέντρο το Α και αυτή που άγεται από το σημείο Π γίνεται τριπλή και αυτή που άγεται από το σημείο Ο γίνεται τετραπλή. Και έτσι γίνεται συνεχώς κατά την ακολουθία των αριθμών]. Τα σχόλια στην αγκύλη οφείλονται σε κάποιον σχολιαστή.

Ἂν δὲ αἱ μὲν ΒΗΓ ΒΕΔ μένωσιν περιφέρειαι, ἀντὶ δὲ τῆς ΔΥΓ περιφερείας εὐθεῖα ὑποτεθῇ (ὡς ἐπὶ τῆς τετάρτης ἔχει καταγραφῆς) ἡ ΔΖ ὀρθὴ πρὸς τὴν ΒΓ, τῆς μὲν ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ τετραγωνικὸν ἐν ἀριθμοῖς λόγον ἐχούσης, σύμμετρος ἔσται ἡ ἀπὸ τοῦ Α κάθετος τῇ διαμέτρῳ τοῦ περὶ τὸ Α κύκλου, εἰ δὲ μή, ἀσύμμετρος. καθόλου γὰρ ὃν ἔχει λόγον ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον δυνάμει ἡ ΔΖ πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ περὶ τὸ Α κύκλου, ὡς ἑξῆς δείκνυται. οἷον ἐὰν ᾖ τετραπλασία μήκει ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ, γίνεται διπλῆ μήκει ἡ ΔΖ, τουτέστιν ἡ ἀπὸ τοῦ Α κάθετος, τῆς διαμέτρου τοῦ περὶ τὸ Α κύκλου, καὶ ἡ μὲν ἀπὸ τοῦ Π τριπλῆ, ἡ δ' ἀπὸ τοῦ Ο τετραπλῆ, καὶ ἑξῆς κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμούς.

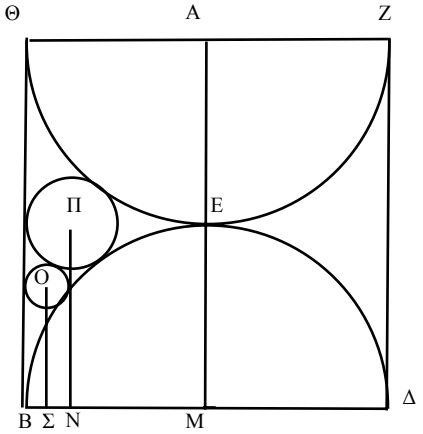
Σχ.1



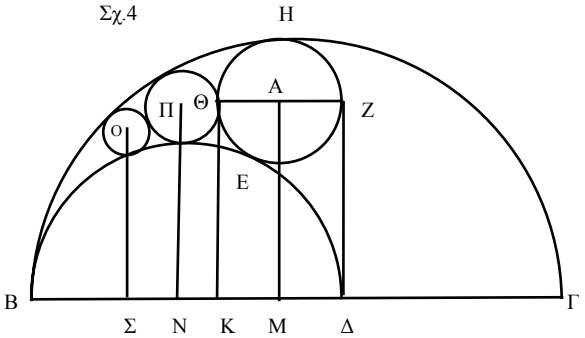
Σχ.2



Σχ.3



Σχ.4



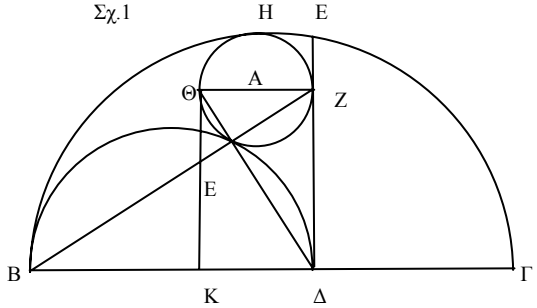
Πρόταση 17:

ιθ. Τὸ ὑπερτεθὲν λῆμμα. ἡμικύκλια τὰ ΒΗΓ ΒΑΔ, καὶ ὀρθὴ ἡ ΔΕ, καὶ κύκλος ἐφαπτόμενος ὁ ΘΗΖΑ· ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ μήκει, οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ ΘΗΖΑ κύκλου δυνάμει.
Ἤχθω διάμετρος ἡ ΘΖ· εὐθεῖαι ἄρα αἱ ΖΑΒ ΘΑΔ. κάθετος ἤχθω ἡ ΘΚ· ἔσται ἄρα διὰ τὰ προδεδειγμένα τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ ΒΚ περιεχόμενον χωρίον ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετραγώνῳ· ὡς ἄρα ἡ ΒΓ πρὸς ΓΔ, οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς ΔΚ, τουτέστιν πρὸς ΘΖ. ὡς δὲ ἡ ΒΔ πρὸς ΘΖ, ἡ ΔΑ πρὸς ΘΑ, ὡς δὲ ἡ ΔΑ πρὸς ΑΘ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΖ (ὀρθογώνιον γάρ ἐστιν τὸ ΘΖΔ, καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ἡ ΖΑ)· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ πρὸς ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ ΘΗΖΑ κύκλου.

Ιδού το λήμμα που αναφέραμε προηγουμένως. Έστω τα ημικύκλια ΒΗΓ , ΒΑΔ η κάθετη ΔΕ και ο εφαπτόμενος κύκλος ΘΗΖΑ. Λέω ότι $\frac{\Delta Z^2}{(\delta_{\Theta HZA})^2} = \frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta}$ (Σχόλιο: Το $\delta_{\Theta HZA}$ είναι η διάμετρος του κύκλου (Θ,Η,Ζ,Α)).

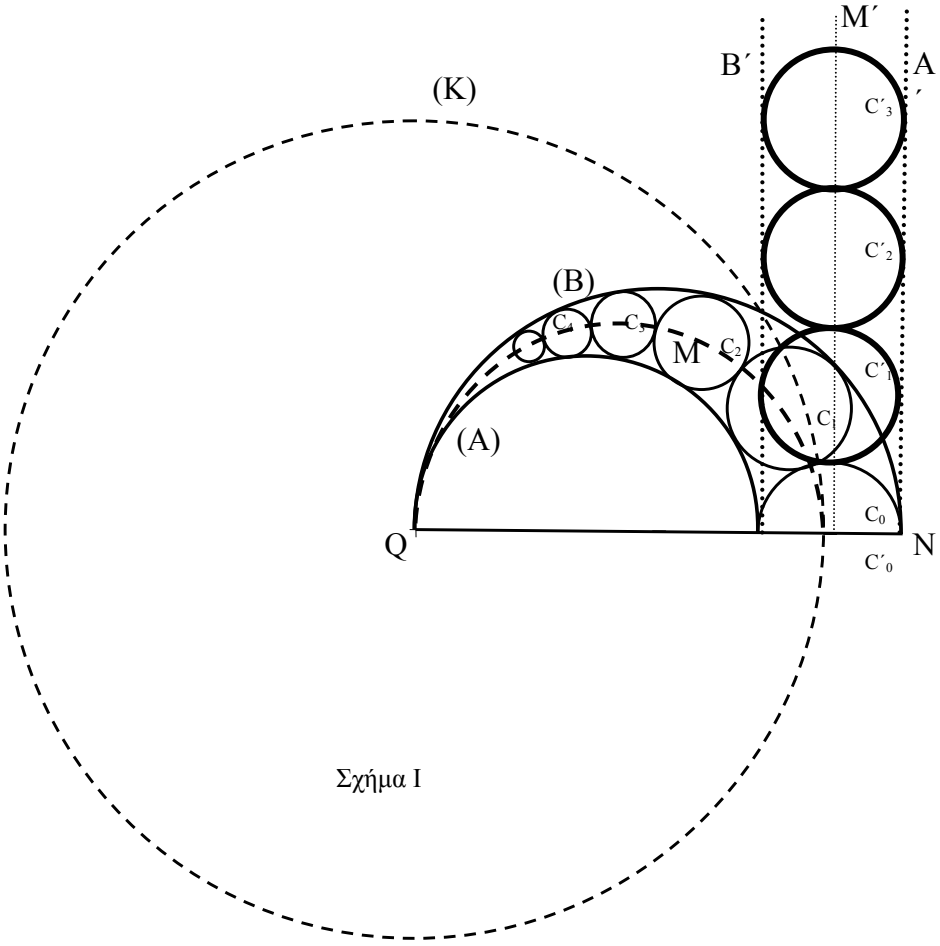
Φέρνουμε την διάμετρο ΘΖ. Οι γραμμές ΖΑΒ, ΘΑΔ είναι ευθύγραμμα τμήματα. Φέρνουμε την κάθετη ΘΚ. Σύμφωνα με τις προηγούμενες αποδείξεις έχουμε: $\Gamma B \cdot BK = B\Delta^2$ άρα $\frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{B\Delta}{\Delta K} = \frac{B\Delta}{\Theta Z}$ και $\frac{B\Delta}{\Theta Z} = \frac{\Delta A}{\Theta A}$ και $\frac{\Delta A}{\Theta A} = \frac{Z\Delta^2}{\Theta Z^2}$ (διότι είναι ορθογώνιο το τρίγωνο ΘΖΔ και το ΖΑ είναι κάθετο στην υποτείνουσα) επομένως είναι $\frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{Z\Delta^2}{\Theta Z^2}$

Σχ.1



Απόδειξη του Αρχαίου θεωρήματος με χρήση της γεωμετρικής αντιστροφής. Πως μπορούμε να κατασκευάσουμε την αλυσίδα του Πάππου με χρήση της γεωμετρικής αντιστροφής.

Πιο πάνω, παραθέσαμε την απόδειξη του *αρχαίου θεωρήματος*, όπως την κατέγραψε ο Πάππος στο 4^{ο} βιβλίο της Συναγωγής του.
Θα αποδείξουμε τώρα το αρχαίο θεώρημα με την βοήθεια της γεωμετρικής αντιστροφής.
Προς χάριν ευκολίας θα αναφέρουμε πάλι με συντομία το αρχαίο θεώρημα:
Αν υποθέσουμε ότι η ακτίνα του κύκλου C_n είναι r_n, τότε το ύψος του κέντρου αυτού του κύκλου, βρίσκεται σε απόσταση $h=2n\, r_n$ από την ευθεία της βάσης.



Σχήμα Ι

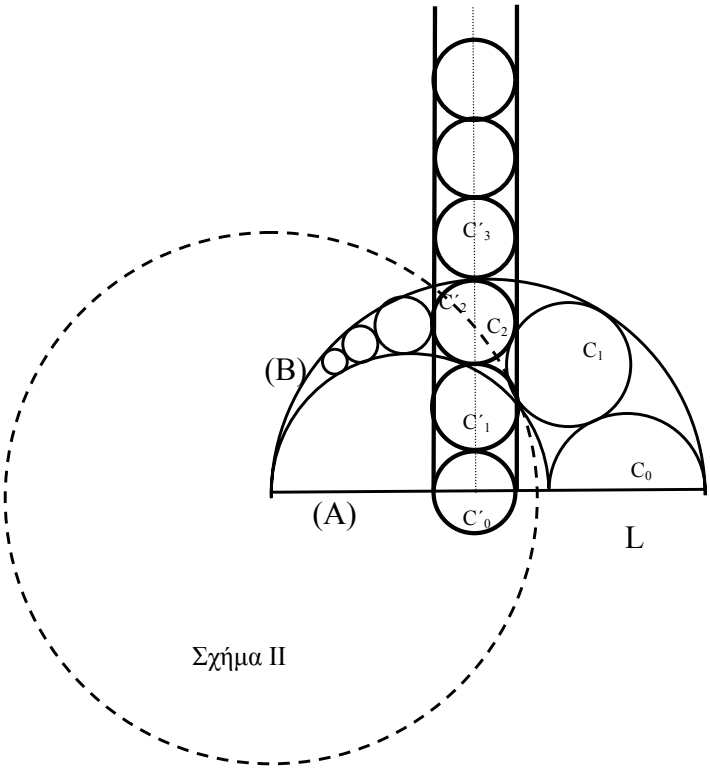
Αν προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε το σχήμα της αλυσίδας του Πάππου, ένας από τους τρόπους που θα μπορούσαμε να ενεργήσουμε θα ήταν να φανταστούμε ίσως (βάζοντας και την διαίσθησή μας στο παιχνίδι), ότι η αλυσίδα αυτή φαίνεται ως αποτέλεσμα της, κατά κάποιο τρόπο, «συμπίεσης» μιας στήλης που αποτελείται από κύκλους τοποθετημένους ο ένας πάνω στον άλλο και οι οποίοι είναι «πακεταρισμένοι» μεταξύ δύο παραλλήλων ευθειών. Η συμπίεση αυτή γίνεται προς την κατεύθυνση ενός σημείου που ανήκει στην ευθεία της βάσης της αρβήλου και συγκεκριμένα προς το σημείο Q, που είναι το σημείο επαφής του εξωτερικού ημικυκλίου της αρβήλου με το εσωτερικό της ημικύκλιο (Α). Φανταζόμαστε την συμπίεση αυτή να γίνεται "*πιάνοντας*" κατά κάποιο τρόπο το σημείο τομής των δύο παραλλήλων ευθειών που είναι το σημείο στο άπειρο και φέρνοντας το στο σημείο Q, κυρτώνοντας το όλο σχήμα των δύο παραλλήλων γραμμών και των πακεταρισμένων κύκλων μέσα σε αυτές έτσι ώστε, ο κύκλος που βρίσκεται στην βάση της στήλης των κύκλων να μην μεταβληθεί καθόλου, οι δε παράλληλες ευθείες να *"λυγίσουν"* και να γίνουν οι κύκλοι Α και Β και οι κύκλοι που είναι *πακεταρισμένοι* μεταξύ των δύο γραμμών οι οποίες λυγίζουν, να μικραίνουν για να μπορούν να "*χωράνε*" πάντα μεταξύ των Α και Β. Το σχήμα υποδεικνύει την χρήση αντιστροφής I_K ως προς ένα κύκλο Κ ο οποίος έχει κέντρο το σημείο Q και είναι ορθογώνιος στον κύκλο C_0. Την εικόνα ενός σχήματος Φ θα την συμβολίζουμε με $I_K(\Phi)$.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι ο κύκλος Κ έχει κέντρο το σημείο Q και είναι ορθογώνιος στον κύκλο C_0. Η εικόνα $I_K(C_0)$ του C_0, είναι ο ίδιος ο κύκλος C_0 διότι είναι ορθογώνιος με τον κύκλο της αντιστροφής. Οι εικόνες των κάθετων γραμμών Α΄, Β΄ και Μ΄ μέσω της αντιστροφής ως προς τον Κ, γίνονται οι κύκλοι Α,Β,Μ αντίστοιχα οι οποίοι διέρχονται από το σημείο Q και είναι συμμετρικοί ως προς την γραμμή της βάσης (η ευθεία της βάσης είναι η QN). Οι κύκλοι $C'_0, C'_1, C'_2, C'_3, \ldots, C'_n$ απεικονίζονται σε μια άλλη σειρά κύκλων

$C_0, C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$. Επειδή κάθε σημείο (άρα και κάθε σημείο τομής), απεικονίζεται μέσω της αντιστροφής σε ένα και μόνο ένα σημείο, οι κύκλοι $C'_0, C'_1, C'_2, C'_3, \ldots, C'_n$ θα πρέπει να είναι και αυτοί εφαπτόμενοι και μεταξύ τους αλλά και με τους κύκλους Α και Β. Τα σημεία επαφής των κύκλων $C'_0, C'_1, C'_2, C'_3, \ldots, C'_n$ βρίσκονται όλα πάνω στην ευθεία Μ΄, άρα τα σημεία επαφής των κύκλων $C_0, C_1, C_2, C_3, \ldots C_n$ θα πρέπει να βρίσκονται στην εικόνα του Μ΄, που είναι ο κύκλος Μ. Θα επανέλθουμε με αρκετές λεπτομέρειες στην γεωμετρική κατασκευή των διαφόρων αλυσίδων κύκλων που έχουμε μέσα στην άρβηλο, σε επόμενη παράγραφο.

Με σκοπό να αποδείξουμε τον τύπο $h=2n\, r_n$ θα επιλέξουμε ως κύκλο αντιστροφής τον κύκλο Κ που έχει κέντρο το σημείο Q και ακτίνα τέτοια ώστε να είναι ορθογώνιος στον κύκλο C_n.

Ο κύκλος C_n πάλι είναι ένας οποιοσδήποτε κύκλος από την σειρά των κύκλων $C_0, C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n, \ldots$.



Σχήμα ΙΙ

Κατά την αντιστροφή ως προς τον κύκλο Κ, ο κύκλος C_n παραμένει αναλλοίωτος και όλοι οι υπόλοιποι κύκλοι εικόνες $C'_0, C'_1, C'_2, C'_3, \ldots, C'_{n-1}, C'_{n+1}, \ldots$ στοιβάζονται πάνω και κάτω από τον κύκλο C_n. Οι κύκλοι Α και Β μετασχηματίζονται σε δύο κατακόρυφες ευθείες γραμμές Α΄ και Β΄, οι οποίες εφάπτονται στους κύκλους που είναι οι εικόνες των κύκλων $C_0, C_1, C_2, C_3, \ldots C_n, \ldots$ Επειδή οι κύκλοι $C'_0, C'_1, C'_2, C'_3, \ldots, C_n, \ldots$ εφάπτονται στις δύο παράλληλες μεταξύ τους ευθείες Β΄, Α΄ θα έχουν την ίδια ακτίνα. Έστω ότι αυτή είναι η r_n. Το αποτέλεσμα τώρα προκύπτει άμεσα.

Ας δούμε μια παραλλαγή της απόδειξης αυτής:

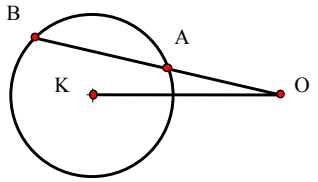
Θα ξεκινήσουμε θυμίζοντας ότι δύο κύκλοι που είναι αντίστροφοι ως προς έναν κύκλο είναι μεταξύ τους ομοιόθετοι. Θα αποδείξουμε τις αντίστοιχες σχέσεις με έναν τρόπο διαφορετικό από τον τρόπο που τις έχουμε παρουσιάσει σε άλλα σημεία[3] της εργασίας μας.

Έστω ένας κύκλος με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα ρ, τον οποίο συμβολίζουμε με (Ο, ρ).

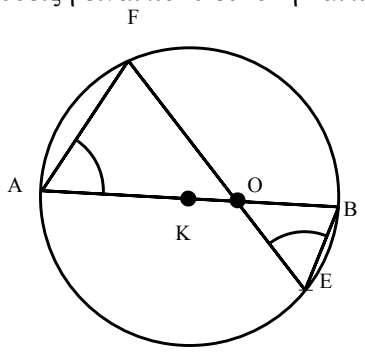
Ο κύκλος αυτός θα υποθέσουμε ότι είναι ο κύκλος ως προς τον οποίο γίνεται η αντιστροφή.

[3] Πολλές φορές επαναλμβάνουμε πράγματα στα οποία έχουμε αναφερθεί και αλλού. Αυτό γίνεται για να μην είναι ο αναγνώστης υποχρεωμένος να ψάχνει με αποτέλεσμα να χάνει τον ρυθμό μελέτης του και την σειρά του. Όμως η επανάληψη γίνεται πάντα με διαφορετικό τρόπο ώστε ο αναγνώστης να έχει την ευκαιρία να δει κάποια πράγματα και με άλλους τρόπους.

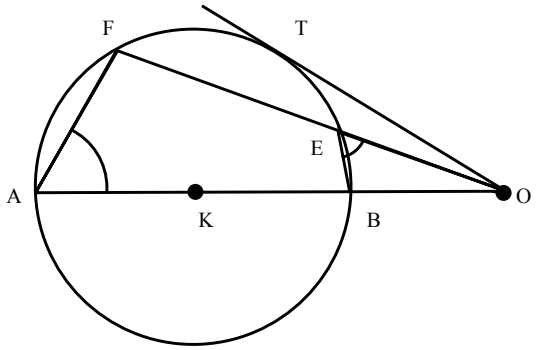
Θεώρημα 1: Έστω ότι το σημείο Ρ διαγράφει τον κύκλο C. Ο κύκλος C δεν διέρχεται από το κέντρο του κύκλου της αντιστροφής. Τότε η εικόνα Ρ΄ του Ρ μέσω της αντιστροφής ως προς τον κύκλο (Ο, ρ) διαγράφει ένα κύκλο C΄.
Οι δύο αυτοί κύκλοι C και C΄, οι οποίοι είναι αντίστροφοι μεταξύ τους ως προς τον κύκλο (Ο, ρ), είναι μεταξύ τους ομοιόθετοι με κέντρο ομοιοθεσίας το κέντρο Ο του κύκλου της αντιστροφής και λόγο ομοιοθεσίας το λόγο $\frac{\rho^2}{p}$, όπου ρ^2 είναι η δύναμη της αντιστροφής και p η δύναμη το κέντρου της αντιστροφής Ο ως προς τον κύκλο C.
Η απόδειξη του πρώτου μέρους του θεωρήματος θα γίνει με την βοήθεια της δύναμης σημείου ως προς κύκλο.
Η δύναμη ενός σημείου Ο ως προς ένα κύκλο C, είναι το μέγεθος $OK^2 - \rho^2$, όπου Κ είναι το κέντρο του κύκλου C και ρ είναι η ακτίνα του.
Αποδεικνύεται ότι $OA \bullet OB$ είναι πάντα σταθερό και ισούται με $\left|OK^2 - \rho^2\right|$.



Η απόδειξη είναι πολύ εύκολη και προκύπτει άμεσα από τα πιο κάτω σχήματα:

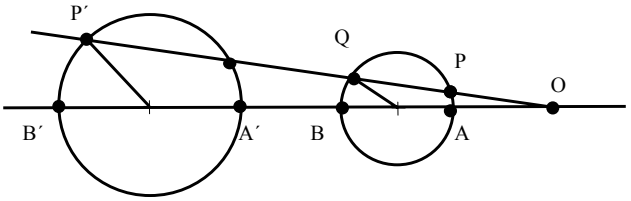


σχήμα 1α



σχήμα 1β

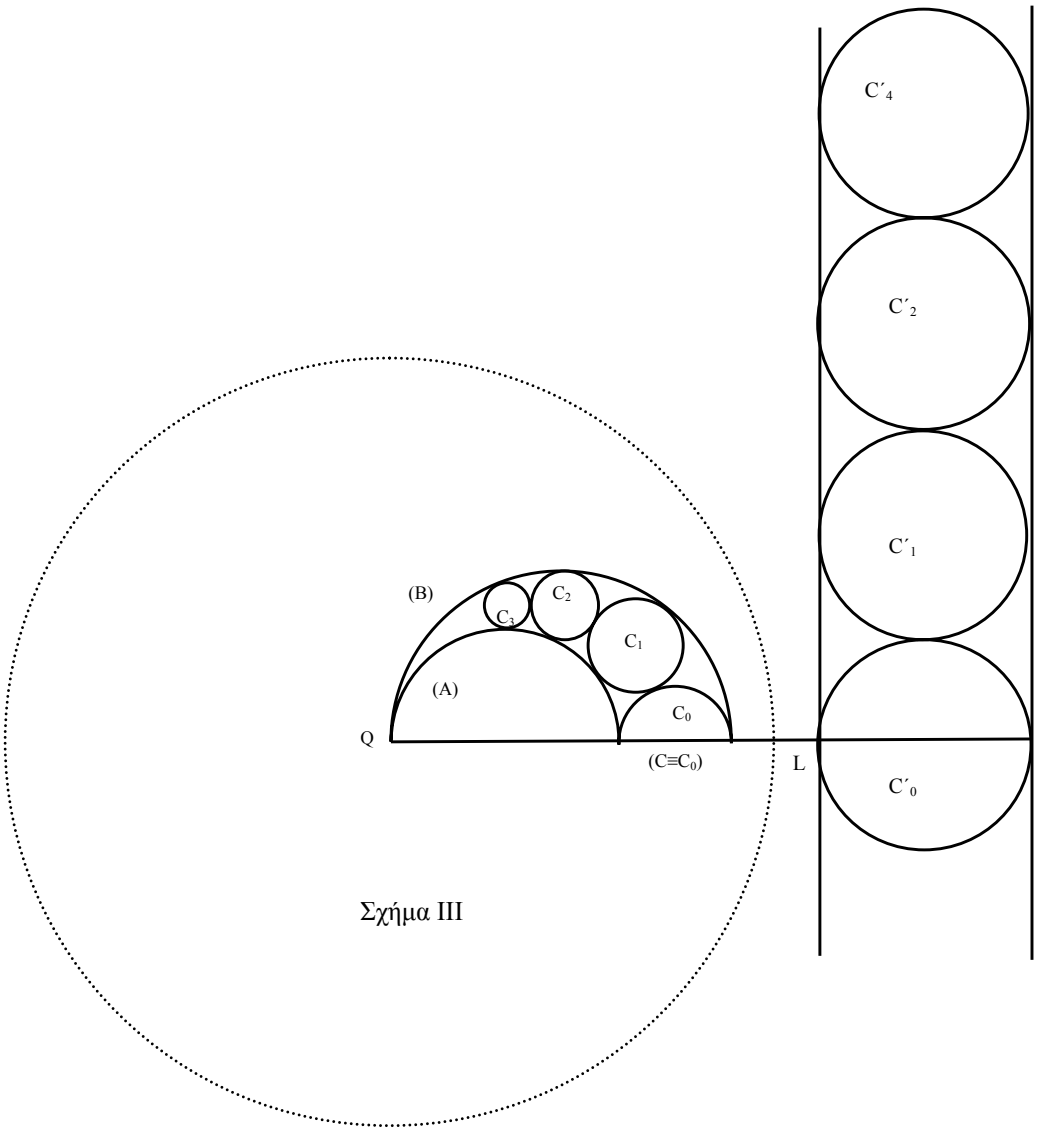
Τα τρίγωνα OFA και OEB (σχήματα 1α και 1β) είναι όμοια άρα: OF·OE=OA·OB.
Αφού $K\mathrm{A} \bullet K\mathrm{B} = r^2$ και έστω ότι $OK = d$ τότε από το σχήμα 1α έχουμε:
$OA \bullet OB = (OK + KA)(KB - KO) = r^2 - d^2$.
Από το σχήμα 1β θα προκύπτει ότι: $OA \bullet OB = (OK + KA)(KO - KB) = d^2 - r^2$.
Έτσι λοιπόν: $OA \bullet OB = \left|d^2 - r^2\right|$.



Έστω η ευθεία OP που συνδέει το κέντρο της αντιστροφής Ο με ένα τυχαίο σημείο P του δοθέντος κύκλου C. Αυτή η ευθεία τέμνει πάλι τον κύκλο C στο σημείο Q. Έστω ότι Ρ΄ είναι το αντίστροφο σημείο του Ρ ως προς τον κύκλο (Ο, ρ). Ας θέσουμε $\tilde{p}$ την δύναμη του

Ο ως προς τον κύκλο (C). Τότε $OP \bullet OP' = \rho^2$ και $OP \bullet OQ = \tilde{p}$ οπότε $\frac{OP'}{OQ} = \frac{\rho^2}{\tilde{p}}$. Έτσι καθώς το Q διαγράφει μαζί με το σημείο P τον κύκλο C, το σημείο P' διαγράφει τον κύκλο C΄ που είναι ομοιόθετος με τον κύκλο C με το σημείο Ο κέντρο της ομοιοθεσίας και λόγο ομοιοθεσίας το λόγο $\frac{\rho^2}{\tilde{p}}$.

Από την προηγούμενη απόδειξη για την αλυσίδα του Πάππου, θα κρατήσουμε μόνο το εξής: Το κέντρο του κύκλου της αντιστροφής (K) είναι το σημείο επαφής Q των κύκλων (A) και (B) και αυτό διότι η αντιστροφή με κέντρο το σημείο Q απεικονίζει τους κύκλους (A) και (B) σε δύο ευθείες κάθετες προς την ευθεία της βάσης L. Αν λοιπόν η ακτίνα του κύκλου αντιστροφής (K) είναι τυχαία και όχι τέτοια ώστε ο κύκλος (K) να είναι ορθογώνιος ως προς κάποιο κύκλο από τους κύκλους C_n, τότε η αλυσίδα των κύκλων C_n απεικονίζεται σε μια νέα αλυσίδα ίσων μεταξύ τους κύκλων οι οποίοι εγγράφονται ανάμεσα στις δύο παράλληλες ευθείες - εικόνες των κύκλων (A) και (B), οι οποίες είναι κάθετες τώρα σε τυχαία θέση πάνω στη ευθεία L (η θέση αυτή εξαρτάται από την ακτίνα του κύκλου της αντιστροφής).



Σχήμα ΙΙΙ

Είναι φανερό ότι η απόσταση h' του τυχαίου κύκλου C'_n της αλυσίδας εικόνας από την ευθεία L είναι $h'_n = 2nR'$ όπου R' η κοινή ακτίνα των κύκλων-εικόνων. Όμως κάθε ζεύγος

αντίστροφων κύκλων είναι ομοιόθετοι κύκλοι με κέντρο ομοιοθεσίας το κέντρο του κύκλου της αντιστροφής (αυτό προκύπτει από το θεώρημα 1) οπότε $\frac{h_n}{R_n} = \frac{h'_n}{R'_n} = 2n$.

Απόδειξη της πρότασης 6 του βιβλίου των λημμάτων με την βοήθεια της γεωμετρικής αντιστροφής.:

Ας υποθέσουμε ότι η ακτίνα του ημικυκλίου (A) συμβολίζεται με R_a, η ακτίνα του ημικυκλίου (C) συμβολίζεται με R_c και η ακτίνα του ημικυκλίου (B) συμβολίζεται με R_b. Ας υποθέσουμε επίσης ότι η ακτίνα R_c συνδέεται με την ακτίνα R_a με την ισότητα: $R_c = kR_a$.

Έχουμε: $R_b = R_c + R_a$

Άρα: $\left.\begin{array}{l} R_b = R_c + R_a \\ R_c = kR_a \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} R_a = R_b \dfrac{1}{(1+k)} \\ R_c = R_b \dfrac{k}{(1+k)} \end{array}\right.$

Θα εφαρμόσουμε αντιστροφή ως προς κύκλο με κέντρο το σημείο A (σχήμα IV) και ακτίνα $2R_b$. Τότε η αριστερή κατακόρυφη ευθεία (αυτή που αντιστοιχεί στο μεγάλο ημικύκλιο (B)) γίνεται εφαπτόμενη και στο μεγάλο ημικύκλιο (B) και στο ημικύκλιο (C), αφού το κοινό σημείο επαφής των δύο κύκλων (δηλαδή το σημείο B) ανήκει στον κύκλο της αντιστροφής και είναι έτσι σταθερό. Η κάθετη ευθεία που βρίσκεται προς τα δεξιά αντιστοιχεί στο ημικύκλιο που βρίσκεται προς τα αριστερά (δηλαδή το ημικύκλιο (A)).

Θα εισάγουμε μερικούς επιπλέον συμβολισμούς:

Με O_n θα συμβολίζουμε το κέντρο του κύκλου C_n και με P_n την προβολή του O_n πάνω στην ευθεία L. Με AB, CB, AC θα ονομάσουμε τις διαμέτρους των τριών ημικυκλίων. Ισχύουν δε οι ισότητες: $AB = 2R_b$, $AC = 2R_a$ και $CB = 2R_c$. Με C' παριστάνεται το αντίστροφο σημείο του σημείου C, O' είναι το μέσο του τμήματος BC'.

$\left(2R_b\right)^2 = AB^2 = AC \cdot AC'$

οπότε

$$AC' = \frac{\left(2R_b\right)^2}{AC} = \frac{4R_b^{\ 2}}{2R_a} = \frac{4R_b^{\ 2}}{2R_b \dfrac{1}{(1+k)}} = 2(1+k)R_b$$

Επίσης έχουμε:

$$AO' = AB + BO'$$
$$AO' = AC' - O'C' = AC' - BO'$$

Άρα

$$AO' = \frac{(AB + AC')}{2} = \frac{2R_b + 2(1+k)R_b}{2}$$

Οπότε:

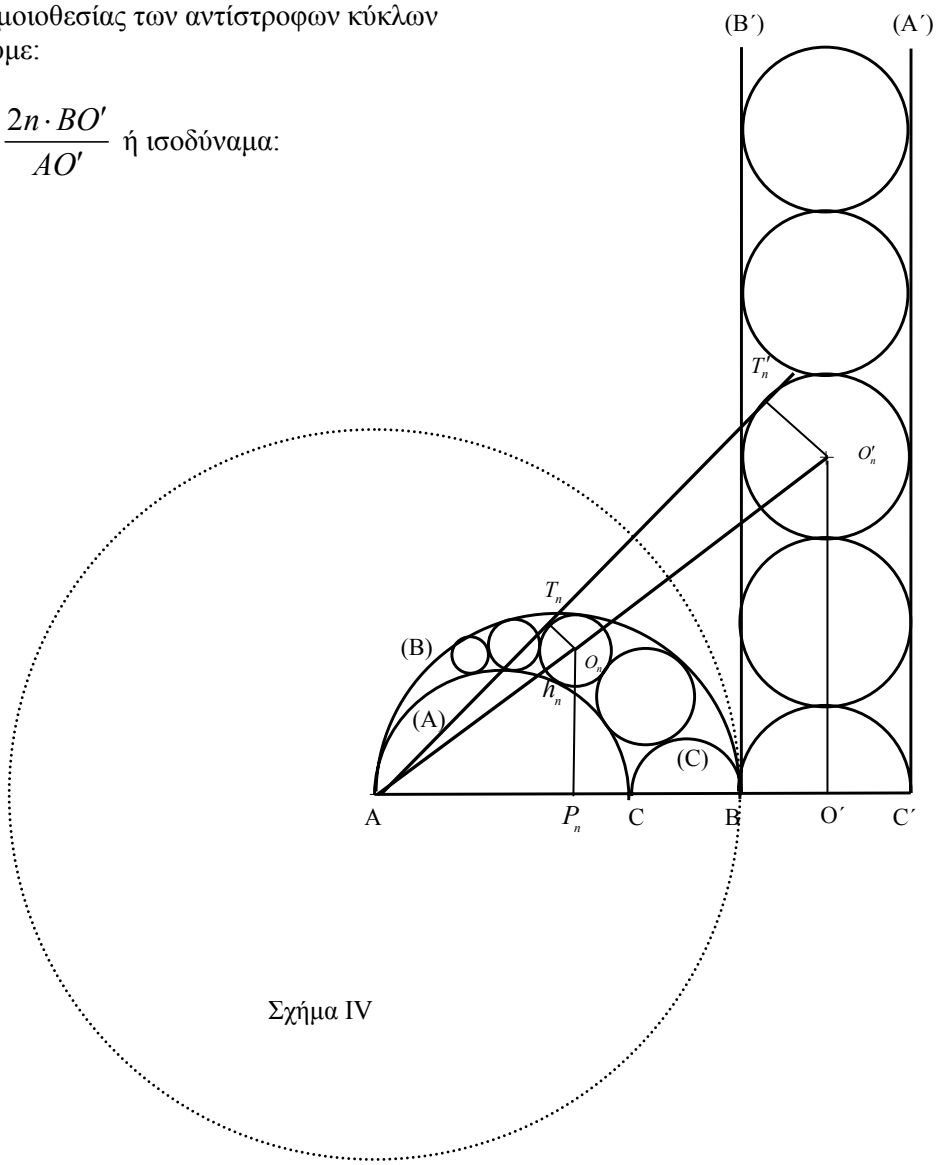
$$AO' = (2+k)R_b$$

επίσης έχουμε:

$$BO' = AO' - AB = (2+k)R_b - 2R_b = kR_b$$

λόγω ομοιοθεσίας των αντίστροφων κύκλων θα έχουμε:

$$\frac{h_n}{AP_n} = \frac{2n \cdot BO'}{AO'}$$ ή ισοδύναμα:



Σχήμα IV

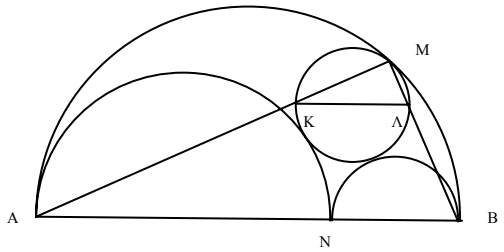
$$\frac{R_n}{AP_n} = \frac{BO'}{AO'}$$

οπότε

$$AP_n = \frac{AO' \cdot R_n}{BO'} = \frac{(2+k)R_n}{k} \quad (\alpha)$$

Αυτός ο τύπος (τύπος (α)) δίνει την απόσταση του σημείου Α από την προβολή του κέντρου του κύκλου C_n πάνω στην ευθεία της βάσης L.

Τύπος του Αρχιμήδη – Πρόταση 6 του βιβλίου των Λημμάτων.



Έστω ότι Μ είναι το σημείο επαφής του κύκλου *ΚΛΜ* με το ημικύκλιο *ΑΒΜ*. Είναι *ΚΛ* παράλληλη με την *ΑΒ*.

Αν $\frac{AN}{NB} = r$ τότε: $\frac{K\Lambda}{AB} = \frac{r}{1+r+r^2}$ (τύπος του Αρχιμήδη-Πρ.6)

Θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε αρχικά μια γενίκευση του τύπου του Αρχιμήδη, οπότε ο τύπος του Αρχιμήδη θα προκύψει άμεσα από την γενίκευση αυτή (για n=1 και για k=r).

Τα σημεία επαφής των κοινών εφαπτόμενων δύο αντίστροφων μεταξύ τους κύκλων, οι οποίες διέρχονται από το σημείο Α (το Α είναι κέντρο ομοιοθεσίας για κάθε τέτοιο ζεύγος κύκλων) παίζουν ένα διπλό ρόλο.

Από την μια μεριά είναι αντίστοιχα-ομόλογα σημεία ως προς την αντίστοιχη ομοιοθεσία και από την άλλη μεριά είναι αντιομόλογα σημεία ως προς την αντίστοιχη αντιστροφή[4].

Πιο συγκεκριμένα έχουμε:

$R'_n = BO' = kR_b$ (όπως έχουμε δείξει πιο πάνω).

$$\frac{AT'_n}{AT_n} = \frac{R'_n}{R_n} = \frac{kR_b}{R_n}.$$

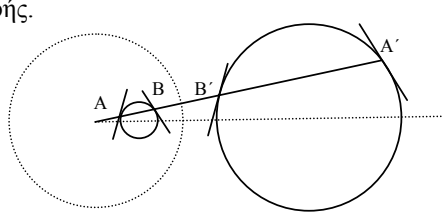
και επίσης:

$AT'_n \cdot AT_n = (2R_b)^2$ (από την αντιστροφή)

οπότε ο συνδυασμός των δύο αυτών δίνει:

$$\left(AT'_n\right)^2 = \frac{4R_b^3 k}{R_n}$$

[4] Δύο κύκλοι μπορούν να αντιστραφούν ο ένας στον άλλο. Ως κέντρο μιας τέτοιας αντιστροφής μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιοδήποτε κέντρο ομοιοθεσίας των δύο κύκλων. Τα ζεύγη σημείων των δύο κύκλων που είναι αντίστοιχα ως προς την ομοιοθεσία λέγοντα ομόλογα ενώ τα ζεύγη σημείων που είναι αντίστοιχα ως προς την αντιστροφή λέγονται αντιομόλογα. Στο σχήμα τα ζεύγη Α,Β΄ και Β,Α΄ είναι ομόλογα ενώ τα ζεύγη Α,Α΄ και Β,Β΄ είναι αντιομόλογα. Ο κύκλος με διακεκομένες γραμμές είναι ο κύκλος της αντιστροφής.



$$\left(AT_n'\right)^2=\left(AO_n'\right)^2-\left(O_nT_n'\right)^2=\left(AO'\right)^2+\left(O'O_n'\right)^2-\left(O_n'T_n'\right)^2.$$

Επειδή $AO'=(2+k)R_b$

$$\left.\begin{array}{l} O'O_n'=h_n' \\ \dfrac{h_n'}{R_n'}=\dfrac{h_n}{R_n}=2n \end{array}\right\}\Rightarrow O'O_n'=h_n'=2nR_n'=2nkR_b$$

$$O_n'T_n'=R_n'=kR_b$$

άρα $\left(AT_n'\right)^2=(2R_b+kR_b)^2+(2nkR_b)^2-(kR_b)^2$

έτσι έχουμε:

$$\frac{4R_b^3k}{R_n}=\left(2+k\right)^2R_b^2+4n^2k^2R_b^2-k^2R_b^2$$

οπότε $R_n=\dfrac{R_bk}{1+k+n^2k^2}$. Για n=1 και k=r παράγεται ο τύπος (β) τύπος του Αρχιμήδη.

Επίσης $AP_n=\dfrac{R_b(k+2)}{k^2n^2+k+1}$

Προβλήματα σχετικά με την άρβηλο – Λύση αυτών μέσω γεωμετρικής αντιστροφής

Ας περάσουμε σε ένα άλλο πρόβλημα που έχει σχέση με την άρβηλο.
Ας υποθέσουμε ότι A_1 και A_2 είναι δύο κύκλοι εφαπτόμενοι μεταξύ τους εσωτερικά. Οι κύκλοι αυτοί έχουν ακτίνες a_1 , a_2 και κέντρα τα σημεία $(a_1,0)$ και $(a_2,0)$ αντίστοιχα. Τα a_1 και a_2 πληρούν την σχέση $\alpha_2>\alpha_1>0$.
Ας υποθέσουμε ότι C είναι ένας οποιοσδήποτε κύκλος που βρίσκεται στην περιοχή M μεταξύ των κύκλων A_1 και A_2 εφαπτόμενος στους δύο αυτούς κύκλους.
Να δείξετε ότι ισχύουν τα εξής:
α) Ο γεωμετρικός τόπος του κέντρου του κύκλου C καθώς αυτός διατρέχει την περιοχή M είναι μια έλλειψη η οποία έχει ημιάξονες τον αριθμητικό μέσο $\dfrac{a_1+a_2}{2}$ και τον γεωμετρικό μέσο $\sqrt{a_1a_2}$ των δύο ακτινών a_1 και a_2
β) Έστω

C_t είναι ένας κύκλος ακτίνας r_t και κέντρου $P_t(x_t,y_t)$

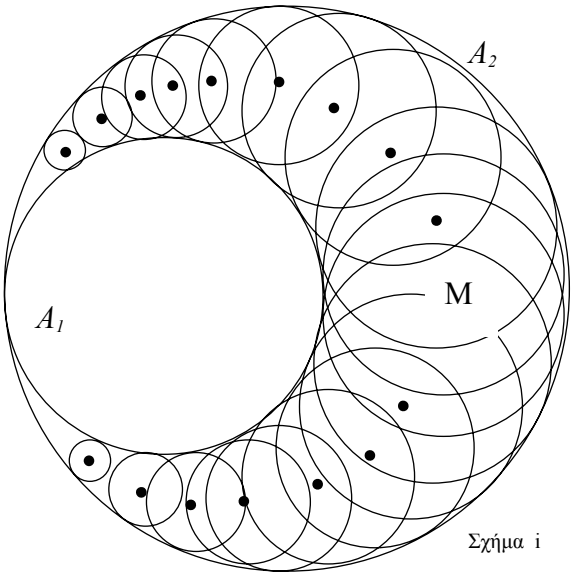
$$\phi_t=a_1a_2+t^2(a_2-a_1)^2$$

$$r_t=\frac{a_1a_2(a_2-a_1)}{\phi_t}$$

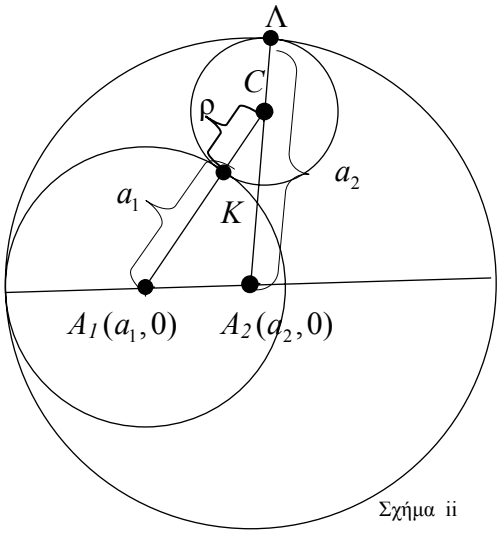
$$x_t=\frac{a_1a_2(a_2+a_1)}{\phi_t}$$

$$y_t=2tr_t$$

Τότε για κάθε πραγματική τιμή του t ο κύκλος C_t κείται στην περιοχή M και είναι εφαπτόμενος στους κύκλους A_1 και A_2 καθώς και στον κύκλο C_{t-1}.

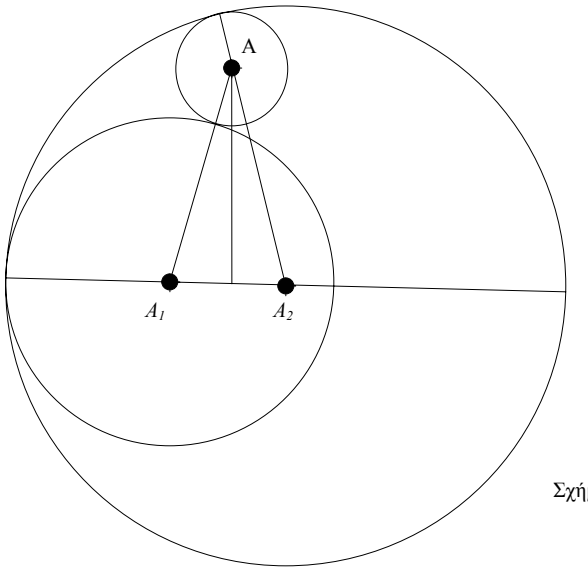


Σχήμα i



Σχήμα ii

Το πρώτο μέρος είναι στοιχειώδες:
Μια απλή ματιά στο σχήμα ii δείχνει ότι το κέντρο του κύκλου C βρίσκεται πάντα σε τέτοια θέση ώστε το άθροισμα των αποστάσεων από τα σημεία $(a_1,0)$ και $(a_2,0)$ να είναι σταθερό και ίσο με a_1+a_2.
Πράγματι έχουμε:
$A_1C + A_2C = A_1K + KC + A_2\Lambda - \Lambda C = A_1K + A_2\Lambda = \alpha_1 + \alpha_2$.
Προφανώς ο μεγάλος ημιάξονας είναι: $\dfrac{a_1+a_2}{2}$
Για να καθορίσουμε τον μικρό ημιάξονα θα θεωρήσουμε τον κύκλο C με κέντρο στο υψηλότερο σημείο της έλλειψης.



Σχήμα iii

Στο ψηλότερο σημείο της έλλειψης το αντίστοιχο τρίγωνο $A\,A_1\,A_2$ (σχήμα iii) που σχηματίζεται από τους τρεις κύκλους θα είναι ισοσκελές και κάθε μια από τις ίσες πλευρές του τριγώνου αυτού θα έχουν μήκος $\frac{a_1+a_2}{2}$ ενώ η βάση θα είναι a_2-a_1

Το ύψος h του τριγώνου αυτού από το πυθαγόρειο θεώρημα θα είναι $h^2=\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2-\left(\frac{a_1-a_2}{2}\right)^2$ οπότε $h^2=a_1a_2$

Για το δεύτερο μέρος της απόδειξης θα θεωρήσουμε ότι το σημείο $\left(X,Y\right)$ είναι ένα τυχαίο σημείο του κύκλου C_t.

Τότε ισχύει η ισότητα

$$\left(X^2+Y^2\right)\phi_t-2\alpha_1\alpha_2(\alpha_2+\alpha_1)X-4ta_1a_2(a_2-a_1)Y+4\left(a_1a_2\right)^2=0$$

Πράγματι έχουμε:

Η εξίσωση του κύκλου C_t ο οποίος έχει κέντρο το $P_t(x_t,y_t)$ και ακτίνα r_t είναι η

$$(X-x_t)^2+(Y-y_t)^2=r_t^2$$

Οπότε:

$$X^2-2Xx_t+x_t^2+Y^2-2Yy_t+y_t^2=r_t^2$$

και κάνοντας αντικατάσταση των :

$$\phi_t=a_1a_2+t^2(a_2-a_1)^2$$

$$r_t=\frac{a_1a_2(a_2-a_1)}{\phi_t}$$

$$x_t=\frac{a_1a_2(a_2+a_1)}{\phi_t}$$

$$y_t=2tr_t$$

στην εξίσωση έχουμε:

$$X^2-2X\frac{a_1a_2(a_2+a_1)}{\phi_t}+\left(\frac{a_1a_2(a_2+a_1)}{\phi_t}\right)^2+Y^2-2Y2t\frac{a_1a_2(a_2-a_1)}{\phi_t}+\left(2t\frac{a_1a_2(a_2-a_1)}{\phi_t}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{a_1a_2(a_2-a_1)}{\phi_t}\right)^2$$

οπότε μετά από πράξεις τελικά παίρνουμε:

$$\left(X^2+Y^2\right)\phi_t-2\alpha_1\alpha_2(\alpha_2+\alpha_1)X-4ta_1a_2(a_2-a_1)Y+4\left(a_1a_2\right)^2=0$$

αν εφαρμόσουμε στον κύκλο C_t την αντιστροφή: $X=\frac{4a_1a_2x}{x^2+y^2}$ και $Y=\frac{4a_1a_2y}{x^2+y^2}$

(δηλαδή την αντιστροφή ως προς τον κύκλο με κέντρο την αρχή Ο και ακτίνα $2\sqrt{a_1a_2}$)

τότε η εξίσωση $\left(X^2+Y^2\right)\phi_t-2\alpha_1\alpha_2(\alpha_2+\alpha_1)X-4ta_1a_2(a_2-a_1)Y+4\left(a_1a_2\right)^2=0$

γίνεται :

$$x^2+y^2-2(a_1+a_2)x-4t(a_2-a_1)y+4\phi_t=0$$

η εξίσωση αυτή μπορεί να γραφεί στην μορφή:

$$\left(x-a_1-a_2\right)^2+\left(y-2ta_2+2a_1t\right)^2=\left(a_1-a_2\right)^2$$

Με παράμετρο το t, η τελευταία αυτή εξίσωση είναι εξίσωση μιας οικογένειας ίσων κύκλων οι οποίοι εφάπτονται στις παράλληλες ευθείες: $x = 2a_1$ και $x = 2a_2$.

(διότι: τα κέντρα της οικογένειας των κύκλων έχουν τετμημένη $x_0 = (a_1 + a_2)$ άρα εφάπτεται στις κατακόρυφες ευθείες $x = x_0 - r$, $x = x_0 + r$ όπου $r = a_2 - a_1$ είναι η ακτίνα του κύκλου που περιγράφεται από την εξίσωση:

$$(x - a_1 - a_2)^2 + (y - 2ta_2 + 2a_1 t)^2 = (a_1 - a_2)^2.$$

Έτσι οι δύο εξισώσεις των κατακόρυφων εφαπτόμενων στον κύκλο ευθειών είναι οι:

$$x = a_1 + a_2 - (a_2 - a_1) \Rightarrow x = 2a_1$$

και

$$x = a_1 + a_2 + (a_2 - a_1) \Rightarrow x = 2a_2)$$

Σε αυτήν την οικογένεια κύκλων για κάθε t, ο κύκλος C_t είναι εφαπτόμενος με τον αντίστοιχο C_{t-1} και αυτό συμβαίνει διότι η απόσταση μεταξύ των κέντρων τους είναι ίση με την διάκεντρό τους.

Ας δούμε τους αντίστοιχους υπολογισμούς:

Έστω S είναι η απόσταση μεταξύ των κέντρων των C_t και C_{t-1}.Τότε από τον τύπο της απόστασης έχουμε:

$$S = \sqrt{\left[2t(a_2 - a_1) - 2(t-1)(a_2 - a_1)\right]^2} = 2(a_2 - a_1) = 2\delta$$

όπου δ είναι η διάκεντρος των δύο κύκλων.

Τώρα είναι η στιγμή που πρέπει να αντιστρέψουμε και πάλι .

Η οικογένεια κύκλων $(x - a_1 - a_2)^2 + (y - 2ta_2 + 2a_1 t)^2 = (a_1 - a_2)^2$

θα αντιστραφεί στην οικογένεια

$$(X^2 + Y^2)\phi_t - 2\alpha_1\alpha_2(\alpha_2 + \alpha_1)X - 4ta_1a_2(a_2 - a_1)Y + 4(a_1a_2)^2 = 0.$$

(Αυτό μπορούμε να το καταφέρουμε κάνοντας την αντικατάσταση:

$$x = \frac{4a_1a_2X}{X^2 + Y^2} \quad \text{και} \quad y = \frac{4a_1a_2Y}{X^2 + Y^2}$$

στην οικογένεια:

$$(x - a_1 - a_2)^2 + (y - 2ta_2 + 2a_1 t)^2 = (a_1 - a_2)^2).$$

Η ευθεία $x = 2a_1$ θα αντιστραφεί στον κύκλο A_2 που είναι ο εξωτερικός κύκλος της αρβήλου και η ευθεία $x = 2a_2$ αντιστρέφεται στον κύκλο A_1 που είναι ο εσωτερικός κύκλος της αρβήλου.

Πράγματι ας κάνουμε την αντικατάσταση: $x = \dfrac{4a_1a_2X}{X^2 + Y^2}$ στην ευθεία $x = 2a_1$:

$$\frac{4a_1a_2X}{X^2 + Y^2} = 2a_1 \Rightarrow X^2 + Y^2 - 2a_2X = 1 \Rightarrow$$

$$(X - a_2)^2 + Y^2 = a_2^2$$

Η τελευταία εξίσωση είναι η εξίσωση του κύκλου A_2. Ομοίως δουλεύουμε και για την άλλη εξίσωση: $x = 2a_2$.

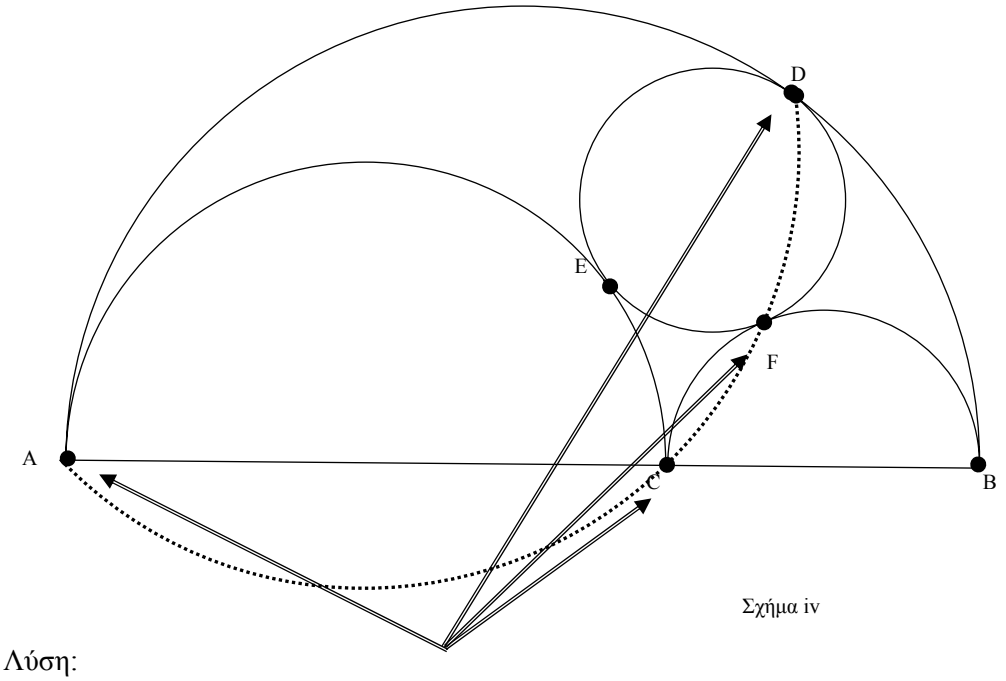
Είναι γνωστό ότι η αντιστροφή απεικονίζει κύκλους σε κύκλους και διατηρεί τις γωνίες.

Οι κύκλοι της οικογένειας $(x - a_1 - a_2)^2 + (y - 2ta_2 + 2a_1 t)^2 = (a_1 - a_2)^2$ δείξαμε ότι εφάπτονται. Άρα κατά την αντιστροφή τους (αντιστρέφονται στην οικογένεια

$\left(X^2+Y^2\right)\phi_t-2\alpha_1\alpha_2(\alpha_2+\alpha_1)X-4ta_1a_2(a_2-a_1)Y+4\left(a_1a_2\right)^2=0$) οι αντίστροφοί τους κύκλοι θα διατηρούν την γωνία μεταξύ τους άρα θα είναι και πάλι εφαπτόμενοι.
Έτσι συμπληρώνεται η απόδειξη του θεωρήματος.
Ο J Steiner στο έργο του Geometrsche Betrachtungen (1826) επεξεργάστηκε τις αλυσίδες των κύκλων που αντιστοιχούν στην ακολουθία τιμών του $t=0,1,2,3,...$ καθώς και την ακολουθία $t=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},...$
Από την αντιστροφή αυτή προκύπτουν πολλές αξιοσημείωτες ιδιότητες. Για παράδειγμα η ευθεία που ενώνει τα σημεία επαφής του κύκλου C_t με τους κύκλους A_1 και A_2 διέρχεται από το σταθερό σημείο $\left(\frac{2a_1a_2}{a_1+a_2},0\right)$. Επίσης η κοινή εσωτερική εφαπτομένη των κύκλων C_t και C_{t-1} διέρχεται από αυτό ακριβώς το σημείο. Τα σημεία: Ο(0,0), τα κέντρα των κύκλων A_1 και A_2, και το σημείο $\left(\frac{2a_1a_2}{a_1+a_2},0\right)$ αποτελούν αρμονική τετράδα.

Ομοκυκλικά σημεία

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε την άρβηλο η οποία σχηματίζεται από τα ημικύκλια AB, AC, BC.
Έστω επίσης ότι M είναι το μέσο του ημικυκλίου AC ενώ N είναι το μέσο του ημικυκλίου CB. Ένας κύκλος εγγράφεται στην άρβηλο και εφάπτεται στα ημικύκλια στα σημεία E,F,D. Τότε τα A,C,F,D είναι ομοκυκλικά και βρίσκονται σε έναν κύκλο του οποίου το κέντρο είναι το σημείο M (σχήμα iv). Παρομοίως τα σημεία B,C,E,D είναι ομοκυκλικά με κέντρο το σημείο N.



Σχήμα iv

Λύση:

Ομοκυκλικά σημεία

Θα εφαρμόσουμε αντιστροφή με κέντρο το σημείο A και δύναμη (δηλαδή ακτίνα του κύκλου της αντιστροφής) την $AC\cdot AB$ (σχήμα V). Αυτό το κάνουμε, για να αντιστρέψουμε

το σημείο B, αμοιβαία, με το σημείο C. Με αυτόν τον τρόπο πετυχαίνουμε, ο κύκλος που έχει διάμετρο με άκρα τα σημεία B και C, να παραμένει σταθερός. Το ημικύκλιο με διάμετρο την AB, αντιστρέφεται στην ευθεία την κάθετη στην AB στο σημείο C και το ημικύκλιο με διάμετρο την AC, αντιστρέφεται στην ευθεία η οποία είναι κάθετη στην ευθεία AB, στο σημείο B. Έτσι ο κύκλος ο οποίος εφάπτεται στα τρία ημικύκλια της αρβήλου, αντιστρέφεται σε έναν κύκλο ο οποίος εφάπτεται στις δύο κάθετες ευθείες προς την AB στα σημεία B,C και στο ημικύκλιο με διάμετρο την BC (ο κύκλος διαμέτρου BC δεν μεταβάλλεται με την εν λόγω αντιστροφή).

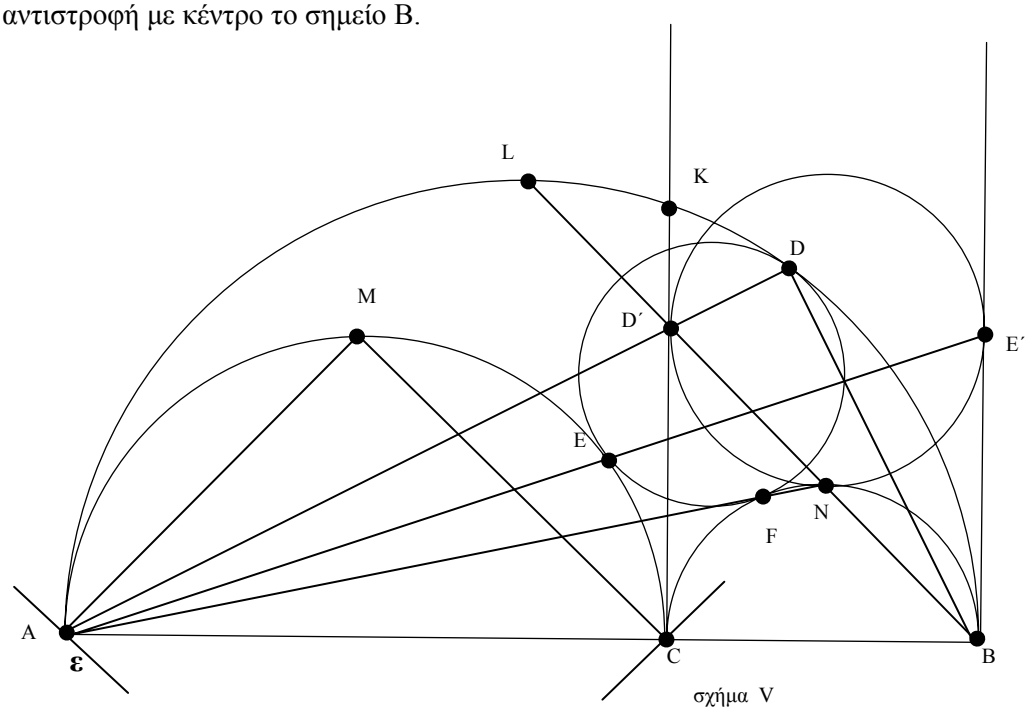
Η εικόνα του σημείου F είναι το σημείο N. Οι εικόνες D', E' των σημείων D, E βρίσκονται στις δύο κάθετες ευθείες στην AB και έτσι ορίζουν την διάμετρο $D'E'$ του κύκλου, που είναι η εικόνα του κύκλου που εφάπτεται στα τρία ημικύκλια της αρβήλου (δηλαδή του κύκλου (E,F,D)).

Από την πρόταση 1 του βιβλίου των λημμάτων του Αρχιμήδη, έχουμε ότι τα σημεία B, N, D' είναι συγγραμμικά. Η εικόνα των σημείων αυτών μέσω της αντίστροφής με κέντρο το A και δύναμη $AC \cdot AB$, είναι ένας κύκλος που διέρχεται από τα σημεία C, F και D.

Ο κύκλος αυτός είναι εικόνα μιας ευθείας, άρα πρέπει υποχρεωτικά να διέρχεται από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής, δηλαδή από το σημείο A. Αυτό που πρέπει να αποδείξουμε τώρα είναι ότι ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία C, F D και A έχει κέντρο το σημείο M. Η γωνία $\angle NBA = 45^0$ αφού το σημείο N είναι το μέσο του ημικυκλίου $\widehat{CB}$.

Γνωρίζουμε ότι η αντιστροφή διατηρεί το μέγεθος των γωνιών. Άρα ο κύκλος (D,F,C,A) θα σχηματίζει γωνία 45^0 με την AB. Έτσι η εφαπτόμενη **ε** του κύκλου (D,F,C,A) στο σημείο A, σχηματίζει γωνία 45^0 με την AC, οπότε και η κάθετη ευθεία προς την εφαπτόμενη αυτή στο σημείο A, σχηματίζει γωνία 45^0 με την AC. Το τρίγωνο AMC είναι ισοσκελές και ορθογώνιο, άρα η γωνία $\angle$MAB=45^0. Η κάθετη λοιπόν ευθεία προς την εφαπτόμενη **ε,** είναι η ευθεία AM. Λόγω συμμετρίας, η κάθετη ευθεία προς την εφαπτομένη του κύκλου (D,F,C,A) στο σημείο του C, είναι η ευθεία CM. Άρα το κέντρο του κύκλου (D,F,C,A) είναι το σημείο M.

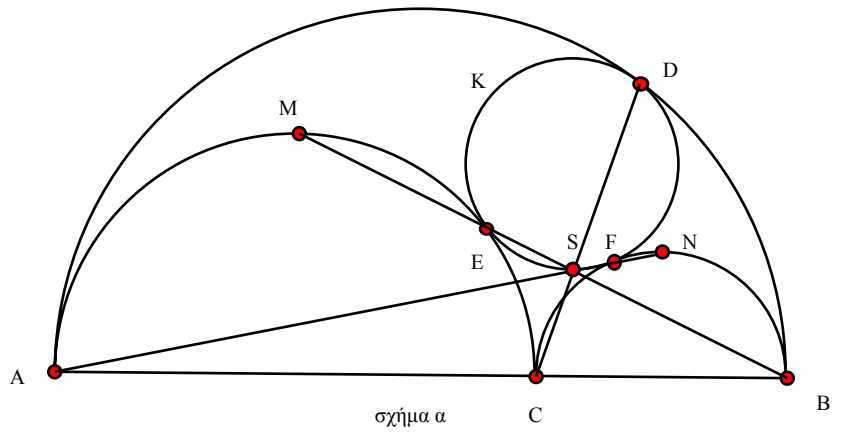
Η απόδειξη της ομοκυκλικότητας των σημείων B,C,E,D είναι παρόμοια και χρησιμοποιεί αντιστροφή με κέντρο το σημείο B.



σχήμα V

Συγγραμμικά σημεία

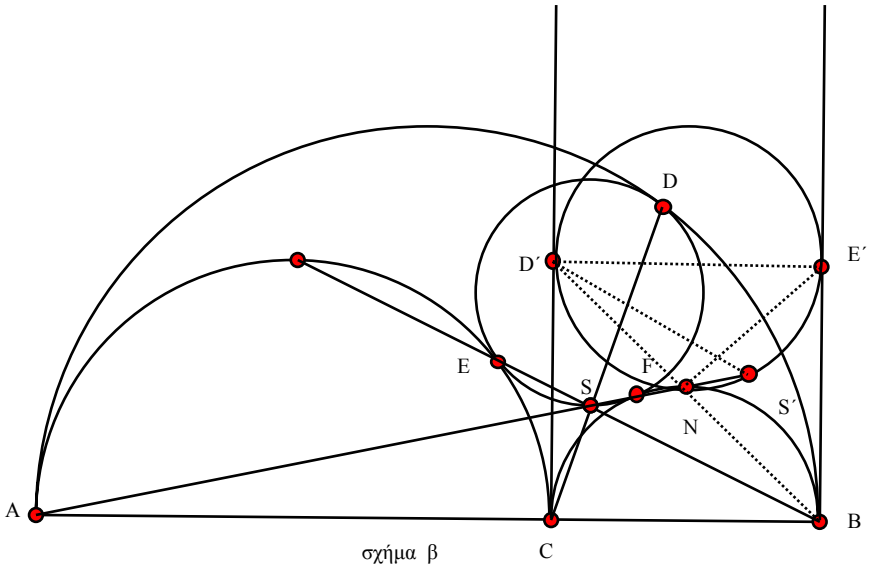
Ας υποθέσουμε ότι έχουμε την άρβηλο η οποία σχηματίζεται από τα ημικύκλια AB, AC, BC. Έστω επίσης ότι M είναι το μέσο του ημικυκλίου AC και N το μέσο του ημικυκλίου CB. Ένας κύκλος (Κ) εγγράφεται στην άρβηλο και εφάπτεται στα ημικύκλια στα σημεία E, F, D. Τότε οι ευθείες AN, BM, CD είναι συντρέχουσες. Το σημείο που αυτές οι τρεις ευθείες συντρέχουν ανήκει στον κύκλο (Κ).



σχήμα α

Λύση:
Θα εφαρμόσουμε αντιστροφή με κέντρο το σημείο A και δύναμη $AC \cdot AB$.
Αυτό το κάνουμε, για να αντιστρέψουμε το σημείο B με το σημείο C και αντιστρόφως.
Με αυτόν τον τρόπο πετυχαίνουμε, ο κύκλος, που έχει διάμετρο με άκρα τα σημεία B και C να παραμένει σταθερός. Το ημικύκλιο με διάμετρο την AB, αντιστρέφεται σε μια ευθεία κάθετη στην ευθεία AB στο σημείο C, ενώ το ημικύκλιο με διάμετρο την AC, αντιστρέφεται σε μια ευθεία η οποία είναι κάθετη στην ευθεία AB στο σημείο B.
Ο εσωτερικός κύκλος που εφάπτεται στα τρία ημικύκλια της αρβήλου, αντιστρέφεται σε ένα κύκλο που εφάπτεται στις δύο κατακόρυφες ευθείες και στο ημικύκλιο με διάμετρο την CB.
Η εικόνα του σημείου F είναι το σημείο N. Οι εικόνες D', E' των σημείων D, E βρίσκονται στις κατακόρυφες ευθείες και ως εκ τούτου σχηματίζουν την διάμετρο $D'E'$, της εικόνας του κύκλου (Κ) που εφάπτεται στα ημικύκλια που σχηματίζουν την άρβηλο. Απο την πρόταση 1 του βιβλίου των λημμάτων έχουμε ότι τα σημεία B, N, D' είναι συγγραμμικά.
Ας υποθέσουμε ότι S είναι το σημείο τομής της AN με τον κύκλο (Κ) το οποίο είναι διαφορετικό από το F, ενώ το S' είναι η εικόνα του μέσω της αντιστροφής.
Είναι: $\angle AS'D' = \angle NS'D' = \angle NE'D' = 45^0$ (η $\angle NE'D' = 45^0$ διότι το σημείο N είναι το μέσο του ημικυκλίου $\widehat{CE'}$.)
Επίσης $\angle ABD' = 45^0$ (διότι το σημείο N είναι το μέσο του ημικυκλίου $\widehat{CB}$)
Οπότε τα σημεία A, B, S', D' είναι ομοκυκλικά (διότι τα σημεία B και S' βλέπουν την AD' υπο την ίδια γωνία).
Η εικόνα μέσω της αντιστροφής του κύκλου (A, B, S', D') είναι φυσικά μια ευθεία (διότι ο κύκλος (A, B, S', D') διέρχεται από το κέντρο A της αντιστροφής), η οποία διέρχεται από τα σημεία C, S, D αφού το σημείο Β έχει αντίστροφο σημείο το σημείο C, το σημείο S' είναι το αντίστροφο του S και το σημείο D' είναι αντίστροφο του σημείου D. Το σημείο S ανήκει λοιπόν στην CD. Το σημείο S ανήκει επίσης στην AN.

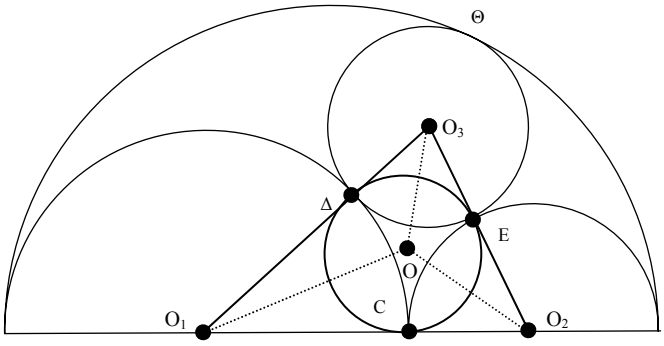
Θεωρώντας την αντιστροφή ως προς τον κύκλο με κέντρο το σημείο B και δύναμη αντιστροφής την $BC \cdot BA$ παίρνουμε ανάλογα αποτελέσματα και για την CD με την BM οπότε αποδεικνύεται έτσι ότι και αυτές τέμνονται στο σημείο S.



σχήμα β

Δίδυμοι κύκλοι του Αρχιμήδη:

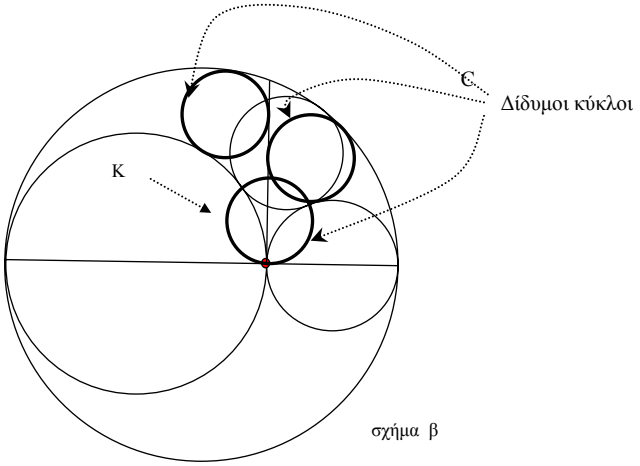
Είδαμε σε προηγούμενη ενότητα, όταν διαπραγματευόμαστε κάποια ιστορικά στοιχεία σχετικά με την άρβηλο και συγκεκριμένα όταν παρουσιάσαμε τις προτάσεις 5 και 6 του βιβλίου των λημμάτων, ότι μια από τις ιδιότητες της αρβήλου (την οποία παρατήρησε ο Αρχιμήδης και την απόδειξε στην πρόταση 5) είναι η εξής:
Υπάρχουν δύο μικροί κύκλοι εγγεγραμμένοι στην άρβηλο και ο καθένας από αυτούς είναι εφαπτόμενος στο μεγάλο ημικύκλιο της αρβήλου, σε ένα από τα δύο μικρότερα ημικύκλια καθώς και στην κάθετη ευθεία προς την βάση της αρβήλου που διέρχεται από το σημείο επαφής των δύο μικρών εφαπτόμενων μεταξύ τους ημικυκλίων της αρβήλου. Οι μικροί αυτοί κύκλοι είναι μεταξύ τους ίσοι.
Οι κύκλοι αυτοί έγιναν μέσα την πορεία του χρόνου γνωστοί ως οι δίδυμοι κύκλοι του Αρχιμήδη.
Μετά από 2200 περίπου χρόνια μετά τον Αρχιμήδη ο L. Bankoff σε ένα άρθρο του με τον τίτλο: Are the Twin Circles of Archimedes really twins? (Mathematics Magazine,Vol. 47 ,No 4, Sept. 1974, pp. 134-137) ανακάλυψε και έναν άλλο κύκλο ίσο με τους Αρχιμήδειους δίδυμους κύκλους.
Στο κύκλο αυτόν θα αναφερθούμε αμέσως πιο κάτω.
Όπως είπαμε και προηγουμένως η πρόταση 6 του βιβλίου των λημμάτων του Αρχιμήδη διαπραγματεύεται έναν κύκλο (τον (Δ,Ε,Θ) - σχήμα α) ο οποίος είναι εφαπτόμενος και στα τρία ημικύκλια της αρβήλου.



σχήμα α

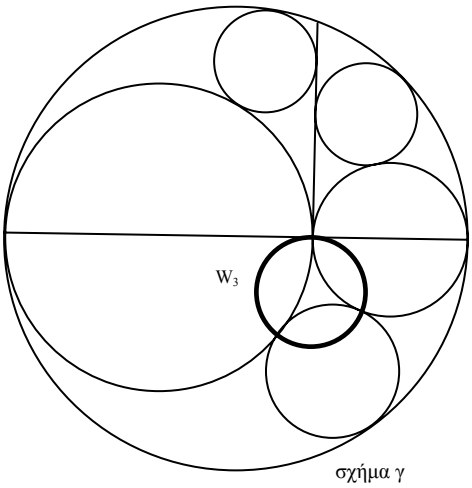
Ο κύκλος (Δ,Ε,C) είναι ορθογώνιος με του κύκλους O_1,O_2,O_3 της αρβήλου. Πράγματι ο κύκλος (Δ,Ε,C) είναι ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $O_1O_2O_3$. Αυτό προκύπτει ως εξής: Φέρνοντας τις διχοτόμους του τριγώνου αυτού αυτές τέμνονται στο Ο. Τα τρίγωνα O_1ΔΟ και O_1ΔC είναι ίσα. Ομοίως τα O_2CO και O_2EO καθώς και τα O_3OΔ και O_3OE. Άρα OΔ=OE=OC οπότε ο κύκλος (Δ,Ε,C) έχει κέντρο το Ο. Τα OΔ ,OE ,OC είναι κάθετα τμήματα προς τις πλευρές του τριγώνου $O_1O_2O_3$, διότι τα σημεία Δ,Ε,C είναι τα μόνα σημεία των πλευρών του τριγώνου για τα οποία

ισχύουν οι ισότητες: $O_1\Delta=O_1C$, $O_2C= O_2E$, $O_3\Delta=O_3E$ οι οποίες ισχύουν και για τα ίχνη των καθέτων από το σημείο Ο προς τις πλευρές του τριγώνου $O_1O_2O_3$.



σχήμα β

Τα σημεία επαφής με τα δύο μικρά ημικύκλια της αρβήλου δηλαδή τα σημεία Δ, Ε καθώς και το σημείο C ορίζουν ένα κύκλο (K) ακτίνας ίσης με την ακτίνα των δίδυμων κύκλων του Αρχιμήδη (σχήμα β).



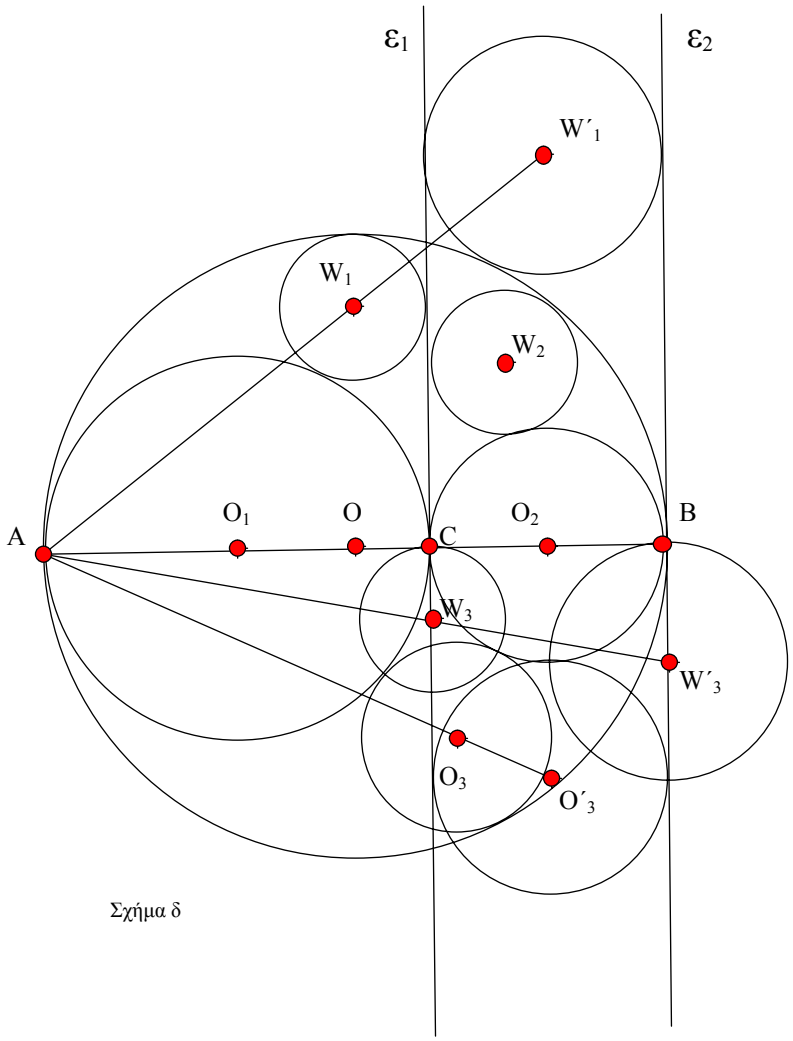
σχήμα γ

Πιο κάτω θα θεωρήσουμε τον κύκλο W_3 (σχήμα γ) ο οποίος είναι η ανάκλαση ως προς την ΑΒ του κύκλου (K) και η επεξεργασία που θα κάνουμε θα γίνει με την βοήθεια του W_3 για μεγαλύτερη ευκολία.

Ας θεωρήσουμε ότι τα ημικύκλια της αρβήλου έχουν κέντρα O, O_1, O_2.

Θα εφαρμόσουμε αντιστροφή με κέντρο το σημείο Α και δύναμη αντιστροφής ίση με $AC \cdot AB$ (σχήμα δ).
✳ Τους κύκλους του σχήματος θα τους ονομάζουμε με το ίδιο γράμμα που χρησιμοποιούμε για να ονομάσουμε και το κέντρο τους.

Η αντιστροφή απεικονίζει το σημείο B στο σημείο C και αντίστροφα.
Η ευθεία ε_1 απεικονίζεται στον κύκλο O.
Η ευθεία ε_2 απεικονίζεται στον κύκλο O_1.
Ο κύκλος O_1, απεικονίζεται στην κάθετη ευθεία ε_2 στην AB στο σημείο B.
Ο κύκλος O, γίνεται η κάθετη ευθεία ε_1 στην ευθεία AB στο σημείο C.
Οι κύκλοι O_2 και W_2 απεικονίζονται μέσω της αντιστροφής στον εαυτό τους.
Ο κύκλος W_1 αντιστρέφεται στον κύκλο W_1' που εφάπτεται στις δύο κατακόρυφες ευθείες και στον κύκλο O εξωτερικά.
Ο κύκλος O_3 αντιστρέφεται στον O_3' που εφάπτεται στις δύο κατακόρυφες ευθείες και στον κύκλο O_2.
Ο κύκλος W_3 γίνεται ο κύκλος W_3' που είναι εφαπτόμενος στην ΑΒ στο σημείο B και ορθογώνιος στον κύκλο O_2 και στον κύκλο O_3'. Σαν συνέπεια έχουμε: $r_3' = R_2$ (όπου r_3' είναι η ακτίνα του W_3' και R_2 είναι η ακτίνα του κύκλου O_2).



Σχήμα δ

Επειδή το σημείο Α είναι το εξωτερικό κέντρο ομοιότητας των κύκλων W_1 και W_1' των οποίων οι ακτίνες είναι οι r και r' θα έχουμε:

$\frac{r}{r'} = \frac{2R_1 - r}{2R_1 + R_2}$ όπου R_1, R_2 είναι οι ακτίνες των κύκλων O_1, O_2 αντίστοιχα.

Όμως $r' = R_2$

οπότε

$$\frac{r}{R_2} = \frac{2R_1 - r}{2R_1 + R_2} \Rightarrow r\left(2R_1 + R_2\right) = R_2\left(2R_1 - r\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2rR_1 + rR_2 = 2R_2R_1 - R_2r \Rightarrow r = \frac{R_2R_1}{R_1 + R_2} = \frac{R_2R_1}{R}$$

Για τα τρίγωνα ACW_3 και ABW_3' λόγω της ομοιότητας τους θα ισχύει:

$$\frac{r_3}{r_3'} = \frac{AC}{AB} = \frac{R_1}{R}$$

όπου r_3, r_3' είναι οι ακτίνες των κύκλων W_3, W_3' και οι R, R_1 είναι ακτίνες των κύκλων O, O_1

Αυτό που προκύπτει είναι: $r_3 = \frac{R_1 r_3'}{R} = \frac{R_1 R_2}{R}$. Άρα ο κύκλος W_3 είναι πράγματι ένας δίδυμος του Αρχιμήδη.

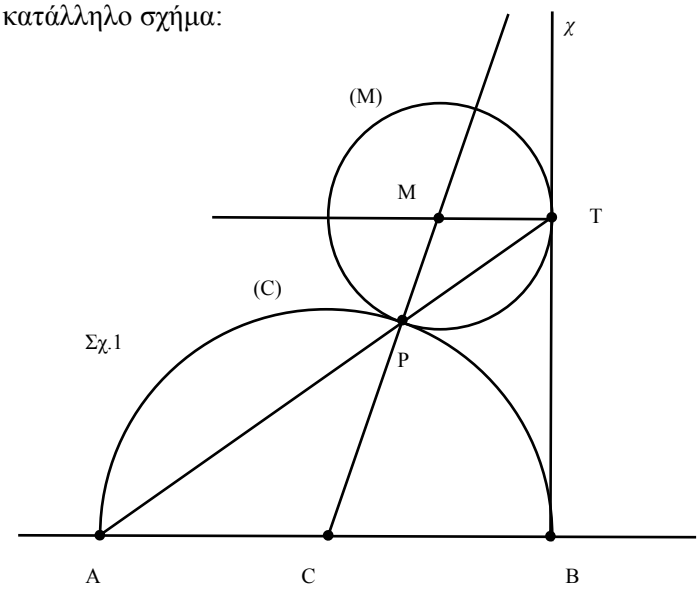
Κύκλοι που έχουν ιδιαίτερη σημασία για την Άρβηλο

Γεωμετρική κατασκευή των γνωστότερων αλυσίδων της αρβήλου

Πρώτος κύκλος

Θα ξεκινήσουμε θεωρώντας μια βασική κατασκευή. Η κατασκευή αυτή συνδέεται με τους δίδυμους κύκλους του Αρχιμήδη. Το ζητούμενο αυτής της κατασκευής είναι ο κύκλος (Μ) ο οποίος εφάπτεται σε έναν κύκλο (C), σε συγκεκριμένο σημείο του P, αλλά και στην εφαπτόμενη ευθεία Βχ του κύκλου (C).

Ας δούμε το κατάλληλο σχήμα:



Σχ.1

Ας εξηγήσουμε τι γίνεται σε αυτό το σχήμα: Δίνεται ένας κύκλος (C) με διάμετρο AB και κέντρο C. Δίνεται επίσης το σημείο P πάνω στον κύκλο (C) καθώς και η εφαπτομένη ευθεία $B\chi$ του (C), στο σημείο του B. Φέρνοντας την ευθεία AP αυτή θα τέμνει την εφαπτομένη $B\chi$ στο σημείο Τ (υπάρχει η τομή Τ όπως εύκολα γίνεται κατανοητό, αφού η γωνία $\angle PAB$ είναι οξεία).

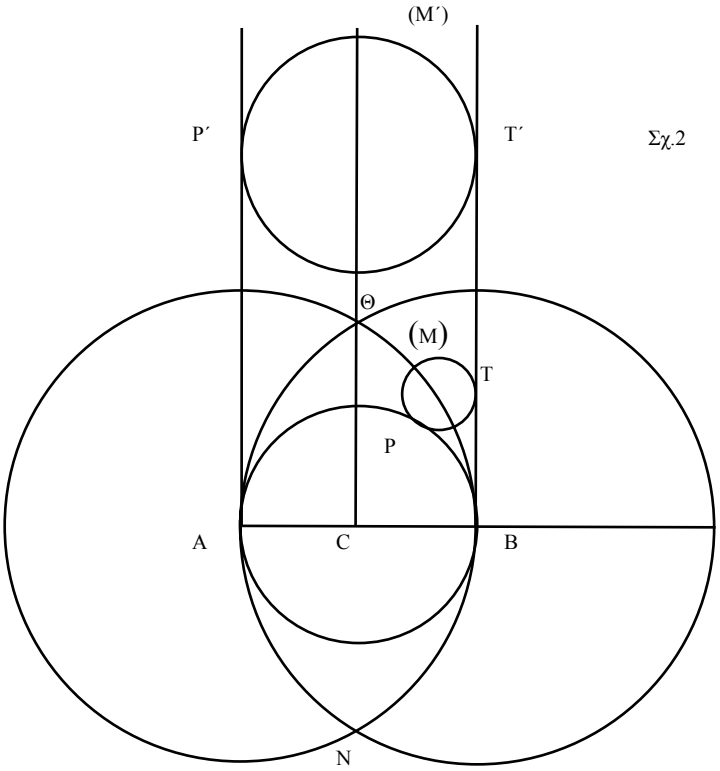
Η κάθετη προς την $B\chi$ από το σημείο Τ τέμνει την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία C, P στο σημείο Μ (την ύπαρξη της τομής των δύο ευθειών είναι εύκολο να την διαπιστώσουμε, αφού η TM είναι παράλληλη με την AB και η CP τέμνει την ΑΒ στο σημείο C).

Τα τρίγωνα ACP και TMP είναι μεταξύ τους όμοια (διότι οι TM και CA είναι παράλληλες μεταξύ τους). Το τρίγωνο ACP είναι ισοσκελές, οπότε ισοσκελές θα είναι και το τρίγωνο TMP, και έτσι $MP = MT$ και κατά συνέπεια τα σημεία P, T ανήκουν στον κύκλο (Μ, ΜΤ). Οι δύο κύκλοι (Μ, ΜΤ) (γενικά ο συμβολισμός (Α, ΑΒ) θα παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το Α και ακτίνα το ΑΒ) και (C) εφάπτονται μεταξύ τους στο σημείο P αφού η διάκεντρός τους CM διέρχεται από το κοινό τους σημείο.

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι ο κύκλος (Α, ΑΒ) τέμνει κάθε εφαπτόμενο κύκλο (Μ, ΜΤ) κατά ορθή γωνία (ορθογώνιοι κύκλοι).

Πράγματι αυτό μπορούμε να το αποδείξουμε με την μέθοδο της γεωμετρικής αντιστροφής.

Η αντιστροφή αυτή θα γίνει ως προς τον κύκλο $(\mathrm{B,BA})$, όπως περιγράφει και το επόμενο σχήμα (σχήμα 2). Θα δώσουμε το σύμβολο I_{B} στην αντιστροφή αυτή.



Η ευθεία ΒΤ διέρχεται από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής άρα η εικόνα της μέσω της αντιστροφής I_{B} είναι ο εαυτός της.

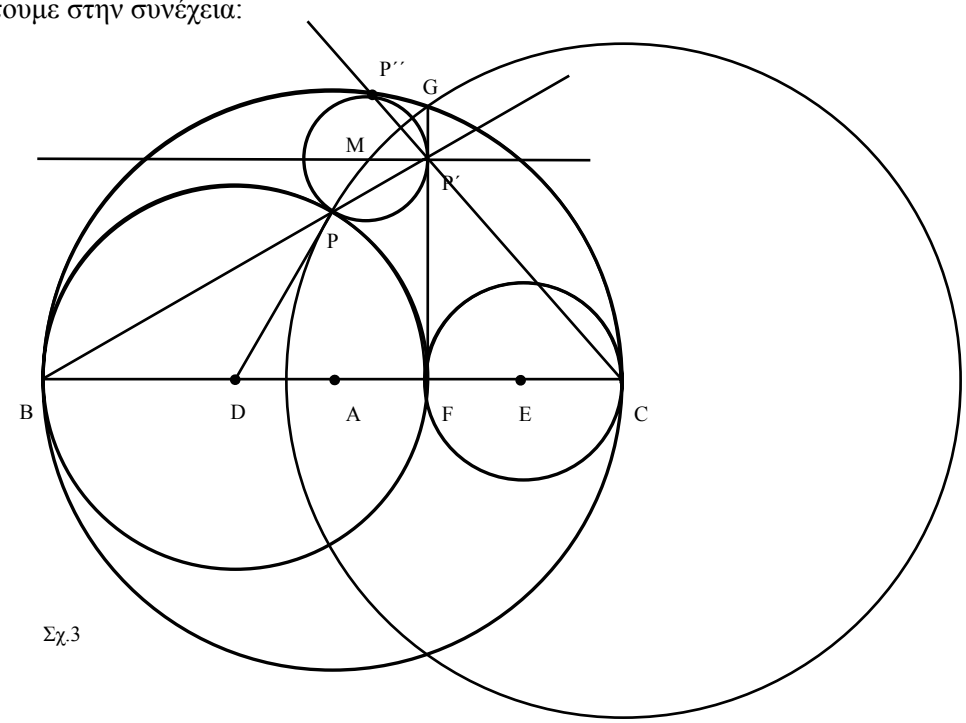
Το σημείο Α απεικονίζεται στον εαυτό του διότι είναι σημείο του κύκλου αντιστροφής.

Ο κύκλος $(\mathrm{B,BA})$ είναι ο κύκλος ως προς τον οποίο γίνεται η αντιστροφή άρα μένει αναλλοίωτος κατά την αντιστροφή αυτή. Το σημείο Β απεικονίζεται με την αντιστροφή ως προς τον κύκλο $(\mathrm{B,BA})$ στο σημείο στο άπειρο αφού το σημείο Β είναι το κέντρο του κύκλου της αντιστροφής. Ο κύκλος (C,CB) απεικονίζεται λοιπόν στην ευθεία AP'. Η ευθεία AP' είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ στο σημείο Α και αυτό συμβαίνει διότι ο κύκλος (C,CB) εφάπτεται στον κύκλο $(\mathrm{B,BA})$ στο σημείο Α, οπότε και οι εικόνες τους μέσω της αντιστροφής I_{B}, είναι επίσης εφαπτόμενα σχήματα στο σημείο που είναι η εικόνα του σημείου Α (δηλαδή πάλι στο σημείο Α). Ο κύκλος (A,AB) έχει εικόνα ως προς την αντιστροφή I_{B} την κάθετη στην AB στο σημείο C (διότι ο κύκλος (A,AB) διέρχεται από το σημείο Β που είναι το κέντρο του κύκλου αντιστροφής, το οποίο όπως είπαμε απεικονίζεται στο σημείο στο άπειρο, ενώ τα σημεία Θ,Ν απεικονίζονται στον εαυτό τους γιατί είναι σημεία του κύκλου αντιστροφής. Έτσι η εικόνα του κύκλου (A,AB) είναι η ευθεία ΘΝ. Οι κύκλοι (A,AB) και $(\mathrm{B,BA})$ είναι ίσοι άρα η ΘΝ διέρχεται από το μέσο του ΑΒ, δηλαδή από το σημείο C και είναι κάθετη στο ΑΒ). Τα σημεία Ρ και Τ που είναι τα σημεία επαφής του κύκλου (Μ) με τους κύκλους (C,CB) και ΒΤ (η ΒΤ είναι γενικευμένος κύκλος) απεικονίζονται στα σημεία Ρ΄ και Τ΄ αντίστοιχα. Ο κύκλος (Μ) απεικονίζεται στον κύκλο (Μ΄) που εφάπτεται στις ευθείες ΑΡ΄ και ΤΤ΄ που είναι οι εικόνες των (C,CB) και ΒΤ. Ο κύκλος (Μ΄) είναι ορθογώνιος ως προς την ευθεία ΘΝ (διότι η ευθεία ΘΝ διέρχεται από το κέντρο του κύκλου (Μ΄)). Η αντιστροφή διατηρεί το μέγεθος των γωνιών άρα και ο

κύκλος (A, AB) είναι ορθογώνιος με τον κύκλο (M). Για αυτόν τον λόγο ο κύκλος (A, AB) είναι ένας κύκλος με ιδιαίτερη σημασία για την άρβηλο. Το πώς αυτός ο κύκλος συνδέεται με μια από τις αλυσίδες κύκλων της αρβήλου θα το δούμε αμέσως πιο κάτω:

Δεύτερος κύκλος

Με δεδομένα τα σημεία επαφής με τους εσωτερικούς κύκλους της αρβήλου η κατασκευή που περιγράψαμε πιο πάνω (σχήμα 1), μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να κατασκευάσουμε τους δίδυμους κύκλους του Αρχιμήδη. Μια απλή κατασκευή δίνεται στο σχήμα 3 που παραθέτουμε στην συνέχεια:



Σχ.3

Ο κύκλος (C, CG) συναντά τον εσωτερικό κύκλο (D) της αρβήλου στο σημείο P το οποίο είναι το σημείο επαφής με τον αντίστοιχο Αρχιμήδειο δίδυμο κύκλο. Για αυτόν το λόγο θα χαρακτηρίσουμε τον κύκλο (C, CG) ως έναν κύκλο με ιδιαίτερη σημασία για την άρβηλο. Τα άλλα δύο σημεία επαφής P΄ και P΄΄ μπορούν να βρεθούν φέρνοντας τις ευθείες που διέρχονται η πρώτη από το B και το P και η δεύτερη από το C και P΄.
Θα προχωρήσουμε στην συνέχεια παραθέτοντας τις αντίστοιχες αποδείξεις.
Το σημείο επαφής P, μπορεί να βρεθεί με την βοήθεια γεωμετρικής αντιστροφής:

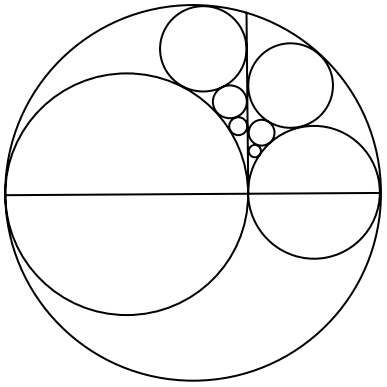
Γνωρίζουμε ότι αν το τόξο $\widehat{BGC}$ είναι ένα ημικύκλιο, τότε η γωνία $\angle BGC$ είναι ορθή (ως εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο). Αν ένα τρίγωνο BGC είναι ορθογώνιο και το GF είναι το ύψος προς την υποτείνουσα, τότε $GC^2 = CF \cdot CB$. Αν πάρουμε λοιπόν ως κύκλο αντιστροφής τον κύκλο με κέντρο το σημείο C και ακτίνα την GC, τότε το σημείο F θα είναι αντίστροφο του σημείου B και αντίστροφα το σημείο B είναι αντίστροφο του σημείου F. Ο κύκλος λοιπόν διαμέτρου BF (τον οποίο έχουμε συμβολίσει πιο πάνω και ως (D)) δεν μεταβάλλεται με την αντιστροφή (αφού έχει διάμετρο την BF και έτσι η εικόνα του είναι κύκλος διαμέτρου FB), οπότε είναι ορθογώνιος με τον κύκλο της αντιστροφής. Ο κύκλος διαμέτρου CB και κέντρου A (ας τον ονομάσουμε (A)) διέρχεται από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής, οπότε αντιστρέφεται σε εκείνη την ευθεία, η οποία διέρχεται από τα κοινά σημεία του κύκλου (A) με τον κύκλο αντιστροφής και είναι κάθετη προς την ευθεία BC. Έτσι η εικόνα του κύκλου (A) είναι η ευθεία FG. Η εικόνα του δίδυμου κύκλου (M) του Αρχιμήδη είναι ο κανονικός κύκλος (M΄), αφού ο (M) δεν διέρχεται από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής. Ο κύκλος (M΄) εφάπτεται στις εικόνες του κύκλου (D), του κύκλου (A) και της

ευθείας FG. Όμως η εικόνα του κύκλου (D) είναι ο εαυτός του, του κύκλου (A) η ευθεία FG, ενώ εικόνα της ευθείας FG είναι ο κύκλος (A). Άρα η εικόνα (M΄) του κύκλου (M) θα είναι ο ίδιος ο κύκλος (M). Ας δούμε γιατί συμβαίνει αυτό. Τα σημεία P΄ και P΄΄ είναι σημεία αντίστροφα μεταξύ τους οπότε ο κύκλος (M΄) θα διέρχεται από τα P΄ και P΄΄. Η διάμετρος του (M΄) που διέρχεται από το P΄ θα είναι παράλληλη προς την BF και έτσι από την πρόταση 1 του βιβλίου των λημμάτων, θα έχουμε ότι τα σημεία P΄, B καθώς και το σημείο επαφής των κύκλων (M΄) και (D) είναι συνευθειακά σημεία. Το δεύτερο κοινό σημείο όμως της BP΄ με τον κύκλο (D) είναι το σημείο P, άρα το σημείο P είναι το σημείο επαφής του (M΄) με τον (D). Ο κύκλος (M) θα είναι λοιπόν ορθογώνιος με τον κύκλο της αντιστροφής. Ο κύκλος της αντιστροφής είναι ορθογώνιος με τους δύο εφαπτόμενους μεταξύ τους κύκλους (D) και (M). Το μοναδικό κοινό σημείο P των (M) και (D) θα απεικονίζεται με την αντιστροφή σε ένα σημείο, έστω Π, το οποίο θα είναι κοινό σημείο των εικόνων των κύκλων (D) και (M). Οι κύκλοι όμως (M) και (D) μένουν αναλλοίωτοι με την αντιστροφή και είναι εφαπτόμενοι μεταξύ τους, οπότε έχουν μοναδικό κοινό σημείο, άρα το P απεικονίζεται στον εαυτό του, οπότε είναι υποχρεωτικά σημείο του κύκλου αντιστροφής. Ένας άλλος τρόπος για να διαπιστώσουμε ότι το σημείο P ανήκει στον κύκλο αντιστροφής είναι ο εξής: Οι δύο κύκλοι (D) και (M) έχουν ριζικό άξονα την κοινή τους εφαπτόμενη ευθεία. Όλοι οι κύκλοι που είναι ορθογώνιοι σε δύο κύκλους (D) και (M) έχουν κέντρο το οποίο ανήκει στο ριζικό άξονα των (D) και (M) (ας θυμηθούμε ότι ριζικός άξονας δύο κύκλων είναι τελικά ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των ορθογωνίων προς αυτούς κύκλων). Γνωρίζουμε επίσης ότι οι ορθογώνιοι κύκλοι μιας δέσμης (K) ομοαξονικών κύκλων αποτελούν και αυτοί μια δέσμη ομοαξονικών κύκλων, η οποία ονομάζεται συζυγής δέσμη της δέσμης (K). Οι κύκλοι (D) και (M) είναι εφαπτόμενοι μεταξύ τους στο P και ορίζουν μια δέσμη, την Δ_Σ, οπότε και η συζυγής δέσμη προς αυτήν, δηλαδή η Σ_Δ, θα αποτελείται από τους κύκλους που είναι επίσης εφαπτόμενοι μεταξύ τους, με σημείο επαφής πάλι το σημείο P. Πρέπει να τονίσουμε ακόμα πως οι κύκλοι της δέσμης Σ_Δ είναι επίσης εφαπτόμενοι στον άξονα των κύκλων της δέσμης Δ_Σ που θεωρείται και αυτός πως είναι ένας κύκλος (γενικευμένος όμως) της δέσμης Σ_Δ. Έτσι ο κύκλος αντιστροφής που ανήκει στην συζυγή δέσμη Σ_Δ, αφού είναι ορθογώνιος προς τους κύκλους (D) και (M), θα διέρχεται από το σημείο επαφής P.

Άρα για να βρούμε το σημείο επαφής του ενός εσωτερικού κύκλου της αρβήλου - ας υποθέσουμε ότι αναφερόμαστε στον εσωτερικό κύκλο (D) - με τον αντίστοιχο δίδυμο κύκλο του Αρχιμήδη, κατασκευάζουμε τον κύκλο με κέντρο το σημείο επαφής C του εσωτερικού κύκλου (E) της αρβήλου με τον εξωτερικό κύκλο (A) της αρβήλου (βλέπε σχήμα 3) και ακτίνα το τμήμα CG.

Ο κύκλος (C,CG) τέμνει τον εσωτερικό κύκλο (D) της αρβήλου σε ένα σημείο P. Αυτό είναι το ζητούμενο σημείο.

Με βάση τα όσα αποδείξαμε και περιγράψαμε πιο πάνω μπορούμε να παράξουμε τις αλυσίδες εφαπτόμενων κύκλων μέσα στην άρβηλο που έχουν την μορφή που δείχνει το κάτωθι σχήμα 4.

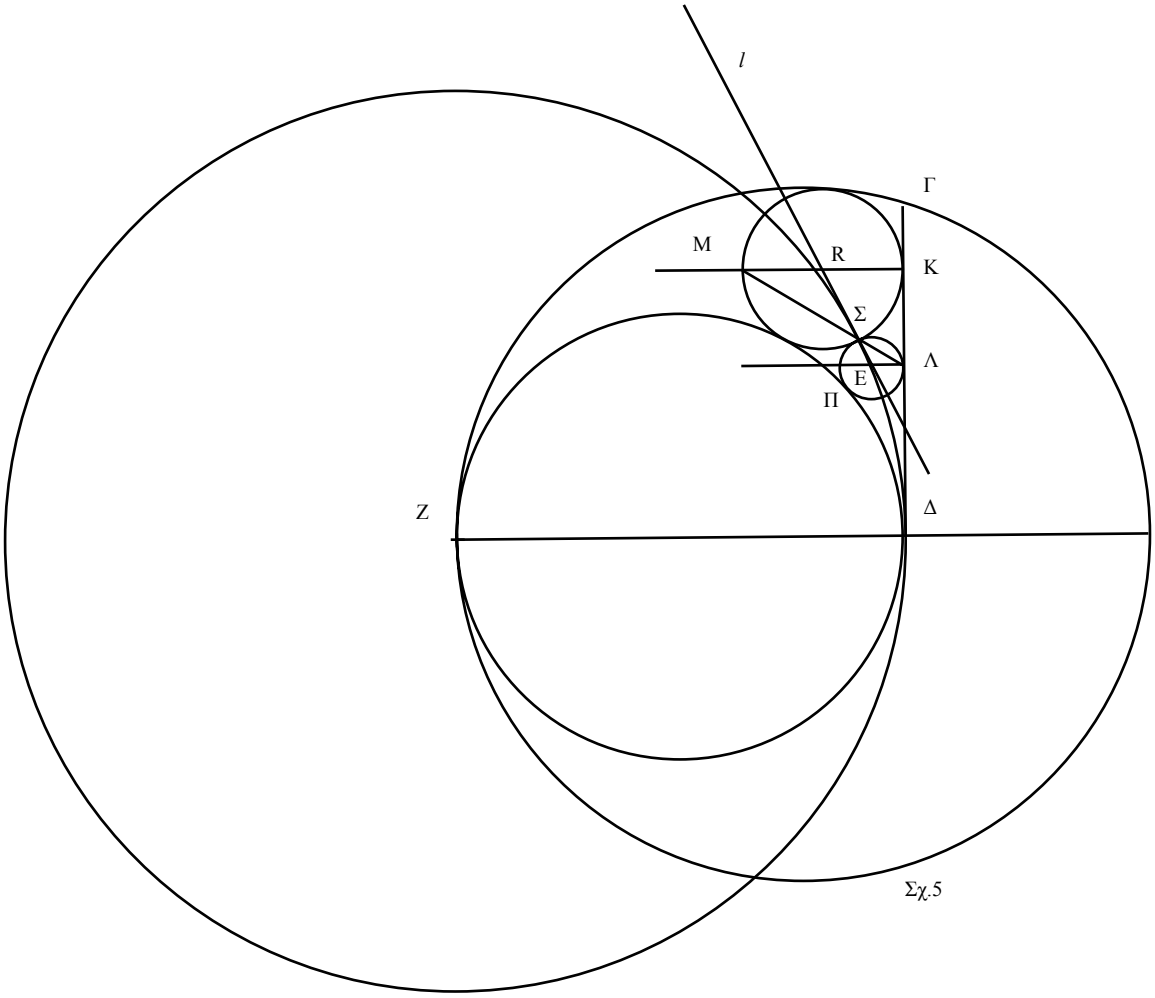


Σχ.4

Πως γίνεται όμως η γεωμετρική κατασκευή αυτών των αλυσίδων εφαπτόμενων κύκλων;

Η γεωμετρική κατασκευή στηρίζεται βέβαια στα όσα είπαμε πιο πάνω, αλλά η βοήθεια του σχήματος 5 κρίνεται απαραίτητη.

Από το κέντρο R του Αρχιμήδειου δίδυμου κύκλου (R) φέρνουμε την κάθετη ευθεία RK στην ευθεία ΓΔ.
Η κάθετη αυτή επανατέμνει τον δίδυμο κύκλο του Αρχιμήδη στο Μ .
Φέρνουμε την ευθεία ΜΣ όπου Σ είναι το κοινό σημείο του κύκλου (Z,ZΔ) με τον δίδυμο κύκλο του Αρχιμήδη. Ο κύκλος (Z,ZΔ) έχει κέντρο το σημείο Z, που είναι το σημείο επαφής του εξωτερικού κύκλου της αρβήλου με τον εσωτερικό κύκλο της αρβήλου που αντιστοιχεί στην αλυσίδα που θέλουμε να κατασκευάσουμε, ενώ η ακτίνα του κύκλου αυτού είναι η ZΔ, όπου Δ είναι το σημείο επαφής των εσωτερικών κύκλων της αρβήλου.
Η ΜΣ τέμνει την ΓΔ στο σημείο Λ.
Φέρνουμε την κάθετη από το σημείο Λ προς την ΓΔ.
Φέρνουμε την εφαπτόμενη του κύκλου (Z,ZΔ) στο σημείο Σ, η οποία τέμνει την κάθετη ευθεία στην ΓΔ που διέρχεται από το Λ, στο σημείο Ε.
Το Ε είναι το κέντρο του εφαπτόμενου κύκλου που ψάχνουμε.
Τα τρίγωνα ΜΡΣ και ΣΕΛ είναι όμοια άρα ΕΣ=ΕΛ .
Κατασκευάζουμε τον κύκλο με κέντρο το σημείο Ε και ακτίνα ίση με το τμήμα ΕΛ. Ο κύκλος αυτός είναι ο κύκλος που ψάχνουμε.
Είναι πράγματι εφαπτόμενος στον κύκλο (R) αφού R,Σ,Ε είναι συνευθειακά.

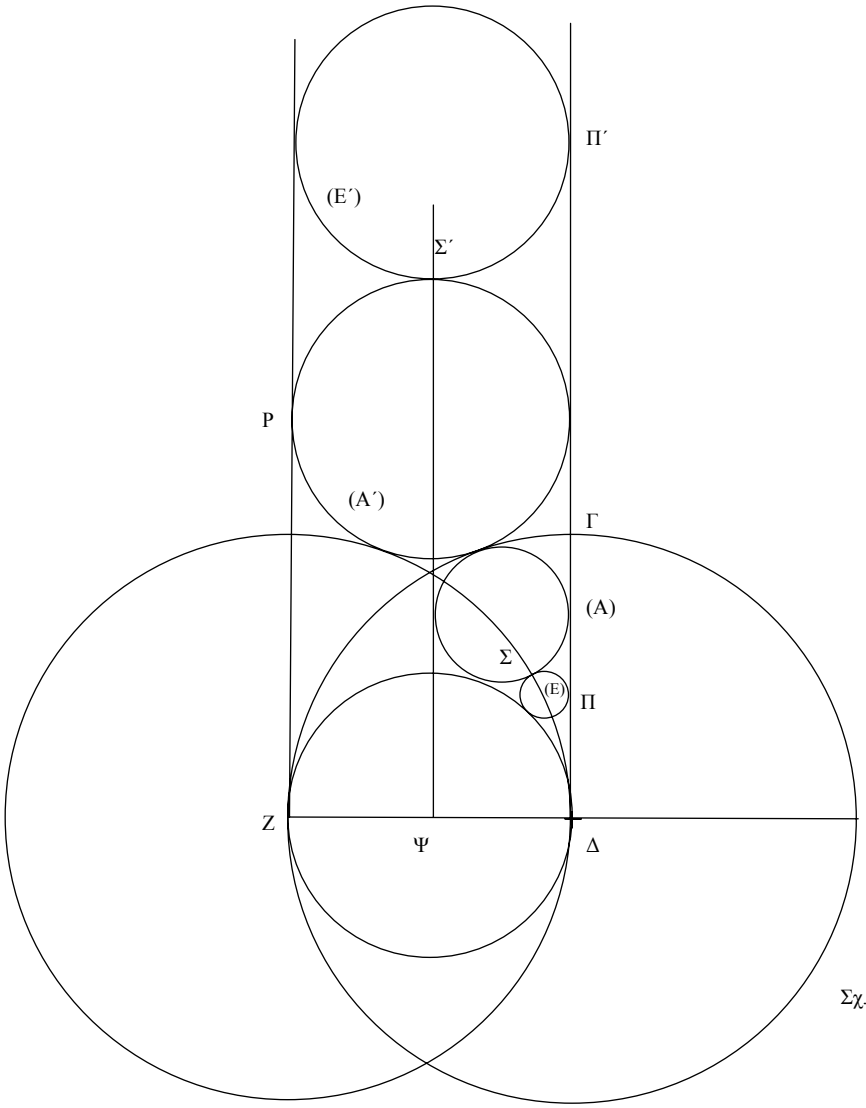


Σχ.5

Ο κύκλος με κέντρο το σημείο Ε και ακτίνα την ΕΛ εφάπτεται στον κύκλο διαμέτρου ZΔ.
Αυτό μπορούμε να το αποδείξουμε με την βοήθεια αντιστροφής ως εξής (Σχ.6):
Η αντιστροφή θα γίνει ως προς τον κύκλο με κέντρο το Δ και ακτίνα την ZΔ.

Η ευθεία ΔΓ παραμένει η ίδια (αφού είναι ευθεία που διέρχεται από το κέντρο της αντιστροφής).

Ο κύκλος διαμέτρου ΖΔ γίνεται η ευθεία ΖΡ.
Ο κύκλος (Ε), κέντρου Ε, έχει εικόνα τον κύκλο (Ε΄) μέσω της αντιστροφής. Ο (Ε΄) είναι κύκλος που εφάπτεται στην ευθεία ΓΔ (η ΓΔ είναι εικόνα της ευθείας ΓΔ) στο σημείο Π΄. Ο (Ε΄) εφάπτεται επίσης στην εικόνα (Α΄) του κύκλου (Α) στο σημείο Σ΄ το οποίο είναι η εικόνα του σημείου Σ.
Ο κύκλος (Ζ,ΖΔ) αντιστρέφεται στην ευθεία που είναι κάθετη στην ΖΔ στο σημείο Ψ (και αυτό διότι ο (Ζ,ΖΔ) είναι κύκλος που διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής Δ, άρα γίνεται ευθεία η οποία περνάει από τα σημεία τομής του κύκλου (Ζ,ΖΔ) με τον κύκλο αντιστροφής). Η ευθεία αυτή είναι η ΨΣ΄. Η ΨΣ΄ είναι η μεσοπαράλληλη των ΖΡ και ΔΓ διότι οι κύκλοι (Ζ,ΖΔ) και (Δ,ΖΔ) είναι ίσοι, άρα τα σημεία τομής τους ορίζουν την μεσοκάθετο ΨΣ΄ της ΖΔ.
Οι κύκλοι (Ε) και (Α) είναι ορθογώνιοι με τον κύκλο (Ζ,ΖΔ) όπως έχουμε δείξει πιο πάνω άρα οι εικόνες τους είναι επίσης ορθογώνιες με την εικόνα του (Ζ,ΖΔ). Δηλαδή οι κύκλοι (Ε΄), (Α΄) και η ευθεία ΨΣ΄ είναι μεταξύ τους ορθογώνιοι, οπότε η ΨΣ΄ διέρχεται από τα κέντρα των κύκλων (Ε΄) και (Α΄) οπότε λόγω συμμετρίας ως προς την ΨΣ΄ προκύπτει ότι ο κύκλος (Ε΄) εφάπτεται και στην ευθεία ΖΡ.
Ως αποτέλεσμα έχουμε ότι και ο αντίστοιχος κύκλος (Ε) εφάπτεται στον κύκλο με διάμετρο την ΖΔ.



Σχ.6

Οι ακτίνες των κύκλων αυτών μπορούν να υπολογιστούν από τον επόμενο αναδρομικό τύπο ο οποίος παράγεται με την βοήθεια του Πυθαγόρειου θεωρήματος (Σχ.7).

✳Θεωρούμε ότι η διάμετρος του εσωτερικού κύκλου της αρβήλου που αντιστοιχεί στην αλυσίδα που κατασκευάζουμε είναι η $Z\Delta = r$ και η διάμετρος του εξωτερικού κύκλου της αρβήλου είναι 1.

$r_{n+1} = \dfrac{r \cdot r_n}{\left(\sqrt{r} + \sqrt{2r_n}\right)^2}, n = 1, 2, 3, \ldots$ με r_1 να είναι η ακτίνα του Αρχιμήδειου διδύμου κύκλου.

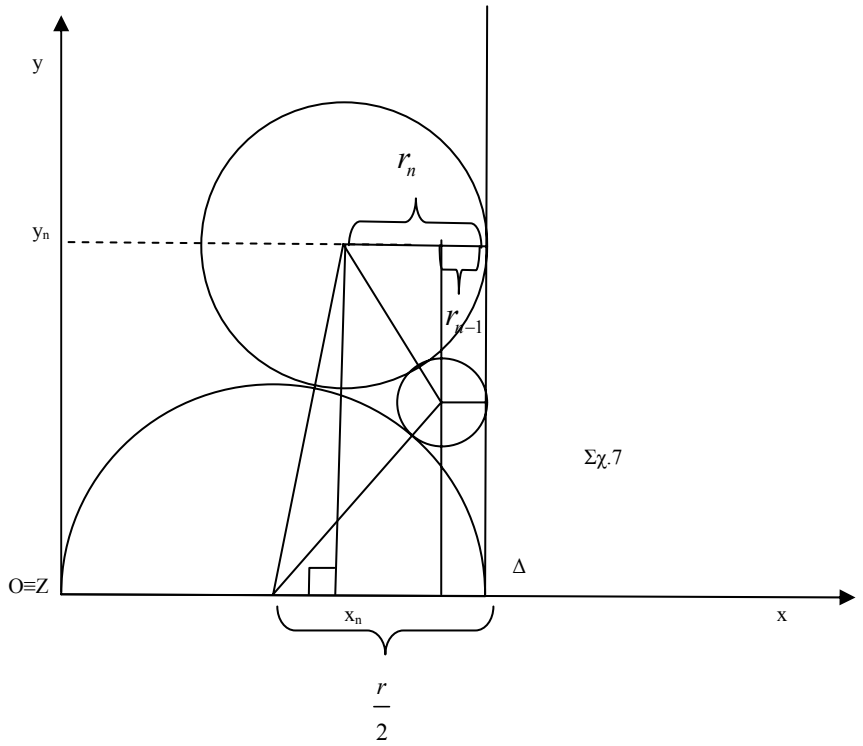
Με μαθηματική επαγωγή μπορούμε να βρούμε τον τύπο:

$$r_n = \frac{r(1-r)}{2(1+(n-1)\sqrt{1-r})^2}, n = 1, 2, 3, \ldots$$

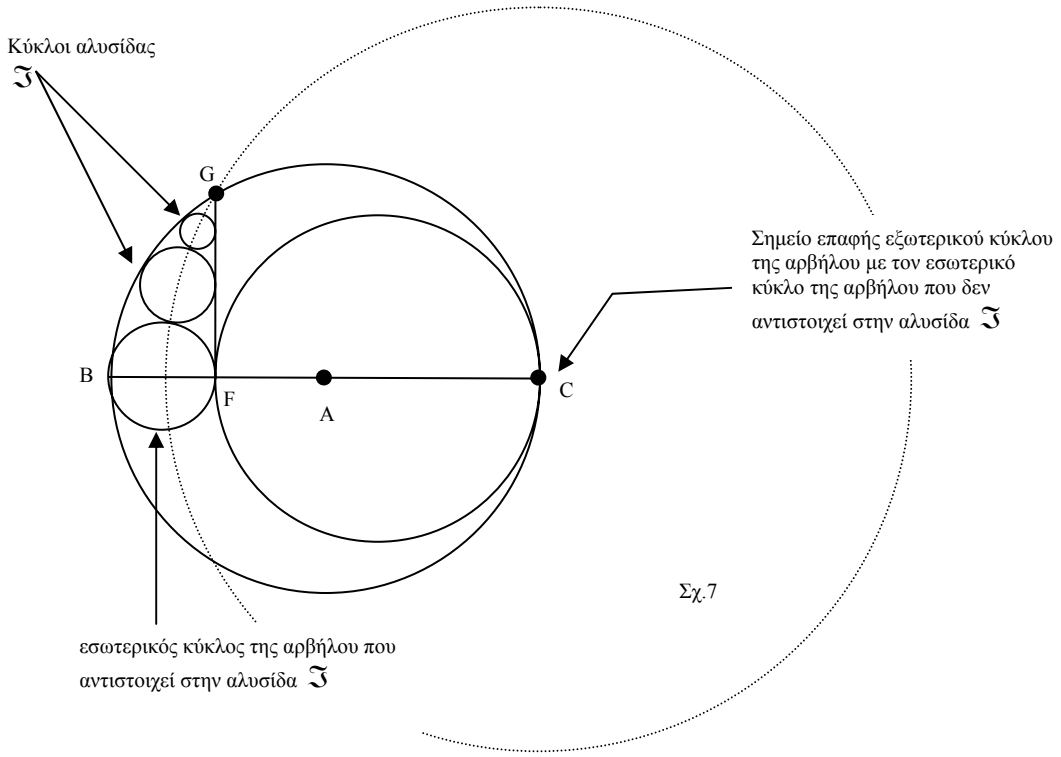
Οι συντεταγμένες του κέντρου (x_n, y_n) του n-οστού κύκλου είναι:

$$\begin{cases} x_n = r - r_n \\ \left(\dfrac{r}{2} + r_n\right)^2 = (y_n)^2 + \left(\dfrac{r}{2} - r_n\right)^2 \Rightarrow y_n = \dfrac{r\sqrt{1-r}}{1+(n-1)\sqrt{1-r}}, n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Είναι προφανές ότι $r_n \to 0, (x_n, y_n) \to (r, 0), \dfrac{r_{n+1}}{r_n} \to 1$ για $n \to \infty$



Στο σχήμα που παραθέτουμε πιο κάτω η ακτίνα του αριστερού εσωτερικού κύκλου της αρβήλου έχει κατασκευαστεί μικρή για να μπορέσουμε να δούμε καθαρά την αλυσίδα $\mathfrak{I}$ των εφαπτόμενων κύκλων που σχηματίζεται και οι οποίοι έχουν τα σημεία επαφής τους πάνω στον κύκλο (C,CG) (όπου C είναι το σημείο επαφής του εξωτερικού κύκλου της αρβήλου με τον εσωτερικό κύκλο της αρβήλου ο οποίος δεν αντιστοιχεί στην αλυσίδα $\mathfrak{I}$).



Σχ.7

Για να αποδείξουμε αυτήν την ιδιότητα θα αποδείξουμε πρώτα ότι η εφαπτομένη t στον κύκλο (C,CG) είναι διχοτόμος της γωνίας που σχηματίζουν η ευθεία FG και η εφαπτόμενη t΄ στον κύκλο (A,AC). Στα σχήματα 8α και 8β ισχύει ότι ο κύκλος διαμέτρου BC είναι ο εξωτερικός κύκλος της αρβήλου και οι κύκλοι διαμέτρου BF και FC είναι οι εσωτερικοί κύκλοι της αρβήλου που είναι εφαπτόμενοι μεταξύ τους καθώς επίσης και με τον εξωτερικό κύκλο της αρβήλου. Θεωρούμε ότι BC=1, BF=r και CF=1-r. Προκύπτει δε, από γνωστή πρόταση, ότι $FG^2=r(1-r)$.

Θα χρησιμοποιήσουμε τους πιο κάτω συμβολισμούς (σχήμα 8α):

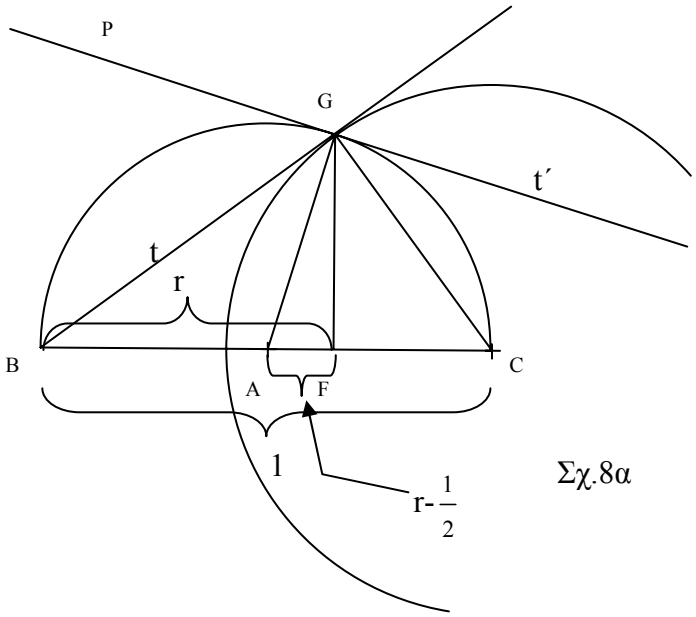
$$a = \angle BGF$$
$$\beta = \angle BGP$$
$$\phi = \angle AGF$$

$$\tan a = \frac{r}{\sqrt{r(1-r)}}, \tan\phi = \frac{r-\frac{1}{2}}{\sqrt{r(1-r)}}$$

$$\beta + (\alpha - \phi) = \frac{\pi}{2}$$

άρα $\tan\beta = \dfrac{1}{\tan(a-\phi)} = \dfrac{1+\tan a \tan\phi}{\tan a - \tan\phi} = \dfrac{r}{\sqrt{r(1-r)}}$

Άρα $\alpha = \beta$ (σχέση 1)

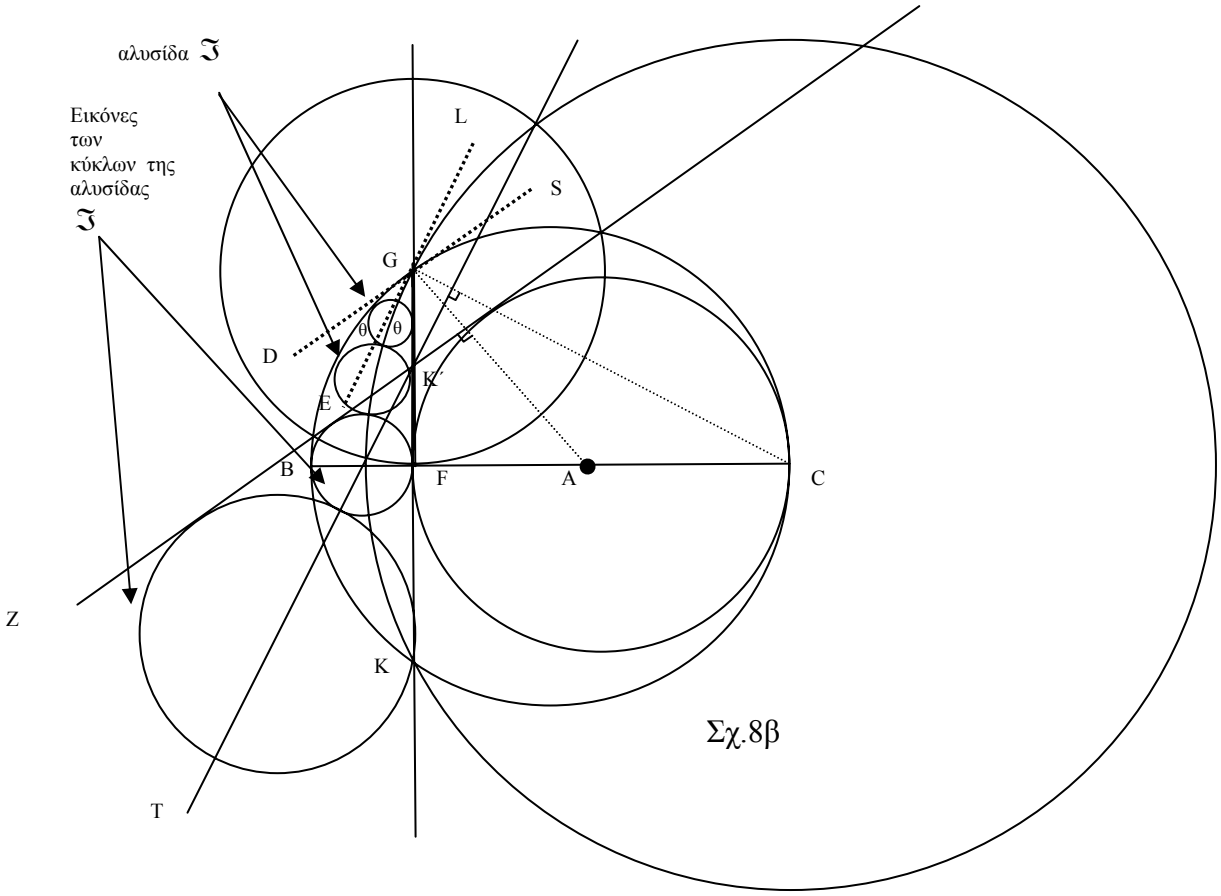


Σχ.8α

Η ιδιότητα της επαφής {δηλαδή η ιδιότητα που λέει: στην αλυσίδα $\Im$ (του σχήματος 7) των εφαπτόμενων κύκλων όλοι οι κύκλοι της αλυσίδας αυτής έχουν τα σημεία επαφής τους στον κύκλο (C,CG)} θα αποδειχθεί με την βοήθεια της αντιστροφής ως προς τον κύκλο (G,GF).
Το σημείο G (σχήμα 8β) απεικονίζεται στο σημείο στο άπειρο, με την αντιστροφή ως προς τον κύκλο (G,GF).
Η ευθεία GF απεικονίζεται στον εαυτό της, αφού είναι μια ευθεία που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου της αντιστροφής.
Ο κύκλος (A,AC) διέρχεται από το κέντρο G του κύκλου αντιστροφής οπότε απεικονίζεται σε μια ευθεία Z. Η ευθεία Z ορίζεται από τα κοινά σημεία των κύκλων (A,AC) και (G,GF) και είναι κάθετη στην διάκεντρο AG των κύκλων αυτών.
Ο κύκλος (A,AC) έχει κοινό σημείο με την ευθεία FG το σημείο K .
Άρα οι εικόνες τους με την αντιστροφή θα έχουν κοινό σημείο την εικόνα του K.
Η ευθεία FG διέρχεται από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής άρα δεν μεταβάλλεται με την αντιστροφή.
Το ερώτημα που πρέπει να τεθεί τώρα είναι ποία είναι η εικόνα του σημείου K;
Τα σημεία K και K΄ είναι μεταξύ τους αντίστροφα άρα $GK \cdot GK' = GF^2$.
Είναι όμως $GK = 2 \cdot GF$

Άρα $2GF \cdot GK' = GF^2$, οπότε $GK' = \dfrac{GF}{2}$ έτσι το K' είναι το μέσο του GF.

Ο κύκλος (C, CG) διέρχεται από το σημείο G το οποίο είναι το κέντρο του κύκλου αντιστροφής. Άρα η εικόνα του ως προς τον κύκλο αντιστροφής (G,GF) είναι ευθεία.
Την ευθεία αυτή θα ονομάσουμε T. Η ευθεία T ορίζεται από τα κοινά σημεία των κύκλων (C, CG) και (G,GF) και είναι κάθετη στην διάκεντρο CG των κύκλων αυτών.
Ο κύκλος (C, CG) διέρχεται από το σημείο G άρα θα διέρχεται και από το συμμετρικό του ως προς την διάμετρο BC του κύκλου αυτού δηλαδή από το σημείο K.
Έτσι λοιπόν έχουμε ότι οι εικόνες των κύκλων (C,CG) και (A,AC) είναι ευθείες που διέρχονται από το σημείο-εικόνα του K, δηλαδή διέρχονται από το μέσο K΄ του τμήματος FG. Η L είναι η εφαπτομένη του κύκλου (C,CG) στο σημείο G άρα είναι παράλληλη με την ευθεία που είναι εικόνα του κύκλου (C,CG) (δηλαδή είναι παράλληλη με την ευθεία T). Αυτό συμβαίνει διότι και οι δύο είναι κάθετες στη διάκεντρο CG του κύκλου (C,CG) και του κύκλου αντιστροφής (G,FG). Ομοίως η S είναι η εφαπτόμενη του κύκλου (A,AG) στο σημείο του A άρα είναι παράλληλη με την ευθεία Z που είναι η εικόνα του κύκλου (A,AG) ως προς τον κύκλο αντιστροφής (G,GF).



Σχ.8β

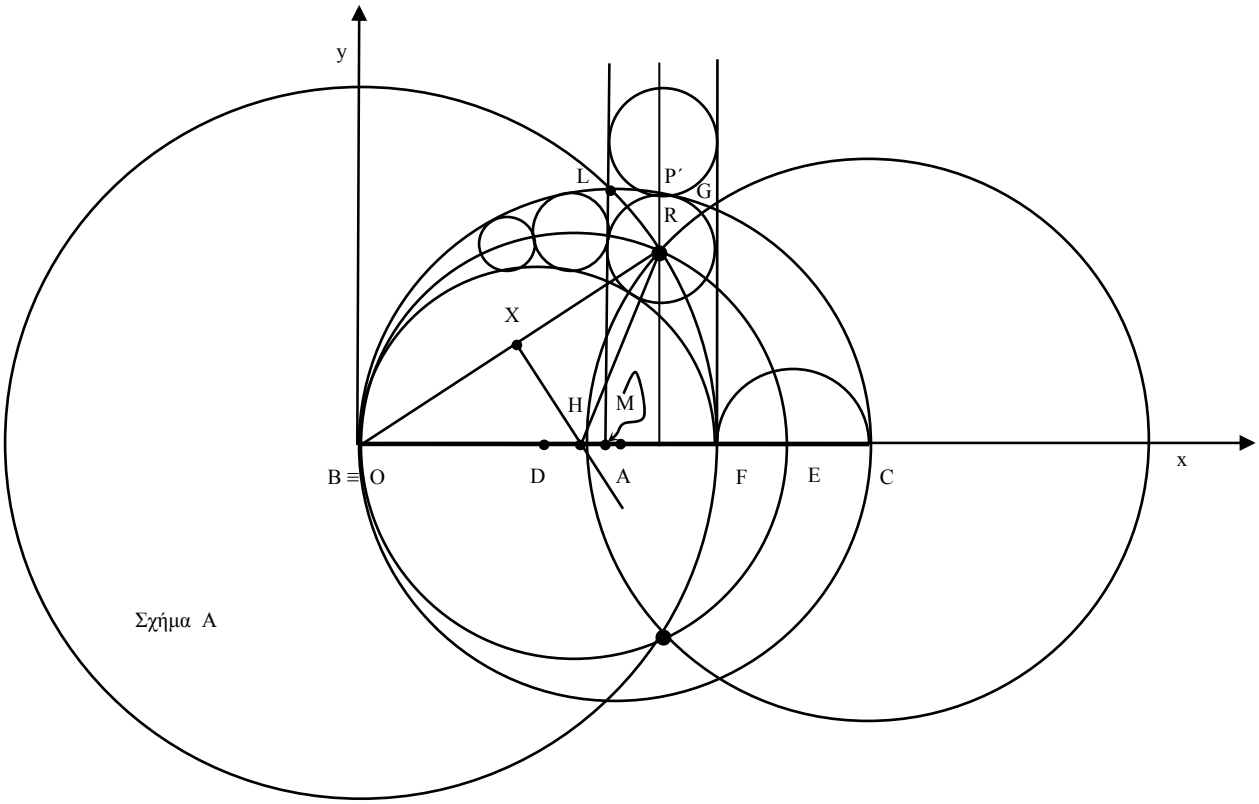
Αποδείξαμε προηγουμένως ότι $\angle DGE = \theta = \angle EGF$ (σχήμα 8α- σχέση 1)
Άρα $\angle ZK'T = \theta = \angle TK'K$.
Η αλυσίδα $\mathfrak{I}$ των εφαπτόμενων κύκλων στην ευθεία GF και στον κύκλο (A,AB), έχει αντίστοιχες εικόνες των κύκλων της που είναι εφαπτόμενοι κύκλοι στις εικόνες της ευθείας GF και του κύκλου (A,AB), δηλαδή στην ευθεία FG και η ευθεία BK΄ αντίστοιχα .
Η $K'T$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\angle ZK'K$ άρα διέρχεται από τα κέντρα των κύκλων εικόνων και από τα σημεία επαφής τους.

Η $K'T$ πέρα από διχοτόμος της γωνίας $\angle ZK'K$ είναι και εικόνα του κύκλου (C,CG) άρα ο κύκλος αυτός διέρχεται από τα σημεία επαφής των κύκλων της αλυσίδας $\Im$.
Στην πιο πάνω αντιστροφή ο αριστερός εσωτερικός κύκλος της αρβήλου απεικονίζεται στον εαυτό του (διότι είναι ορθογώνιος με τον κύκλο της αντιστροφής αφού $BF \perp GF$) και η διάμετρος BC απεικονίζεται στον κύκλο με διάμετρο FG.
Με στοιχειώδη γεωμετρία, και χρήση αλγεβρικών διαδικασιών μπορούμε να βρούμε τον αναδρομικό τύπο για την ακτίνα των κύκλων της εν λόγω αλυσίδας.
Θεωρώντας τον Αρχιμήδειο δίδυμο κύκλο ως τον πρώτο κύκλο αυτής της αλυσίδας το αποτέλεσμα των υπολογισμών μας εκφράζεται από τον τύπο

$$r_{n+1} = \frac{r_n(1-r)}{\left(1+\sqrt{r-2r_n}\right)^2}, n = 1,2,3,... \quad \mu\varepsilon \quad r_1 = \frac{r}{2}(1-r)$$

Τρίτος κύκλος

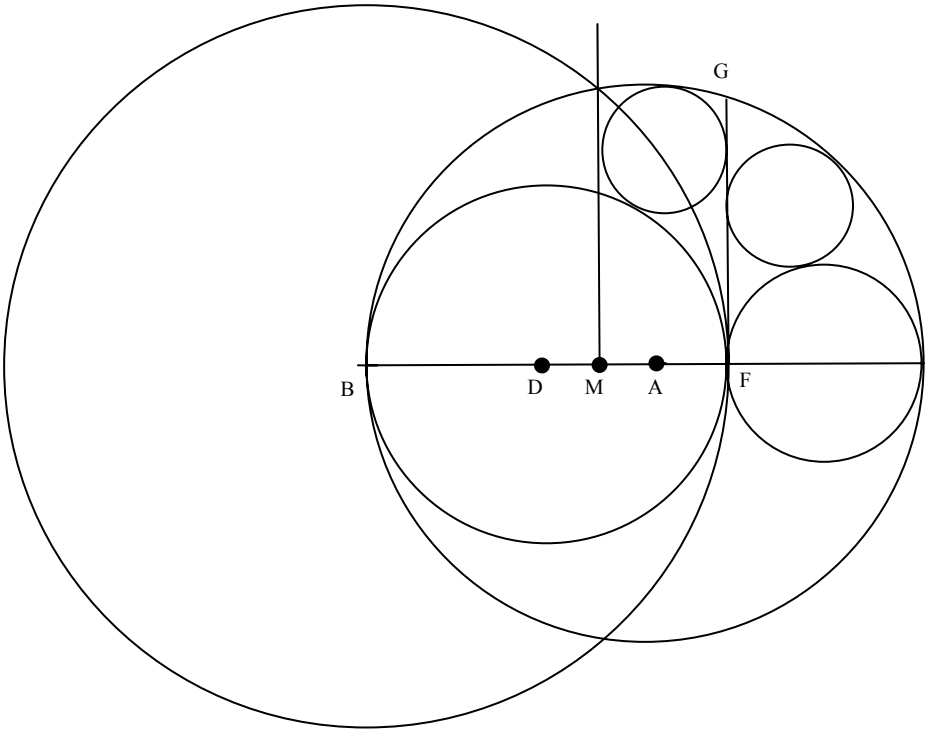
Οι κύκλοι (B, BF) και (C, CG) τέμνονται στο R . Φέρνουμε την μεσοκάθετη του BR .
Η BR συναντάει την BC στο σημείο H.
Φέρνουμε τον κύκλο (H,HR). Αυτός ο κύκλος είναι ορθογώνιος σε κάθε κύκλο που είναι εφαπτόμενος στους κύκλους (A, AB) και (D,DB) και ως εκ τούτου θα τον χαρακτηρίσουμε και αυτόν ως έναν κύκλο με ιδιαίτερη σημασία για τις αλυσίδες κύκλων που θέλουμε να κατασκευάσουμε. Για να αποδείξουμε την ορθογωνιότητα θα χρησιμοποιήσουμε την αντιστροφή ως προς τον κύκλο (B,BF).
Επειδή το σημείο B απεικονίζεται στο σημείο στο άπειρο με την αντιστροφή ο κύκλος (D,DB) απεικονίζεται σε μια ευθεία και πιο συγκεκριμένα την FG (και αντιστρόφως). Απεικονίζεται δε στην FG, διότι το σημείο F ανήκει στον κύκλο της αντιστροφής και έτσι παραμένει αμετάβλητο κατά την αντιστροφή, άρα η εικόνα του κύκλου (D,DB) που είναι ευθεία η οποία είναι κάθετη προς την διάκεντρο του κύκλου (D,DB) και του κύκλου της αντιστροφής θα διέρχεται και από το σημείο F της διακέντρου αυτής, άρα θα είναι η FG.



Σχήμα A

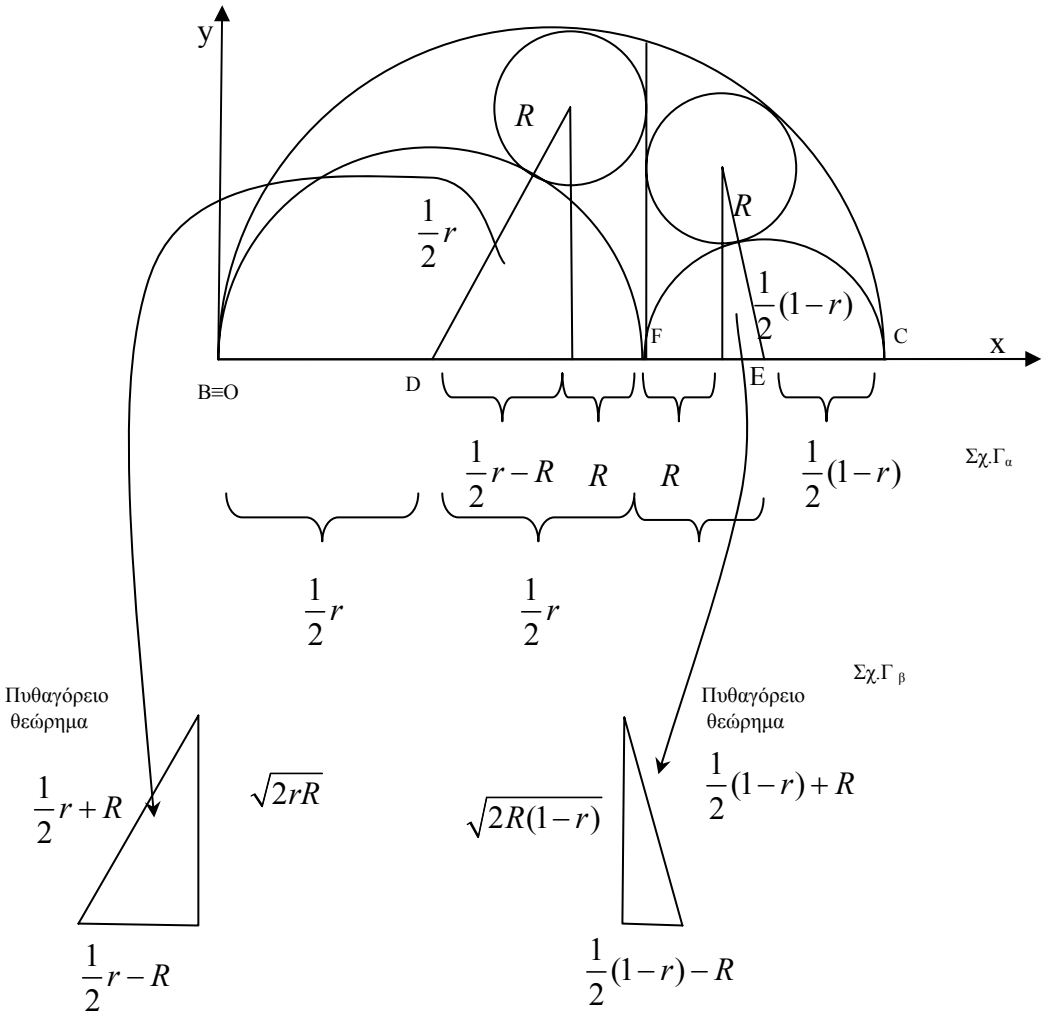
Ο κύκλος (A,AB) ο οποίος είναι ο εξωτερικός κύκλος της αρβήλου απεικονίζεται στην ευθεία που είναι κάθετη στην BC και η οποία διέρχεται από το σημείο L το οποίο είναι το σημείο τομής του κύκλου (A, AB) με τον κύκλο της αντιστροφής.
Ο κύκλος (H, HR) διέρχεται από το σημείο B, διότι το σημείο H ανήκει στην μεσοκάθετο της BR και έτσι HR=HB, οπότε απεικονίζεται σε ευθεία και μάλιστα στην ευθεία που είναι κάθετη στην BC και διέρχεται από το σημείο R το οποίο είναι το σημείο τομής του κύκλου (H, HR) με τον κύκλο αντιστροφής.

Εδώ θα κάνουμε μια παρένθεση για να υπολογίσουμε την ακτίνα και τις συντεταγμένες των Αρχιμήδειων κύκλων γιατί μας χρειάζεται στην παρούσα επεξεργασία.
Παρένθεση:
[Εύρεση της ακτίνας του αρχιμήδειου κύκλου:
Η ακτίνα των αρχιμήδειων κύκλων έχει βρεθεί κατά την διαπραγμάτευση προηγούμενου προβλήματος, αλλά εδώ βρίσκουμε αφορμή για να παραθέσουμε μια διαφορετική λύση, η οποία χρησιμοποιεί επίσης την γεωμετρική αντιστροφή.
Αντιστρέφουμε με κύκλο αντιστροφής τον κύκλο (B,BF).
Ο εξωτερικός κύκλος (A,AB) της αρβήλου αφού διέρχεται από το κέντρο του κύκλου της αντιστροφής θα απεικονίζεται σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο τομής του κύκλου αυτού με τον κύκλο της αντιστροφής. Η ευθεία αυτή διέρχεται επίσης από το σημείο M.
Η ευθεία FG απεικονίζεται στον αριστερό εσωτερικό κύκλο της αρβήλου (είναι ο κύκλος με διάμετρο την BF) και ο κύκλος διαμέτρου BF απεικονίζεται στην ευθεία FG.
Αυτό συμβαίνει διότι ο κύκλος διαμέτρου BF διέρχεται από το κέντρο του κύκλου της αντιστροφής, άρα απεικονίζεται σε ευθεία. Το σημείο F του κύκλου αυτού μένει σταθερό κατά την αντιστροφή διότι ανήκει στον κύκλο της αντιστροφής, άρα η ευθεία που είναι η εικόνα του κύκλου διαμέτρου BF, είναι η κάθετη στην BF στο σημείο F δηλαδή η ευθεία BF.
Ο αρχιμήδειος κύκλος παραμένει σταθερός κατά την αντιστροφή, πράγμα που θα αποδειχθεί πιο κάτω.



Σχ.B

Παρατηρώντας την αντιστροφή που περιγράφεται στο σχήμα Β, ως προς τον κύκλο (B,BF) έχουμε:
Έστω BF=2α ,FC=2b, BC= 2(α+b)
Τότε BM·BC=$(2\alpha)^2=4\alpha^2$
Οπότε BM=$4\alpha^2/2(\alpha+b)$
MF=BF-BM=2α -$4\alpha^2/2(\alpha+b)$=…=2αb/(α+b) άρα η ακτίνα του Αρχιμήδειου κύκλου είναι $R=\frac{ab}{a+b}$ (σχήμα Β).]



Από το σχήμα Γ_α και θεωρώντας ότι η διάμετρος του εξωτερικού κύκλου της αρβήλου είναι 1 ενώ η διάμετρος του κύκλου (B,BF) της αρβήλου είναι r και η διάμετρος του κύκλου (E,EC) της αρβήλου είναι 1-r προκύπτει ότι οι δύο αρχιμήδειοι κύκλοι έχουν συντεταγμένες που βρίσκονται ως εξής:

Για τον αριστερό αρχιμήδειο κύκλο έχουμε: $R=\frac{BD\cdot EC}{BD+EC}\underset{EC=\frac{1}{2}(1-r)}{\overset{BD=\frac{1}{2}r}{=}}\frac{\frac{1}{2}r\cdot\frac{1}{2}(1-r)}{\frac{1}{2}r+\frac{1}{2}(1-r)}=\frac{1}{2}r\cdot(1-r)$.

Άρα οι συντεταγμένες (x_1,y_1) του κέντρου του είναι:
$$x_1=r-R=r-\frac{1}{2}r(1-r)=\frac{1}{2}r(1+r)$$
$$y_1=\sqrt{2rR}=r(1-r)$$

Για τον δεξιό αρχιμήδειο κύκλο έχουμε: $x_1' = r + R = \frac{1}{2}r(3-r)$

$$y_1' = \sqrt{2R(1-r)} = (1-r)\sqrt{r}$$

Επιστρέφοντας στο σχήμα Α, μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα την τετμημένη του σημείου R η οποία είναι: $\frac{1}{2}r(1+r)$. Αυτό προκύπτει ως εξής: $CF^2 = r\left(1-r\right)$ και $GC^2 = GF^2 + FC^2$

Οπότε $GC^2 = r\left(1-r\right) + \left(1-r\right)^2 \Rightarrow GC = \sqrt{1-r}$.

Ο κύκλος (C,CE) έχει εξίσωση: $\left(x-1\right)^2 + y^2 = GC^2 \Leftrightarrow \left(x-1\right)^2 + y^2 = 1-r$ (1)

Ο κύκλος (B,BF) έχει εξίσωση: $x^2 + y^2 = r^2$ (2). Αν λύσουμε το σύστημα των (1) και (2) τότε παίρνουμε $x_R = \frac{1}{2}r\left(1+r\right)$

Η τετμημένη του L (πάλι σχήμα Α) είναι r^2 και αυτό είναι πολύ εύκολο να το δείξουμε αρκεί να σκεφτούμε ως εξής: το σημείο C έχει αντίστροφο το σημείο M οπότε BC BM=BF^2⇒ BM=r^2 (αφού BC=1).

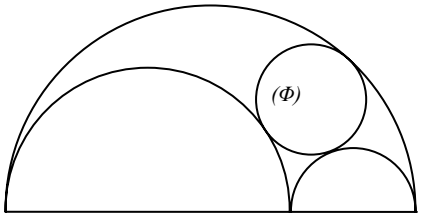
Η τετμημένη, $x_1 = \frac{1}{2}r(1+r)$, του κέντρου του Αρχιμήδειου κύκλου και οι τετμημένες των L και R (σχήμα Α) μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι ο Αρχιμήδειος κύκλος, με τον οποίο ασχολούμαστε, είναι εφαπτόμενος στην ευθεία που είναι κάθετη στην BC η οποία διέρχεται από το L και έχει κέντρο στην ευθεία η οποία είναι κάθετη στην BC η οποία διέρχεται από το R. (αυτό συμβαίνει διότι: $x_R - x_L = x_1 - x_M = \frac{1}{2}r(1+r) - r^2 = \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}r^2 = \frac{1}{2}r(1-r) = R$ όπου R είναι η ακτίνα του αρχιμήδειου κύκλου).

Ο αρχιμήδειος κύκλος μένει λοιπόν αμετάβλητος με την αντιστροφή ως προς τον κύκλο (B,BF). Η εικόνα του επόμενου κύκλου της αλυσίδας εφάπτεται στις GF και LM και το σημείο επαφής με την εικόνα του αρχιμήδειου κύκλου (που μένει αμετάβλητος κατά την αντιστροφή) είναι το σημείο P΄ το οποίο ανήκει στην κάθετη ευθεία στην BC η οποία διέρχεται από το σημείο R (μεσοπαράλληλη των GF και LM).

Η εικόνα της μεσοπαράλληλης αυτής ευθείας είναι ο κύκλος (H,HR),πράγμα που αποδεικνύει την ορθογωνιότητα του κύκλου (H,HR) με τους κύκλους της αλυσίδας την οποία εξετάζουμε.

Η ακτίνα του κύκλου (H,HR) αποδεικνύεται ότι είναι $\frac{r}{1+r}$ (αποτέλεσμα που προκύπτει με στοιχειώδη άλγεβρα: Πρώτα βρίσκουμε τις συντεταγμένες του μέσου X του τμήματος BR. Κατόπιν βρίσκουμε την εξίσωση της μεσοκαθέτου XH του τμήματος BR και έτσι μπορούμε πολύ εύκολα να βρούμε τις συντεταγμένες του H. Οπότε το μήκος HR είναι πλέον ζήτημα υπολογισμών να βρεθεί από τον τύπο της ευκλείδειας απόστασης).

Ο αριθμός αυτός είναι ο αρμονικός μέσος των ακτινών των κύκλων (D,DF) και (A,AC). Επίσης ο αρμονικός μέσος είναι συνδεδεμένος με τους Αρχιμήδειους κύκλους: Η διάμετρος των Αρχιμήδειων κύκλων είναι αρμονικός μέσος των ακτινών των κύκλων (D,DF) (αριστερό εσωτερικό ημικύκλιο της αρβήλου) και (E,EF) (δεξιό εσωτερικό ημικύκλιο της αρβήλου).



Ας πάρουμε τον κύκλο *(Φ)*.

Ας τον ονομάσουμε εγγεγραμμένο κύκλο της αρβήλου.

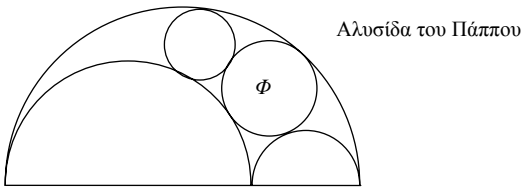
Ο κύκλος αυτός είναι εφαπτόμενος και στα τρία ημικύκλια της αρβήλου, άρα έχει εικόνα *Φ΄* που είναι εφαπτόμενη στις ευθείες LM και GF του σχήματος (A). Η ευθεία λοιπόν που είναι κάθετη στην BC και διέρχεται από το R, διέρχεται επίσης από το κέντρο του κύκλου *Φ΄*.
Τα ίδια πράγματα ισχύον και για το εσωτερικό ημικύκλιο (E,EF) της αρβήλου.
Οπότε οι δύο αυτοί κύκλοι μοιράζονται την ιδιότητα που έχουν και οι κύκλοι της αλυσίδας που σχηματίζεται με πρώτο κύκλο τον αριστερό Αρχιμήδειο δίδυμο και επόμενους κύκλους τους κύκλους που είναι εφαπτόμενοι στους κύκλους (A,AB) και (D,DB) (η ιδιότητα αυτή ας θυμίσουμε ότι είναι: ο κύκλος (H,HR) διέρχεται από τα σημεία επαφής αυτών των κύκλων) .
Έχουμε λοιπόν ότι ο κύκλος (H,HR) διέρχεται από το σημείο επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου *Φ* με το ημικύκλιο (E,EF) της αρβήλου.
Λόγω συμμετρίας τα όσα είπαμε πιο πάνω εφαρμόζονται και για την αντίστοιχη αλυσίδα που ξεκινάει με πρώτο κύκλο τον άλλο Αρχιμήδειο δίδυμο κύκλο. Έτσι λοιπόν συμπεραίνουμε ότι ο αντίστοιχος (με ανάλογο δηλαδή ρόλο) κύκλος (H΄,H΄C) του κύκλου (H,HR) ο οποίος έχει ακτίνα[5] που ισούται με τον αρμονικό μέσο των κύκλων (E,EC) και (A,AC) συναντάει το σημείο επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου *Φ* με το εσωτερικό ημικύκλιο (D,DB). Γνωρίζοντας αυτά τα δύο σημεία επαφής έχουμε έναν τρόπο γεωμετρικής κατασκευής του *Φ*.
Ας δούμε λίγο πιο λεπτομερειακά την γεωμετρική αυτή κατασκευή του κύκλου *Φ*. Ας υποθέσουμε ότι το σημείο επαφής του *Φ* με τον (D,DB) είναι το Φ_D ενώ το σημείο επαφής του *Φ* με τον (E,EC) είναι το σημείο Φ_E. Το κέντρο Λ του *Φ* είναι το σημείο τομής των ευθειών DΦ_D και EΦ_E. Το σημείο επαφής του *Φ* με τον κύκλο (A,AB) είναι το σημείο που τέμνει η ΑΛ τον κύκλο (A,AB).
Από τον κάθε έναν από τους δυο Αρχιμήδειους κύκλους παράγονται τρεις αλυσίδες.
Αν ο πρώτος κύκλος της αλυσίδας είναι ο αρχιμήδειος δίδυμος δ_1 τότε παράγεται η αλυσίδα (ας την πούμε α_1) και η οποία σχηματίζεται από τους κύκλους που εφάπτονται στο εξωτερικό ημικύκλιο (A) της αρβήλου, το εσωτερικό ημικύκλιο της (D) και στον δ_1 και προς τα αριστερά αυτού του κύκλου.
Επίσης παράγεται και η αλυσίδα α_2 η οποία σχηματίζεται από τους κύκλους που εφάπτονται στον εξωτερικό κύκλο (A) της αρβήλου, τον εσωτερικό κύκλο (D) και στον δ_1 και προς τα δεξιά αυτού του κύκλου.
Αν ο πρώτος κύκλος είναι ο *Φ* τότε παράγεται η αλυσίδα του Πάππου με την οποία ασχοληθήκαμε εκτενώς σε άλλα μέρη της εργασίας μας.

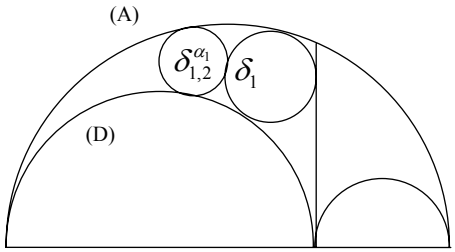
---

[5] Η ακτίνα του κύκλου (H, HB) είναι $\frac{r}{1+r}$ και του κύκλου (H΄,H΄C) είναι $\frac{1-r}{2-r}$. Το σημείο τομής των δύο αυτών κύκλων έχει τετμημένη (όπως μπορεί να υπολογιστεί με αλγεβρικό τρόπο) $\frac{r(1-r)}{2(1-r-r^2)}$. Ο κύκλος (H, HB) καθώς και ο αντίστοιχος κύκλος (H΄,H΄C) τέμνονται σε σημείο που έχει την ίδια τετμημένη με την τετμημένη του κέντρου του *Φ*.
Επίσης με αλγεβρικό τρόπο και με χρήση του πυθαγόρειου θεωρήματος καθώς επίσης και της ακτίνα HB καταλήγουμε στους τύπους:

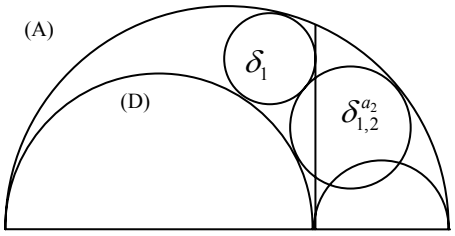
$$\begin{cases} x_n = r_n \dfrac{1+r}{1-r} \\ y^2 = r\left(\dfrac{2r_n}{1-r}\right)\left(1-\dfrac{2r_n}{1-r}\right) \end{cases} \quad \text{(a)}$$

που δίνουν τις συντεταγμένες των κύκλων (x_n, y_n) των κύκλων της αλυσίδας των κύκλων οι οποίοι είναι ορθογώνιοι με τον κύκλο (H,HB)=(H,HR) και η οποία αλυσίδα εφάπτεται στα ημικύκλια (D,DF) και (A,AC) .





Αλυσίδα α_1



Αλυσίδα α_2

Οι συντεταγμένες των τύπων (a) εκφράζονται συναρτήσει των αντίστοιχων ακτινών r_n των κύκλων της αντίστοιχης αλυσίδας.

Δίνοντας ως r_1 την ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου παράγεται η ακολουθία των συντεταγμένων των κύκλων της αλυσίδας του Πάππου

Δίνοντας ως r_1 την ακτίνα του δ_1 παράγεται η ακολουθία των συντεταγμένων των κύκλων της αλυσίδας α_1 και της α_2.

Ας βάλουμε $r_1 = \frac{r}{2}(1-r)$ παράγεται η ακτίνα $r_2 = \frac{(1-r)\left(2-2r+r^2 \pm 2(1-r)\sqrt{1-r}\right)}{2(4-4r+r^3)}$ [6].

Το $\pm$ επιλέγεται ανάλογα με ποιον από τους δύο κύκλους που εφάπτονται στον δ_1 διαλέγουμε να προχωρήσουμε την αλυσίδα. Αν δηλαδή επιλέξουμε αυτόν που εφάπτεται προς τα αριστερά (ας τον πούμε $\delta_{1,2}^{\alpha_1}$) ή προς τα δεξιά (ας τον πούμε $\delta_{1,2}^{a_2}$). Οι υπόλοιποι κύκλοι έχουν ακτίνες που δεν φαίνεται να παράγονται με ευκολία.

Στην περίπτωση της αλυσίδας του Πάππου η ακτίνα του r_n δίνεται από τον τύπο

$$r_n = \frac{r(1-r)}{2\left[(r+n^2(1-r)^2\right]}$$

Είναι πολύ εύκολο να δειχθεί ότι τα κέντρα των κύκλων των αλυσίδων α_1, α_2 και της αλυσίδας του Πάππου βρίσκονται σε μια έλλειψη η οποία έχει εξίσωση:

$$\frac{\left(x-\frac{1+r}{4}\right)^2}{\left(\frac{1+r}{4}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{r}}{2}\right)^2} = 1$$

Ας δούμε μια κατασκευή της αλυσίδας a_1 (σχήμα Ι)

Για τον πρώτο κύκλο, δηλαδή τον Αρχιμήδειο δ_1 έχουμε αναφερθεί πιο πάνω οπότε ξέρουμε πως μπορεί να κατασκευαστεί γεωμετρικά. Θα βρούμε λοιπόν μια κατασκευή για τον δεύτερο κύκλο της αλυσίδας.

Πρώτα θα βρούμε το σημείο επαφής Q του δεύτερου κύκλου με τον τρίτο κύκλο όπως και το σημείο επαφής P με τον αρχιμήδειο δίδυμο δ_1.

---

[6] οι τύποι που παρατίθενται χωρίς λεπτομερή απόδειξη προκύπτουν χωρίς την χρήση γεωμετρικής αντιστροφής οπότε επιλέξαμε να τους αναφέρουμε απλώς διότι θεωρούμε ότι από την στιγμή που δεν γίνεται η επεξεργασία τους με γεωμετρική αντιστροφή ξεφεύγει από τους στόχους της εργασίας μας η λεπτομερής παρουσίαση της απόδειξή τους

Η κατασκευή των σημείων αυτών είναι ή ίδια οπότε θα περιγράψουμε μόνο την κατασκευή του Q.

Θεωρώ τις εφαπτόμενες ευθείες K ,Σ προς τον Αρχιμήδειο κύκλο δ_1 οι οποίες είναι κάθετες στην BC. Φέρνω την μεσοπαράλληλη L των ευθειών αυτών. Οι κύκλοι που είναι αντίστροφοι των κύκλων της αλυσίδας a_1 με την αντιστροφή ως προς τον κύκλο (B,BF) είναι οι κύκλοι που έχουν το κέντρο τους στην μεσοπαράλληλη L και εφάπτονται στις ευθείες K, Σ. Ο δεύτερος (ας τον πούμε $\left(\delta_{1,2}^{\alpha_1}\right)'$) από αυτούς τους αντίστροφους κύκλους εφάπτεται στον κύκλο δ_1 στο σημείο P΄ ο τρίτος (ας τον πούμε $\left(\delta_{1,3}^{\alpha_1}\right)'$) εφάπτεται στον δεύτερο στο σημείο Q΄ κ.λ.π. Τα σημεία P΄, Q΄,…βρίσκονται όλα στην μεσοπαράλληλη L.

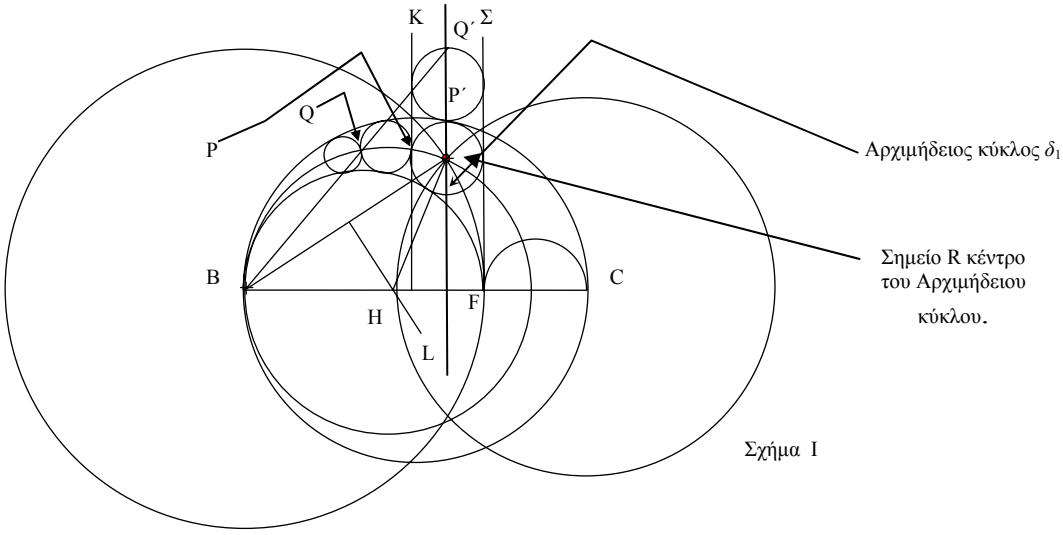
Το σημείο P΄ βρίσκεται λοιπόν ως το σημείο τομής του Αρχιμήδειου δίδυμου με την L.

Το Q΄ βρίσκεται ως το σημείο τομής του δεύτερου κύκλου, $\left(\delta_{1,2}^{\alpha_1}\right)'$, με την L κ.λ.π.

Το σημείο Q λοιπόν το βρίσκουμε αν φέρουμε την BQ΄ ημιευθεία (βρίσκεται πάνω στην ημιευθεία που έχει αρχή το κέντρο του κύκλου αντιστροφής και η οποία διέρχεται από το Q΄ που είναι το αντίστροφο σημείο του Q).

Όμως το σημείο επαφής Q βρίσκεται επίσης στον κύκλο (H,HR) (όπως δείξαμε πιο πάνω) .

Ο κύκλος αυτός είναι ο κύκλος πού έχει κέντρο το σημείο H και ακτίνα την HB. Έτσι το σημείο Q προσδιορίζεται ως το σημείο τομής του κύκλου (H,HR) και της ημιευθείας BQ΄.



Σχήμα I

Θα προσδιορίσουμε τώρα το σημείο επαφής του δεύτερου κύκλου της αλυσίδας με το εξωτερικό ημικύκλιο της αρβήλου.

Θα φτιάξουμε ένα καινούργιο σχήμα (σχήμα II) για να φαίνεται η κατασκευή πιο καθαρά.

Φέρνουμε την ευθεία που διέρχεται από το σημείο επαφής P και το κέντρο R του δ_1.

Από το κέντρο A του εξωτερικού ημικυκλίου της αρβήλου φέρνουμε την παράλληλη προς την RP.

Η παράλληλη αυτή τέμνει τον εξωτερικό κύκλο της αρβήλου στο Σ.

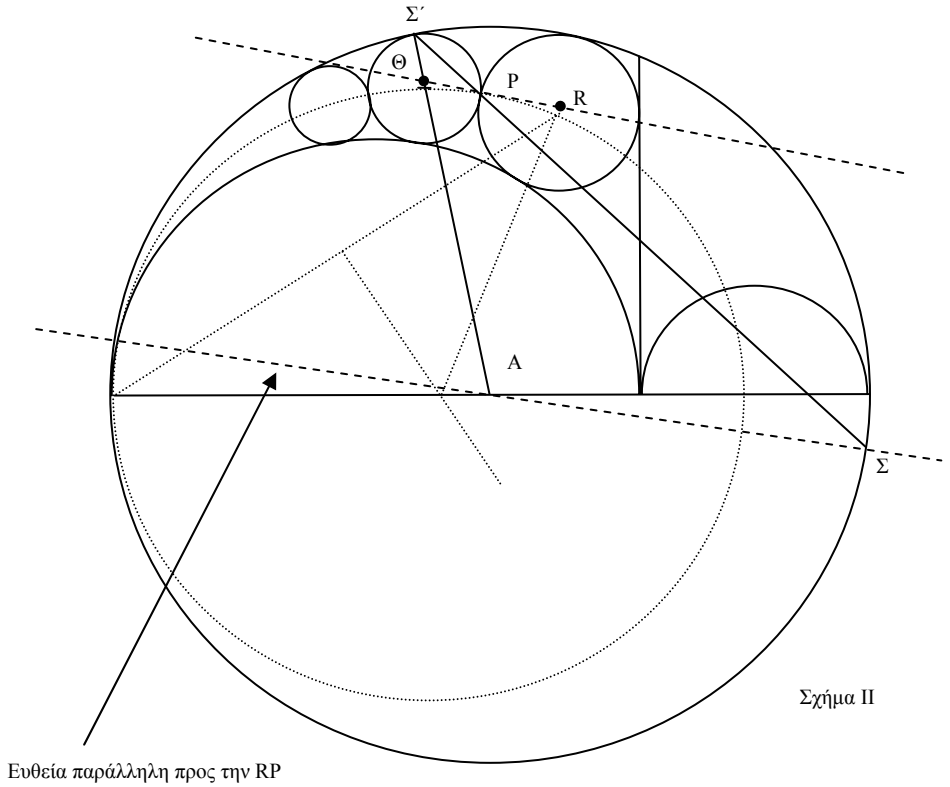
Φέρνουμε την ΣP που τέμνει τον εξωτερικό κύκλο της αρβήλου στο Σ΄.

Φέρνουμε την Σ΄A η οποία τέμνει την RP στο σημείο Θ.

Τα τρίγωνα Σ΄ΘP και Σ΄AΣ είναι όμοια διότι η PR είναι παράλληλη με την AΣ. Το Σ΄AΣ είναι ισοσκελές άρα και το Σ΄ΘP. Οπότε ΘΣ΄=ΘP.

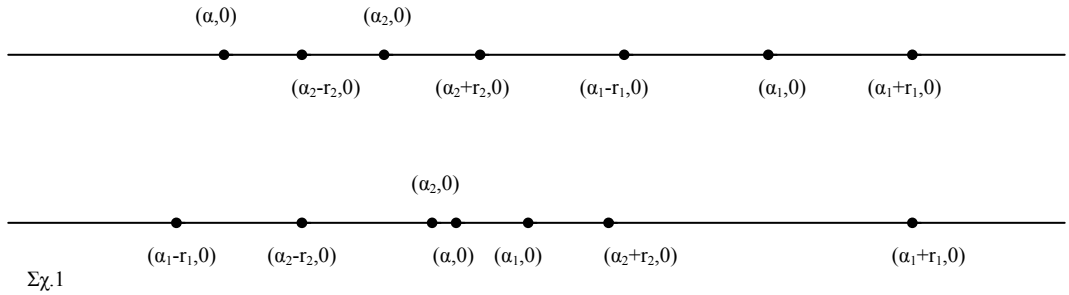
Το κέντρο του δεύτερου κύκλου $\delta_{1,2}^{\alpha_1}$ της αλυσίδας με πρώτο κύκλο τον δ_1 βρίσκεται πάνω στην RP διότι οι κύκλοι αυτοί εφάπτονται οπότε τα κέντρα τους και το σημείο επαφής είναι συνευθειακά.

Το κέντρο του δευτέρου κύκλου $\delta_{1,2}^{\alpha_1}$ βρίσκεται στην ευθεία Σ΄Α αφού ο κύκλος $\delta_{1,2}^{\alpha_1}$ εφάπτεται με τον εξωτερικό κύκλο της αρβήλου. Άρα το κέντρο του $\left(\delta_{1,2}^{\alpha}\right)$ είναι το σημείο Θ.



Μεσόκυκλοι και άρβηλος
Αντιστροφές που αλλάζουν αμοιβαία την θέση δύο κύκλων

Αν δοθούν δύο κύκλοι, $O_1(r_1)$ και $O_2(r_2)$, ψάχνουμε τις αντιστροφές εκείνες που αλλάζουν την θέση των κύκλων αυτών αμοιβαία. Ας υποθέσουμε ότι σε ένα σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων το κέντρο του $O_1(r_1)$ είναι το $O_1(a_1,0)$ και του $O_2(r_2)$ είναι το $O_2(a_2,0)$.
Τα άκρα των διαμέτρων αυτών των κύκλων πάνω στον x- άξονα είναι $(\alpha_1 \pm r_1, 0)$ και $(\alpha_2 \pm r_2, 0)$.
Ας υποθέσουμε ότι $(\alpha,0)$ είναι το κέντρο και R είναι η ακτίνα του κύκλου αντιστροφής. Θα συμβολίσουμε με $\Phi = R^2$ τη δύναμη του κύκλου αντιστροφής.
Έστω $\varepsilon = \pm 1$. Θα υποθέσουμε ότι η αντιστροφή αυτή αλλάζει την θέση των δύο κύκλων αμοιβαία.
Αυτό σημαίνει ότι για κατάλληλη επιλογή του $\varepsilon = \pm 1$ θα έχουμε:
$(\alpha_1 + \varepsilon r_1 - \alpha)(\alpha_2 + r_2 - \alpha) = (\alpha_1 - \varepsilon r_1 - \alpha)(\alpha_2 - r_2 - \alpha) = \Phi$
όπου $\varepsilon = 1$ ή $\varepsilon = -1$ ανάλογα με την θέση των τριών κύκλων μεταξύ τους:



Σχ.1

Επιλύουμε τις εξισώσεις και παίρνουμε

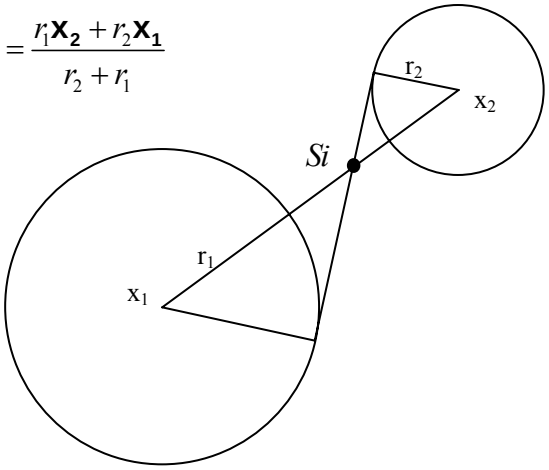
$$\alpha = \frac{r_2 a_1 + \varepsilon r_1 a_2}{r_2 + \varepsilon r_1}$$

$$\Phi = \frac{\varepsilon r_1 r_2 \left((r_2 + \varepsilon r_1)^2 - (a_1 - a_2)^2 \right)}{\left(r_2 + \varepsilon r \right)^2}$$

Γνωρίζουμε ότι:

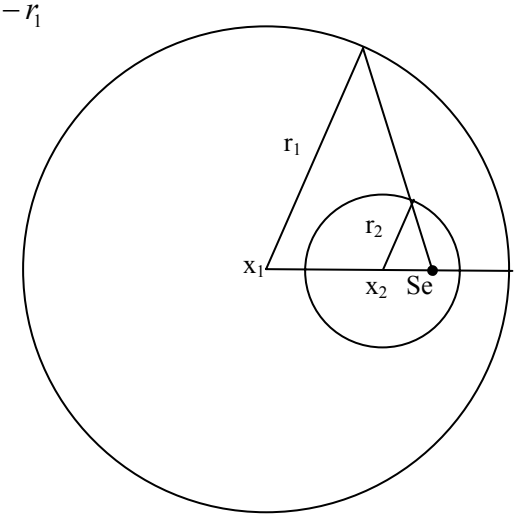
1.Το εσωτερικό κέντρο ομοιότητας Si έχει συντεταγμένες

$$Si(c_1, c_2) = \frac{r_1 \mathbf{x_2} + r_2 \mathbf{x_1}}{r_2 + r_1}$$



2.Το εξωτερικό κέντρο ομοιότητας Se έχει συντεταγμένες

$$Se(c_1, c_2) = \frac{r_1 \mathbf{x_2} - r_2 \mathbf{x_1}}{r_2 - r_1}$$



Άρα λοιπόν ο τύπος $\alpha = \frac{r_2 a_1 + \varepsilon r_1 a_2}{r_2 + \varepsilon r_1}$ παριστάνει το εσωτερικό ή το εξωτερικό κέντρο ομοιότητας αναλόγως με την τιμή του ε.

Οι δύο κύκλοι της αντιστροφής πραγματικοί (ή φανταστικοί) δίνονται από την εξίσωση $(x-\alpha)^2 + y^2 = \Phi$ και Θέτοντας $\Phi = \frac{\varepsilon r_1 r_2 \left((r_2 + \varepsilon r_1)^2 - (a_1 - a_2)^2 \right)}{\left(r_2 + \varepsilon r \right)^2}$ παίρνουμε:

$$r_2\left(\left(x-a_1\right)^2+y^2-r_1^2\right)+\varepsilon r_1\left(\left(x-\alpha_2\right)^2+y^2-r_2^2\right)=0$$

Από την τελευταία εξίσωση διαπιστώνουμε ότι:

<u>Οι κύκλοι αυτοί είναι μέλη μιας δέσμης κύκλων που παράγεται από τους δύο δοθέντες κύκλους.</u>

Αυτοί οι κύκλοι στην βιβλιογραφία αναφέρονται με το όνομα Midcircles (R. D. Dixon, *Mathographics*, Dover, 1991) Το όνομα αυτό το μεταφράζουμε στα Ελληνικά Μεσόκυκλοι (των δύο δοθέντων κύκλων).

Επειδή

$$\Phi=\frac{\varepsilon r_1 r_2\left((r_2+\varepsilon r_1)^2-(a_1-a_2)^2\right)}{\left(r_2+\varepsilon r\right)^2}$$

θέτοντας $d=\left|a_2-a_1\right|$ ($d=$ μήκος της διακέντρου των κύκλων $O_1(r_1)$ και $O_2(r_2)$)

και βάζοντας όπου ε το ± 1

$$\Phi=\frac{\pm r_1 r_2(r_2\pm r_1)^2-d^2}{(r_2\pm r_1)^2}$$

Θα έχουμε: $\Phi>0\Leftrightarrow \pm r_1 r_2(r_2\pm r_1)^2-d^2>0$

Για $\varepsilon=1$ έχουμε τον εσωτερικό μεσόκυκλο τον οποίο θα συμβολίσουμε με M_+

Ο μεσόκυκλος αυτός είναι πραγματικός αν και μόνο αν

$$\Phi>0\Leftrightarrow r_1 r_2(r_2+r_1)^2-d^2>0\Leftrightarrow\left[(r_2+r_1)^2-d^2\right]>0$$

$$\Leftrightarrow (r_2+r_1)^2>d^2\Leftrightarrow r_2+r_1>d$$

Για $\varepsilon=-1$ έχουμε τον εξωτερικό μεσόκυκλο τον οποίο θα συμβολίσουμε με M_-

Ο μεσόκυκλος αυτός είναι πραγματικός αν και μόνο αν

$$\Phi>0\Leftrightarrow -r_1 r_2(r_2-r_1)^2-d^2>0\Leftrightarrow\left[(r_2-r_1)^2-d^2\right]<0$$

$$\Leftrightarrow (r_2-r_1)^2<d^2\Leftrightarrow\left|r_2-r_1\right|<d$$

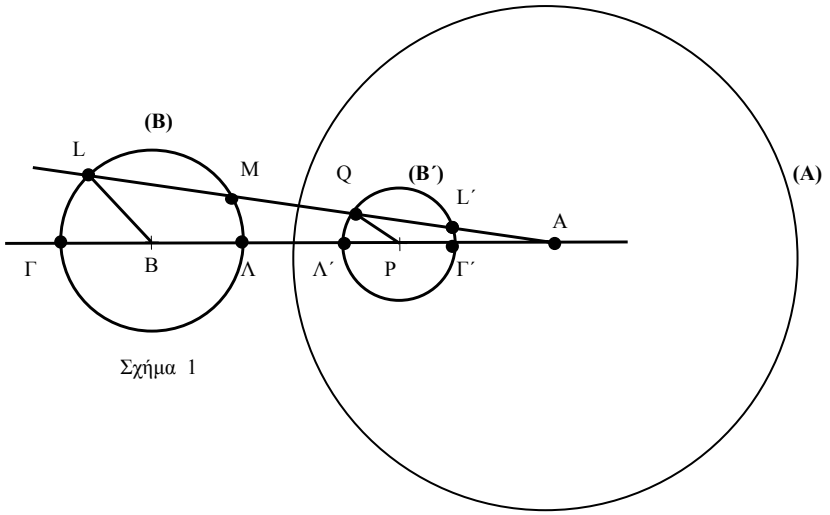
Θεώρημα: Η εικόνα του κύκλου με κέντρο το σημείο Β και ακτίνα r με την αντιστροφή ως προς ένα κύκλο κέντρου Α και δύναμης Φ ($\sqrt{\Phi}$ η ακτίνα του κύκλου της αντιστροφής) είναι ο κύκλος με ακτίνα ρ ίση με $\left|\frac{\Phi}{d^2-r^2}\right|r$ και του οποίου το κέντρο Ρ που διαιρεί το τμήμα ΑΒ σε λόγο $\frac{\text{AP}}{\text{PB}}=\frac{\Phi}{d^2-r^2-\Phi}$ όπου d είναι η απόσταση μεταξύ των Α και Β.

Απόδειξη

Σε προηγούμενο μέρος της εργασίας μας έχει αποδειχθεί ότι δύο αντίστροφοι κύκλοι είναι ομοιόθετοι με λόγο ομοιοθεσίας $\frac{AQ}{AL}=\frac{\Phi}{p}$ {Q και L είναι αντίστοιχα σημεία ως προς την εν λόγω ομοιοθεσία, $\frac{\Phi}{p}$ ο λόγος ομοιοθεσίας, Φ η δύναμη της αντιστροφής και p είναι η δύναμη του κέντρου Α του κύκλου αντιστροφής ως προς το κέντρο Β το κύκλου (Β)}.

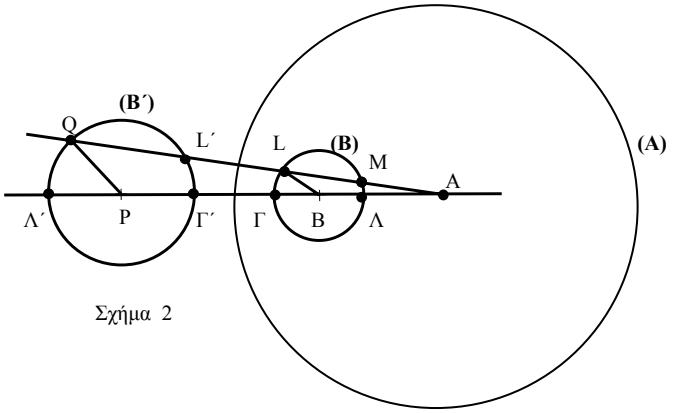
Όμως γνωρίζουμε ότι $p=AL\cdot AM=\left|AB^2-r^2\right|=\left|d^2-r^2\right|$

Άρα $\frac{AQ}{AL}=\frac{x}{r}=\frac{\Phi}{p}\Rightarrow\frac{x}{r}=\frac{\Phi}{\left|d^2-r^2\right|}\Rightarrow x=\frac{\Phi}{\left|d^2-r^2\right|}r\Rightarrow\rho=\frac{\Phi}{\left|d^2-r^2\right|}r$



Σχήμα 1

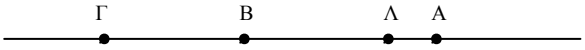
Στο πρώτο σχήμα έχουμε το Ρ εσωτερικό του ΑΒ
Στο σχήμα που ακολουθεί έχουμε το Ρ εξωτρερικό του ΑΒ.



Σχήμα 2

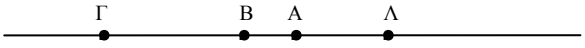
Η απόδειξη του τύπου θα μπορούσε να γίνει και με διαφορετικό τρόπο:
Ας θυμηθούμε: Α είναι το κέντρο του κύκλου αντιστροφής και Γ,Λ είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου (Β) τον οποίο αντιστρέφουμε, $d = AB$ και r είναι η ακτίνα του κύκλου (Β).
Η θέση του Α ως προς τα Λ και Γ μπορεί να είναι η εξής:
Σημείωση: Θα υποθέσουμε στην επεξεργασία που θα κάνουμε ότι: ΑΛ<ΑΓ.

Σχήμα 3α



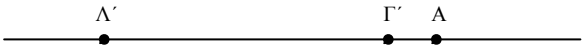
Περίπτωση 1η

Σχήμα 3β



Περίπτωση 2η

Περίπτωση 1η : $d > r$
Στην περίπτωση αυτή έχουμε :
ΑΛ<ΑΓ άρα $\begin{array}{l} A\Lambda = d - r \\ A\Gamma = d + r \end{array}$
Τα αντίστροφα σημεία των Γ και Λ είναι τα Γ΄ και Λ΄

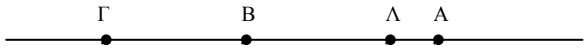


επίσης $\left.\begin{array}{l} \text{ΑΛ}\cdot\text{ΑΛ}'=\Phi \\ \text{ΑΓ}\cdot\text{ΑΓ}'=\Phi \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{ΑΛ}'=\dfrac{\Phi}{\text{ΑΛ}} \\ \text{ΑΓ}'=\dfrac{\Phi}{\text{ΑΓ}} \end{array}\right.$

άρα: $\Lambda'\Gamma'=\left|\dfrac{\Phi}{d+r}-\dfrac{\Phi}{d-r}\right|=\dfrac{2\Phi r}{\left|d^2-r^2\right|}\Rightarrow\dfrac{\Lambda'\Gamma'}{2}=\dfrac{\Phi r}{\left|d^2-r^2\right|}\Rightarrow\rho=\dfrac{\Phi r}{\left|d^2-r^2\right|}$

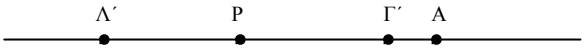
Στην 2η περίπτωση, $d<r$, δουλεύουμε παρομοίως.
Τώρα θα αποδείξουμε το δεύτερο μέρος του θεωρήματος δηλαδή ότι το κέντρο Ρ του κύκλου που είναι εικόνα του κύκλου (Β) ως προς την αντιστροφή $(\text{Α},\Phi)$ διαιρεί το τμήμα ΑΒ σε λόγο $\dfrac{\text{ΑΡ}}{\text{ΡΒ}}=\dfrac{\Phi}{d^2-r^2-\Phi}$ όπου d είναι η απόσταση μεταξύ των Α και Β.
Θα υποθέσουμε και πάλι ότι: ΑΛ<ΑΓ.

1η περίπτωση:
$d>r$
(δηλαδή όταν η διάταξη των σημείων είναι αυτή που περιγράφει το πιο κάτω σχήμα).



Σχήμα 4

Τα Λ΄ και Γ΄ βρίσκονται στην ίδια ημιευθεία με αρχή το Α όπως και τα Γ, Λ (πράγμα που προκύπτει από τον ορισμό της αντιστροφής).



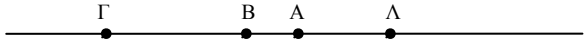
Σχήμα 5

Άρα $\text{ΑΡ}=\dfrac{\text{ΑΓ}'+\text{ΑΛ}'}{2}=\dfrac{\dfrac{\Phi}{\text{ΑΓ}}+\dfrac{\Phi}{\text{ΑΛ}}}{2}=\dfrac{\dfrac{\Phi}{d+r}+\dfrac{\Phi}{d-r}}{2}=$

$=\dfrac{\Phi d}{d^2-r^2}$

2η περίπτωση:
$d<r$

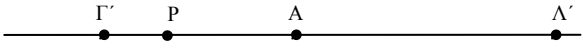
(δηλαδή όταν η διάταξη των σημείων είναι αυτή που περιγράφει το πιο κάτω σχήμα).



Σχήμα 6

ΑΛ<ΑΓ άρα $\begin{array}{l} \text{ΑΛ}=r-d \\ A\Gamma=d+r \end{array}$

Η διάταξη των Γ΄ και Λ΄ σε σχέση με το Α είναι:



Σχήμα 7

$$\text{ΑΡ} = \frac{\text{ΑΛ}' - \text{ΑΓ}'}{2} = \frac{\frac{\Phi}{\text{ΑΛ}} - \frac{\Phi}{\text{ΑΓ}}}{2} = \frac{\frac{\Phi}{r-d} - \frac{\Phi}{r+d}}{2} =$$

$$= \frac{\Phi d}{r^2 - d^2}$$

Για δύο οποιαδήποτε σημεία Α, Β τα ΑΒ και ΒΑ δηλώνουν ευθύγραμμα τμήματα διαφορετικού προσανατολισμού και διαφορετικού πρόσημου (το διαφορετικό πρόσημο ακριβώς αυτό δηλώνει: τον διαφορετικό προσανατολισμό) έτσι ώστε να ισχύει ΑΒ= -ΒΑ.
Ανεξάρτητα από επιλογή διευθύνσεως έχουμε ΑΒ= -ΒΑ. Αν δηλαδή δοθούν δύο τμήματα πάνω σε μια ευθεία τότε αν αυτά βλέπουν προς την ίδια κατεύθυνση θα θεωρούμε ότι έχουν το ίδιο πρόσημο ενώ αν κοιτούν σε αντίθετη κατεύθυνση θα θεωρούμε ότι έχουν αντίθετο πρόσημο.

Αν δοθούν τρία σημεία A, F, B πάνω στην ίδια ευθεία τότε ο λόγος $\frac{AF}{FB}$ μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει θετική τιμή αν και μόνο αν το σημείο F βρίσκεται μεταξύ των σημείων A, B .Επίσης ισχύει πάντα ότι $\frac{AF}{FB} = -\frac{AF}{BF}$.

Στο σχήμα 1 (σελ. 248) έχουμε ότι το σημείο Ρ είναι εσωτερικό του ΑΒ άρα:
Θα είναι $\text{ΡΒ} = \text{ΒΑ} - \text{ΡΑ}$

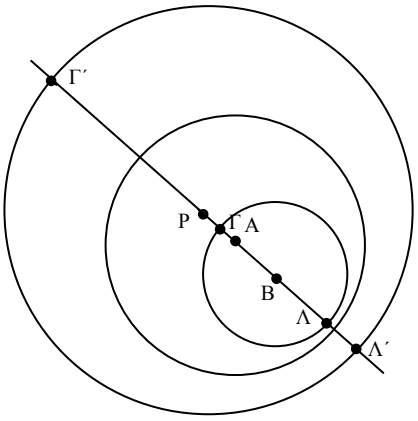
Άρα $\text{ΡΒ} = \text{ΒΑ} - \text{ΡΑ} = d - \frac{\Phi d}{d^2 - r^2} = \frac{d\left(d^2 - r^2\right) - \Phi d}{d^2 - r^2} = \frac{d\left(d^2 - r^2 - \Phi\right)}{d^2 - r^2}$

$$\text{και } \frac{\text{ΑΡ}}{\text{ΡΒ}} = \frac{\frac{\Phi d}{d^2 - r^2}}{\frac{d\left(d^2 - r^2 - \Phi\right)}{d^2 - r^2}} = \frac{\Phi}{\left(d^2 - r^2 - \Phi\right)}$$

Στο σχήμα 2 (σελ. 248) το σημείο Β είναι εσωτερικό του ΑΒ άρα: $\text{ΡΒ} = \text{ΡΑ} - \text{ΒΑ}$

$$\text{ΡΒ} = \text{ΒΑ} - \text{ΡΑ} = \frac{\Phi d}{d^2 - r^2} - d = \frac{\Phi d - d\left(d^2 - r^2\right)}{d^2 - r^2} = \frac{d\left(\Phi - d^2 - r^2\right)}{d^2 - r^2}$$

Όμως σε αυτήν την περίπτωση ο λόγος $\frac{\text{ΑΡ}}{\text{ΡΒ}}$ είναι αρνητικός οπότε και πάλι μπορούμε να γράψουμε: $\frac{\text{ΑΡ}}{\text{ΡΒ}} = \frac{\frac{\Phi d}{d^2 - r^2}}{\frac{d\left(d^2 - r^2 - \Phi\right)}{d^2 - r^2}} = \frac{\Phi}{\left(d^2 - r^2 - \Phi\right)}$



Αν $d < r$ υπάρχει περίπτωση το τμήμα ΑΒ να διαιρείται από το Ρ <u>εσωτερικά</u>;
Αφού $d < r$ άρα ΒΑ< r. Έστω η διάμετρος ΓΛ του κύκλου (Β) η οποία διέρχεται από τα σημεία Α και Β.
Το Α είναι εσωτερικό του τμήματος ΓΒ ή του τμήματος ΒΛ.
Έστω ότι το Α είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος ΓΒ τότε το ΓΑ<ΑΛ οπότε αν Γ΄ είναι το αντίστροφο σημείο του Γ και Λ΄ το αντίστροφο του Λ θα είναι ΓΆ>ΛΆ. Ο αντίστροφος κύκλος (Β΄) του κύκλου (Β) έχει διάμετρο την Κ΄Λ΄ διότι: ΚΛ διάμετρος του (Β) άρα ο (Β) είναι

ορθογώνιος με την ευθεία ΚΛ. Η εικόνα της ΚΛ είναι η ΚΛ διότι διέρχεται από το κέντρο Α του κύκλου αντιστροφής. Άρα ο κύκλος (Β΄) είναι ορθογώνιος προς την ΚΛ. Η ΚΛ όμως ταυτίζεται με την Κ΄Λ΄ άρα ο κύκλος (Β΄) είναι ορθογώνιος προς την Κ΄Λ΄. Επειδή είναι ΓΆ>ΛΆ άρα το κέντρο Ρ του κύκλου (Β΄) θα είναι εσωτερικό σημείο του ΓΆ. Τα σημεία Β, Δ, Δ΄ βρίσκονται στην ίδια ημιευθεία με αρχή το Α. Τα σημεία Γ,Γ΄ βρίσκονται στην αντικείμενη της ημιευθεία άρα το Ρ δεν μπορεί να είναι εσωτερικό σημείο του ΑΒ.

Σε αυτήν την περίπτωση θα έχουμε: $PB = PA + AB = d + \dfrac{\Phi d}{r^2 - d^2} = d - \dfrac{\Phi d}{d^2 - r^2}$=…κ.λ.π

Πρόταση

Ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων της αντιστροφής που απεικονίζει δύο δοθέντες κύκλους $O_1(r_1)$ και $O_2(r_2)$ σε δύο ίσους μεταξύ τους κύκλους είναι η ένωση των δύο μεσόκυκλων τους M_+, M_-

Απόδειξη:

Έστω ότι με $d(P,Q)$ συμβολίζουμε την απόσταση μεταξύ των σημείων P,Q. Ας υποθέσουμε ότι η αντιστροφή με κέντρο το σημείο P και δύναμη Φ μετασχηματίζει τους δοθέντες κύκλους σε δύο ίσους κύκλους. Από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι $\dfrac{d(P,O_1)^2 - r_1^2}{d(P,O_2)^2 - r_2^2} = \varepsilon \dfrac{r_1}{r_2}$ για $\varepsilon = \pm 1$.

Ας το δούμε αυτό αναλυτικότερα:

Έστω ότι R είναι η ακτίνα των δύο ίσων κύκλων στους οποίους αντιστρέφονται οι δύο κύκλοι $O_1(r_1)$ και $O_2(r_2)$.

Η απόσταση $d(P,O_1)$ είναι η απόσταση του κέντρου του πρώτου κύκλου $O_1(r_1)$ από το κέντρο Ρ του κύκλου ως προς τον οποίο γίνεται η αντιστροφή.

Η $d(P,O_2)$ είναι η απόσταση του κέντρου του δεύτερου κύκλου, $O_2(r_2)$, από το κέντρο Ρ του κύκλου της αντιστροφής.

Το προηγούμενο θεώρημα μας δίνει :

Η εικόνα του κύκλου με κέντρο το σημείο Β και ακτίνα r με την αντιστροφή ως προς ένα κύκλο κέντρου Α και δύναμη Φ ($\sqrt{\Phi}$ η ακτίνα του κύκλου της αντιστροφής) είναι ο κύκλος με ακτίνα ρ ίση με $\left|\dfrac{\Phi}{d^2 - r^2}\right| r$.

Άρα στην συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε: $\left|\dfrac{\Phi}{d(P,O_1)^2 - r_1^2}\right| r_1 = R \Rightarrow \dfrac{\Phi r_1}{R} = \left|d(P,O_1)^2 - r_1^2\right|$

ομοίως έχουμε:

$$\frac{\Phi r_2}{R} = \left|d(P,O_2)^2 - r_2^2\right|$$

$$\left|\frac{d(P,O_1)^2 - r_1^2}{d(P,O_2)^2 - r_2^2}\right| = \frac{\dfrac{\Phi r_1}{R}}{\dfrac{\Phi r_2}{R}} \Rightarrow \left|\frac{d(P,O_1)^2 - r_1^2}{d(P,O_2)^2 - r_2^2}\right| = \frac{r_1}{r_2}$$

άρα $\dfrac{d(P,O_1)^2 - r_1^2}{d(P,O_2)^2 - r_2^2} = \varepsilon \dfrac{r_1}{r_2}$ με $\varepsilon = \pm 1$

Θέτοντας τον τύπο αυτό σε ένα σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων όπου το κέντρο του κύκλου $O_1(r_1)$ έχει συντεταγμένες $O_1(a_1,0)$ και το κέντρο του κύκλου $O_2(r_2)$ έχει συντεταγμένες $O_2(a_2,0)$ και το σημείο $P=(x,y)$ θα έχουμε:

$$\frac{(x-a_1)^2+y^2-r_1^2}{(x-a_2)^2+y^2-r_2^2}=\varepsilon\frac{r_1}{r_2}\Rightarrow r_2\left((x-a_1)^2+y^2-r_1^2\right)+\varepsilon r_1\left((x-\alpha_2)^2+y^2-r_2^2\right)=0$$

Δηλαδή καταλήγουμε στην εξίσωση των μεσόκυκλων.

Πόρισμα:

Έστω ότι δίνονται τρεις κύκλοι. Ας πάρουμε ένα ζεύγος δύο κύκλων από τους τρεις αυτούς κύκλους και ας επιλέξουμε ένα μεσόκυκλο αυτού του ζεύγους. Επιλέγουμε ένα δεύτερο ζεύγος κύκλων και κατόπιν έναν μεσόκυκλο αυτού του ζεύγους, τότε τα κοινά σημεία των δύο αυτών μεσόκυκλων είναι κέντρα αντιστροφής τα οποία απεικονίζουν τους τρεις δοσμένους αυτούς κύκλους σε τρεις ίσους κύκλους.

Απόδειξη

Με M_{ij} συμβολίζουμε τον μεσόκυκλο των κύκλων $C_i(X,Y)=0$ και $C_j(X,Y)=0$

Από προηγούμενη πρόταση ο M_{ij} με $j\neq i$ έχει εξίσωση: $R_jC_i+\varepsilon_{ij}R_iC_j=0$ με $\varepsilon_{ij}=\pm1$ και $j\neq i$. Ο M_{ij} ανήκει στην δέσμη των κύκλων[7] που σχηματίζουν οι $C_i=R_i^2$ και $C_j=R_j^2$.

---

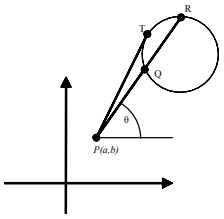
[7] Δέσμη κύκλων ή όπως την έχουμε ονομάσει και αλλιώς, οικογένεια ομοαξονικών κύκλων (coaxal family). Οι δέσμες κύκλων έχουν παρουσιαστεί πιο πριν με άλλη μορφή από αυτήν που παρουσιάζονται στο σημείο αυτό. Σε προηγούμενο μέρος της εργασίας μας είχαμε αναφερθεί στις οικογένειες ομοαξονικών κύκλων λέγοντας ότι έχουμε τρεις περιπτώσεις οικογενειών:

1. Απολλώνιες οικογένειες με δύο συγκεκριμένους σημειακούς κύκλους.
2. Οικογένειες των οποίων όλοι οι κύκλοι έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.
3. Οικογένειες κύκλων οι οποίοι διέρχονται από δύο συγκεκριμένα και διαφορετικά μεταξύ τους σημεία.

Τις οικογένειες αυτές θα τις ορίσουμε τώρα ως εξής: Έστω C και C' δύο διαφορετικοί μεταξύ τους κύκλοι, οι οποίοι έχουν (κανονικοποιημένες) εξισώσεις: $C(X,Y)=X^2+Y^2+2gX+2fY+c=0$ και $C'(X,Y)=X^2+Y^2+2g'X+2f'Y+c=0$. Το σύστημα των κύκλων που παράγεται από την εξίσωση: $\lambda C(\mathrm{X},\mathrm{Y})+\mu C'(\mathrm{X},\mathrm{Y})=0$, όπου λ,μ είναι τυχαίοι, λέγεται δέσμη κύκλων που προκύπτει από τους κύκλους C και C'. Αν (a,b) είναι ένα κοινό σημείο των κύκλων C και C' τότε $C(a,b)=0, C'(a,b)=0$ οπότε και $\lambda C(a,b)+\mu C'(a,b)=0$ για κάθε λ και μ. Άρα κάθε κύκλος της δέσμης διέρχεται από το κοινό σημείο (a,b) των κύκλων C και C'. Από την άλλη μεριά αν το (a,b) δεν είναι κοινό σημείο και των δύο κύκλων C και C' τότε $C(a,b)\neq0$ ή $C'(a,b)\neq0$ οπότε μόνο ένας κύκλος της δέσμης περνάει από το σημείο (a,b). Άρα μια εξίσωση της μορφής $\lambda C(\mathrm{X},\mathrm{Y})+\mu C'(\mathrm{X},\mathrm{Y})=0$ παράγει μια οικογένεια μη τεμνόμενων κύκλων (απολλώνια οικογένεια) ή μια οικογένεια κύκλων με ένα ακριβώς κοινό σημείο ή μια οικογένεια κύκλων οι οποίοι διέρχονται από δύο συγκεκριμένα και διαφορετικά μεταξύ τους σημεία. Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε έναν κύκλο C με εξίσωση:

$C(X,Y)=X^2+Y^2+2gX+2fY+c=0$ η οποία γίνεται: $(x+g)^2+(y+f)^2=g^2+f^2-c$ με $g^2+f^2-c>0$.

Έστω $P(a,b)$ ένα σημείο τότε η έκφραση: $C(a.b)=(a+g)^2+(b+f)^2-(g^2+f^2-c)$ είναι η δύναμη του $P(a,b)$ ως προς τον κύκλο C.



Αν χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες με αρχή το $P(a,b)$ θα έχουμε για τις συντεταγμένες του $Q(k,l)$:

$k=a+r\cos\theta, l=b+r\sin\theta$. Επειδή το σημείο $Q(k,l)$ ανήκει στον κύκλο C άρα:

$(a+r\cos\theta)^2+(b+r\sin\theta)^2+2g(a+r\cos\theta)+2f(b+r\sin\theta)+c=0$ η οποία γράφεται:

Συνέχεια της σημείωσης από την προηγούμενη σελίδα:

$r^2 + 2r\left(x\cos\theta + y\sin\theta + g\cos\theta + f\sin\theta\right) + C\left(a,b\right) = 0$.

Το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης είναι $C\left(a,b\right)$ (Vieta) άρα $\overline{PQ}\cdot\overline{PR} = C\left(a,b\right)$ όπου PQ, PR είναι προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα άρα τα $\overline{PQ}, \overline{PR}$ παίρνουν θετικές και αρνητικές τιμές. Επειδή λοιπόν $\overline{PQ}\cdot\overline{PR} = C\left(a,b\right) = a^2 + b^2 + 2ga + 2fy + c$ τότε η εξίσωση $\lambda C + \mu C' = 0$ ενός συγκεκριμένου κύκλου C_i της δέσμης (δηλαδή τα λ και μ έχουν συγκεκριμένες τιμές) γράφεται $\frac{\lambda}{\mu} = -\frac{C\left(x,y\right)}{C'\left(x,y\right)}$ για σημεία $\left(x,y\right)$ που δεν ανήκουν στον κύκλο C. Μπορούμε λοιπόν να μεταφράσουμε τον δοθέντα κύκλο της δέσμης ως τον γεωμετρικό τόπο ενός σημείου που κινείται έτσι ώστε ο λόγος των δυνάμεων του ως προς τους κύκλους C και C' είναι μια σταθερά. Ένα πολύ σημαντικό μέλος της οικογένειας είναι αυτό που παίρνουμε για $\lambda/\mu = -1$. Το μέλος αυτό είναι στην πραγματικότητα ευθεία με εξίσωση: $C(X,Y) - C'(X,Y) = 0 \Leftrightarrow 2(g-g')X + 2(f-f')Y + C - C' = 0$ που είναι ο ριζικός άξονας των κύκλων C και C'. Κάθε ζεύγος κύκλων μιας οικογένειας ομοαξονικών κύκλων έχει τον ίδιο ριζικό άξονα.

Πράγματι $C_1 : \lambda_1 C + \mu_1 C' = 0, C_2 : \lambda_2 C + \mu_2 C' = 0$. Κανονικοποιούμε τις εξισώσεις αυτές πολλαπλασιάζοντας με $\frac{1}{\lambda_1 + \mu_1}$ την πρώτη και με $\frac{1}{\lambda_2 + \mu_2}$ και αφαιρώντας τις εξισώσεις που προκύπτουν παίρνουμε: $\left(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1\right)(C - C') = 0$ με $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu \neq 0$. Γνωρίζουμε ότι $C - C' = 0$ είναι ο ριζικός άξονας των C και C' οπότε έχουμε το ζητούμενο. Αποδεικνύεται ότι αν Ψ και Ψ΄ είναι δύο άλλοι κύκλοι της δέσμης $\lambda C + \mu C' = 0$ τότε η δέσμη αυτή προσδιορίζεται επίσης από την εξίσωση $k_1\Psi + k_2\Psi' = 0$. Πράγματι έστω ότι $\Psi \equiv \lambda_1 C + \mu_1 C' = 0,\ \Psi' \equiv \lambda_2 C + \mu_2 C' = 0$ είναι δύο διαφορετικοί κύκλοι άρα $\lambda_2\mu_1 - \lambda_1\mu_2 \neq 0$.

Η δέσμη που ορίζεται από τον τύπο $k_1\Psi + k_2\Psi' = 0$ περιέχει τους κύκλους $k_1\left(\lambda_1 C + \mu_1 C'\right) + k_2\left(\lambda_2 C + \mu_2 C'\right) = 0$. Η μορφή αυτή γράφεται ως $\left(k_1\lambda_1 + k_2\lambda\right)C + \left(k_1\mu_1 + k_2\mu_2\right)C' = 0$ άρα είναι κύκλοι της δέσμης των C και C'. Το ερώτημα που τίθεται τώρα είναι να αποδείξουμε ότι η δέσμη $\lambda C + \mu C' = 0$ δεν περιέχει κάποιους κύκλους που δεν ανήκουν στο σύστημα $k_1\Psi + k_2\Psi' = 0$ και αντίστροφα η δέσμη $k_1\Psi + k_2\Psi' = 0$ δεν περιέχει κύκλους που δεν ανήκουν στο σύστημα $\lambda C + \mu C' = 0$.

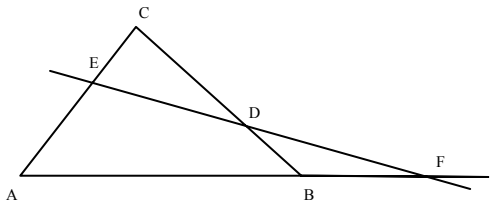
Αν λοιπόν μας δώσουν δύο συγκεκριμένα λ, μ μπορούμε να λύσουμε το σύστημα $\begin{matrix} k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 = \lambda \\ k_1\mu_1 + k_2\mu_2 = \mu \end{matrix}$ (1)

αφού $\lambda_2\mu_1 - \lambda_1\mu_2 \neq 0$. Από την άλλη μεριά αν μας δοθούν τα k_1, k_2 τότε μπορούν να βρεθούν μοναδικά λ, μ από το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων (1) πιο πάνω.

Παίρνοντας ως άξονα χ΄χ την ευθεία των κέντρων μιας οικογένειας ομοαξονικών κύκλων και ως άξονα y΄y τον ριζικό άξονα και ως ειδικούς κύκλους της δέσμης τον X=0 (ριζικός άξονας) και τον $g'C - gC' = \left(g' - g\right)\left(X^2 + Y^2 + c\right) = 0$ θα έχουμε ως εξίσωση της δέσμης: $X^2 + Y^2 + 2kX + c = 0$. Όλοι οι κύκλοι της δέσμης διέρχονται από δύο σταθερά σημεία που δίνονται για $X = 0$ και $Y^2 + c = 0$. Αν $c = -p^2$ τότε τα δύο αυτά σημεία είναι πραγματικά και είναι τα $\left(0, p\right)$ και $\left(0, -p\right)$. Ο κύκλος γράφεται στην μορφή: $X^2 + Y^2 + 2kX - p^2 = 0$. Όταν $p = 0$ τότε οι κύκλοι της δέσμης εφάπτονται και ο τύπος παίρνει την μορφή: $X^2 + Y^2 + 2kX = 0$. Αν όμως το c είναι θετικό, $c = p^2$, τότε οι κύκλοι της δέσμης δεν τέμνονται και το σύστημα έχει εξίσωση που γράφεται στην μορφή: $X^2 + Y^2 + 2kX + p^2 = 0$ που γράφεται στην μορφή $\left(X + k\right)^2 + Y^2 = k^2 - p^2$. Το κέντρο του κύκλου αυτού είναι $\left(-k, 0\right)$ και η ακτίνα

Συνέχεια της σημείωσης από την προηγούμενη σελίδα: $\left(k^2 - p^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Για πραγματικούς κύκλους πρέπει να είναι $k^2 > p^2$. Κανένας κύκλος του συστήματος δεν έχει κέντρα που να είναι ανάμεσα στα σημεία

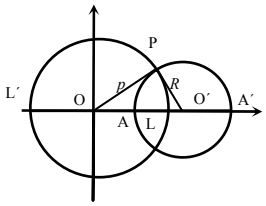
Παρένθεση: {Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη θα πρέπει να πούμε κάποια πράγματα που κρίνονται απαραίτητα για την απόδειξη αυτού του πορίσματος.
Πρώτα από όλα ας θυμηθούμε το θεώρημα του Μενελάου:
Δοθέντων τριών σημείων A,B,C τα οποία σχηματίζουν ένα τρίγωνο και τριών σημείων E,D,F που ανήκουν στις ευθείες AC, CB, AB αντίστοιχα , τότε τα E,D,F είναι συνευθειακά αν και μόνο αν $\frac{AF}{FB}\frac{BD}{DC}\frac{CE}{EA}=-1$
Σε αυτήν την ισότητα τα AB κ.λ.π παριστάνουν προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα και έτσι επιτρέπονται αρνητικές τιμές.
Έχοντας υπ΄ όψιν μας το θεώρημα του Μενελάου θα αποδείξουμε ότι αν από το σύνολο των έξι κέντρων ομοιότητας των τριών αυτών κύκλων πάρουμε τριάδες, με την κάθε τριάδα να αποτελείται από τρία εξωτερικά κέντρα ή δύο εξωτερικά και ένα εσωτερικό κέντρο, τότε κάθε τέτοια τριάδα κέντρων ομοιότητας αποτελείται από συνευθειακά σημεία. Οι τέσσερις ευθείες που σχηματίζονται κατ΄ αυτόν τον τρόπο ονομάζονται άξονες ομοιότητας των τριών αυτών κύκλων.



Ας υποθέσουμε ότι οι ακτίνες των τριών κύκλων είναι οι a,b,c και τα κέντρα τους είναι τα A,B,C. Ας υποθέσουμε επίσης ότι τα εξωτερικά κέντρα ομοιότητας είναι τα A',B',C' και τα εσωτερικά κέντρα ομοιότητας είναι τα A'',B'',C''.

Για τα εξωτερικά κέντρα ομοιότητας έχουμε ότι ισχύει $\frac{AC'}{C'B}=-\frac{a}{b},\frac{BA'}{A'C}=-\frac{b}{c},\frac{CB'}{B'A}=-\frac{c}{a}$

$L(-p,0)$ και $L(p,0)$. Αν ένας κύκλος της δέσμης τέμνει τον χ΄χ άξονα στα σημεία A και A΄ τότε οι συντεταγμένες των σημείων αυτών ικανοποιούν την εξίσωση: $X^2+Y^2+2kX+p^2=0$ οπότε $\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=p^2$ (Vieta) άρα $OA\cdot OA'=p^2$ (αφού τα A,A' είναι σημεία της ίδιας ημιευθείας με αρχή το O).



$OA\cdot OA'=OO'^2-R^2$ (δύναμη του σημείου O ως προς κύκλο (O΄, O΄P=R)).
Άρα $p^2=OO'^2-R^2\Rightarrow p^2+R^2=OO'^2$.
Οι κύκλοι (O, $OP=p$) και (O΄, O΄P=R) είναι ορθογώνιοι. Επίσης η ευθεία L΄A΄ (γενικευμένος κύκλος) διέρχεται από τα κέντρα των κύκλων (O, $OP=p$) και (O΄, O΄P=R) άρα είναι ορθογώνιος κύκλος προς αυτούς. Τα σημεία L και L΄ είναι αντίστροφα μεταξύ τους σημεία ως προς κάθε κύκλο (O΄, O΄P=R) της δέσμης (αφού είναι σημεία που ανήκουν σε δύο ορθογώνιους κύκλους προς τον (O΄, O΄P=R)). Άρα η δέσμη αυτή είναι πράγματι η Απολλώνια οικογένεια με οριακά σημεία τα Lκαι L΄. Καταφέραμε λοιπόν, στο σημείο αυτό, να συνδέσουμε τις δύο οπτικές γωνίες υπό τις οποίες είχαμε παρουσιάσει τις δέσμες κύκλων.

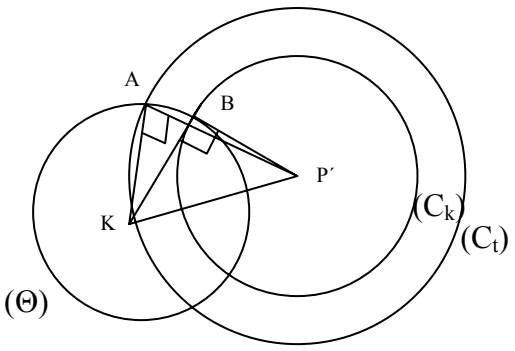
Αν πολλαπλασιάσουμε τώρα κατά μέλη τις τρεις αυτές ισότητες θα έχουμε $\frac{AC'}{C'B}\frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}=-\frac{a}{b}\left(-\frac{b}{c}\right)\left(-\frac{c}{a}\right)=-1$ άρα από το θεώρημα του Μενέλαου έχουμε ότι τα τρία εξωτερικά κέντρα ομοιότητας είναι συγγραμμικά.
Θα θεωρήσουμε τώρα το σύστημα δύο εσωτερικών και ενός εξωτερικού σημείου.
Έστω για παράδειγμα το σύστημα των A', B'', C'.
Τότε $\frac{AC'}{C'B}=-\frac{a}{b}$, $\frac{BA''}{A''C}=\frac{b}{c}$, $\frac{CB''}{B''A}=\frac{c}{a}$ οπότε: $\frac{AC'}{C'B}\frac{BA''}{A''C}\frac{CB''}{B''A}=-\frac{a}{b}\frac{b}{c}\frac{c}{a}=-1$ άρα και σε αυτήν την περίπτωση έχουμε συγγραμμικότητα.
Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και στην περίπτωση των δύο άλλων τριάδων ενός εσωτερικού και δύο εξωτερικών κέντρων ομοιότητας.}
Ας γυρίσουμε τώρα στην απόδειξη του πορίσματος μας.
Αν λοιπόν επιλέξουμε τα ε_{ij} έτσι ώστε $\varepsilon_{\kappa\lambda}\varepsilon_{\lambda\mu}\varepsilon_{\mu\kappa}=-1$ όπου $\kappa,\lambda,\mu\in\{1,2,3\}$.
Για παράδειγμα ας πάρουμε $\varepsilon_{12}\varepsilon_{23}\varepsilon_{31}=-1$ τότε τα κέντρα των $M_{12}, M_{23}, M_{3,1}$ είναι συγγραμμικά.
Επειδή το ριζικό κέντρο[8] P της τριάδας κύκλων $C_i,\quad i=1,2,3$ έχει την ίδια δύναμη ως προς τους τρεις κύκλους $M_{12}, M_{23}, M_{3,1}$ αυτοί σχηματίζουν μια δέσμη κύκλων και τα κοινά τους σημεία X, Y είναι τα κέντρα αντιστροφών που απεικονίζουν τους κύκλους $C_i,\quad i=1,2,3$ σε ίσους κύκλους.
Θα δούμε με περισσότερη λεπτομέρεια γιατί οι $M_{12}, M_{23}, M_{3,1}$ ανήκουν στην ίδια δέσμη. Ο κύκλος M_{12} ανήκει στην δέσμη που ορίζουν οι κύκλοι C_1, C_2.Ομοίως ο M_{23} ανήκει στην δέσμη που ορίζουν οι κύκλοι C_2, C_3 και ο M_{31} στην δέσμη που ορίζουν οι κύκλοι C_3, C_1.
Το ριζικό κέντρο P είναι το σημείο που έχει την ίδια δύναμη ως προς τους κύκλους των τριών δεσμών: (C_1, C_2), (C_2, C_3) και (C_3, C_1) οπότε το P έχει την ίδια δύναμη ως προς τους τρεις κύκλους $M_{12}, M_{23}, M_{3,1}$. Έστω η δέσμη των κύκλων M_{12}, M_{23}. Ο ριζικός άξονας[9] της δέσμης αυτής είναι η κάθετη ευθεία προς την διάκεντρο των δύο αυτών κύκλων, η οποία και διέρχεται από το σημείο P (αφού το P έχει την ίδια δύναμη ως προς τους δύο αυτούς κύκλους). Ομοίως για την δέσμη που σχηματίζουν οι κύκλοι M_{23}, M_{31} έχουμε ότι ο ριζικός της άξονας είναι η κάθετη ευθεία στην διάκεντρό τους, η οποία διέρχεται από το P. Οι κύκλοι $M_{12}, M_{23}, M_{3,1}$ έχουν συγγραμμικά κέντρα άρα οι ριζικοί άξονες των ζευγών M_{12}, M_{23} και $M_{23}, M_{3,1}$ ταυτίζονται οπότε οι κύκλοι $M_{12}, M_{23}, M_{3,1}$ ανήκουν στην ίδια δέσμη.
Ο αριθμός των κοινών σημείων X, Y που μπορούν να θεωρηθούν πόλοι αντιστροφής που απεικονίζουν τους κύκλους $C_i,\quad i=1,2,3$ σε μια τριάδα ίσων κύκλων, εξαρτάται από την σχετική θέση των $C_i,\quad i=1,2,3$.

---

8 Ας θυμηθούμε τα εξής:
Το κέντρο του ορθογώνιου κύκλου σε τρεις δεδομένους κύκλους που δεν έχουν συγγραμμικά κέντρα λέγεται ριζικό κέντρο ή ορθογώνιο κέντρο των τριών αυτών κύκλων.
Το κέντρο του ορθογώνιου αυτού κύκλου αναγκαία βρίσκεται πάνω και στους τρεις ριζικούς άξονες των τριών δοσμένων κύκλων αν τους πάρουμε ανά δύο. Οπότε το ριζικό κέντρο είναι το κοινό σημείο των τριών ριζικών αξόνων.
9 Ριζικός άξονας δυο κύκλων είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που έχουν την ίδια δύναμη ως προς τους δύο αυτούς κύκλους. Ο αυτός γεωμετρικός τόπος είναι μια ευθεία .
Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια σταθερή ευθεία. Έστω το σύνολο των κύκλων που κάθε ζεύγος τους έχει ριζικό άξονα αυτήν την ευθεία. Τότε το σύνολο αυτών των κύκλων αποτελεί μια δέσμη κύκλων.

Ο μέγιστος αριθμός είναι 8 και συμβαίνει όταν οι τρεις κύκλοι έχουν, ανά δύο, δύο διαφορετικά κέντρα ομοιότητας. Από τα 8 αυτά σημεία τα δύο αντιστοιχούν στους τρεις εξωτερικούς μεσόκυκλους ενώ κάθε ένα από τα εναπομείναντα ζεύγη αντιστοιχεί σε έναν συνδυασμό δυο εσωτερικών και ενός εξωτερικού μεσόκυκλου.
Ο μικρότερος αριθμός είναι 0 και αντιστοιχεί για παράδειγμα στην περίπτωση που οι $C_i, \quad i = 1,2,3$ είναι μέλη μιας ομοαξονικής δέσμης κύκλων χωρίς κοινά σημεία.

Πόρισμα: Το σύνολο των σημείων που είναι κέντρα κύκλων που τέμνουν τρεις δεδομένους κύκλους κατά ίσες γωνίες βρίσκεται πάνω σε 0 ή 1 ή 2 ή 3 ή 4 ευθείες που διέρχονται από το ριζικό κέντρο των τριών κύκλων.
Απόδειξη:
Ας υποθέσουμε ότι $C_1 = A(R_1)$ (κέντρο A και ακτίνα R_1), $C_2 = B(R_2)$ και $C_3 = C(R_3)$ είναι οι τρεις δοσμένοι κύκλοι. Ας θεωρήσουμε τρεις μεσόκυκλους με συγγραμμικά κέντρα. Αν Χ είναι μια τομή των τριών αυτών μεσόκυκλων η ανάκλαση ως προς την ευθεία των κέντρων τους δίνει και ένα άλλο κοινό σημείο. Ας θεωρήσουμε την αντιστροφή $\Re$ με κέντρο αντιστροφής το σημείο Χ η οποία απεικονίζει τον κύκλο $C_3 = C(R_3)$ στον εαυτό του. Οι κύκλοι $C_1 = A(R_1)$ και $C_2 = B(R_2)$ γίνονται (μέσω αυτής της αντιστροφής) οι κύκλοι $C_1' = A'(R_3)$ και $C_2' = B'(R_3)$ οι οποίοι έχουν ίσες ακτίνες με τον κύκλο $C_3 = C(R_3)$ αφού η αντιστροφή έχει πόλο το σημείο Χ (σημείο τομής των τριών μεσόκυκλων).
Αν P' είναι το ριζικό κέντρο των κύκλων C_1', C_2', C_3 τότε κάθε κύκλος $C = P'(R)$ θα τέμνει τους τρεις κύκλους C_1', C_2', C_3 υπό ίση γωνία (αυτό προκύπτει πολύ εύκολα αν σκεφτεί κανείς ότι οι κύκλοι C_1', C_2', C_3 είναι ίσης ακτίνας οπότε αν πάρουμε δύο από τους κύκλους αυτούς, έστω τους C_1', C_2', τότε ο καθένας από αυτούς είναι συμμετρικός του άλλου ως προς άξονα συμμετρίας το ριζικό τους άξονα. Κάθε τεμνόμενος με αυτούς κύκλος που έχει το κέντρο του στον ριζικό άξονα των C_1', C_2' θα τέμνει λόγω συμμετρίας τους δύο αυτούς κύκλους υπό ίση γωνία. Κάθε κύκλος που έχει κέντρο το ριζικό κέντρο των C_1', C_2', C_3 θα έχει αυτήν την ιδιότητα και ως προς τους τρεις κύκλους C_1', C_2', C_3). Αν εφαρμόσουμε την αντιστροφή $\Re$ μια ακόμη φορά στους κύκλους C_1, C_2', C_3' και C τότε παίρνουμε τους τρεις αρχικούς κύκλους C_1, C_2, C_3 και έναν κύκλο C' και από την στιγμή που η αντιστροφές διατηρούν το μέγεθος των γωνιών, τότε ο κύκλος C' θα τέμνει τους τρεις αρχικούς κύκλους C_1, C_2, C_3 υπό ίση γωνία.
Οι κύκλοι που είναι ορθογώνιοι σε όλους τους κύκλους C' απεικονίζονται μέσω της αντιστροφής $\Re$ σε ευθείες που διέρχονται από το σημείο P'. Ας δούμε γιατί συμβαίνει αυτό. Οι κύκλοι C' είναι οι εικόνες ομόκεντρων κύκλων $C = P'(R)$ ως προς την αντιστροφή $\Re$. Οι ορθογώνιοι κύκλοι προς τους κύκλους C' θα έχουν εικόνες οι οποίες είναι ορθογώνιες ως προς τις εικόνες των κύκλων C' μέσω της αντιστροφής $\Re$ (δηλαδή θα είναι ορθογώνιες ως προς τους ομόκεντρους κύκλους $C = P'(R)$). Οι εικόνες αυτές δεν μπορεί να είναι τίποτα άλλο πέρα από ευθείες που διέρχονται από το κοινό κέντρο P' των κύκλων $C = P'(R)$. Ας υποθέσουμε ότι τα πράγματα δεν είναι έτσι και υπάρχει κανονικός και όχι γενικευμένος κύκλος που είναι ορθογώνιος προς τους κύκλους $C = P'(R)$. Έστω ότι αυτός ο κύκλος είναι ο (Θ). Οι κύκλοι (C_k) και (C_t) είναι ορθογώνιοι με τον (Θ) άρα οι ακτίνες Ρ΄Α και Ρ΄Β είναι κάθετες με τις ακτίνες ΚΑ και ΚΒ οπότε τα τρίγωνα ΚΑΡ΄ και ΚΒΡ΄ είναι ορθογώνια έχουν τις ΚΑ και ΚΒ ίσες και την ΚΡ΄ κοινή άρα είναι ίσα οπότε Ρ΄Α=Ρ΄Β πράγμα άτοπο.



Ένας άλλος τρόπος να το δούμε αυτό προκύπτει αν σκεφτούμε ότι μια οικογένεια ομόκεντρων κύκλων είναι μια απολλώνια οικογένεια, με σημειακούς κύκλους που ταυτίζονται με το κέντρο Ρ΄, των ομόκεντρων αυτών κύκλων. Η οικογένεια των ορθογώνιων κύκλων προς την απολλώνια οικογένεια είναι η οικογένεια των κύκλων που διέρχεται από τους σημειακούς κύκλους της απολλώνιας οικογένειας δηλαδή από το κέντρο Ρ΄ των ομόκεντρων κύκλων. Η μόνη οικογένεια που έχει αυτήν την ιδιότητα είναι η οικογένεια των γενικευμένων κύκλων που διέρχονται από το Ρ΄.

Επειδή λοιπόν οι εικόνες των ορθογώνιων κύκλων στους κύκλους C΄ είναι ευθείες που διέρχονται από το Ρ΄ άρα οι εικόνες τους με την αντιστροφή $\Re$ θα είναι κύκλοι που διέρχονται από τον πόλο της αντιστροφής δηλαδή το σημείο Χ και είναι ορθογώνιοι στους C΄. Λόγω συμμετρίας της όλης διαδικασίας θα έχουμε ότι οι κύκλοι αυτοί (οι ορθογώνιοι δηλαδή στους C΄) θα διέρχονται και από τον άλλο πόλο Υ. Άρα ανήκουν στην δέσμη που παράγεται από την τριάδα των μεσόκυκλων με τους οποίους ξεκινήσαμε. Οπότε σε μια δέσμη θα ανήκουν και οι κύκλοι C΄ των οποίων τα κέντρα ανήκουν στην ευθεία ΧΥ.

Στα πιο κάτω σχήματα που παριστάνουν μια άρβηλο και τις αντίστοιχες αλυσίδες του Πάππου θα ακολουθήσουμε τις πιο κάτω συμβάσεις γα τους συμβολισμούς των αντίστοιχων κύκλων:

Η άρβηλος θα έχει εσωτερικούς κύκλους τους $O_1(r_1)$, $O_2(r_2)$ και εξωτερικό ημικύκλιο το $O(r) = O_0(r)$ και $r = r_1 + r_2$.

Η άρβηλος θα έχει σημεία τομής των ημικυκλίων μεταξύ τους τα σημεία A,C,B και εγγεγραμμένο σε αυτήν κύκλο τον κύκλο (Ο΄).

Τις τρεις αλυσίδες του Πάππου θα τις συμβολίσουμε με $\left(P_{i,n}\right), i = 0,1,2$. Αν $\left(i, j, k\right)$ είναι μια τυχαία μετάθεση του $\left(0,1,2\right)$ τότε η αλυσίδα $\left(P_{i,n}\right)$ είναι η διαδοχή των κύκλων που εφάπτονται και στον (O_j) και στον (O_k) και ορίζεται από:

1) $P_{i,0} = (\mathrm{O}')$ που είναι ο εγγεγραμμένος κύκλος της αρβήλου

2) για $n \geq 1$ $P_{i,n}$ είναι εφαπτόμενος στον $P_{i,n-1}, (O_j)$ και $\left(O_k\right)$

3) για $n \geq 2$ $P_{i,n}$ και $P_{i,n-2}$ είναι διαφορετικοί μεταξύ τους κύκλοι (Σχ. α).

Οι τρεις αλυσίδες του Πάππου συνδέονται με τα κέντρα ομοιότητας των κύκλων της αρβήλου.

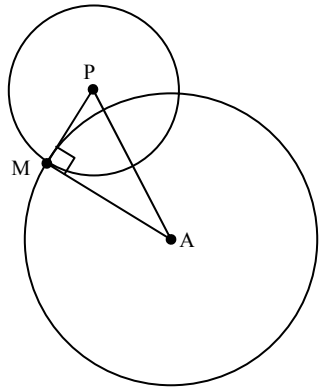
Θα δηλώσουμε με M_0 το εξωτερικό κέντρο ομοιότητας των $O_1(r_1)$ και $O_2(r_2)$.

Επίσης για $i, j = 1,2$ με $i \neq j$ με M_i θα δηλώσουμε το εσωτερικό κέντρο ομοιότητας των κύκλων $O(r)$ και $O_j(r_j)$. Τότε οι μεσόκυκλοι είναι οι $M_0(C)$, $M_1(B), M_2(A)$ (εδώ το σύμβολο M(K) σημαίνει τον κύκλο που έχει κέντρο το M και διέρχεται από το K).

Πριν συνεχίσουμε θα αποδείξουμε ένα θεώρημα που θα φανεί χρήσιμο πιο κάτω.

Θεώρημα Ι:

Αν ένας κύκλος έχει το κέντρο του πάνω στον ριζικό άξονα μιας δέσμης κύκλων και είναι ορθογώνιος προς έναν κύκλο της δέσμης τότε είναι ορθογώνιος προς κάθε κύκλο της δέσμης.



Απόδειξη:

Ας υποθέσουμε ότι (Α) είναι ένας κύκλος της δέσμης (Θ) και ο κύκλος (Ρ,ρ) είναι ορθογώνιος στον κύκλο (Α) και έχει το κέντρο του στον ριζικό άξονα r της δέσμης (Θ). Τότε η δύναμη του σημείου Ρ ως προς τον κύκλο (Α) είναι ρ^2 αφού η δύναμη ενός σημείου Κ ως προς κύκλο (Μ) είναι $\Delta^{K}_{(M)}$ =(διάκεντρος ΜΚ)^2-(ακτίνα του (Μ))^2 οπότε στη συγκεκριμένη πρόταση που θέλουμε να αποδείξουμε θα έχουμε: $\Delta^{P}_{(A)}$ =PA^2-AM^2

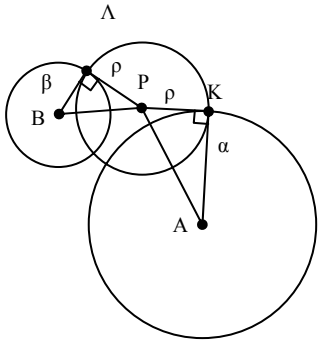
Ο κύκλος (Ρ,ρ) είναι ορθογώνιος προς τον κύκλο (Α) άρα $MA^2+MP^2=PA^2$ οπότε $MP^2=PA^2-MA^2 \Rightarrow \rho^2=\Delta^P_{(A)}$.

Το κέντρο Ρ του κύκλου (Ρ,ρ) ανήκει στον ριζικό άξονα r άρα το σημείο Ρ θα έχει την ίδια δύναμη ως προς κάθε κύκλο της δέσμης. Οπότε η δύναμη του Ρ ως προς τον οποιοδήποτε κύκλο (Α) της δέσμης είναι ρ^2. Έστω ότι ο κύκλος (Ρ,ρ) τέμνει τον τυχαίο κύκλο της δέσμης στο Μ. Ισχύει όμως $\rho^2=\Delta^P_{(A)}$ και $\Delta^P_{(A)}=PA^2-AM^2$ άρα $MA^2+MP^2=PA^2$ οπότε ο κύκλος (Ρ,ρ) είναι ορθογώνιος με τον τυχαίο κύκλο (Α) της δέσμης.

Πόρισμα: Αν ένας κύκλος (Ρ) είναι ορθογώνιος προς δύο κύκλους (Α) και (Β) τότε είναι ορθογώνιος προς όλους τους κύκλους της δέσμης που ορίζουν οι κύκλοι (Α) και (Β).

Απόδειξη:

Θα αποδείξουμε ότι το κέντρο Ρ ανήκει στον ριζικό άξονα της δέσμης των κύκλων (Α) και (Β). Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΛΡΒ και ΚΡΑ έχουμε $PA^2-\alpha^2=PB^2-\beta^2=\rho^2 \Rightarrow \Delta^P_{(A)}=\Delta^P_{(B)}$. Άρα το κέντρο Ρ ανήκει στον ριζικό άξονα της δέσμης των κύκλων (Α) και (Β) αφού έχει την ίδια δύναμη ως προς τους κύκλους (Α) και (Β). Ο κύκλος (Ρ,ρ) είναι ορθογώνιος ως προς τον κύκλο (Α) άρα από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι είναι ορθογώνιος ως προς κάθε κύκλο της δέσμης.

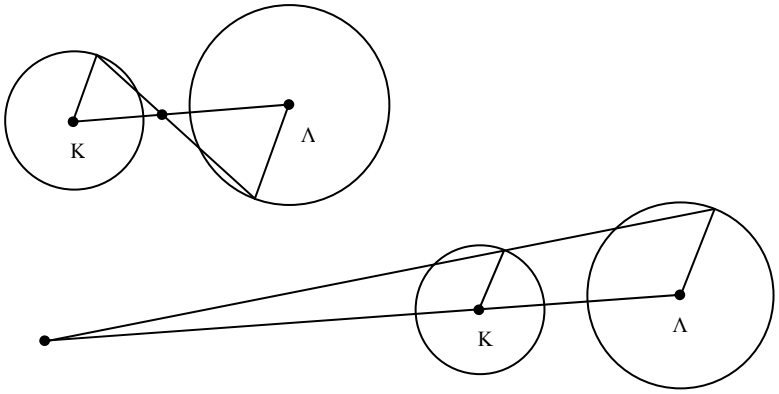


Πως βρίσουμε τα εξωτερικά και εσωτερικά κέντρα ομοιότητας και τους αντίστοιχους μεσόκυκλους της αρβήλου;

Μπορούμε να δουλέψουμε πολύ εύκολα ως εξής:

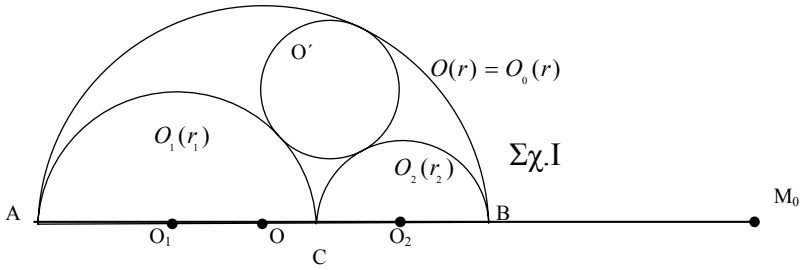
Φέρνουμε δύο παράλληλες ακτίνες με αντίθετο προσανατολισμό και συνδέουμε τα άκρα τους με ένα ευθύγραμμο τμήμα. Το ευθύγραμμο αυτό τμήμα τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα της διακέντρου σε ένα εσωτερικό σημείο το οποίο είναι το εσωτερικό κέντρο ομοιότητας.

Για τα εξωτερικά κέντρα ομοιότητας κάνουμε το ίδιο πράγμα μόνο που οι ακτίνες που θα φέρουμε είναι του ίδιου προσανατολισμού.

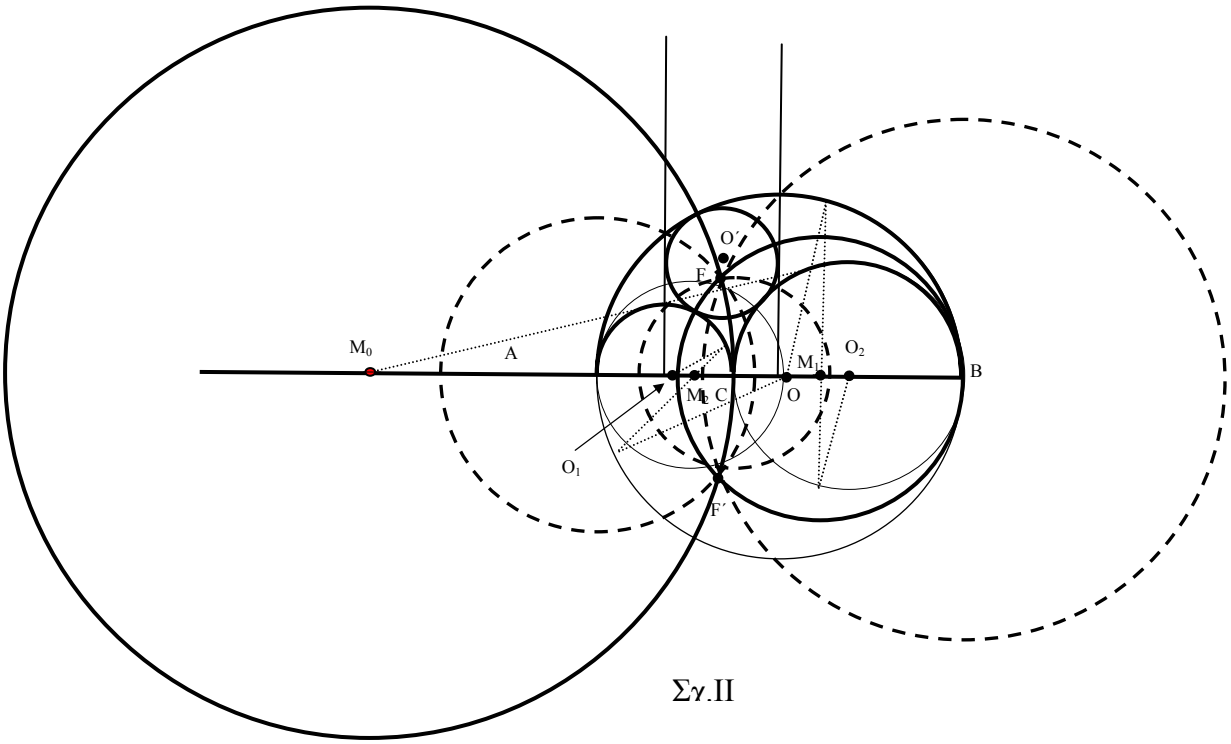


Για να βρούμε τους αντίστοιχους μεσόκυκλους θα μπορούσαμε να σκεφτούμε ως εξής:

Έστω ότι θέλουμε τον μεσόκυκλο με κέντρο το M_0 (εξωτερικό κέντρο ομοιότητας των $O_1(r_1)$ και $O_2(r_2)$).



Το σημείο C (Σχ.I) θα πρέπει να μείνει αναλλοίωτο κατά την αντιστροφή ως προς τον M_0 οπότε θα πρέπει να ανήκει στον κύκλο της αντιστροφής M_0. Ο μεσόκυκλος λοιπόν μάλλον είναι ο $M_0(C)$ κύκλος κέντρου M_0 που διέρχεται από το σημείο C). Για να το πούμε αυτό με σιγουριά πρέπει να δείξουμε ότι το αντίστροφο του A είναι το B. Δηλαδή πρέπει να δείξουμε ότι $M_oA \cdot M_oB = (M_oC)^2$. Το M_0 είναι κέντρο ομοιότητας, άρα το σημείο A του κύκλου $O_1(r_1)$ είναι ομοιόθετο σημείο του σημείου C του κύκλου $O_2(r_2)$ και το σημείο C του κύκλου $O_1(r_1)$ είναι ομοιόθετο σημείο του σημείου B του κύκλου $O_2(r_2)$ οπότε θα ισχύει $\frac{M_oA}{M_oC} = \frac{M_oC}{M_oB}$ και κατά συνέπεια $M_oA \cdot M_oB = (M_oC)^2$. Ομοίως δείχνουμε ότι ο κύκλος $M_1(B)$ είναι ο μεσόκυκλος των κύκλων $O_2(r_2)$ και $O(r)$.και ο $M_2(A)$ ο μεσόκυκλος των κύκλων $O_1(r_1)$ και $O(r)$.



Σγ.II

Κάθε ένας από τους μεσόκυκλους αφήνει τον εγγεγραμμένο κύκλο O΄ καθώς και την ανάκλασή του O_α ως προς την AB αναλλοίωτους. Το ίδιο κάνει και κάθε κύκλος που είναι ορθογώνιος με τον εγγεγραμμένο κύκλο O΄ και έχει κέντρο το A, το B ή το C. Οι έξι αυτοί κύκλοι (Σχ.II) είναι ορθογώνιοι ως προς δύο κύκλους (τον O΄ και την ανάκλασή του O_α) άρα είναι ορθογώνιοι προς κάθε κύκλο που ανήκει στην δέσμη (O,O_α) που ορίζουν οι κύκλοι O και O_α (θεώρημα I). Οι έξι αυτοί κύκλοι είναι λοιπόν μέλη της δέσμης $\Im$, των ορθογώνιων κύκλων, των κύκλων της δέσμης (O,O_α) και ο κύκλος O΄ έχει κέντρο που ανήκει στον ριζικό άξονα της δέσμης $\Im$. Οι τρεις τελευταίοι από τους έξι κύκλους μετασχηματίζουν δύο από τους τρεις κύκλους που οριοθετούν την άρβηλο σε δύο ευθείες που είναι κάθετες στην AB και εφάπτονται στον O΄ και τον τρίτο κύκλο της αρβήλου σε έναν κύκλο εφαπτόμενο στον O΄ και στις δύο προαναφερθείσες κατακόρυφες εφαπτόμενες του O΄.

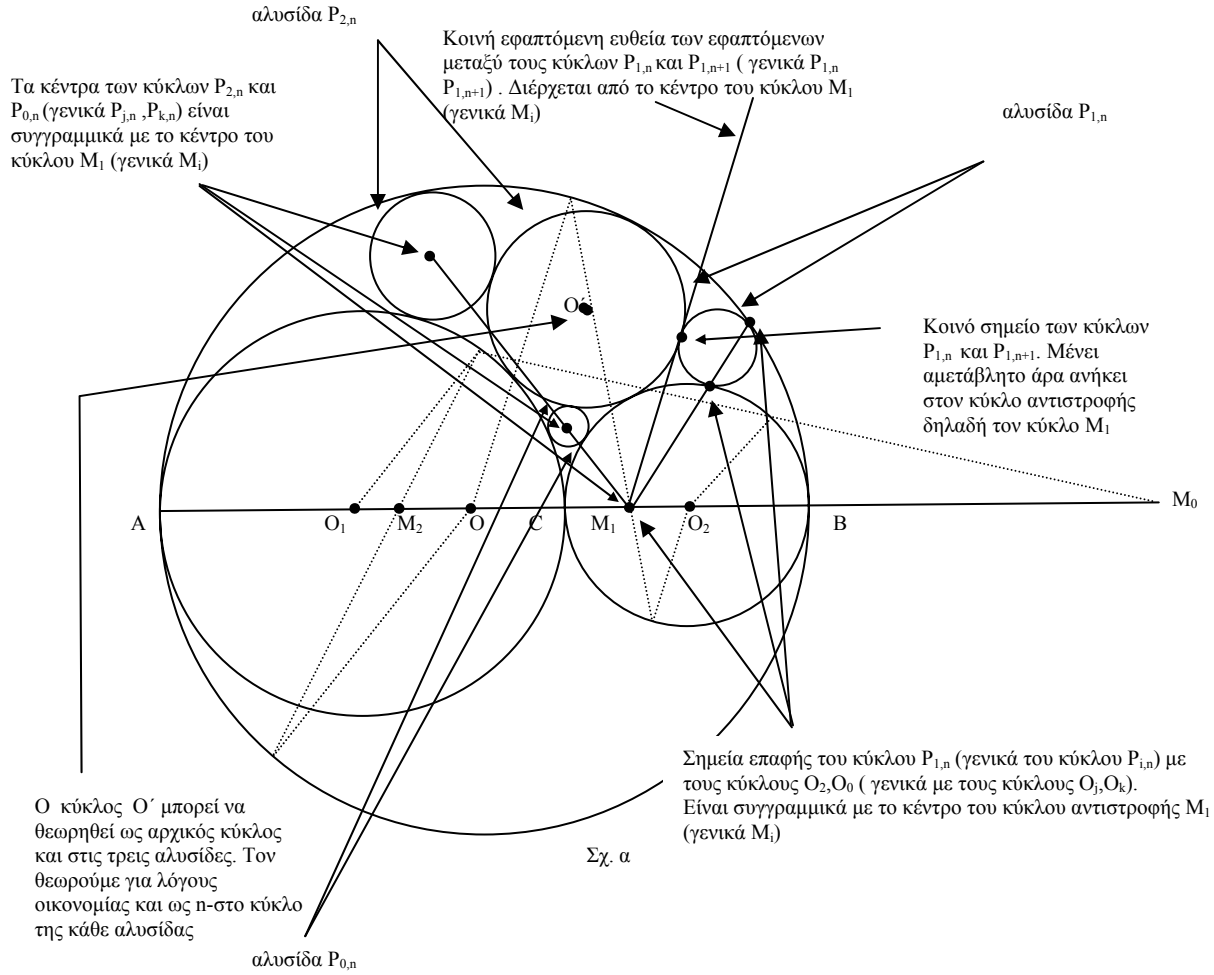
Μπορούμε να κάνουμε πολύ ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις σχετικά με τις αλυσίδες του Πάππου.

Ας δηλώσουμε το κέντρο του κύκλου $P_{i,n}$ με το ίδιο σύμβολο δηλαδή το $P_{i,n}$.

Α)

Για κάθε μεσόκυκλο M_i με $i = 0,1,2$ η αντιστροφή ως προς αυτόν τον μεσόκυκλο αφήνει τον κάθε κύκλο $P_{i,n}$ αμετάβλητο. Άρα ο M_i με $i = 0,1,2$ είναι ορθογώνιος με κάθε κύκλο της αλυσίδας $P_{i,n}$.

Ας το αναλύσουμε λιγάκι αυτό: Ας πάρουμε για παράδειγμα τον μεσόκυκλο M_1. Ο μεσόκυκλος αυτός είναι μεσόκυκλος των κύκλων (O) και (O_2) άρα αλλάζει αμοιβαία την θέση των κύκλων (O) και (O_2) ενώ αφήνει τον εγγεγραμμένο κύκλο της αρβήλου Ο΄ αναλλοίωτο. Έτσι οι εφαπτόμενοι κύκλοι στον Ο΄ και τους δύο αυτούς κύκλους μένουν και αυτοί αναλλοίωτοι. Δηλαδή η αντίστοιχη αλυσίδα $P_{1,n}$ του Πάππου μένει αναλλοίωτη.



Σχ. α

Αυτό έχει τις εξής συνέπειες (σχήμα. α):

α)

α1.Το κοινό σημείο των κύκλων $P_{1,n}$ και $P_{1,n+1}$ μένει αναλλοίωτο ως προς την αντιστροφή άρα ανήκει στον μεσόκυκλο M_1.

α2. Η κοινή τους εφαπτόμενη διέρχεται από το κέντρο M_1 του μεσόκυκλου M_1.

Θα αναπτύξουμε με μεγαλύτερη λεπτομέρεια τα δύο αυτά συμπεράσματα:

Το πρώτο προκύπτει αμέσως, αν σκεφτεί κανείς ότι το κοινό σημείο των κύκλων $P_{1,n}$ και $P_{1,n+1}$ θα έχει εικόνα που είναι επίσης κοινό σημείο των εικόνων των δύο κύκλων. Οι εικόνες όμως των κύκλων $P_{1,n}$ και $P_{1,n+1}$ είναι οι ίδιοι κύκλοι, άρα η εικόνα του σημείου επαφής των δύο κύκλων είναι το ίδιο το σημείο επαφής των $P_{1,n}$ και $P_{1,n+1}$. Τα μόνα όμως σημεία τα οποία είναι εικόνες του εαυτού τους (που παραμένουν δηλαδή σταθερά) είναι τα σημεία του κύκλου αντιστροφής. Άρα το κοινό σημείο των $P_{1,n}$ και $P_{1,n+1}$ είναι και σημείο του μεσόκυκλου M_1.

Για το δεύτερο αποτέλεσμα έχουμε να πούμε τα εξής:

Οι κύκλοι $P_{1,n}$ και $P_{1,n+1}$ μένουν σταθεροί με την αντιστροφή ως προς τον M_1 άρα είναι ορθογώνιοι με τον M_1. Οι κύκλοι $P_{1,n}$ και $P_{1,n+1}$ ανήκουν σε μια δέσμη εφαπτόμενων κύκλων, οπότε η συζυγής δέσμη της δέσμης των κύκλων αυτών, είναι η δέσμη των εφαπτόμενων μεταξύ τους κύκλων με σημείο επαφής, το σημείο επαφής της δέσμης των $P_{1,n}$ και $P_{1,n+1}$.Τα κέντρα των κύκλων της συζυγούς δέσμης βρίσκονται στο ριζικό άξονα της δέσμης των $P_{1,n}$ και $P_{1,n+1}$. Ο ριζικός άξονας όμως αυτής της δέσμης είναι η κοινή εφαπτομένη των $P_{1,n}$ και $P_{1,n+1}$. Η συζυγής δέσμη είναι το σύνολο των κύκλων που είναι ορθογώνιοι με τους κύκλους της δέσμης των $P_{1,n}$ και $P_{1,n+1}$. Ο κύκλος M_1 είναι ορθογώνιος με τους $P_{1,n}$ και $P_{1,n+1}$ οπότε ανήκει στην συζυγή δέσμη της δέσμης των $P_{1,n}$ και $P_{1,n+1}$ έτσι η κοινή εφαπτόμενη ων $P_{1,n}$,$P_{1,n+1}$ διέρχεται από το κέντρο M_1 του μεσόκυκλου M_1.

β)

Για κάθε μετάθεση (i,j,k) των σημείων $(0,1,2)$ τα σημεία επαφής των κύκλων $P_{i,n}$ με τους κύκλους (O_j) και (O_k) είναι συγγραμμικά με το κέντρο M_i του κύκλου M_i

Αυτό αποδεικνύεται ως εξής: Η αντιστροφή ως προς τον κύκλο M_i αλλάζει αμοιβαία τους κύκλους (O_j) και (O_k). Όμως ο κύκλος $P_{i,n}$ μένει αναλλοίωτος άρα τα σημεία επαφής με τους κύκλους (O_j) και (O_k) είναι τα ίδια μόνο που έχουν αλλάξει ρόλο (αφού το σημείο επαφής με τον κύκλο (O_j) έχει απεικονιστεί στο σημείο επαφής με τον (O_k) και αντίστροφα). Τα σημεία λοιπόν του κύκλου $P_{i,n}$ που εφάπτονται στους κύκλους (O_j) και (O_k) είναι μεταξύ τους αντίστροφα ως προς το κύκλο M_i άρα είναι σημεία τα οποία ανήκουν σε μια ημιευθεία με κέντρο το M_i.

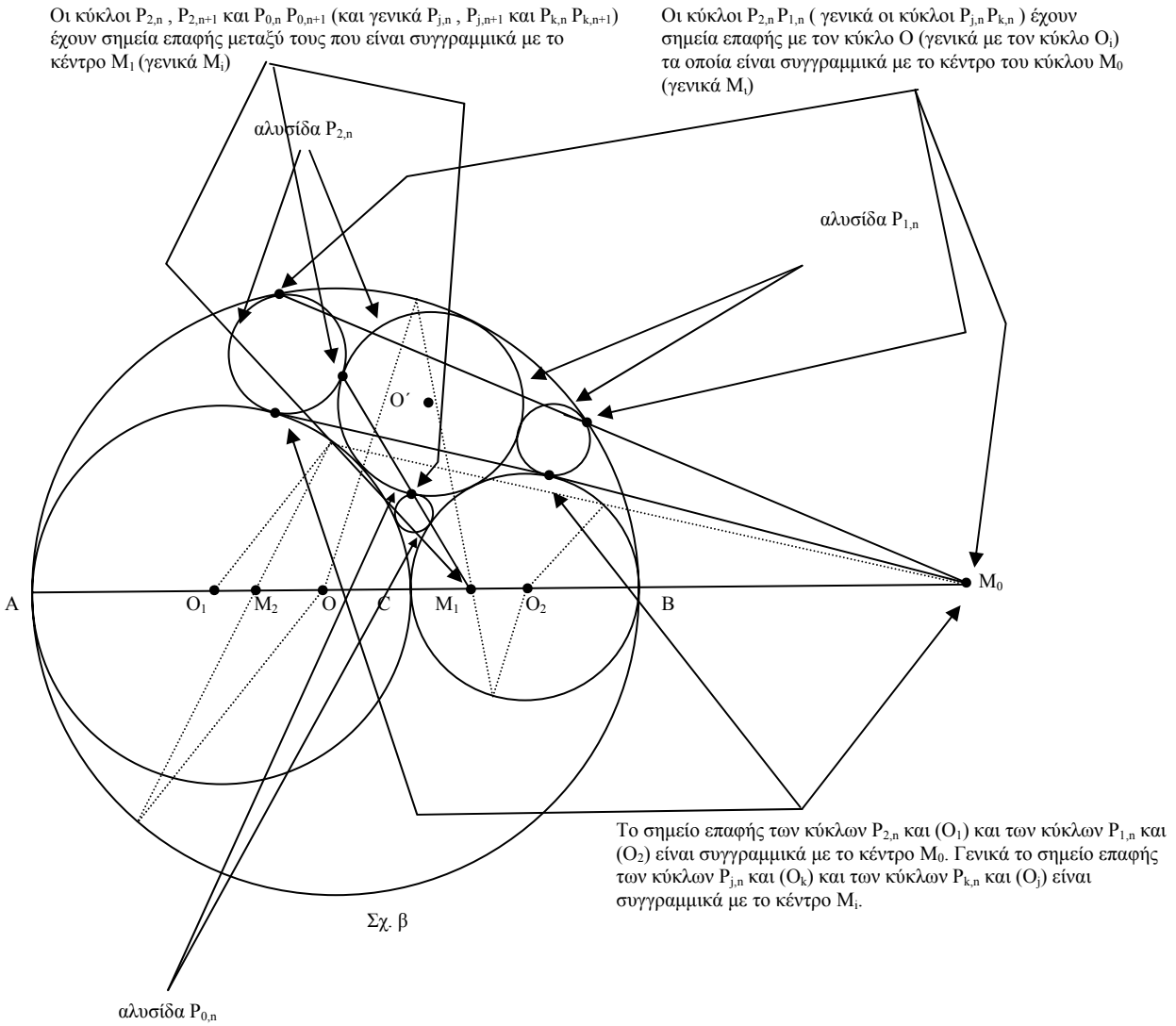
Β)

Για κάθε μετάθεση (i,j,k) των σημείων $(0,1,2)$ η αντιστροφή ως προς τον κύκλο M_i αλλάζει αμοιβαία τους κύκλους της αλυσίδας $P_{j,n}$ με τους κύκλους της αλυσίδας $P_{k,n}$. Αυτό συμβαίνει διότι η αντιστροφή ως προς τον κύκλο M_i αλλάζει αμοιβαία θέση στους κύκλους (O_j) και (O_k) και αφήνει αναλλοίωτο τον κύκλο (O_i). Ο κύκλος (O_i) μένει αναλλοίωτος αφού μετά την αντιστροφή η εικόνα του θα πρέπει να εφάπτεται στην εικόνα του (O_j), δηλαδή στον (O_k) όπως επίσης και στην εικόνα του (O_k), δηλαδή στον (O_j), με τα σημεία επαφής αυτών των εικόνων να βρίσκονται πάλι στην ΑΒ αφού και τα αρχικά σημεία βρίσκονταν στην ΑΒ.

Η αλυσίδα κύκλων $P_{j,n}$ είναι κύκλοι που εφάπτονται στους (O_i) και (O_k). Με την αντιστροφή όμως θα εφάπτονται στον (O_i) (εικόνα του (O_i)) και στον (O_j) (εικόνα του (O_k)) άρα η αλυσίδα αυτή γίνεται η αλυσίδα $P_{k,n}$. Ακριβώς με τους ίδιους συλλογισμούς προκύπτει ότι και η αλυσίδα $P_{k,n}$ γίνεται η $P_{j,n}$.

Από τα πιο πάνω μπορούμε επίσης να συμπεράνουμε:

α. τα σημεία $M_i, P_{j,n}, P_{k,n}$ είναι μεταξύ τους συγγραμμικά. Αυτό συμβαίνει διότι οι δύο κύκλοι $P_{j,n}, P_{k,n}$ είναι αντίστροφοι μεταξύ τους ως προς τον κύκλο M_i. Αποδεικνύεται δε πολύ εύκολα ότι τα κέντρα δύο αντίστροφων κύκλων βρίσκονται πάνω στην ευθεία που ενώνει το κέντρο του κύκλου τον οποίο αντιστρέφουμε με το κέντρο του κύκλου ως προς τον οποίο γίνεται η αντιστροφή.



Σχ. β

β. Τα σημεία επαφής των κύκλων $P_{j,n}, P_{k,n}$ με τον κύκλο (O_i) είναι συγγραμμικά με το σημείο M_i.

Αυτό συμβαίνει διότι οι κύκλοι $P_{j,n}$, $P_{k,n}$ είναι μεταξύ τους αντίστροφοι ως προς τον κύκλο M_i ενώ ο κύκλος (O_i) μένει αναλλοίωτος ως προς την αντιστροφή αυτή οπότε το σημείο επαφής του κύκλου $P_{j,n}$ με τον κύκλο (O_i) γίνεται μετά την αντιστροφή σημείο επαφής του

$P_{k,n}$ με τον κύκλο (O_i) και αντίστροφα το σημείο επαφής του $P_{k,n}$ με τον κύκλο (O_i) γίνεται σημείο επαφής του κύκλου $P_{j,n}$ με τον (O_i). Άρα τα σημεία επαφής των κύκλων $P_{j,n}, P_{k,n}$ με τον κύκλο (O_i) είναι σημεία αντίστροφα κατά την αντιστροφή ως προς τον κύκλο M_i οπότε είναι συγγραμμικά με το κέντρο της αντιστροφής (δηλαδή το σημείο M_i)

γ. Τα σημεία επαφής των κύκλων $P_{j,n}\ P_{j,n+1}$ και των κύκλων $P_{k,n}\ P_{k,n+1}$ είναι συγγραμμικά με το σημείο M_i.

Αυτό συμβαίνει διότι οι κύκλοι $P_{j,n}, P_{k,n}$ είναι μεταξύ τους αντίστροφοι με την αντιστροφή ως προς τον κύκλο M_i και το ίδιο συμβαίνει και για τους κύκλους $P_{j,n+1}\ P_{k,n+1}$.άρα το αντίστροφο του σημείου επαφής των κύκλων $P_{j,n}\ P_{j,n+1}$ είναι το σημείο επαφής των κύκλων $P_{k,n}\ P_{k,n+1}$ και αντιστρόφως. Άρα τα σημεία επαφής των κύκλων $P_{j,n}\ P_{j,n+1}$ και των κύκλων $P_{k,n}\ P_{k,n+1}$ είναι συγγραμμικά με το κέντρο της αντιστροφής (δηλαδή το M_i).

δ. Τα σημεία επαφής των $P_{j,n}$,(O_k) καθώς και των $P_{k,n}$,(O_j) είναι συγγραμμικά με το M_i. Προκύπτει ομοίως με τα προηγούμενα (αφού τα σημεία αυτά είναι αντίστροφα ως προς τον κύκλο M_i).

Γ)

Έστω μια οποιαδήποτε μετάθεση (i, j, k) των σημείων $(0,1,2)$.

Υπάρχει ένας κύκλος I_i (όπως έχουμε αναφέρει και σε άλλα μέρη της εργασίας μας) ο οποίος αντιστρέφει τους κύκλους (O_k) και (O_j) σε δύο ευθείες l_k, l_j εφαπτόμενες στον κύκλο (O') και οι οποίες είναι κάθετες προς την ευθεία ΑΒ. Η αλυσίδα του Πάππου $P_{i,n}$ αντιστρέφεται με την αντιστροφή ως προς τον I_i σε μια αλυσίδα η οποία αποτελείται από ίσους κύκλους (Q_n) οι οποίοι είναι εφαπτόμενοι στις δύο αυτές ευθείες l_k, l_j. Ο πρώτος κύκλος (Q_0) αυτής της αλυσίδας είναι ο κύκλος (O').

Η επεξεργασία θα γίνει θεωρώντας ως κύκλους (O_k) και (O_j) τους (O_0), (O_1) ως ευθείες τις l_0, l_1 και ως κύκλο αντιστροφής τον I_2.

α)

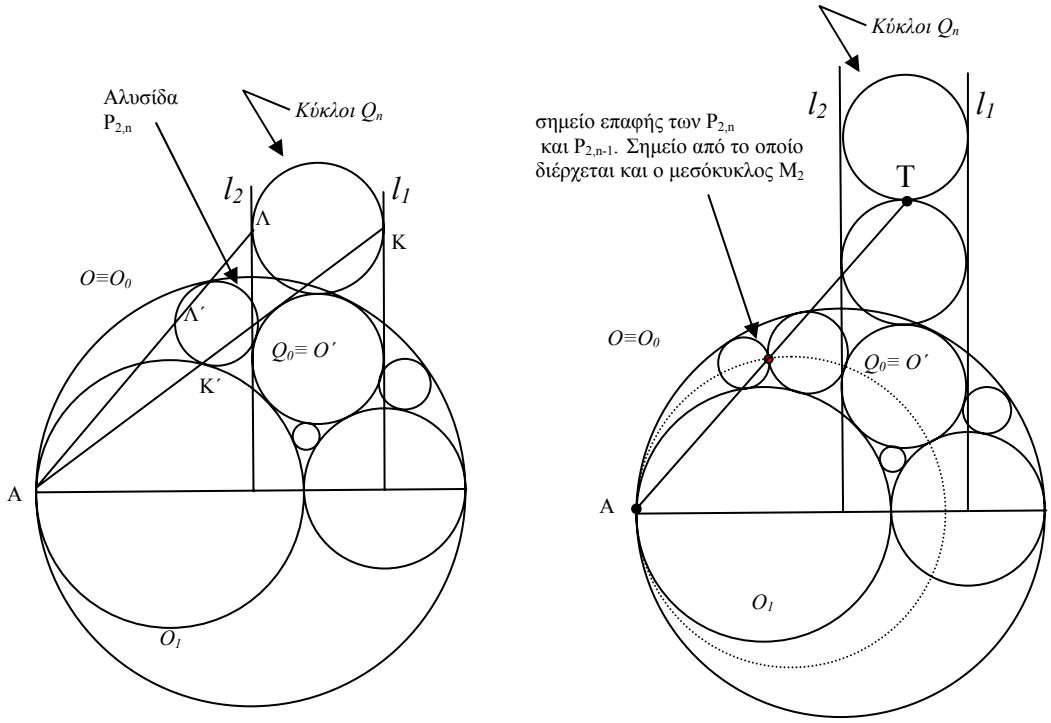
Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο Α και από το σημείο επαφής Κ του κύκλου (Q_n) με την ευθεία l_1 διέρχεται και από το σημείο επαφής Κ΄ του κύκλου $P_{2,n}$ με τον κύκλο $O \equiv O_0$ (εξωτερικός κύκλος της αρβήλου) .Αυτό συμβαίνει διότι τα Κ, Κ΄ είναι αντίστροφα σημεία ως προς τον κύκλο I_2.

Ομοίως η ευθεία που διέρχεται από το σημείο Α και από το σημείο επαφής Λ του κύκλου (Q_n) με την ευθεία l_2 διέρχεται και από το σημείο επαφής Λ΄ του κύκλου $P_{2,n}$ με τον κύκλο O_1 (εσωτερικός κύκλος της αρβήλου) .

β)

Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο Α και από το σημείο επαφής Τ των κύκλων (Q_n) και (Q_{n-1}) διέρχεται επίσης και από το σημείο επαφής των $P_{2,n}$ και $P_{2,n-1}$. Αυτό συμβαίνει διότι

αυτά τα δύο σημεία είναι αντίστροφα ως προς τον κύκλο I_2. Το σημείο επαφής όμως των κύκλων $P_{2,n}$ και $P_{2,n-1}$ είναι και σημείο από το οποίο διέρχεται και ο μεσόκυκλος M_2.



<u>Αν γνωρίζουμε τρία σημεία του κάθε κύκλου των αλυσίδων $P_{i,n}$ (i=0,1,2) μπορεί να κατασκευαστούν οι αλυσίδες αυτές.</u>
<u>Τα όσα είπαμε πιο πάνω, είναι αρκετά για να μπορούμε να κατασκευάσουμε τις εν λόγω αλυσίδες.</u>

Κάποιοι επιπλέον αξιοσημείωτοι κύκλοι που ανήκουν στην ίδια δέσμη

Ας θεωρήσουμε τώρα τον κύκλο K_n που διέρχεται από τα σημεία επαφής των κύκλων $P_{i,n}$ με τους κύκλους $(O_k),(O_j)$ και είναι ορθογώνιος στον κύκλο I_i (ο I_i είναι κύκλος που απεικονίζει τους κύκλους (O_k) και (O_j) σε δύο ευθείες l_k, l_j εφαπτόμενες στον κύκλο (O') και κάθετες προς την ευθεία ΑΒ. Ένας τέτοιος κύκλος έχει κέντρο το σημείο Α ή το Β ή το C και όπως έχουμε πει σε άλλο σημείο ανήκει στο σύνολο[10] των έξι κύκλων οι οποίοι ανήκουν στην ίδια δέσμη (την δέσμη των έξι κύκλων του σχήματος ΙΙ).
Μια κατασκευή του κύκλου που διέρχεται από δύο σταθερά σημεία Α και Β και είναι ορθογώνιος προς ένα δοσμένο κύκλο I_i προκύπτει αν βρούμε το αντίστροφο σημείο Α΄ του Α ως προς τον κύκλο I_i. Ο ζητούμενος ορθογώνιος προς τον I_i κύκλος είναι ο κύκλος (Α,Β,Α΄).
Με αντιστροφή ως προς τον κύκλο I_i ο κύκλος K_n μένει αναλλοίωτος. Διέρχεται από τα σημεία επαφής των κύκλων Q_n με τις ευθείες l_k, l_j, διότι τα σημεία επαφής των κύκλων Q_n με τις ευθείες l_k, l_j είναι οι εικόνες των σημείων επαφής των κύκλων $P_{i,n}$ με τους κύκλους

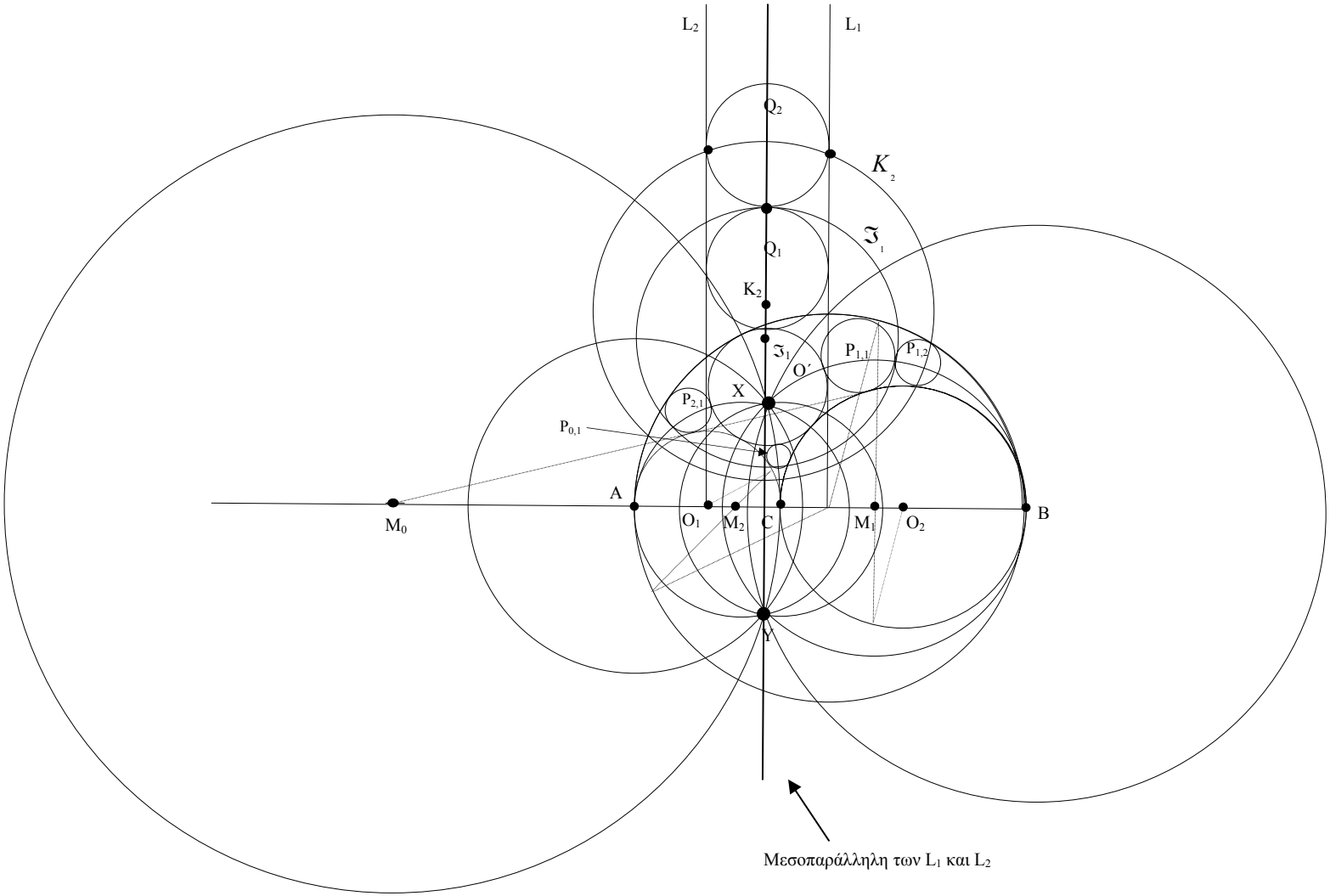
[10] Κάθε μεσόκυκλος αφήνει τον εγγεγραμμένο κύκλο Ο΄ καθώς και τον O_α, συμμετρικό κύκλο του Ο΄ ως προς την ΑΒ, αναλλοίωτους. Το ίδιο κάνει και κάθε κύκλος που είναι ορθογώνιος με τον εγγεγραμμένο κύκλο Ο΄ και έχει κέντρο το Α, το Β ή το C. Οι έξι αυτοί κύκλοι είναι μέλη της δέσμης $\Im$, των ορθογώνιων κύκλων, στους κύκλους της δέσμης (Ο,O_α).

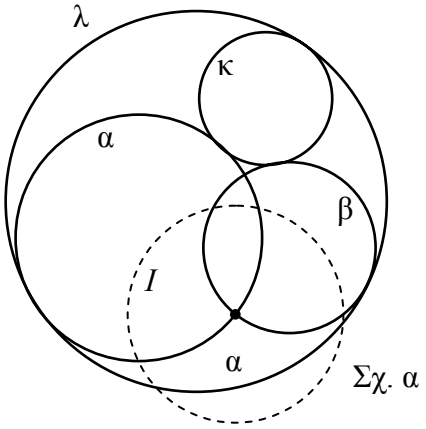
(O_k) και (O_j). Ο κύκλος K_n διέρχεται από τα σημεία επαφής των κύκλων $P_{i,n}$ με τους κύκλους (O_k) και (O_j) άρα η εικόνα του –δηλαδή ο ίδιος ο κύκλος K_n - θα διέρχεται από τις εικόνες των σημείων επαφής των κύκλων $P_{i,n}$ με τους κύκλους (O_k) και (O_j)-δηλαδή από τα σημεία επαφής των κύκλων Q_n με τις ευθείες l_k, l_j.Το κέντρο K_n λοιπόν του κύκλου K_n (χρησιμοποιώ το ίδιο σύμβολο για τον κύκλο K_n και για το κέντρο του αφού δεν υπάρχει κίνδυνος μπερδέματος) βρίσκεται στην μεσοκάθετη της διαμέτρου που έχει άκρα τα σημεία επαφής των κύκλων Q_n με τις ευθείες l_k, l_j. Η μεσοκάθετη αυτή είναι η κάθετη στην ΑΒ που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου O'. Η μεσοκάθετη αυτή είναι ο ριζικός άξονας της δέσμης των κύκλων I_i, M_i διότι ο κύκλος Ο΄ είναι ορθογώνιος ως προς την δέσμη των έξι κύκλων του σχήματος ΙΙ, μέλη της οποίας είναι και οι κύκλοι I_i, M_i, άρα ο Ο΄ έχει το κέντρο του πάνω στον ριζικό άξονα αυτής της δέσμης.

Λόγω συμμετρίας της διαδικασίας που μόλις περιγράψαμε προκύπτει ότι ο K_n διέρχεται από τα σημεία επαφής του $P_{i',n}$ με τους $(O_{j'}),(O_{k'})$ για όλες τις μεταθέσεις (i', j', k') των σημείων (0,1,2). Άρα κάθε κύκλος K_n διέρχεται και από τα οκτώ σημεία επαφής και όλοι οι K_n είναι μέλη της ίδιας δέσμης κύκλων.

Έστω τώρα οι κύκλοι $\Im_n$ που εφάπτονται στο σημείο επαφής των κύκλων $P_{i,n}, P_{i,n+1}$ όπως επίσης και στο σημείο επαφής των εικόνων Q_n, Q_{n+1} των κύκλων $P_{i,n}, P_{i,n+1}$. Λόγω συμμετρίας της διαδικασίας (κάνοντας δηλαδή αντιστροφή ως προς κάθε κύκλο $I_i, i = 0,1,2$) διαπιστώνουμε ότι οι κύκλοι $\Im_n$ διέρχονται από τα σημεία επαφής των κύκλων $P_{i,n}, P_{i,n+1}$ για κάθε $i \in \{0,1,2\}$.Οι μεσόκυκλοι $M_i, i = 0,1,2$ διέρχονται από τα σημεία επαφής των κύκλων $P_{i,n}, P_{i,n+1}$ και είναι ορθογώνιοι με κάθε κύκλο της αλυσίδας $P_{i,n}$. Ο κύκλος $\Im_n$ είναι εφαπτόμενος με τον $P_{i,n}$ άρα είναι επίσης ορθογώνιος με τον M_i και αυτό για κάθε $i \in \{0,1,2\}$. Οι κύκλοι $M_i, i = 0,1,2$ ανήκουν στην ίδια ομοαξονική δέσμη άρα οι $\Im_n$ που είναι ορθογώνιοι προς αυτούς ανήκουν στην συζυγή δέσμη της δέσμης των $M_i, i = 0,1,2$ δηλαδή ανήκουν στην ίδια δέσμη κύκλων με τους κύκλους K_n.

Ας πάρουμε έναν τυχαίο κύκλο από την οικογένεια κύκλων $\wp = \{K_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\Im_n, n \in \mathbb{N}\}$. Ο κύκλος αυτός έχει κέντρο πάνω στην μεσοπαράλληλη των ευθειών l_1, l_2 οπότε σχηματίζει την ίδια γωνία με αυτές τις δύο ευθείες. Οι κύκλοι $I_i, i = 0,1,2$ ανήκουν στην δέσμη των κύκλων $M_i, i = 0,1,2$. Και ως εκ τούτου είναι ορθογώνιοι με τους κύκλους της οικογένειας $\wp = \{K_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\Im_n, n \in \mathbb{N}\}$ άρα τους αφήνουν αναλλοίωτους ως προς την αντιστροφή με αυτούς ως κύκλους αντιστροφής. Ο κύκλος I_i αντιστρέφει τους κύκλους (O_k) και (O_j) της αρβήλου στις ευθείες l_1, l_2 και αυτό για κάθε μετάθεση (i, j, k) των (0,1,2).Όμως οι κύκλοι της οικογένειας $\wp = \{K_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\Im_n, n \in \mathbb{N}\}$ σχηματίζουν την ίδια γωνία με τις ευθείες l_1, l_2 αφού το κέντρο τους βρίσκεται στην μεσοπαράλληλο των ευθειών l_1, l_2 (οπότε έχουμε συμμετρία του σχήματος). Οι κύκλοι της οικογένειας $\wp = \{K_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\Im_n, n \in \mathbb{N}\}$ μένουν αμετάβλητοι με τις αντιστροφές ως προς τους κύκλους $I_i, i = 0,1,2$ άρα θα σχηματίζουν την ίδια γωνία και με τους αρχικούς κύκλους της αρβήλου.

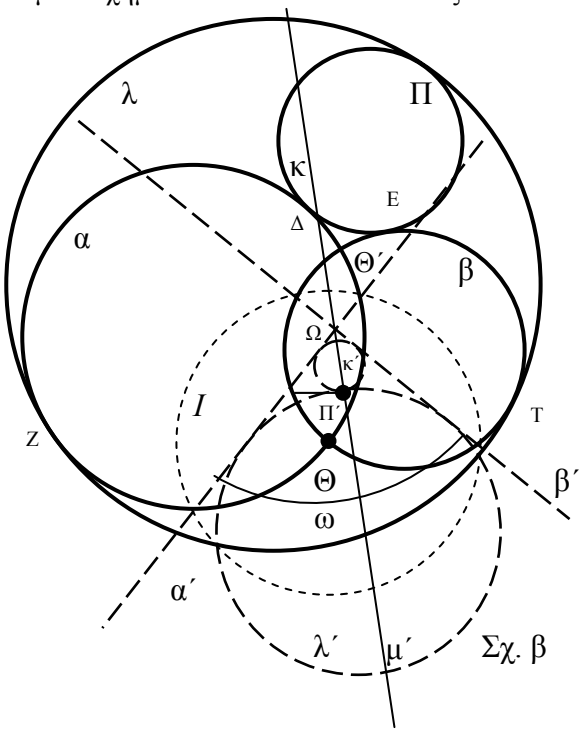

L2
L1
Q2
K2
ℑ1
Q1
K2
ℑ1
P1,1
P1,2
O′
X
P2,1
P0,1
A
M0
O1
M2
C
M1
O2
B
Y
Μεσοπαράλληλη των L1 και L2



Έστω ότι δίνονται δύο κύκλοι α και β διαφορετικοί μεταξύ τους. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Π όπου Π είναι το σημείο επαφής δύο εφαπτόμενων μεταξύ τους κύκλων, οι οποίοι εφάπτονται επίσης στους κύκλους α και β.

Θα ξεκινήσουμε την διαπραγμάτευση του προβλήματος με την περίπτωση που οι δύο κύκλοι α και β είναι τεμνόμενοι (σχήμα α).

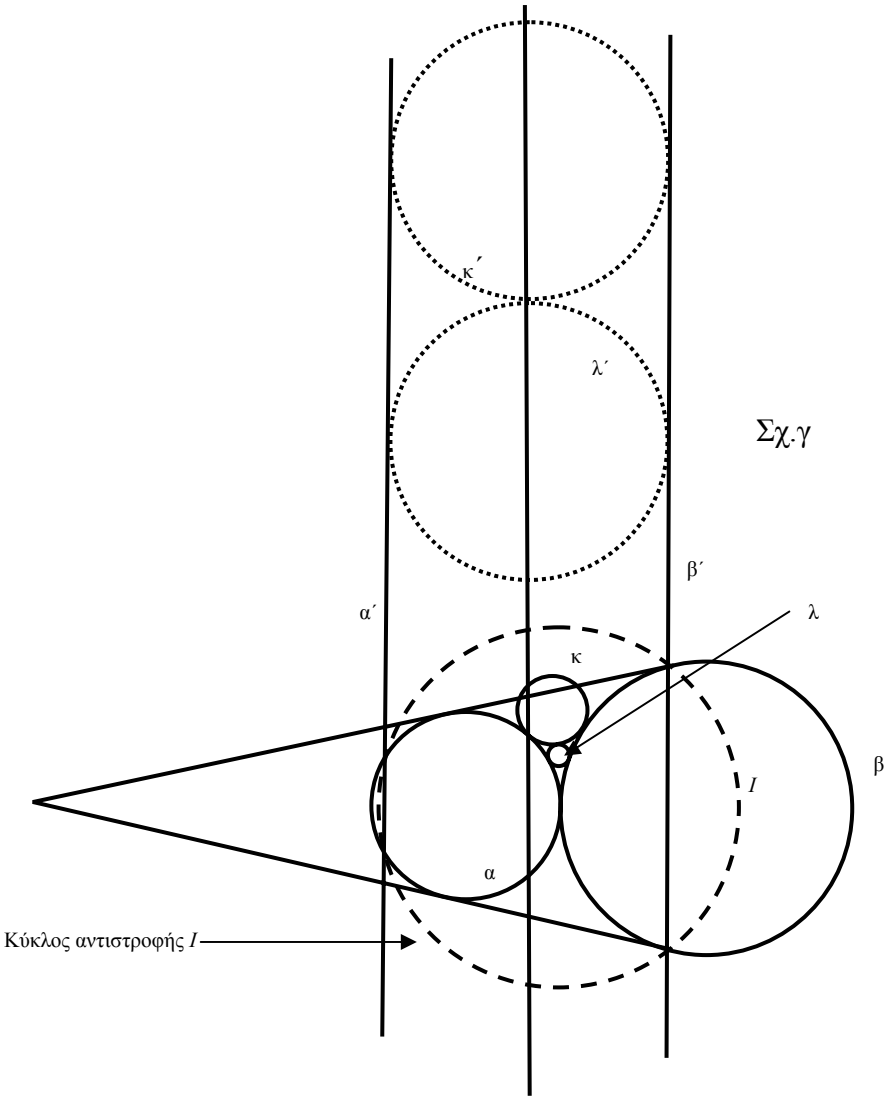
Θα εφαρμόσουμε αντιστροφή ως προς κύκλο που έχει κέντρο το ένα από τα δύο σημεία τομής των κύκλων α,β. Έστω το κέντρο αυτό είναι το σημείο Θ (σχήμα β). Στην περίπτωση αυτή οι δύο κύκλοι α,β θα μετασχηματιστούν σε δύο τεμνόμενες ευθείες ενώ οι κύκλοι κ, λ θα μετασχηματιστούν σε δύο κύκλους που εφάπτονται στις ευθείες α΄,β΄. Το σχήμα β βοηθάει στην κατανόηση αυτής της αντιστροφής. Οι κύκλοι κ΄ και λ΄ εφάπτονται σε δύο τεμνόμενες ευθείες οπότε τα κέντρα τους καθώς και το σημείο επαφής τους Π΄ βρίσκονται πάνω στην διχοτόμο μ΄ της γωνίας ω που σχηματίζουν οι δύο ευθείες α΄ και β΄. Η εικόνα της ευθείας μ΄ είναι ο κύκλος μ που διέρχεται από το κέντρο Θ του κύκλου αντιστροφής και διχοτομεί την γωνία που σχηματίζουν οι κύκλοι α και β αφού η εικόνα του διχοτομεί την γωνία που σχηματίζουν οι α΄ και β΄. Ο κύκλος μ διέρχεται επίσης από το δεύτερο κοινό σημείο Θ΄ των α,β. Ας δούμε πιο προσεκτικά γιατί συμβαίνει αυτό: Οι ευθείες α΄ και β΄ έχουν δύο κοινά σημεία. Το ένα είναι το σημείο στο άπειρο, το οποίο έχει εικόνα μέσω της αντιστροφής ως προς το κύκλο (Θ), το κέντρο Θ της αντιστροφής και το δεύτερο κοινό τους σημείο είναι το σημείο Ω το οποίο είναι η εικόνα του Θ΄.



Η ευθεία μ΄ διέρχεται από το σημείο Ω, άρα η εικόνα της θα διέρχεται από την εικόνα του Ω, δηλαδή από το Θ΄.

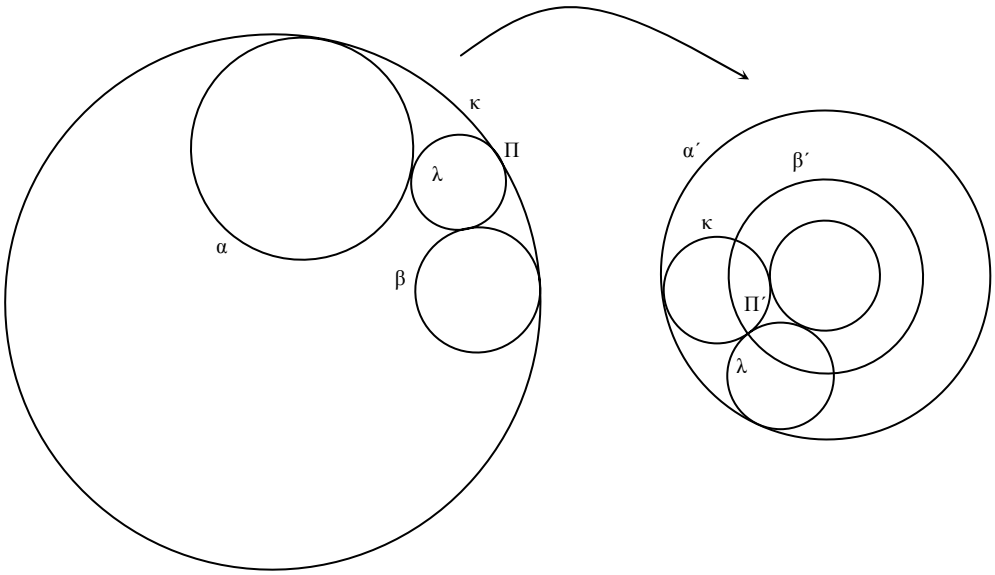
Η διχοτόμος της δεύτερης γωνίας των α΄ και β΄ (της παραπληρωματικής γωνίας της ω) παράγει με την ίδια αντιστροφή έναν δεύτερο κύκλο ν. Οι δύο αυτοί κύκλοι, δηλαδή οι μ και ν, αν χρησιμοποιηθούν ως κύκλοι αντιστροφής αντιστοιχούν τον α στον β και τον β στον α.

Αυτό αποδεικνύεται από την αρχή της συμμετρίας (Αν a και b είναι δύο συμμετρικά σημεία ως προς τον κανονικό ή τον γενικευμένο κύκλο K τότε οι εικόνες τους a΄ και b΄ ως προς την αντιστροφή ως προς οποιονδήποτε κανονικό (ή γενικευμένο) κύκλο J είναι πάλι συμμετρικά σημεία ως προς την εικόνα K΄ του K με την αντιστροφή J). Οι γενικευμένοι κύκλοι α΄ και β΄ είναι συμμετρικοί ως προς τον γενικευμένο κύκλο μ΄ (αφού ο μ΄ είναι διχοτόμος της γωνίας που σχηματίζουν οι α΄ και β΄) οπότε οι εικόνες τους α και β με την αντιστροφή ως προς τον κύκλο *I* θα είναι αντίστροφα σχήματα ως προς την εικόνα του μ΄ με την αντιστροφή *I* , δηλαδή ως προς τον κύκλο μ. Οι κύκλοι κ΄ και λ΄ εφάπτονται στις α΄ και β΄ οπότε η διχοτόμος μ΄ διέρχεται από τα κέντρα τους καθώς και από το σημείο επαφής τους. Άρα οι κ΄ και λ΄ είναι ορθογώνιοι με την μ΄ και κατά συνέπεια η αντιστροφή ως προς τον κύκλο *I* δίνει τους κύκλους κ και λ που είναι ορθογώνιοι με τον μ. Τα σημεία Δ και Ε αλλάζουν θέση αμοιβαία με την αντιστροφή ως προς τον *I* και το ίδιο κάνουν τα Τ και Ζ.



Θα περάσουμε τώρα στην περίπτωση που οι κύκλοι α και β εφάπτονται. Το σχήμα γ θα μας βοηθήσει στην κατανόηση. Οι κύκλοι α και β αντιστρέφονται ως προς κύκλο *I* που έχει κέντρο το σημείο επαφής των δύο αυτών κύκλων και μετασχηματίζονται σε δύο παράλληλες μεταξύ τους ευθείες α΄ και β΄ ενώ οι κύκλοι κ και λ μετασχηματίζονται στους κύκλους κ΄ και λ΄ που είναι εφαπτόμενοι στις ευθείες α΄ και β΄. Το σημείο επαφής των κ΄ και λ΄ βρίσκεται στην μεσοπαράλληλη μ των ευθειών α΄ και β΄. Η μεσοπαράλληλη μ αντιστρέφεται σε έναν κύκλο μ΄ που διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής. Αφού η μεσοπαράλληλη μ είναι παράλληλη με τις α΄ και β΄ άρα και ο κύκλος μ θα εφάπτεται με τους κύκλους α και β. Το σημείο επαφής του μ με τους α,β θα είναι το σημείο στο οποίο εφάπτονται και οι α,β μεταξύ τους, οπότε ο μ θα ανήκει στην εφαπτόμενη δέσμη αβ και έτσι το κέντρο του θα είναι πάνω στην διάκεντρο των κύκλων α και β. Η μεσοπαράλληλη μ΄ διέρχεται από τα κέντρα των κύκλων κ΄ και λ΄ και από το σημείο επαφής τους οπότε είναι ορθογώνια με τους κύκλους κ΄ και λ΄. Άρα η εικόνα της (δηλαδή ο κύκλος μ) είναι ορθογώνιος με τους κύκλους κ και λ. Κατά την αντιστροφή λοιπόν ως προς τον κύκλο μ οι κ και λ θα μείνουν αναλλοίωτοι ως ορθογώνιοι με τον μ. Οι κύκλοι α και β απεικονίζονται ο ένας στον άλλο με την αντιστροφή ως προς τον κύκλο μ. Αυτό προκύπτει και πάλι από την αρχή της συμμετρίας: Οι γενικευμένοι κύκλοι α΄ και β΄ είναι συμμετρικά σχήματα ως προς την μεσοπαράλληλο μ΄. Άρα οι εικόνες τους α και β μέσω της αντιστροφής ως προς τον κύκλο *I* είναι αντίστροφα σχήματα ως προς την εικόνα μ του γενικευμένου κύκλου μ΄ μέσω της αντιστροφής ως προς τον κύκλο *I*.

Οι εφαπτόμενες των κύκλων α και β αφού οι κύκλοι αυτοί αλλάζουν αμοιβαία θέση μένουν αναλλοίωτες οπότε διέρχονται από το κέντρο του κύκλου μ. Άρα το κέντρο του μ είναι το σημείο τομής των δύο αυτών εφαπτόμενων ευθειών.
Θα προχωρήσουμε στην περίπτωση που οι κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία.
Έστω λοιπόν ότι οι κύκλοι α και β δεν έχουν κοινά σημεία. Αποδεικνύεται τότε ότι μπορούν να απεικονιστούν μέσω μιας συγκεκριμένης αντιστροφής *I* σε δύο ομόκεντρους κύκλους. Η απόδειξη του αντίστοιχου θεωρήματος έχει γίνει σε προγενέστερη ενότητα (είναι η αντιστροφή ως προς το ένα από τα δύο οριακά σημεία της δέσμης αβ που έχει ΄τετοιο αποτέλεσμα). Αν κάνουμε αυτήν την αντιστροφή τότε οι κύκλοι κ και λ μετασχηματίζονται σε δύο κύκλους που εφάπτονται σε δύο ομόκεντρους κύκλους αλλά και μεταξύ τους. Άρα το σημείο επαφής Π των κύκλων αυτών έχει εικόνα Π΄ που βρίσκεται σε έναν κύκλο μ΄ ομόκεντρο με τους α΄ και β΄. Αν κάνουμε μια καινούργια αντιστροφή με κέντρο το κοινό κέντρο των κύκλων α΄ και β΄ και ακτίνα το γεωμετρικό μέσο $\sqrt{a'b'}$ των ακτινών a', b' των κύκλων α΄ και β΄ αντίστοιχα τότε θα καταφέρουμε να αλλάξουμε αμοιβαία την θέση στους κύκλους α΄ και β΄ οπότε οι κύκλοι κ΄ και λ΄ θα μείνουν αναλλοίωτοι κατά την αντιστροφή αυτή. Αντιστρέφουμε και πάλι με κύκλο αντιστροφής τον κύκλο *I*.



Τι επιτυγχάνουμε όμως με την αντιστροφή ως προς τον *I*; ΟΙ κύκλοι α΄ και β΄ αντιστρέφονται στους αρχικούς κύκλους. Ο κύκλος μ΄ που είναι ορθογώνιος με τους κύκλους κ΄ και λ΄ αντιστρέφεται με την αντιστροφή *I* στον κύκλο μ που ανήκει στην δέσμη αβ. Αυτό θα το σχολιάσουμε λίγο περισσότερο: Κάθε δύο μη τεμνόμενοι κύκλοι άρα και οι α και β σχηματίζουν μία μη τεμνόμενη δέσμη. Αν αντιστρέψουμε ως προς το ένα από τα δύο οριακά σημεία της δέσμης αυτής (και εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι η αντιστροφή *I* είχε κέντρο αντιστροφής το ένα από τα δύο οριακά σημεία) τότε η αντιστροφή αυτή παράγει όλους τους ομόκεντρους κύκλους που έχουν κοινό κέντρο την εικόνα το άλλου οριακού σημείου ως προς την αντιστροφή *I* . Αν λοιπόν αντιστρέψουμε ξανά ως προς την αντιστροφή *I* από τους ομόκεντρους κύκλους θα πάρουμε την αρχική μη τεμνόμενη δέσμη αβ. Ο κύκλος μ΄ είναι ένας από τους ομόκεντρους κύκλους οπότε κατά την αντιστροφή του θα γίνει ένας κύκλος μ που ανήκει στην δέσμη αβ. Αν αντιστρέψουμε τώρα ως προς τον κύκλο μ οι κύκλοι κ και λ θα μείνουν αναλλοίωτοι αφού είναι ορθογώνιοι ως προς τον κύκλο μ (διότι η εικόνα μ΄ είναι ορθογώνια με τις εικόνες κ΄ και λ΄). Οι κύκλοι α και β αλλάζουν αμοιβαία θέση και απεικονίζονται ο ένας στον άλλο σύμφωνα και πάλι με την αρχή της συμμετρίας.

Πρόβλημα του Απολλώνιου

Ιστορικά στοιχεία

Ο Απολλώνιος από την Πέργα ήταν γνωστός ως ένας μεγάλος μαθηματικός και ειδικότερα γεωμέτρης. Συχνά γίνεται σύγχυση με άλλους Έλληνες διανοούμενους, διότι το όνομα Απολλώνιος ήταν ένα πολύ συνηθισμένο όνομα εκείνη την εποχή. Λίγα είναι γνωστά για την ζωή του πέρα από το ότι γεννήθηκε στην Πέργα που βρισκόταν στην Παμφυλία, γνωστή σήμερα με το όνομα Μυρσίνη που βρίσκεται στην Αττάλεια της Τουρκίας.

Κατά τον Ευτόκιο τον Ασκαλωνίτη (που γεννήθηκε στην πόλη Ασκαλών της Παλαιστίνης), ο οποίος έζησε στην Κωνσταντινούπολη περί το 530 μ.Χ και παίρνει τις πληροφορίες του από τον βιογράφο του Αρχιμήδη, τον Ηρακλείδη, ο Απολλώνιος έζησε κατά τα χρόνια του βασιλιά της Αιγύπτου Πτολεμαίου του Γ΄ του Ευεργέτου, ο οποίος βασίλευσε κατά τα έτη 246-221 π.Χ.

Κατά άλλη πληροφορία που προέρχεται από τον Γραμματικό του Πτολεμαίου Χήνου υιού του Ηφαιστίωνος, που έζησε τον δεύτερο αιώνα μΧ, ο Απολλώνιος «*επ΄ αστρονομία περιβόητος γεγονώς*» έζησε κατά τους χρόνους της βασιλείας του Πτολεμαίου του Φιλοπάτορος που βασίλευσε κατά τα έτη 221-205 π.Χ.

Ο ίδιος ο Απολλώνιος αφιέρωσε τα τελευταία βιβλία των κωνικών του στον Βασιλέα της Περγάμου Άτταλο τον Α΄ ο οποίος βασίλευσε κατά τα έτη 241-197 π.Χ

Τελικά τα χρόνια μεταξύ 262 και 190 π.Χ είναι τα χρόνια που πιθανολογείται ότι έζησε.

Στο πολύ διάσημο βιβλίο του *Κωνικά* το οποίο σώζεται κατά το μεγαλύτερο μέρος του σήμερα (τα πρώτα 4 σώζονται στην Ελληνική και τα επόμενα 3 στην αραβική γλώσσα ενώ το $8^{ο}$ και τελευταίο έχει χαθεί), εισήγαγε όρους όπως: παραβολή, υπερβολή, έλλειψη οι οποίοι είναι πολύ γνωστοί σε εμάς σήμερα.

Στο βιβλίο IV των στοιχείων του Ευκλείδη, δίνονται οι λεπτομέρειες για το πώς κατασκευάζεται ένας κύκλος εφαπτόμενος στις τρεις πλευρές ενός τριγώνου (πρόταση 4) και για το πώς κατασκευάζεται ένας κύκλος που διέρχεται από τρία μη συνευθειακά σημεία (πρόταση 5). Η τελευταία αυτή κατασκευή επιτυγχάνεται με το να κατασκευαστεί το σημείο τομής των μεσοκάθετων των δύο από τις τρεις πλευρές, του τριγώνου που σχηματίζεται από τα τρία αυτά μη συνευθειακά σημεία. Στο βιβλίο του *περί επαφών* ο Απολλώνιος προτείνει μια γενίκευση των δύο προτάσεων του Ευκλείδη. Πιο συγκεκριμένα αν δοθούν τρία οποιαδήποτε αντικείμενα που μπορεί να είναι σημεία , ευθείες ή κύκλοι να κατασκευαστεί ένας κύκλος ο οποίος θα διέρχεται από τα σημεία και θα εφάπτεται στις ευθείες και τους κύκλους. Ο Απολλώνιος μέτρησε δέκα συνολικά συνδυασμούς σημείων, ευθειών και κύκλων και έλυσε τις περιπτώσεις που δεν είχαν παρουσιαστεί από τον Ευκλείδη. Η περίπτωση που και τα τρία αντικείμενα είναι κύκλοι είναι η πιο δύσκολη περίπτωση, αφού μέχρι οκτώ κύκλοι μπορεί να βρεθούν ως λύσεις του προβλήματος. Φυσικά ο αριθμός των λύσεων σε κάθε περίπτωση εξαρτάται από την θέση των κύκλων μεταξύ τους.

Επειδή δεν σώζεται το βιβλίο *Περί επαφών* του Απολλώνιου, πρέπει να δείξουμε εμπιστοσύνη στα λεγόμενα του Πάππου, ο οποίος συνδέει το όνομα του Απολλώνιου με το πρόβλημα των επαφών.

Ο Πάππος, που όπως έχουμε αναφέρει και πάλι, έζησε κάπου πέντε αιώνες μετά τον Απολλώνιο, έγραψε αυτό που αποκάλεσε «*αναλυόμενο τόπο*» στο βιβλίο VII της *Μαθηματικής Συναγωγής* του, όπου δίνει μια συνοπτική παρουσίαση των δέκα περιπτώσεων και παρουσιάζει μια λύση με κανόνα και διαβήτη εύρεσης ενός τουλάχιστον κύκλου.

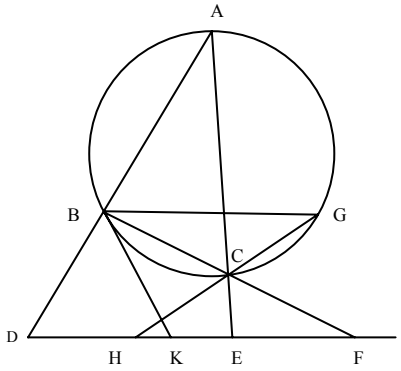
Ας δούμε τι λέει για το έργο *Περί επαφών* του Απολλώνιου ο ίδιος ο Πάππος στην συναγωγή του:

Ἑξῆς δὲ τούτοις τῶν ἐπαφῶν ἐστιν βιβλία δύο. προ- τάσεις δὲ ἐν αὐτοῖς δοκοῦσιν εἶναι πλείονες. ἀλλὰ καὶ τούτων μίαν τίθεμεν οὕτως ἔχουσαν· ἑξῆς σημείων καὶ εὐ- θειῶν καὶ κύκλων τριῶν ὁποιωνοῦν θέσει δοθέντων κύκλον ἀγαγεῖν δι' ἑκάστου τῶν δοθέντων σημείων (εἰ δοθείη) ἐφαπτόμενον ἑκάστης τῶν δοθεισῶν γραμμῶν. ταύτης διὰ πλήθη τῶν ἐν ταῖς ὑποθέσεσι δεδομένων ὁμοίων ἢ ἀνο- μοίων κατὰ μέρος διαφόρους προτάσεις ἀναγκαῖον γίνεσθαι δέκα· ἐκ τῶν τριῶν γὰρ ἀνομοίων γενῶν τριάδες διάφοροι ἄτακτοι γίνονται ι. ἤτοι γὰρ [τὰ] δεδομένα τρία σημεῖα ἢ τρεῖς εὐθεῖαι ἢ δύο σημεῖα καὶ εὐθεῖα ἢ δύο εὐθεῖαι καὶ σημεῖον ἢ δύο σημεῖα καὶ κύκλος ἢ δύο κύκλοι καὶ σημεῖον ἢ δύο εὐθεῖαι καὶ κύκλος ἢ δύο κύκλοι καὶ εὐθεῖα ἢ σημεῖον καὶ εὐθεῖα καὶ κύκλος ἢ τρεῖς κύκλοι. τούτων δύο μὲν τὰ πρῶτα δέδεικται ἐν τῷ δ βιβλίῳ τῶν πρώτων στοιχείων· ὃ παρεῖμεν γράφειν· τὸ μὲν γὰρ τριῶν δοθέν- των σημείων μὴ ἐπ' εὐθείας ὄντων τὸ αὐτό ἐστιν τῷ περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον περιγράψαι, τὸ δὲ γ δοθεισῶν εὐθειῶν μὴ παραλλήλων οὐσῶν (ἀλλὰ τῶν τριῶν συμπι- πτουσῶν) τὸ αὐτό ἐστιν τῷ εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι· τὸ γὰρ δύο παραλλήλων οὐσῶν καὶ μιᾶς ἐμπι- πτούσης ὡς μέρος ὂν τῆς τοῦ β ὑποδιαιρέσεως προγράφε- ται ἐν τούτοις πάντων. καὶ τὰ ἑξῆς ς ἐν τῷ πρώτῳ βι- βλίῳ, τὰ δὲ λειπόμενα δύο, τὸ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν καὶ κύκλου, ἢ τριῶν δοθέντων κύκλων, μόνον ἐν τῷ δευτέρῳ βι- βλίῳ διὰ τὰς πρὸς ἀλλήλους θέσεις τῶν κύκλων τε καὶ εὐθειῶν πλείονας οὔσας καὶ πλειόνων διορισμῶν δεομένας. Ταῖς προειρημέναις ἐπαφαῖς ὁμογενὲς πλῆθός ἐστιν προβλημάτων παραλειπόμενον ὑπὸ τῶν ἀναδιδόντων, καὶ	Μετά είναι το έργο 'Περί επαφών' με δύο βιβλία. Σε αυτό περιέχονται πολλές προτάσεις. αλλά γι΄ αυτές μια παραθέτουμε η οποία έχει ως εξής: 'δοθέντων οποιωνδήποτε τριών στοιχείων που μπορεί το καθένα να είναι σημείο ευθεία ή κύκλος που να είναι σε οποιαδήποτε θέση να κατασκευαστεί κύκλος ο οποίος να περνά από τα δοσμένα σημεία (στην περίπτωση των δοσμένων σημείων) ή να εφάπτεται σε καθεμία από τις δοσμένες γραμμές'. Εξαιτίας του πλήθους των ομοίων και ανόμοιων δεδομένων των υποθέσεων υπάρχουν αναγκαστικά δέκα επιμέρους περιπτώσεις. Διότι από τρία ανόμοια γένη προκύπτουν διάφορες τριάδες άτακτες. Δέκα το πλήθος. Διότι είναι δυνατόν να δίνονται:1) τρία σημεία ή 2) τρεις ευθείες ή 3)δύο σημεία και μια ευθεία ή 4)δύο ευθείες και ένα σημείο ή 5) δύο σημεία και ένας κύκλος ή 6) δύο κύκλοι και ένα σημείο ή 7) δύο ευθείες και ένας κύκλος ή 8) δύο κύκλοι και μια ευθεία ή 9) ένα σημείο μια ευθεία και ένας κύκλος ή 10)τρεις κύκλοι. Από αυτές τις περιπτώσεις οι δύο πρώτες έχουν αποδειχθεί στο 4^{ο} Βιβλίο των Πρώτων Στοιχείων (Σημείωση δική μας: εννοεί των στοιχείων του Ευκλείδη) και παραλείπουμε να τις γράψουμε. Διότι το μεν 'τρία σημεία μη συνευθειακά' είναι το αυτό με το 'να περιγραφεί κύκλος σε ένα δοσμένο τρίγωνο' (Σημείωση δική μας:στοιχεία του Ευκλείδη βιβλίο δ΄ πρόταση 5). Το δε 'δοσμένες τρεις ευθείες που είναι μη παράλληλες (αλλά και οι τρεις συμπίπτουσες / τεμνόμενες)' είναι το 'να εγγραφεί κύκλος σε ένα δοσμένο τρίγωνο'(Σημείωση δική μας:στοιχεία του Ευκλείδη βιβλίο δ΄ πρόταση 4). Το 'δυο ευθείες παράλληλες και μια τρίτη να τις τέμνει΄ είναι κάτι που αναφέρεται στην αρχή όλων

προσανέδωκα ἐν τοῖς πρότερον τῶν εἰρημένων δύο βιβλίων· εὐσυνοπτόν τε γὰρ καὶ εἰσαγωγικὸν μᾶλλον ἦν ἐντελὲς δὲ καὶ συμπληρωτικὸν τοῦ γένους τῶν ἐπαφῶν. πάλιν μιᾷ περιλάβωμεν ἅπαντα προτάσει, ἥτις τῆς προειρημένης λεί- πουσα μὲν ὑποθέσει περιττεύουσα δὲ ἐπιτάγματι οὕτως ἔχει· ἐκ σημείων καὶ εὐθειῶν καὶ κύκλων ὁποιωνοῦν δύο δοθέντων κύκλον γράψαι τῷ μεγέθει δοθέντα διὰ τοῦ δο- θέντος σημείου ἢ τῶν δοθέντων παραγινόμενον (εἰ δοθείη) ἐφαπτόμενον δὲ ἑκάστης τῶν δεδομένων γραμμῶν. αὕτη περιέχει προβλημάτων ἤδη τὸ πλῆθος ἕξ· ἐκ τριῶν γὰρ διαφόρων τινῶν δυάδες ἄτακτοι διάφοροι γίνονται τὸ πλῆ- θος ς· ἤτοι γὰρ δύο δοθέντων σημείων ἢ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἢ δύο δοθέντων κύκλων ἢ σημείου καὶ εὐθείας ἢ σημείου καὶ κύκλου ἢ εὐθείας καὶ κύκλου τὸν δεδομένον τῷ μεγέθει κύκλον ἀγαγεῖν δεῖ, ὡς εἴρηται, ταῦτα δὲ ἀναλῦσαι καὶ συνθεῖναι καὶ διορίσασθαι κατὰ πτῶσιν. Ἔχει δὲ τὸ πρῶτον τῶν ἐπαφῶν προβλήματα ζ, τὸ δὲ δεύτερον προβλήματα δ. Λήμματα δὲ ἔχει τὰ δύο βιβλία κα, αὐτὰ δὲ θεωρη- μάτων ἐστὶν ξ.	των προβλημάτων που είναι υποδιαιρέσεις του δεύτερου προβλήματος. Και τα επόμενα έξι προβλήματα βρίσκονται στο πρώτο βιβλίο και τα υπόλοιπα δύο: ‘δύο ευθείες κι ένας κύκλος δοσμένα’ και το ‘τρεις κύκλοι δοσμένοι’ περιέχονται μόνο στο δεύτερο βιβλίο , διότι οι θέσεις των κύκλων και των ευθειών μεταξύ τους είναι πολλές και απαιτούν περισσότερους διορισμούς / επεξηγήσεις. Στις προηγούμενες επαφές υπάρχει ένα πλήθος προβλημάτων τα οποία έχουν παραληφθεί από αυτούς που τα αναδίδουν και πρόσθεσα αυτό στα όσα ανέφερα πιο πριν από τα δύο βιβλία. Επειδή αυτό που προστέθηκε είναι εύκολο στην κατανόησή του και εισαγωγικό είναι περισσότερο ολοκληρωμένο και συμπληρωματικό για το γένος των επαφών. Συμπεριλαμβάνουμε αυτές τις προτάσεις σε μια που έχει λιγότερες υποθέσεις αλλά έχει περισσότερα ζητούμενα και η οποία διατυπώνεται κατά τον ακόλουθο τρόπο: Έστω ότι δίνονται δύο τυχαία στοιχεία που το καθένα μπορεί να είναι σημείο ευθύγραμμο τμήμα ή κύκλος. Να κατασκευαστεί ένας δοσμένος κατά μέγεθος κύκλος που να διέρχεται από δοσμένο σημείο ή από τα δοσμένα σημεία (στην περίπτωση των δοσμένων σημείων) και εφαπτόμενος σε καθεμία από τις δοσμένες γραμμές’. Τα προβλήματα που περιέχονται στην πρόταση αυτή είναι έξι . Διότι τα διάφορα άτακτα ζεύγη που προκύπτουν από τρία στοιχεία διαφορετικού είδους είναι έξι, επειδή πρέπει να φέρουμε το δοσμένο κατά μέγεθος κύκλο ή από δύο δοσμένα σημεία ή από δύο ευθύγραμμα τμήματα ή από δύο δοσμένους κύκλους ή από ένα σημείο και ένα ευθύγραμμο τμήμα ή από ένα σημείο και ένα κύκλο ή από ένα ευθύγραμμο τμήμα και ένα κύκλο όπως έχει λεχθεί. Η ανάλυση σύνθεση και οι διορισμοί αυτών των προτάσεων πρέπει να γίνει

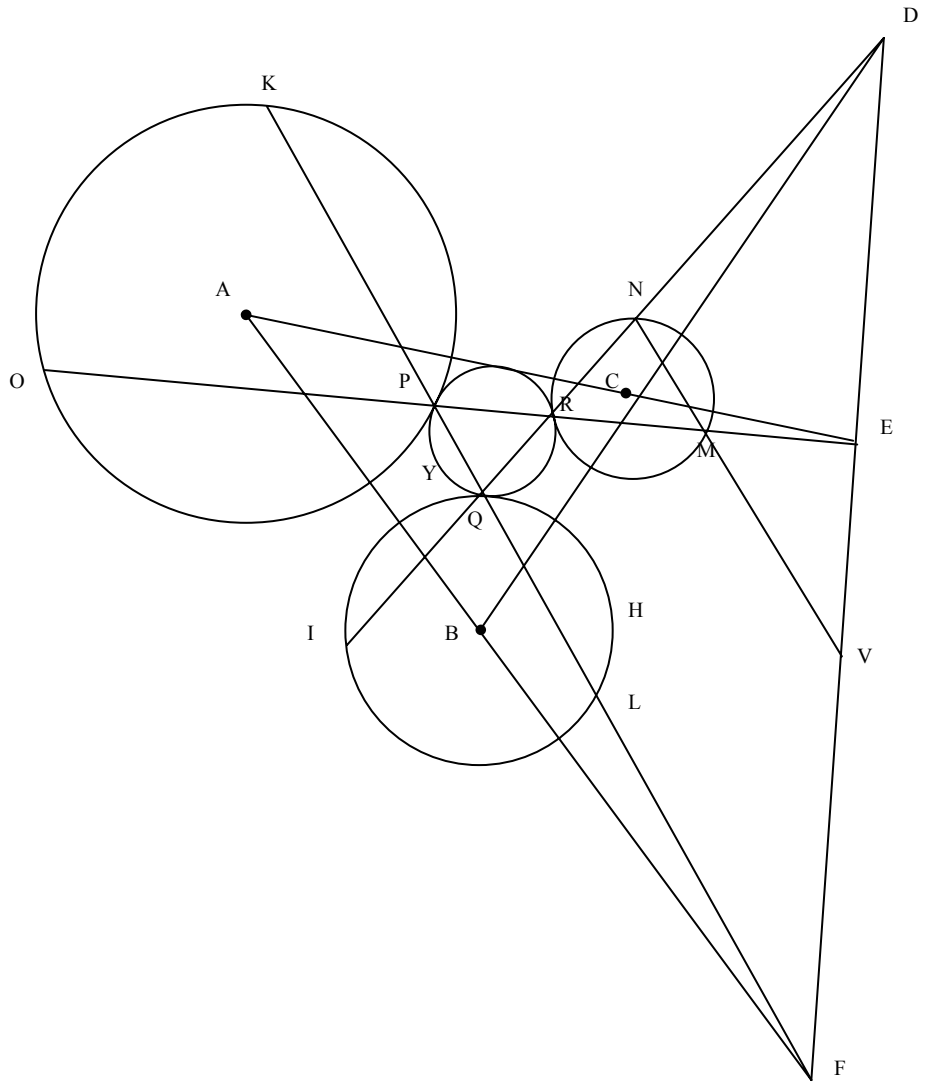
	κατά περίπτωση . Τα α΄ βιβλίο των επαφών περιέχει εφτά προβλήματα και το β΄ περιέχει τέσσερα προβλήματα. Τα δύο βιβλία περιέχουν 21 λήμματα και θεωρήματά 60.

Αν εξαιρέσει κάποιος τις ανακατασκευές που έκαναν οι Άραβες το πρόβλημα του Απολλώνιου παρέμεινε εν υπνώσει μέχρι που ο François Viète (1540-1603) ανακατασκεύασε τις επαφές το 1600 (*Apollonius Gallus*). Ο Viète έχοντας βρει μια λύση του Απολλώνιου προβλήματος, έθεσε το πρόβλημα στον Adrianus Romanus (1561-1615) ο οποίος το έλυσε με χρήση κωνικών (υπερβολής). Ο Viète δεν ενθουσιάστηκε με την λύση αυτή και χάρηκε με την λύση που είχε δώσει ο ίδιος στο *Apollonius Gallus*. Μια λύση έδωσε και ο Newton στο *Arithmetica Universalis* (Probl. Xlvii), ενώ ένα ισοδύναμο πρόβλημα έχει λυθεί με την βοήθεια δύο υπερβολών στο *Principia*, Lemma xvi. Το πρόβλημα επιδέχεται τελικά *επίπεδη λύση* και στην ουσία δεν είναι δύσκολο να αποκαταστήσουμε την ουσία της λύσης που έδωσε ο Απολλώνιος (ο οποίος χρησιμοποίησε την *επίπεδη μέθοδο* δηλαδή την μέθοδο με χρήση αποκλειστικά ευθειών και κύκλων) με την βοήθεια των λημμάτων που έδωσε ο Πάππος. Μια ανακατασκευή του προβλήματος του απολλώνιου η οποία εξαρτάται από διάφορες προτάσεις που αναφέρονται στον Πάππο έχει δώσει ο Sir Thomas Heath (History of Greek mathematics).Τρία πράγματα είναι αναγκαία για να δοθεί μια τέτοια λύση: 1) Μια πρόταση που έδωσε ο Πάππος σε άλλο σημείο της συναγωγής του (Pappus iv, pp.194-196) και η οποία έχει πολύ εύκολη απόδειξη: Αν δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά ή εσωτερικά τότε κάθε ευθεία που διέρχεται από το σημείο επαφής διαιρεί τους δύο κύκλους σε μέρη τα οποία είναι μεταξύ τους όμοια. 2) Η πρόταση που λέει ότι αν δοθούν τρεις κύκλοι τότε τα έξι κέντρα ομοιότητας τους (εσωτερικά και εξωτερικά) αν τα πάρουμε ανά τρία, 3 εξωτερικά ή δύο εσωτερικά και ένα εξωτερικό, βρίσκονται σε τέσσερις ευθείες. (Η απόδειξη έχει γίνει σε άλλο μέρος αυτής της εργασίας). 3) Ένα βοηθητικό πρόβλημα που λύθηκε από τον Πάππο και διατυπώνεται με σύγχρονο τρόπο ως εξής: Να εγγραφεί ένα τρίγωνο ABC σε έναν κύκλο, έτσι ώστε οι πλευρές του τριγώνου όταν προεκταθούν να περνούν από τρία δεδομένα σημεία D,E,F που βρίσκονται σε μια ευθεία γραμμή.



Θα παραλείψουμε την απόδειξη των προτάσεων 1 και 3 διότι δεν νομίζουμε ότι είναι κάτι που πρέπει να δοθεί στην παρούσα εργασία (αν κάποιος ενδιαφέρεται μπορεί να ανατρέξει το βιβλίο: History of Greek mathematics Volume 2 του Sir Thomas Heath (εκδ.Dover 1983 σελ.183). θα περιοριστούμε απλά στην ανακατασκευή που δίνει ο Heath.

Η λύση του προβλήματος του Απολλώνιου που δίνει ο Sir Thomas Heath είναι η εξής: Παίρνει την περίπτωση που ο ζητούμενος κύκλος εφάπτεται εξωτερικά στους τρεις δοσμένους κύκλους όπως φαίνεται στο σχήμα:



Ας υποθέσουμε ότι οι ακτίνες των δοσμένων κύκλων είναι a,b,c και τα κέντρα τους A,B,C αντίστοιχα. Ας υποθέσουμε ότι D,E,F είναι τα εξωτερικά κέντρα ομοιότητας οπότε $\frac{BD}{DC}=\frac{b}{c}$ κ.λ.π. Ας υποθέσουμε ότι το πρόβλημα λύθηκε και έστω P, Q, R είναι τα σημεία επαφής. Ας υποθέσουμε ότι το PQ αν προεκταθεί τέμνει τους κύκλους με κέντρα τα A,B πάλι στα σημεία K,L. Τότε από την πρόταση (1) πιο αναφέραμε πιο πάνω τα τμήματα KGP και QHL είναι και τα δύο όμοια με το τμήμα PYQ και ως εκ τούτου είναι όμοια και μεταξύ τους. Αυτό που συμπεραίνεται τώρα είναι ότι το PQ πέρα από το L διέρχεται από το F. Παρομοίως τα QR, PR προεκτεινόμενα διέρχονται από τα D,E αντίστοιχα.

Ας υποθέσουμε ότι τα PE,QD τέμνουν τον κύκλο με κέντρο το C στα σημεία M,N.

Τότε τα τμήματα PQR, RNM είναι όμοια και οι γωνίες ∠PQR, ∠RNM είναι ίσες. Και άρα το MN είναι παράλληλο με το PQ.

Προεκτείνουμε το MN μέχρι να τμήσει το EF στο σημείο V.

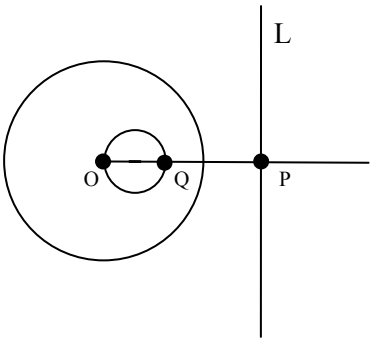
Τότε $\frac{EV}{EF}=\frac{EM}{EP}=\frac{EC}{EA}=\frac{c}{a}$ και ως εκ τούτου το σημείο V είναι γνωστό.

Σύμφωνα λοιπόν με τα όσα είπαμε πιο πάνω το πρόβλημα ανάγεται στο εξής απλούστερο: Αν δοθούν τρία σημεία V,E,D σε μια ευθεία γραμμή πρέπει να φέρουμε τις DR,ER που

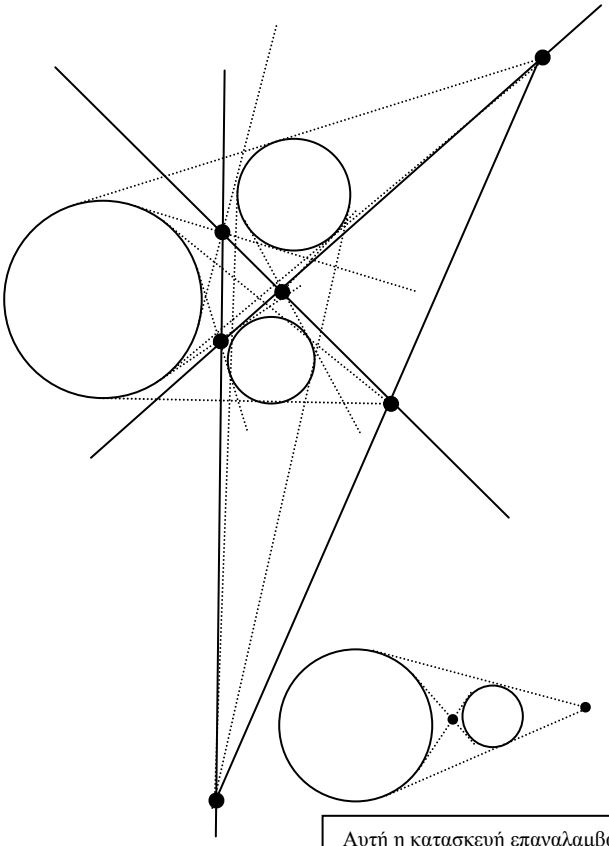
διέρχονται από ένα σημείο R του κύκλου με κέντρο το C, ώστε αν οι DR και ER τμήσουν πάλι τον κύκλο κέντρου C στα M,N τότε η MN αν προεκταθεί να περάσει από το σημείο V. Το πρόβλημα έχει λυθεί αν αναλογιστούμε το βοηθητικό πρόβλημα (3) στο οποίο αναφερθήκαμε πιο πάνω. Αν προεκτείνουμε τώρα τα DR,ER βρίσκουμε και τα άλλα δύο σημεία επαφής.

Ο Joseph –Diaz Gergonne και το πρόβλημα του Απολλώνιου

Ο Joseph –Diaz Gergonne δημοσίευσε μια λύση του προβλήματος των επαφών βασισμένη στην γεωμετρική αντιστροφή στο περιοδικό του Annales de Mathématiques , 4 (1816). Η λύση που έδωσε ο Gergonne είναι εξαιρετικά ευέλικτη σε σχέση με την θέση των δοθέντων κύκλων και μπορεί επίσης να εφαρμοστεί και στις υπόλοιπες 9 περιπτώσεις του προβλήματος Αυτός εισήγαγε και τις έννοιες *πόλος* και *πολική* .

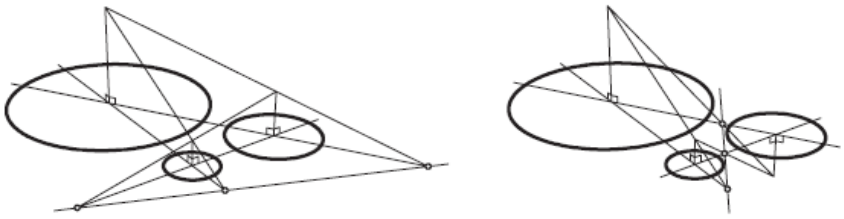


Από την γεωμετρία της αντιστροφής γνωρίζουμε ότι αν έχουμε μια ευθεία L η εικόνα της μέσω αντιστροφής ως προς τον κύκλο (O) είναι ένας κύκλος που διέρχεται από το κέντρο της αντιστροφής. Το σημείο τομής Q της εικόνας και της κάθετης από το κέντρο O προς την ευθεία L λέγεται πόλος της L ενώ η ευθεία L λέγεται πολική του σημείου Q.
Πιο κάτω θα δώσουμε μια λύση που καταλήγει στην κατασκευή που έδωσε ο Gergonne. Η λύση αυτή χρησιμοποιεί αντιστροφή ως προς σφαίρα.
Η λύση χρησιμοποιεί τα κέντρα ομοιότητας (centers of similitude) των τριών ζευγών κύκλων που παίρνουμε από τους τρεις κύκλους του προβλήματος του Απολλώνιου. Τα έξι αυτά κέντρα ομοιότητας βρίσκονται σε τέσσερις ευθείες με κάθε ευθεία να περιέχει ένα σημείο ομοιότητας από κάθε ζεύγος κύκλων (όπως στο σχήμα). Οι ευθείες αυτές ονομάζονται ευθείες ομοιότητας.



Αυτή η κατασκευή επαναλαμβάνεται συνεχώς για να κατασκευάσουμε τα κέντρα ομοιότητας δύο κύκλων

Ας θεωρήσουμε τους τρεις κύκλους στο οριζόντιο επίπεδο Π. Μια ισοδύναμη κατασκευή μπορεί γίνει βγαίνοντας έξω από το επίπεδο Π . Από το κέντρο του καθενός από τους τρεις κύκλους φέρνουμε την κάθετη προς το επίπεδο Π και πάνω στην κάθε κάθετη παίρνουμε το σημείο που η απόστασή του από το επίπεδο Π ισούται με την ακτίνα του αντίστοιχου κύκλου. Το επίπεδο που ορίζεται από τα τρία αυτά σημεία περιέχει τρία σημεία ομοιοθεσίας και τέμνει το επίπεδο των κύκλων κατά την ευθεία που περιέχει τα τρία αυτά κέντρα. Αν τα σημεία που παίρνουμε πάνω στις κάθετες βρίσκονται προς το ίδιο μέρος του Π τότε παίρνουμε τρία εξωτερικά κέντρα ομοιοθεσίας. Αν το ένα από τα τρία σημεία που παίρνουμε πάνω στις κάθετες είναι σε αντικείμενους ημιχώρους τότε παίρνουμε δύο εσωτερικά σημεία και ένα εξωτερικό.

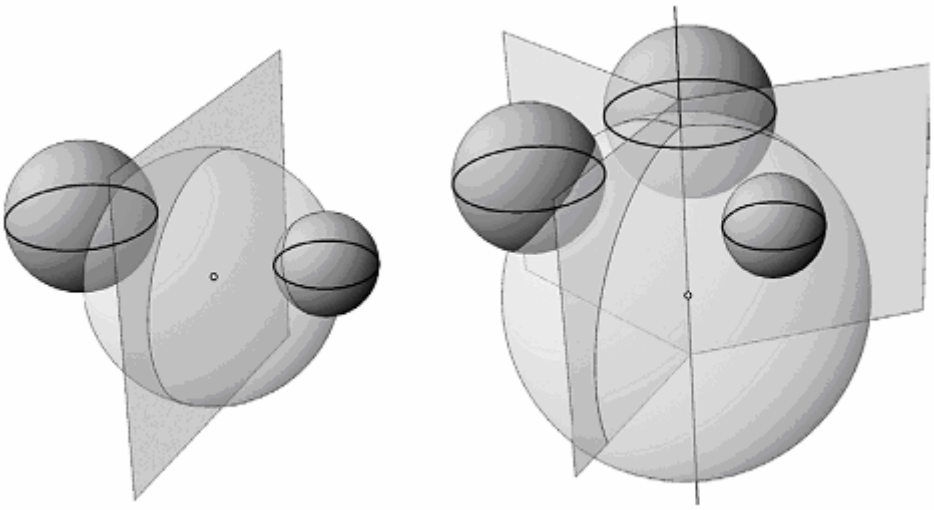


Αν στέψουμε δύο κύκλους και τον ριζικό τους άξονα γύρω από τον άξονα συμμετρίας τους τότε οι κύκλοι διαγράφουν σφαίρες και ο ριζικός τους άξονας διαγράφει ένα επίπεδο. Αν μια σφαίρα έχει το κέντρο της πάνω στο επίπεδο που διαγράφει ο ριζικός άξονας και είναι ορθογώνια προς μια από τις σφαίρες που διαγράφουν οι δύο κύκλοι τότε είναι ορθογώνια και στις δύο.

Τώρα ας κάνουμε το ίδιο και για ένα σύστημα που αποτελείται από τρεις κύκλους.

Τα τρία επίπεδα που διαγράφονται από τους ριζικούς άξονες τέμνονται κατά μια ευθεία κάθετη προς το επίπεδο των κύκλων η οποία διέρχεται επίσης από το ριζικό τους κέντρο.

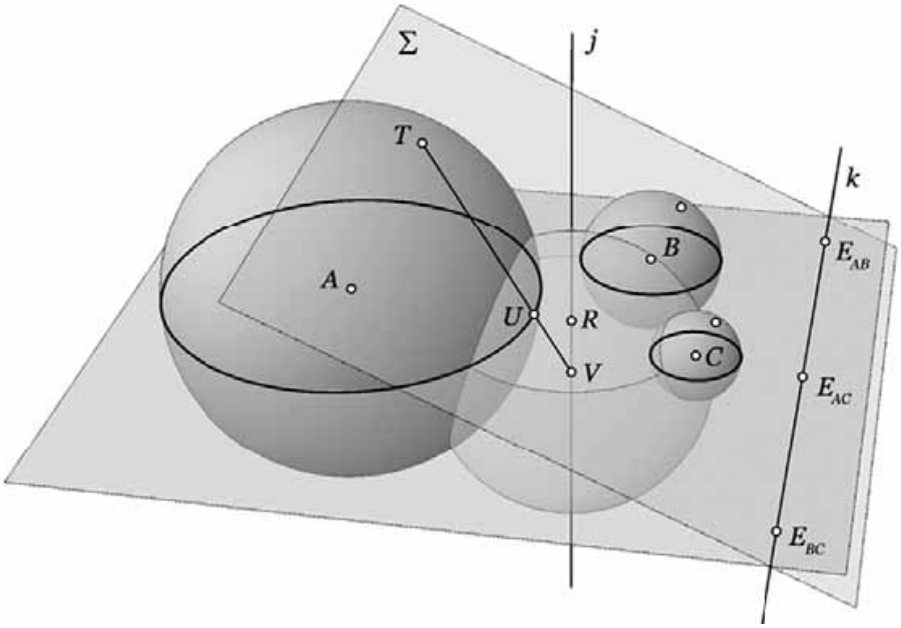
Αν μια σφαίρα έχει το κέντρο της πάνω σε αυτήν την γραμμή και είναι ορθογώνια σε μια από τις τρεις σφαίρες που σχηματίζονται από την τριάδα των κύκλων τότε είναι ορθογώνια και στις τρεις σφαίρες.



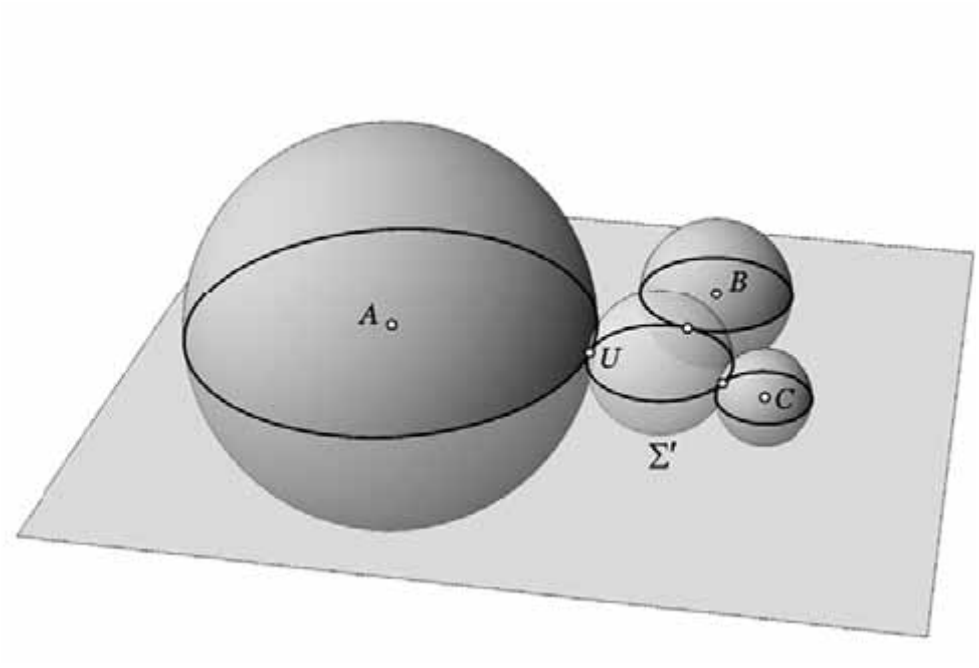
Ας υποθέσουμε ότι A, B, C είναι τα κέντρα τριών κύκλων σε ένα οριζόντιο επίπεδο .

Ας υποθέσουμε ότι R είναι το ριζικό κέντρο και ας ονομάσουμε με j την κάθετη ευθεία που διέρχεται από το R. Περιστρέφουμε κάθε έναν από τους τρεις κύκλους ώστε να σχηματιστεί μια σφαίρα . Παίρνουμε το επίπεδο Σ έτσι ώστε να εφάπτεται στις τρεις σφαίρες . Επειδή το επίπεδο περιέχει μια κοινή εφαπτόμενη ευθεία για κάθε δύο από τις τρεις σφαίρες η τομή του με το οριζόντιο επίπεδο πρέπει να περιέχει τα τρία αντίστοιχα κέντρα ομοιοθεσίας. Στο σχήμα η ευθεία ομοιότητας συμβολίζεται με το γράμμα k. Ας υποθέσουμε ότι T είναι το

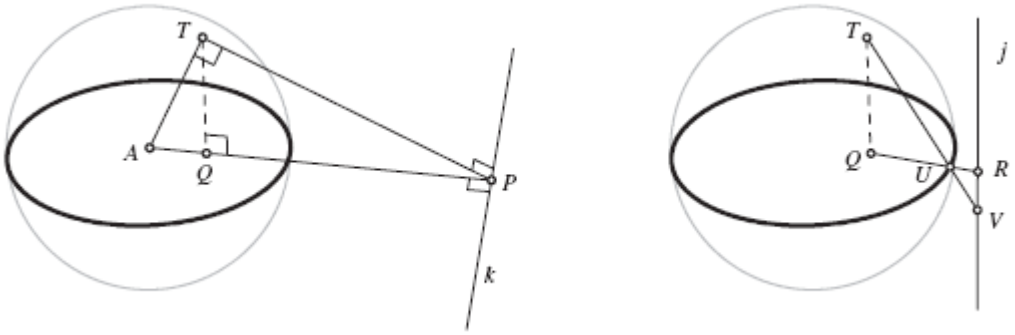
σημείο επαφής με την σφαίρα A. Από το σημείο T φέρνουμε μια ευθεία που τέμνει τον κύκλο A στο U και την ευθεία j στο σημείο V.
Θεωρούμε σφαίρα αντιστροφής[1] με κέντρο το σημείο V και ορθογώνια στις τρεις άλλες σφαίρες. Η εικόνα του επιπέδου Σ με την αντιστροφή ως προς την σφαίρα αυτή είναι μια σφαίρα Σ΄ η οποία πρέπει να είναι εφαπτόμενη στις εικόνες των σφαιρών A, B,C (Αφού οι σφαίρες A, B, C είναι ορθογώνιες στην σφαίρα V μένουν αναλλοίωτες ως προς την αντιστροφή και έτσι η σφαίρα Σ΄ εφάπτεται στις σφαίρες A, B, C). Το σημείο T αφού βρίσκεται στην σφαίρα A που μένει αναλλοίωτη ως προς την αντιστροφή πρέπει να απεικονίζεται σε ένα άλλο σημείο το οποίο ανήκει επίσης στην σφαίρα A και στην ημιευθεία VT. Αυτό μπορεί να είναι μόνο το σημείο U οπότε το σημείο U είναι σημείο επαφής. Επειδή τα σημεία A και U είναι σημεία του επιπέδου των κύκλων το ίδιο θα συμβαίνει και για το κέντρο της σφαίρας Σ΄ (εύκολα συμπεραίνουμε κάτι τέτοιο αφού όταν έχουμε δύο εφαπτόμενες μεταξύ τους σφαίρες το σημείο επαφής και τα κέντρα των σφαιρών είναι συνευθειακά σημεία) . Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι και τα άλλα δύο σημεία επαφής βρίσκονται σε αυτό το επίπεδο και έτσι η τομή του επιπέδου και της σφαίρας Σ΄ είναι μια λύση του προβλήματος του απολλώνιου).
Όταν κατασκευάσαμε την ευθεία TUV επιλέξαμε την μια περίπτωση από δύο δυνατές περιπτώσεις. Η ευθεία που δεν επιλέξαμε θα μπορούσε να οδηγήσει σε μια άλλη λύση. Επίσης το επίπεδο Σ θα μπορούσε να επιλεγεί έτσι ώστε να μην είναι εξωτερικά εφαπτόμενο οπότε να χωρίζει την μια σφαίρα από τις άλλες δύο. Υπάρχουν τέσσερα πιθανά εφαπτόμενα επίπεδα το καθένα από τα οποία τέμνει το οριζόντιο επίπεδο (επίπεδο των αρχικών κύκλων) και η τομή είναι μια ευθεία ομοιότητας, Κάθε τέτοια θέση παράγει δύο λύσεις άρα το σύνολο των λύσεων είναι οκτώ.



[1] Η αντιστροφή ως προς σφαίρα είναι ανάλογη με την αντιστροφή ως προς κύκλο. Η αντιστροφή ενός σημείου P στις τρεις διαστάσεις και ως προς μια σφαίρα κέντρου O και ακτίνας R είναι ένα σημείο P΄ τέτοιο ώστε $OP \cdot OP' = R^2$ και τα σημεία P και P΄ βρίσκονται στην ίδια ημιευθεία με αρχή το O. Όπως και στην αντιστροφή στις δύο διαστάσεις έτσι και εδώ μια σφαίρα απεικονίζεται μέσω της αντιστροφής σε μια σφαίρα εκτός από την περίπτωση που η σφαίρα που θέλουμε να αντιστρέψουμε διέρχεται από το κέντρο της αντιστροφής οπότε η σφαίρα αυτή μετασχηματίζεται σε επίπεδο .Ισχύει και το αντίστροφο: ένα επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής μετασχηματίζεται σε σφαίρα. Μια σφαίρα που είναι ορθογώνια ως προς την σφαίρα της αντιστροφής μετασχηματίζεται στον εαυτό της. Πολλά από τα θεωρήματα που είναι αντίστοιχα με τα θεωρήματα που έχουμε στην δισδιάστατη γεωμετρία μπορούν να αποδειχθούν αρκεί να θεωρήσουμε την αντίστοιχη περίπτωση στο επίπεδο και να φανταστούμε την τρισδιάστατη περίπτωση να παράγεται από την δισδιάστατη με περιστροφή γύρω από τον άξονα συμμετρίας.



Ας υποθέσουμε ότι το σημείο P βρίσκεται πάνω στην ευθεία k και είναι τέτοιο ώστε η TP να είναι κάθετη στην ευθεία k οπότε και η AP είναι επίσης κάθετη στην k. Ας υποθέσουμε ότι το Q είναι η προβολή του T πάνω στο επίπεδο των κύκλων. Οι γωνίες ATP και TQP είναι ορθές οπότε $AP \cdot AQ = AT^2$. Επειδή η AT είναι η ακτίνα άρα το σημείο Q είναι το αντίστροφο σημείο του σημείου P ως προς την σφαίρα αντιστροφής A ή τον κύκλο A και το σημείο Q είναι ο πόλος της ευθείας k ως προς τον κύκλο A. Τα σημεία T, U ,V είναι συνευθειακά οπότε το ίδιο συμβαίνει και για τις προβολές τους Q,U,R. Μια ανάλογη σχέση υπάρχει μεταξύ της ευθείας k και των άλλων δυο δεδομένων κύκλων. Η ευθεία που ενώνει το ριζικό κέντρο R, και τον πόλο Q, μιας ευθείας ομοιότητας k ως προς έναν από τους τρεις δοσμένους κύκλους (στην περίπτωση που παρουσιάζουμε ο δοσμένος κύκλος είναι ο κύκλος A) τέμνει αυτόν τον κύκλο (εδώ τον A) στο αντίστοιχο σημείο επαφής με τον ζητούμενο απολλώνιο κύκλο .

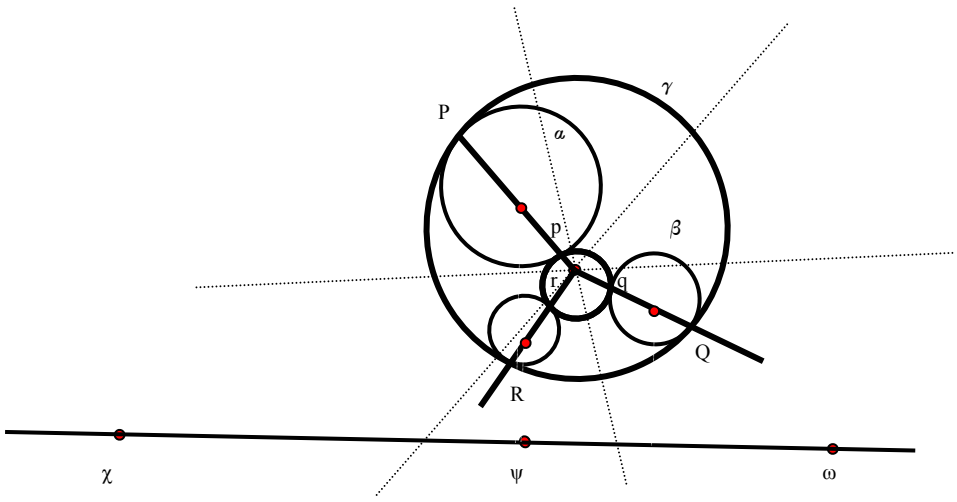


Από εδώ και πέρα όλα θα γίνουν πάλι στο επίπεδο των τριών αρχικών κύκλων.

Κατασκευή Gergonne

Κατασκευάζουμε τα έξι κέντρα ομοιοθεσίας και τις τέσσερις ευθείες ομοιότητας που καθορίζονται από αυτά. Κατασκευάζουμε το ριζικό κέντρο. Επιλέγουμε μια από τις ευθείες ομοιότητας και κατασκευάζουμε τον πόλο της ως προς τον κάθε κύκλο. Κατασκευάζουμε την ευθεία που διέρχεται από το ριζικό κέντρο και από τον κάθε πόλο. Αυτές οι ευθείες τέμνουν

τους κύκλους στα σημεία επαφής με τον ζητούμενο κύκλο. Κάθε ευθεία ομοιότητας δίνει δύο λύσεις εφαπτόμενων κύκλων το σύνολο λοιπόν των λύσεων είναι οκτώ.



Θα παρουσιάσουμε τώρα μια διαφορετική προσέγγιση της κατασκευής του Gergonne η οποία είναι ακόμα πιο κοντά το πνεύμα του. Θα ξεκινήσουμε με την διατύπωση του θεωρήματος των D' Alembert- Monge καθώς και κάποιων άλλων θεωρημάτων τα οποία θα αναφέρουμε χωρίς απόδειξη :

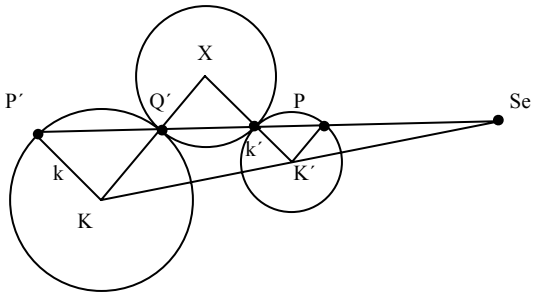
Έστω ότι έχουμε τρεις κύκλους Α,Β,Γ. Ας πάρουμε τους κύκλους αυτούς ανά ζεύγη (Α,Β),(Β,Γ),(Α,Γ). Γνωρίζουμε ότι τα κέντρα ομοιοθεσίας- ομοιότητας των τριών αυτών ζευγών βρίσκονται ανά τρία σε τέσσερις ευθείες και πιο συγκεκριμένα έχουμε αποδείξει σε άλλο σημείο της εργασίας μας ότι στην ίδια ευθεία βρίσκονται τα κέντρα ομοιότητας τα οποία είναι και τα τρία εξωτερικά ή δύο εσωτερικά και ένα εξωτερικό. Έστω τώρα ότι Α, Β είναι δύο κύκλοι. Το εσωτερικό κέντρο ομοιότητας θα το συμβολίζουμε με –ΑΒ και το εξωτερικό κέντρο ομοιότητας με +ΑΒ. Όταν θέλουμε να έχουμε και τα δύο κέντρα ομοιότητας μαζί μπορούμε να τα παραστήσουμε με ένα σύμβολο. Το σύμβολο αυτό θα είναι της μορφής αΑΒ όπου α=±1 (με το α να παίρνει τις τιμές $+1$ ή -1). Το πιο πάνω θεώρημα διατυπώνεται τώρα με μεγαλύτερη συντομία ως εξής: Αν α,β,γ=±1 τότε τα τρία κέντρα ομοιότητας αΑΒ, βΒΓ, γΓΑ βρίσκονται στην ίδια ευθεία αν αβγ=1.

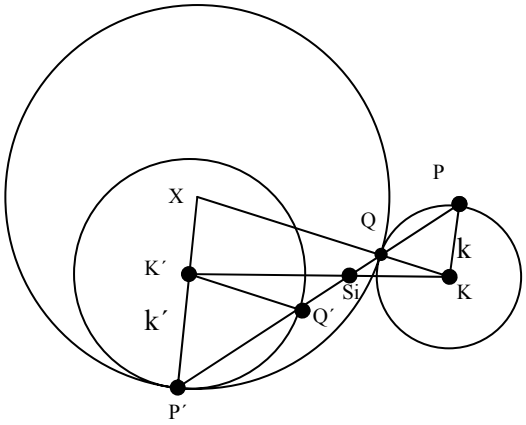
Επίσης αποδεικνύεται πολύ εύκολα το θεώρημα των επαφών:

Το εξωτερικό κέντρο ομοιότητας δύο σταθερών κύκλων είναι το σημείο ως προς το οποίο όλοι οι κύκλοι που εφάπτονται ομογενώς[2] σε αυτούς τους δύο κύκλους έχουν την ίδια δύναμη. Επίσης το εξωτερικό κέντρο είναι το σημείο από το οποίο διέρχεται η ευθεία που ορίζεται από τα σημεία επαφής των δύο κύκλων με έναν οποιοδήποτε εφαπτόμενο προς αυτούς κύκλο.

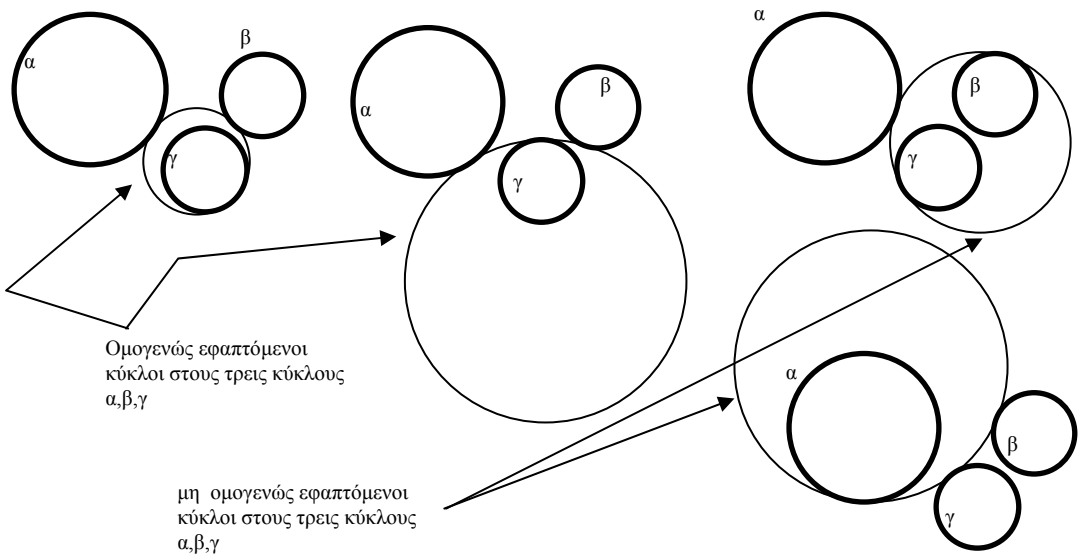
Το εσωτερικό κέντρο ομοιότητας δύο σταθερών κύκλων είναι το σημείο ως προς το οποίο όλοι οι κύκλοι που εφάπτονται μη ομογενώς σε αυτούς τους δύο κύκλους έχουν την ίδια δύναμη. Το εσωτερικό κέντρο είναι το σημείο από το οποίο διέρχεται η ευθεία που ορίζεται από τα σημεία επαφής των δύο κύκλων με έναν εφαπτόμενο προς αυτούς κύκλο.

[2] Δυο κύκλοι εφάπτονται μεταξύ τους ομογενώς όταν ο ένας είναι εξωτερικός του άλλου ενώ εφάπτονται μη ομογενώς όταν ο ένας είναι εσωτερικός του άλλου. Επίσης αν έχουμε δύο κύκλους οι οποίοι εφάπτονται σε έναν τρίτο κύκλο τότε αν οι δύο κύκλοι είναι εσωτερικοί ή εξωτερικοί του κοινού εφαπτόμενου κύκλου τους τότε λέμε πως οι δύο κύκλοι εφάπτονται ομογενώς στον τρίτο κύκλο. Αν ο ένας είναι εσωτερικός και ο άλλος εξωτερικός του κοινού εφαπτόμενου κύκλου τους τότε λέμε ότι εφάπτονται μη ομογενώς. Γενικά η λέξη ομογενώς χαρακτηρίζει επαφές της ίδιας μορφής.



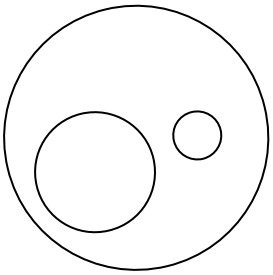


Θεώρημα πολικών και πόλων:
Αν το σημείο Q κείται επί της πολικής ευθείας του σημείου P τότε το P κείται επίσης επί της πολικής του Q. Ή επίσης αν η ευθεία p διέρχεται από την πόλο της q τότε και η q διέρχεται επίσης από τον πόλο της p.
Η λύση που έδωσε ο Gergonne στο πρόβλημα του Απολλώνιου βασίζεται στην αναζήτηση των ζητούμενων κύκλων σε ζεύγη και όχι κατά μονάδες. Συγκεκριμένα αναζητάει τα ζεύγη κύκλων που είναι ομογενώς εφαπτόμενοι στους α ,β, γ καθώς και τα ζεύγη μη ομογενώς εφαπτόμενων κύκλων στον καθένα από τους δεδομένους κύκλους α ,β, γ.



Θα δώσουμε το πρόσημο (+) για τις ομογενείς επαφές και το πρόσημο (–) για τις μη ομογενείς επαφές. Δηλαδή παρατηρούμε τον έναν εφαπτόμενο απολλώνιο κύκλο σε σχέση με έναν από τους τρεις σταθερούς και εφαπτόμενους σε αυτόν κύκλους. Αν οι δύο αυτοί κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά βάζω πρόσημο (+) στην αντίστοιχη επαφή. Αν εφάπτονται εσωτερικά βάζω (-). Αν μια επαφή έχει πρόσημο α (α=+ ή α=-) και μια άλλη έχει β (β=+ η β=-) τότε ο συνδυασμός τους έχει πρόσημο αβ κ.λ.π. Ας θεωρήσουμε τους κύκλους ϕ, θ οι οποίοι εφάπτονται στους κύκλους α ,β, γ αντίστοιχα στα σημεία P,Q,R και p,q,r και ας υποθέσουμε ότι οι επαφές έχουν τα πρόσημα: A,B,C και α,b,c αντίστοιχα.
Οι κύκλοι ϕ, θ είναι ομογενώς εφαπτόμενοι ή μη ομογενώς εφαπτόμενοι στους δεδομένους κύκλους άρα θα έχουμε Aα=Bb=Cc=ε (ε=+ ή ε=-) οπότε και BC=bc=κ,CA=cα=λ,AB=αb=μ και κλμ=+.
Ας θεωρήσουμε τους κύκλους ϕ,θ ως το σταθερό ζεύγος (ϕ,θ) κύκλων στο οποίο εφάπτονται οι κύκλοι α ,β, γ. Σύμφωνα με το θεώρημα των επαφών το κέντρο ομοιότητας O=ε$\phi\theta$ (ε=+ ή -) των κύκλων ϕ, θ είναι το σημείο το οποίο έχει την ίδια δύναμη ως προς τους τρεις κύκλους. Το O=ε$\phi\theta$ είναι επίσης το σημείο τομής των τριών χορδών Pp,Qq,Rr.

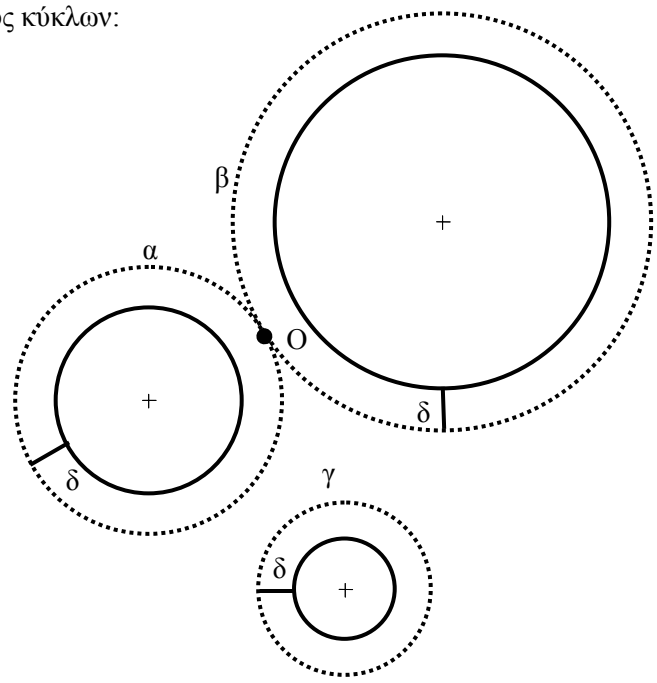
Παίρνουμε τώρα τα ζεύγη (α ,β), (β ,γ), (γ, α) ως τα σταθερά ζεύγη που είναι εφαπτόμενα στους κύκλους ϕ, θ. Σύμφωνα με το θεώρημα των επαφών θα έχουμε ότι το κέντρο ομοιότητας μ$\alpha\beta$=χ (ο συντελεστής είναι μ και προσδιορίζει αν η επαφή είναι εσωτερική ή εξωτερική) των κύκλων α,β έχει την ίδια δύναμη ως προς τους κύκλους ϕ,θ. Επίσης το κέντρο ομοιότητας κ$\beta\gamma$=ψ (με το ίδιο σκεπτικό που αναπτύξαμε πιο πάνω ο συντελεστής είναι κ) των κύκλων β ,γ έχει την ίδια δύναμη ως προς τους κύκλους ϕ, θ και το κέντρο ομοιότητας λ$\gamma\alpha$ =ω των κύκλων γ, α έχει την ίδια δύναμη ως προς τους κύκλους ϕ, θ. Επειδή κλμ=+ τα τρία σημεία χ,ψ,ω σύμφωνα με το θεώρημα D' Alembert – Monge θα βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία ομοιότητας των κύκλων α ,β, γ. Η ευθεία ομοιότητας χψω είναι λοιπόν ο ριζικός άξονας L των κύκλων ϕ, θ. Επίσης αν S είναι το σημείο τομής των δύο εφαπτόμενων ευθειών του κύκλου α στα σημεία P,p τότε SP=Sp. Επειδή αυτές οι εφαπτόμενες εφάπτονται επίσης και στους κύκλους ϕ, θ θα έχουμε ότι το S ανήκει και στον ριζικό άξονα L των ϕ, θ. Το σημείο S είναι ο πόλος της χορδής Pp ως προς τον κύκλο α. Ο ριζικός άξονας L διέρχεται από τον πόλο της Pp οπότε από το θεώρημα των πολικών και πόλων προκύπτει ότι η Pp διέρχεται από τον πόλο της L. Τα ίδια συμπεράσματα μπορούν να προκύψουν και για τις χορδές Qq ,Rr.Οπότε παίρνουμε την εξής πρόταση: Οι χορδές Pp , Qq , Rr στα σημεία επαφών διέρχονται από τους πόλους ως προς τους κύκλους α ,β, γ της ευθείας ομοιότητας χψω. Από την πρόταση αυτή προκύπτει άμεσα η κατασκευή του Gergonne .



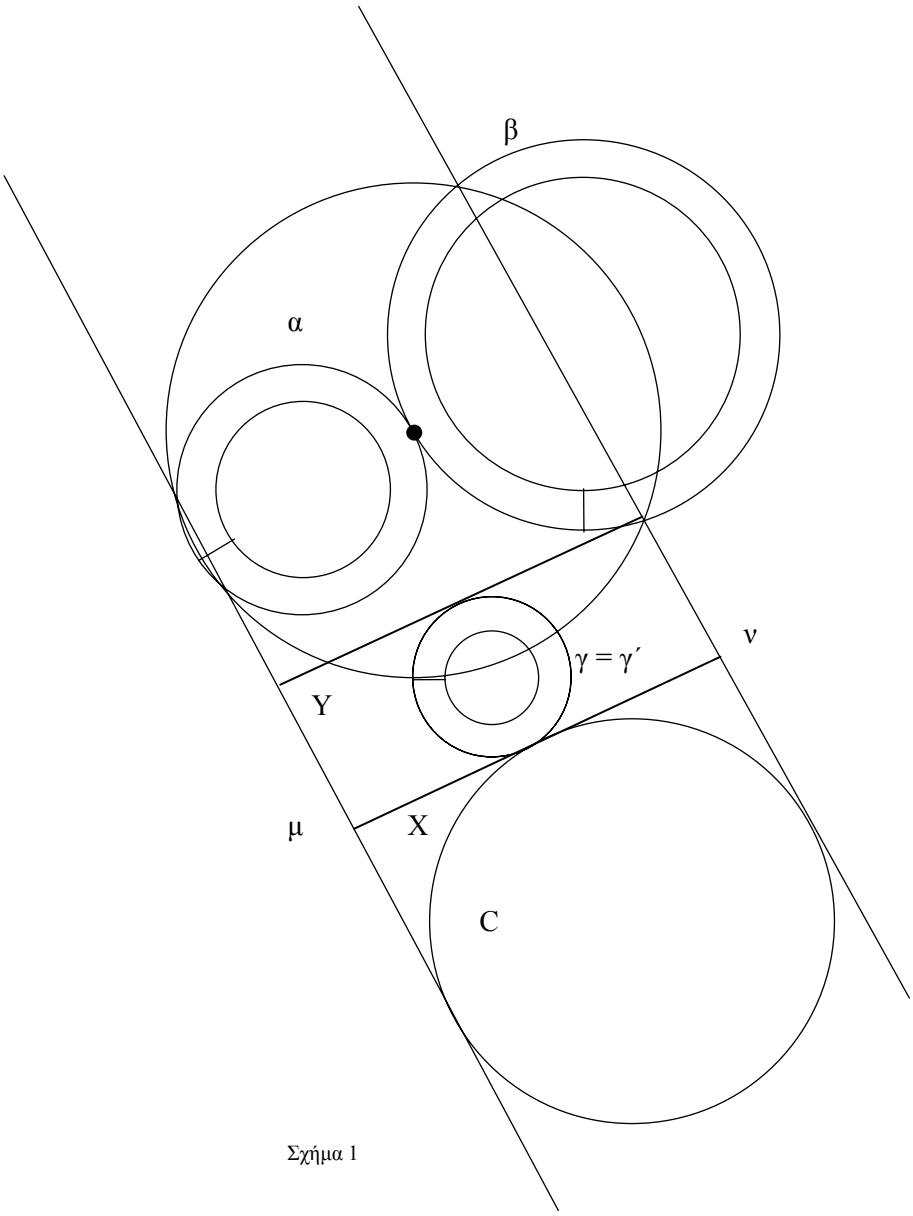
Ακόμα και η λύση του Gergonne έχει κάποιες αδυναμίες. Όταν για παράδειγμα οι δοσμένοι κύκλοι είναι ίσοι τότε τα εξωτερικά κέντρα ομοιότητας είναι το σημείο στο άπειρο. Όλες οι άλλες ευθείες ομοιότητας μπορούν να κατασκευαστούν. Η ευθεία των εξωτερικών κέντρων ομοιότητα δε κατασκευάζεται όμως οι πόλοι της ως προς τους δοσμένους κύκλους είναι τα κέντα των κύκλων αυτών (εικόνες του σημείου στο άπειρο κατά την αντιστροφή ως προς αυτούς τους κύκλους). Όταν οι κύκλοι είναι ομοαξονικοί τότε δεν έχουμε ριζικό κέντρο και η λύση δεν δουλεύει.

Μια άλλη λύση του προβλήματος του απολλώνιου με χρήση Γεωμετρικής Αντιστροφής

Στην συνεχεία θα δώσουμε μια άλλη λύση του προβλήματος του Απολλώνιου που βασίζεται και αυτή στην γεωμετρία της αντιστροφής και αναφέρεται στην περίπτωση τριών εξωτερικών μεταξύ τους κύκλων:



Αυξάνουμε την ακτίνα και των τριών κύκλων κατά την ίδια ποσότητα δ έτσι ώστε να κάνουμε τους κύκλους που βρίσκονται πλησιέστερα (δηλαδή σε μικρότερη απόσταση μεταξύ τους[3]) εφαπτόμενους. Είναι προφανές ότι αν μπορέσουμε να λύσουμε το πρόβλημα για τους τρεις νέους κύκλους, τότε το κέντρο του κύκλου που θα βρούμε μετά την τροποποίηση κατά δ των ακτινών των τριών κύκλων, θα είναι το ίδιο με το κέντρο του Απολλώνιου κύκλου (δηλαδή του κύκλου, η εύρεση του οποίου είναι ο στόχος μας) ενώ η ακτίνα του Απολλώνιου κύκλου θα διαφέρει κατά δ από την ακτίνα του κύκλου που βρήκαμε μετά την τροποποίηση των ακτινών.
Θα αντιστρέψουμε με κύκλο αντιστροφής έναν κύκλο ο οποίος έχει κέντρο το σημείο επαφής Ο των δύο κύκλων (α) και (β). Ο κύκλος της αντιστροφής θα μπορούσε να έχει οποιαδήποτε ακτίνα όμως θα επιλέξουμε εκείνον τον κύκλο ο οποίος αφήνει τον κύκλο (γ) αναλλοίωτο. Έτσι θα πάρουμε ως κύκλο αντιστροφής τον ορθογώνιο κύκλο προς τον κύκλο (γ).

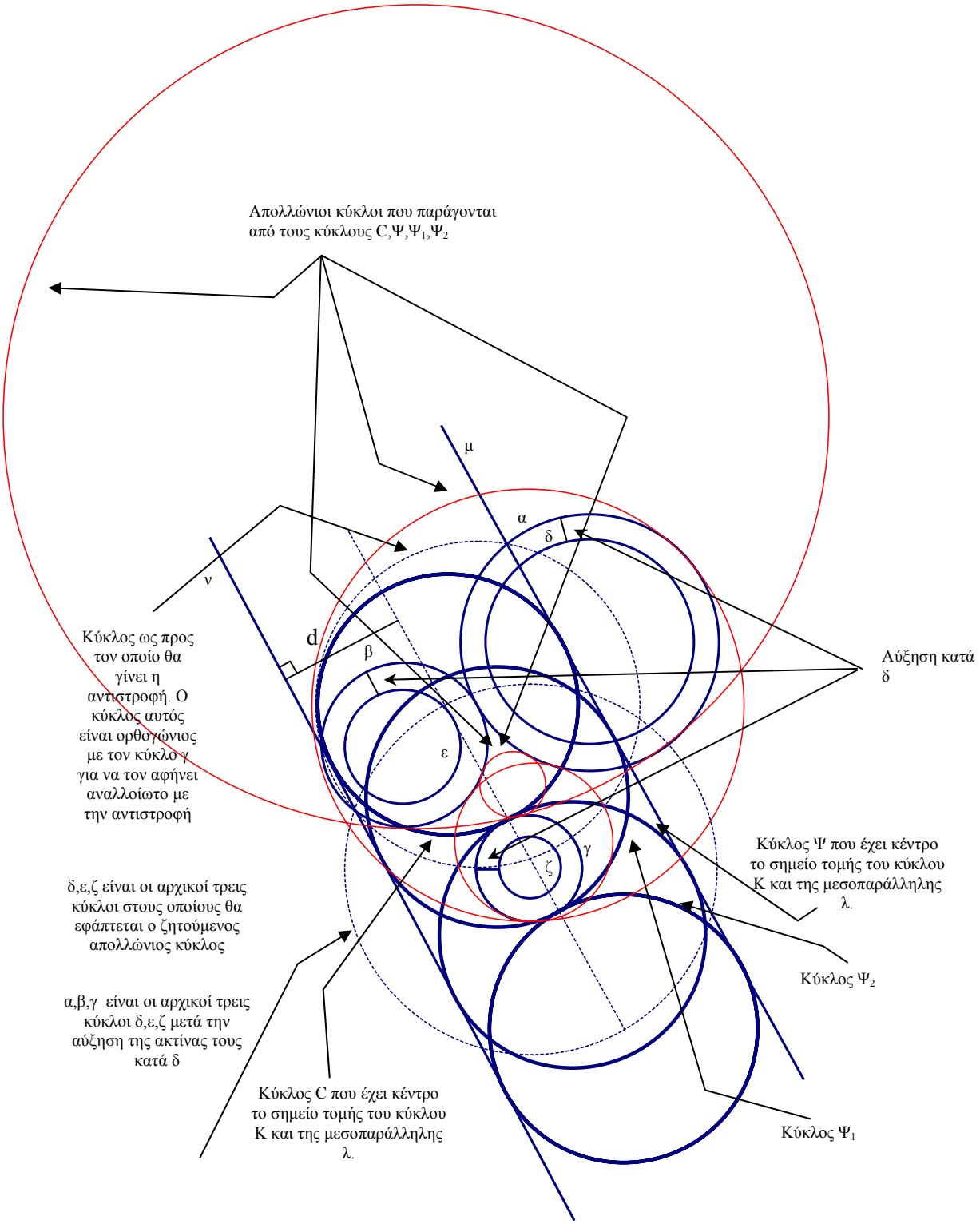


Σχήμα 1

Το σχήμα 1 που προκύπτει είναι πολύ εύκολο να παραχθεί. Στο σχήμα 2 που ακολουθεί παρουσιάζουμε όλες τις λύσεις που προκύπτουν από την διαδικασία που περιγράφουμε στο

[3] με τον όρο 'απόσταση δύο κύκλων' θα εννοούμε το μικρότερο από τα δύο ευθύγραμμα τμήματα A_iB_i i=1,2 όπου A_i, B_i i=1,2 είναι τα σημεία τομής των δύο κύκλων με την ευθεία της διακέντρου τους με τα A_i i=1,2 να ανήκουν στον ένα κύκλο ενώ τα B_i i=1,2 να ανήκουν στον άλλο κύκλο.

σχήμα 1. Οι δύο κύκλοι (α) και (β) μετασχηματίζονται σε δύο ευθείες μ, ν οι οποίες είναι κάθετες στην διάκεντρο των δύο εφαπτόμενων κύκλων.



Κύκλος Κ με κέντρο το κέντρο του κύκλου γ και ακτίνα d+γ (γ = ακτίνα του κύκλου γ)

Σχήμα 2

Το επόμενο βήμα είναι να βρούμε τον κύκλο που εφάπτεται στις ευθείες μ, ν και στον κύκλο γ΄= γ. Αυτό είναι εύκολο αφού ο κύκλος C που ζητάμε είναι εφαπτόμενος στις μ, ν οπότε θα έχει κέντρο που βρίσκεται στην μεσοπαράλληλο λ των ν, μ και ακτίνα d ίση με το μισό της απόστασης των δύο αυτών ευθειών. Αν υποθέσουμε τώρα ότι ο κύκλος (γ) έχει ακτίνα γ τότε το κέντρο του κύκλου C που ζητάμε θα είναι το σημείο τομής του κύκλου K με κέντρο το κέντρο του κύκλου (γ) και ακτίνα ίση με d+γ και της μεσοπαράλληλης λ . Υπάρχουν δύο τέτοια σημεία που παράγουν δύο κύκλους C (τον δεύτερο ας τον ονομάσουμε Ψ) .
Ο κύκλος ο συμμετρικός του κύκλου C ως προς την κοινή εφαπτόμενη X του κύκλου (γ) και του κύκλου C όπως επίσης ο κύκλος ο συμμετρικός του κύκλου Ψ ως προς την κοινή εφαπτόμενη Y του κύκλου Ψ και του κύκλου (γ) είναι επίσης δύο κύκλοι τους οποίους ας ονομάσουμε Ψ_1 και Ψ_2 οι οποίοι εφάπτονται στον (γ) και στις ευθείες μ, ν.
Άρα μπορούμε με αυτόν τον τρόπο βρίσκοντας τους αντίστροφους κύκλους των C Ψ_1,Ψ_2,Ψ_3 να βρούμε τέσσερις λύσεις του προβλήματος. Γιατί όμως δεν μπορούμε να βρούμε και τις οκτώ; Το ερώτημα είναι εύκολο να απαντηθεί αρκεί να σκεφτούμε ότι για να βρούμε τον κύκλο C και Ψ_1 από τους οποίους βρήκαμε τους,Ψ_2,Ψ_3 έπρεπε να αυξήσουμε την ακτίνα των αρχικών κύκλων ώστε να κάνουμε εφαπτόμενους μεταξύ τους, τους δύο από τους τρεις αρχικούς κύκλους το πρόβλημα του Απολλώνιου όμως έχει τέσσερις λύσεις όταν οι δύο από του τρεις κύκλους είναι εφαπτόμενοι μεταξύ τους και ο τρίτος είναι εξωτερικός σε σχέση με τους δύο προηγούμενους.

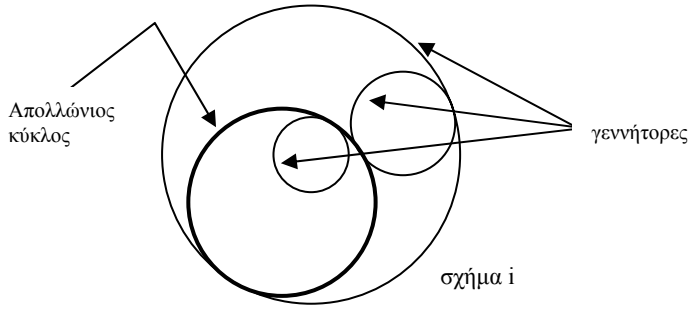
Λύση του προβλήματος του απολλώνιου μέσω της τροποποίησης της ακτίνας των τριών δοσμένων κύκλων και την βοήθεια των μετασχηματισμών Möbius

Στην παρούσα ενότητα με τον όρο '*Απολλώνιος κύκλος*' θα εννοούμε έναν κύκλο ο οποίος είναι εφαπτόμενος σε τρεις δοσμένους κύκλους. Τους κύκλους αυτούς ας τους ονομάσουμε γεννήτορες. Τους γεννήτορες θα τους συμβολίσουμε με το σύμβολο $G_i(C_i,R_i)$ i=0,1,2 με κέντρο $C_i=(x_i,y_i)$ και ακτίνα r_i. Χωρίς να χάσουμε τίποτα από την γενικότητα του προβλήματος, μπορούμε να υποθέσουμε ότι αυτοί οι κύκλοι είναι διατεταγμένοι με βάση το μέγεθος της ακτίνας τους. <u>Αν $i<j$ τότε $r_i \le r_j$.</u>
Θα προχωρήσουμε στην εύρεση των Απολλώνιων κύκλων για κάθε θέση των γεννητόρων. Τον γεννήτορα με την μικρότερη ακτίνα θα τον ονομάζουμε μικρότερο γεννήτορα.
Θα προσπαθήσουμε με βάση τις *συμβάσεις* που κάναμε εδώ, να δώσουμε μια εξαντλητική απαρίθμηση των πιθανών Απολλώνιων κύκλων για κάθε τριάδα γεννητόρων.
Ορισμός 1
Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο κύκλοι. Τον ένα τον ονομάζουμε κεντρικό κύκλο και τον άλλο γειτονικό κύκλο.
Τότε τον κεντρικό κύκλο θα τον συμβολίζουμε:

1. με το σύμβολο Ο αν οι δύο κύκλοι είναι εξωτερικοί μεταξύ τους.
2. με το σύμβολο Χ αν είναι εσωτερικός του γειτονικού κύκλου
3. με το σύμβολο Δ αν περιέχει τον γειτονικό.

Θα υποθέσουμε στην πορεία ότι το ρόλο κεντρικού κύκλου έχει ο καθένας από τους γεννήτορες κύκλους του προβλήματος και ρόλο γειτονικού κύκλου έχει ο κάθε απολλώνιος κύκλος.
Κάθε ένας από τους τρεις γεννήτορες κύκλους θα χαρακτηρίζεται με το σύμβολο Ο, Χ, Δ.
Μια σχετική θέση των τριών γεννητόρων σε σχέση με έναν Απολλώνιο κύκλο θα την χαρακτηρίζουμε με το σύμβολο ΧΟΔ ή ΧΔΟ ή ΔΟΧ κ.λ.π. όπου η πρώτη θέση αντιστοιχεί στον μικρότερο γεννήτορα η δεύτερη στον μεσαίο και η τρίτη στον μεγαλύτερο γεννήτορα.
Για παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι ο μικρότερος γεννήτορας εφάπτεται στον Απολλώνιο κύκλο εσωτερικά ο μεσαίος εξωτερικά και ο μεγάλος τον έχει εσωτερικό (σχήμα i). Τότε θα έχουμε την εξής διαμόρφωση: ΧΟΔ διότι ο μικρός γεννήτορας περιέχεται στον Απολλώνιο άρα χαρακτηρίζεται με Χ η σχέση του ως προς αυτόν (το σύμβολο Χ ισοδυναμεί με το ότι ο κεντρικός κύκλος εσωτερικός του γειτονικού κύκλου – με άλλα λόγια ο κεντρικός περιέχεται στον γειτονικό). Ο μεσαίος εφάπτεται εξωτερικά με τον Απολλώνιο άρα χαρακτηρίζουμε με Ο την σχέση του ως προς αυτόν (το σύμβολο Ο ισοδυναμεί με το ότι ο κεντρικός και ο

γειτονικός είναι εξωτερικοί μεταξύ τους). Ο μεγάλος περιέχει τον Απολλώνιο άρα η σχέση του ως προς αυτόν χαρακτηρίζεται με Δ (το σύμβολο Δ ισοδυναμεί με το ότι γειτονικός κύκλος εσωτερικός του κεντρικού κύκλου – με άλλα λόγια ο κεντρικός περιέχει τον γειτονικό).



σχήμα i

Οι θέσεις των Χ,Δ,Ο μεταξύ τους είναι $3^3=27$

Θεώρημα:

Σε μια διαμόρφωση από τις 27 που υπάρχουν το Χ δεν μπορεί να ακολουθεί το Δ.

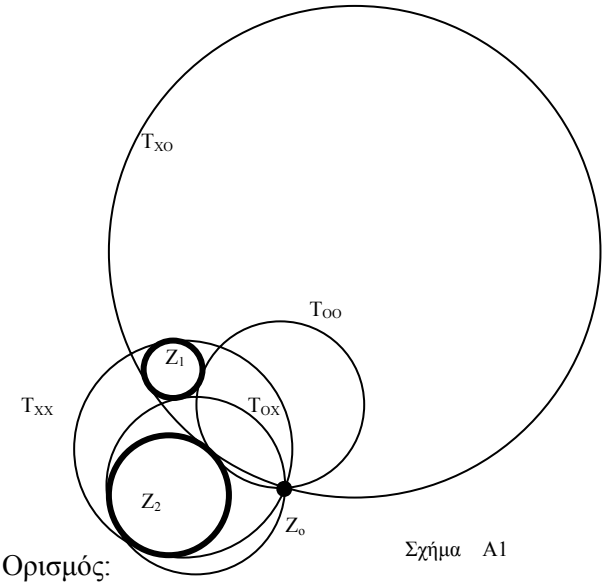
Απόδειξη:

Ας υποθέσουμε ότι το Χ ακολουθεί το Δ. Τότε ο Χ γεννήτορας είναι μεγαλύτερος από τον Δ. Ο Δ γεννήτορας πρέπει να περιέχει τον απολλώνιο κύκλο (Δ ⇔ γειτονικός κύκλος (απολλώνιος) εσωτερικός του κεντρικού κύκλου (γεννήτορας)). Ο Χ γεννήτορας πρέπει να περιέχεται στον απολλώνιο (Χ⇔κεντρικός κύκλος (γεννήτορας) εσωτερικός στον γειτονικό κύκλο (Απολλώνιο)). Αφού υποθέσαμε ότι το Χ ακολουθεί το Δ άρα ο Χ είναι μεγαλύτερος από τον Δ άτοπο αφού ο Χ περιέχεται στον Απολλώνιο ο οποίος περιέχει τον Δ.

Οι ακόλουθες περιπτώσεις δεν είναι εφικτές: ΔΧΟ, ΟΔΧ, ΔΟΧ, ΧΔΧ, ΔΧΧ, ΔΔΧ, ΔΧΔ όπως προκύπτει από το θεώρημα.

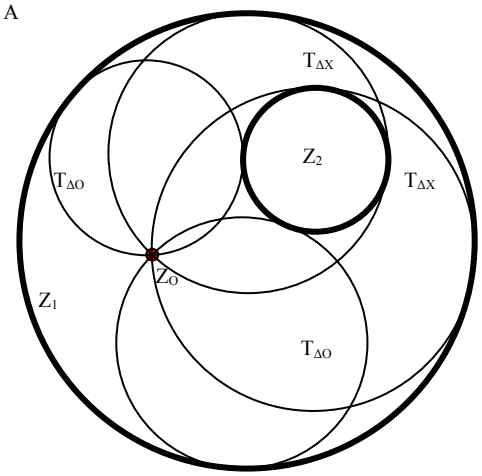
Θα διαπραγματευθούμε το πρόβλημα το Απολλώνιου με τον μετασχηματισμό του αρχικού προβλήματος στο εξής: Να βρεθεί ο κύκλος που εφάπτεται σε δύο κύκλους και ταυτόχρονα διέρχεται από ένα συγκεκριμένο σημείο. Αυτός ο μετασχηματισμός του προβλήματος θα γίνει με την προσαρμογή της ακτίνας (μεγέθυνση ή συρρίκνωση) των δοθέντων γεννητόρων. Η τροποποίηση της ακτίνας όπως θα δούμε αργότερα αντιστοιχεί στο μέγεθος της ακτίνας του μικρότερου γεννήτορα. Ο όρος <u>απολλώνιος κύκλος</u> χρησιμοποιείται τώρα για το αρχικό πρόβλημα και όρος <u>εφαπτόμενος κύκλος</u> για το τροποποιημένο πρόβλημα, δηλαδή το πρόβλημα που προκύπτει μετά την τροποποίηση των ακτινών.

Θα συμβολίσουμε με $Z_i=(Z_i,r_i)$ i=1 ή 2 τους κύκλους με την τροποποιημένη ακτίνα ενώ το κέντρο τους θα είναι το $Z_i=(x_i,y_i)$. Με Z_o θα συμβολίζουμε το σημείο από το οποίο πρέπει να διέρχεται ο εφαπτόμενος κύκλος.



Σχήμα A1

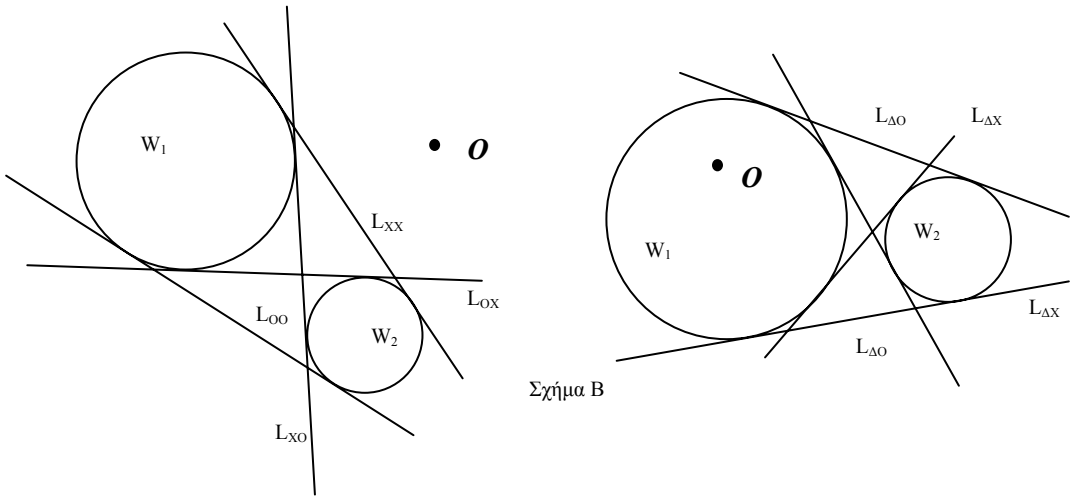
Σχήμα A



Σχήμα A2

Ορισμός:

Θα συμβολίζουμε με T_{ij} με i,j $\in\{O,X,\Delta\}$ τον κύκλο που εφάπτεται με τους κύκλους τροποποιημένης ακτίνας Z_1 και Z_2 με τις τιμές i,j να προσδιορίζουν την θέση του T_{ij} ως προς αυτούς[4]. Για παράδειγμα το σύμβολο T_{OX} δηλώνει ότι ο κύκλος Z_1 και ο κύκλος T_{OX} είναι εξωτερικοί και ότι ο κύκλος Z_2 είναι εσωτερικός του T_{OX} (Z_1 και Z_2 είναι πάλι οι κεντρικοί κύκλοι σε αυτές τις σχέσεις και οι T_{ij} είναι οι γειτονικοί).
Δυο κύκλοι (όπως δείχνει το σχήμα Α2) μπορεί να χαρακτηρίζονται με το ίδιο ακριβώς σύμβολο T_{ij}.
Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε το μιγαδικό επίπεδο **Z** και έστω ότι ο μιγαδικός αριθμός Z=x+yi. Τότε η αναλυτική[5] συνάρτηση W(Z)=u(x,y)+iv(x,y) είναι μια σύμμορφη απεικόνιση (μιγαδικές συναρτήσεις και εφαρμογές R. Churchill- J. Brown, πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης σελ.286) εκτός από τα σημεία με παράγωγο W΄(Z)=0. Η W(Z) διατηρεί το μέγεθος και τον προσανατολισμό των γωνιών μεταξύ δύο προσανατολισμένων καμπυλών.
Θα χρησιμοποιήσουμε τις εξής συμβάσεις:
Ο-επίπεδο θα είναι το Ευκλείδειο επίπεδο στο οποίο αναζητούμε τους Απολλώνιους κύκλους (δηλαδή το επίπεδο του αρχικού προβλήματος).
Z-επίπεδο είναι το μιγαδικό επίπεδο στο οποίο βρίσκονται οι κύκλοι μετά την τροποποίηση της ακτίνας τους.
W- επίπεδο το μιγαδικό επίπεδο που είναι η εικόνα του Z-επιπέδου με τον μετασχηματισμό W(Z).
Θα θεωρήσουμε εδώ τον μετασχηματισμό Möbius που δίνεται από την $W(Z)=1/(Z-Z_0)$
Όπως γνωρίζουμε ο W(Z) απεικονίζει ευθείες και κύκλους του Z επιπέδου σε κύκλους και ευθείες του W επιπέδου.
Ο μετασχηματισμός $W(Z)=1/(Z-Z_0)$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:
Μετασχηματίζει ευθείες και κύκλους που διέρχονται από το Z_0, σε ευθείες του W επιπέδου.
Μετασχηματίζει ευθείες και κύκλους που δεν περνάνε από το Z_0, σε κύκλους του επίπεδου W. Απεικονίζει το Z_0 του Z στο σημείο στο άπειρο του W.
Ο μετασχηματισμός $W(Z)=1/(Z-Z_0)$ μετασχηματίζει τους κύκλους Z_1 και Z_2 του επιπέδου Z στους κύκλους W_1 και W_2 του W επιπέδου.



Σχήμα Β

Στο πιο πάνω σχήμα Β έχουμε την απεικόνιση $W(Z)=1/(Z-Z_0)$ όπως αυτή εφαρμόζεται στους εφαπτόμενους κύκλους του σχήματος Α.

[4] Οι κύκλοι T_{ij} διέρχονται φυσικά από το Z_0.
[5] Μια συνάρτηση f μιγαδικής μεταβλητής z καλείται αναλυτική σε ένα ανοικτό σύνολο S αν έχει παράγωγο σε κάθε σημείο του S.

Οι εφαπτόμενοι κύκλοι του σχήματος Α μετατρέπονται σε εφαπτόμενες ευθείες αφού όλοι οι εφαπτόμενοι κύκλοι διέρχονται από το Z_0.

Ορισμός: Ας υποθέσουμε ότι ένας κύκλος που καλείται κεντρικός κύκλος είναι εφαπτόμενος με μια ευθεία.

1. Ο κύκλος συμβολίζεται με το σύμβολο Ο αν ο κύκλος αυτός και η αρχή ***O*** (origin) του επιπέδου είναι τοποθετημένοι στο ίδιο ημιεπίπεδο (από τα δύο ημιεπίπεδα που σχηματίζονται από την εφαπτόμενη ευθεία) και η αρχή δεν περιέχεται μέσα στον κεντρικό κύκλο.
2. Ο κεντρικός κύκλος συμβολίζεται με Χ αν ο κύκλος αυτός και η αρχή ***O*** είναι τοποθετημένοι σε διαφορετικά ημιεπίπεδα (από τα δύο ημιεπίπεδα που σχηματίζονται από την εφαπτόμενη ευθεία).
3. Ο κεντρικός κύκλος συμβολίζεται με Δ αν η αρχή ***O*** είναι τοποθετημένη μέσα στον κεντρικό κύκλο

Ορισμός: Συμβολίζουμε με L_{ij} μια εφαπτόμενη ευθεία που εφάπτεται και στους δύο κύκλους W_1 και W_2 με τα i,j να προσδιορίζουν την θέση των ευθειών ως προς τους κύκλους αυτούς και όπου $i,j \in \{O,X,\Delta\}$.

Για παράδειγμα η εφαπτομένη ευθεία L_{OO} στο σχήμα Β δείχνει ότι οι κύκλοι W_1 και W_2 και η αρχή ***O*** βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο, από τα δύο ημιεπίπεδα που σχηματίζονται από την ευθεία $L_{OO,}$ ενώ η αρχή ***O*** δεν βρίσκεται στο εσωτερικό κανενός από τους δύο κύκλους W_1 και W_2. Η εφαπτομένη ευθεία L_{XO} δηλώνει ότι ο κύκλος W_1 και η αρχή ***O*** βρίσκονται στα δύο αντίθετα ημιεπίπεδα της ευθείας L_{XO} ενώ ο W_2 βρίσκεται στο ίδιο ημιεπίπεδο με το ***O***, χωρίς βέβαια το ***O*** να ανήκει στον W_2. Η ευθεία $L_{\Delta O}$ μας πληροφορεί ότι ο κύκλος W_1 περιέχει την αρχή ***O*** ενώ ο κύκλος W_2 και η αρχή ***O*** είναι τοποθετημένα στο ίδιο ημιεπίπεδο της $L_{\Delta O}$. Επίσης ότι το ***O*** δεν περιέχεται στον κύκλο W_2.

Θεώρημα:

Με τον μετασχηματισμό $W(Z)=1/(Z-Z_0)$ ο εφαπτόμενος κύκλος T_{ij} του επιπέδου Z μετασχηματίζεται σε μια ευθεία L_{ij} εφαπτόμενη στους W_1 και W_2 στο W επίπεδο. Τα $i,j \in \{O,X,\Delta\}$.

Απόδειξη:

Ο $W(Z)=1/(Z-Z_0)$ είναι όπως έχουμε πει σύμμορφος οπότε μπορούμε να συμπεράνουμε τα πιο κάτω:

Ας υποθέσουμε ότι T_O είναι ένας εφαπτόμενος κύκλος στον κύκλο Z, ο Z είναι εξωτερικά του T_O, ενώ το Z_0 βρίσκεται επίσης εξωτερικά του Z. Μπορούμε να συμπεράνουμε λοιπόν ότι στο Z-επίπεδο ο κύκλος Z είναι τοποθετημένος προς το ίδιο μέρος με το σημείο στο άπειρο αναφορικά με τον κύκλο T_O. Όταν απεικονίζουμε τον Z και τον T_O στο W επίπεδο μέσω του μετασχηματισμού W(Z) τότε ο μετασχηματισμένος κύκλος W (εικόνα του Z) θα βρίσκεται μαζί με την αρχή ***O*** του W-επιπέδου προς το ίδιο ημιεπίπεδο με σύνορο την εφαπτόμενη ευθεία L η οποία είναι η εικόνα του T_0 . Με βάση τις συμβάσεις που έχουμε κάνει πιο πάνω σχετικά με τους συμβολισμούς η ευθεία L θα πρέπει να παρασταθεί με το σύμβολο L_O. Άρα L_O είναι η ευθεία στην οποία έχει μετασχηματιστεί ο κύκλος T_O. Αν ο κύκλος T_i $i \in \{O,X,\Delta\}$ είναι της μορφής T_X τότε περιέχει τον κύκλο Z οπότε ο κύκλος Z και το σημείο στο άπειρο διαχωρίζονται από τον T_X.

Επειδή ο $W(Z)=1/(Z-Z_0)$ είναι μετασχηματισμός Möbius άρα τα ίδια πράγματα να ισχύουν και για τις εικόνες των T_X και Z και του ∞ (σημείου στο άπειρο) στο W επίπεδο, δηλαδή η αρχή ***O*** που είναι η εικόνα του ∞ και ο κύκλος W που είναι η εικόνα του Z με τον μετασχηματισμό $W(Z)=1/(Z-Z_0)$ τοποθετούνται στα δύο διαφορετικά ημιεπίπεδα με σύνορο την εφαπτομένη ευθεία L η οποία είναι η εικόνα του T_X. Η ευθεία L θα πρέπει λοιπόν να αποκτήσει τον δείκτη Χ. Έτσι λοιπόν $L=L_X$. Η εικόνα λοιπόν του T_X με τον μετασχηματισμό $W(Z)=1/(Z-Z_0)$ είναι η L_X.

Μια παρόμοια μετάφραση μπορεί να γίνει και στην περίπτωση του συμβόλου Δ και του αντίστοιχου κύκλου T_Δ.

Επειδή ο εφαπτόμενος κύκλος T_Δ περιέχεται στον δοσμένο κύκλο Z το σημείο στο άπειρο και ο κύκλος Z τοποθετούνται στο ίδιο μέρος με σύνορο τον T_Δ. Σε αυτήν την περίπτωση όμως ο κύκλος Z απεικονίζεται σε έναν κύκλο W ο οποίος περιέχει την αρχή Ο στο W επειδή το

Z_0 (το οποίο ανήκει στον κύκλο T_Δ) θα περιέχεται στον κύκλο Z. Ας σημειωθεί ότι το εσωτερικό του κύκλου Z απεικονίζεται στο εξωτερικό του κύκλου W επειδή το ∞ και το Z_0 χωρίζονται από τον κύκλο Z και ταυτόχρονα το ∞ απεικονίζεται στην αρχή O στο W επίπεδο. Άρα ο κύκλος W περιέχει την αρχή O και W ,O τοποθετούνται στο ίδιο ημιεπίπεδο της εφαπτόμενης ευθείας –εικόνας του T_Δ η οποία είναι ως εκ τούτου η L_Δ. Άρα ο κύκλος T_Δ απεικονίζεται στην L_Δ.

Με το σύμβολο Z εννοούμε τον κύκλο Z_1 ή Z_2 . Με το σύμβολο W εννοούμε τον W_1 και W_2.

Πολύ εύκολα δείχνουμε[6] ότι ο $W(Z)=1/(Z-Z_0)$ απεικονίζει κύκλους $Z_i=(Z_i,r_i)$ σε κύκλους $W_i=(w_i,R_i)$ όπου $w_i=((x_i-x_0)/d_i,-(y_i-y_0)/d_i)$, $R_i=r_i/|d_i|$ με $d_i=(x_i-x_0)^2+(y_i-y_0)^2-r_i^2$ με i=1,2. Επειδή ο αντίστροφος μετασχηματισμός $W^{-1}=Z(w)=(1/w)+Z_0$ είναι επίσης ένας μετασχηματισμός Möbius αυτός απεικονίζει ευθείες του W επιπέδου σε κύκλους του Z επιπέδου. Ας υποθέσουμε ότι au+bv+1=0 είναι η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας στο W επίπεδο. Τότε η εφαπτόμενη ευθεία απεικονίζεται σε έναν εφαπτόμενο κύκλο $T=(Z,\rho)$ με τον $W^{-1}(Z)$ όπου $Z=(-\alpha/2+x_0,\ b/2+y_0)$ και $\rho=\sqrt{(\alpha^2+b^2)}$

Μετασχηματισμός τροποποίησης ακτίνας

Σε αυτήν την ενότητα θα εξηγήσουμε πως θα μπορέσουμε να μετασχηματίσουμε το πρόβλημα του Απολλώνιου κύκλου σε ένα πρόβλημα όπου θα πρέπει να βρούμε κύκλο

---

[6] Έστω ο κύκλος $Z_i:(x-x_i)^2+(y-y_i)^2=r_i^2$. Ο μετασχηματισμός $W(Z)=\dfrac{1}{Z-Z_0}$ γράφεται ως σύνθεση: $W=f\circ g$ όπου $g(Z)=Z-Z_0$ και $f(Z)=\overline{\left(\dfrac{1}{\overline{Z}}\right)}$ (αντιστροφή ως προς τον μοναδιαίο κύκλο ακολουθούμενη από μια ανάκλαση ως προς τον X΄X άξονα). Η εικόνα του κύκλου Z_i ως προς την μεταφορά g είναι: $g(Z_i):(x-(x_i-x_0))^2+(y-(y_i-y_0))^2=r_i^2$.

Το $B(x_i-x_0,y_i-y_0)$ είναι το κέντρο του $g(Z_i)$.

Αν θεωρήσουμε την αντιστροφή $\phi(Z)=\dfrac{1}{\overline{Z}}$ του κύκλου $g(Z_i)$ τότε από τον τύπο: $\dfrac{OP}{PB}=\dfrac{\Phi}{OB^2-r_i^2-\Phi}$ που έχει αποδειχθεί σε προηγούμενη ενότητα (με OP,OB προσανατολισμένα τμήματα και P το κέντρο του κύκλου $\phi(g(Z_i))=\dfrac{1}{\overline{g(Z_i)}}=\dfrac{1}{\overline{Z-Z_0}}$) θα έχουμε: $\dfrac{OP}{OB}=\dfrac{1}{OB^2-r_i^2}$ (αφού $\Phi=1$) οπότε $\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{OB^2-r_i^2}\overrightarrow{OB}$ ($\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OB}$ διανύσματα).

Άρα : $(x_p,y_p)=\dfrac{1}{(x_i-x_0)^2+(y_i-y_0)^2-r_i^2}(x_i-x_0,y_i-y_0)$.

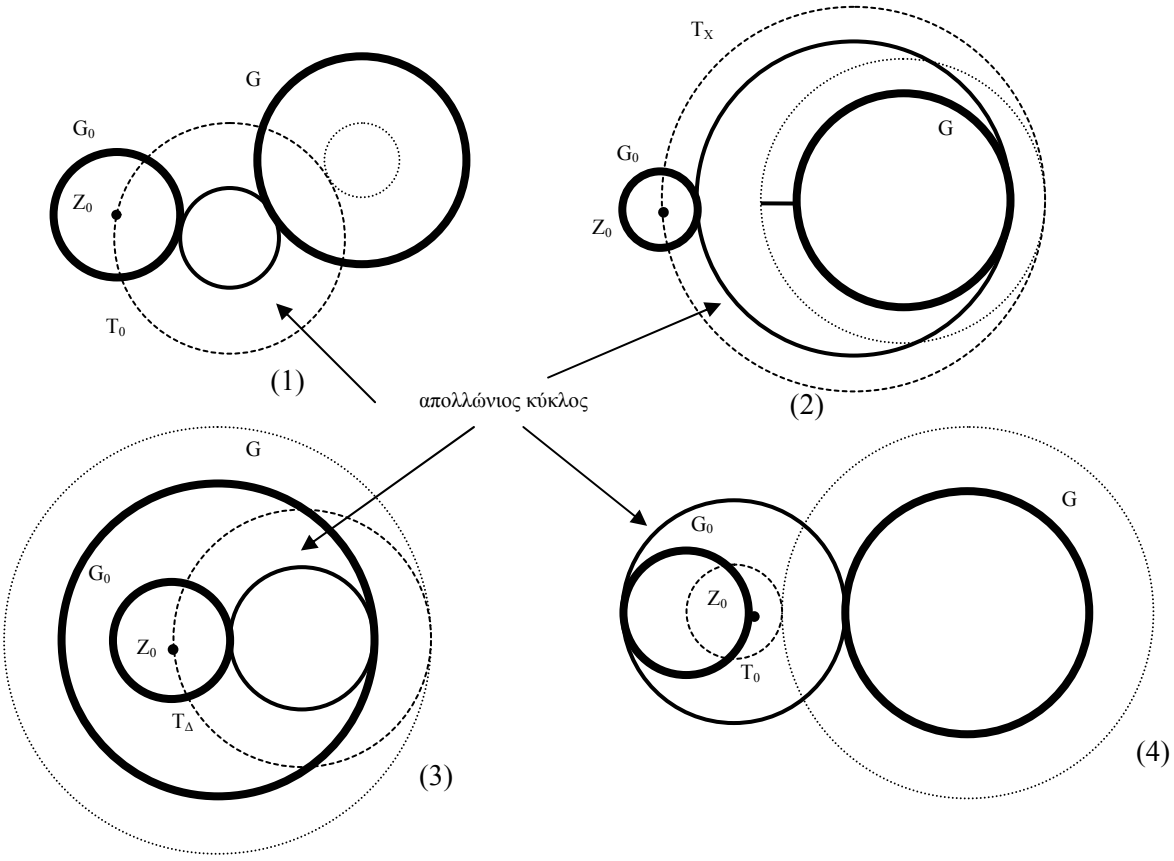
Αν πάρουμε τώρα την $W(Z_i)=f(g(Z_i))=\overline{\phi(g(Z_i))}=\overline{\left(\dfrac{1}{\overline{Z-Z_0}}\right)}=\dfrac{1}{Z-Z_0}$

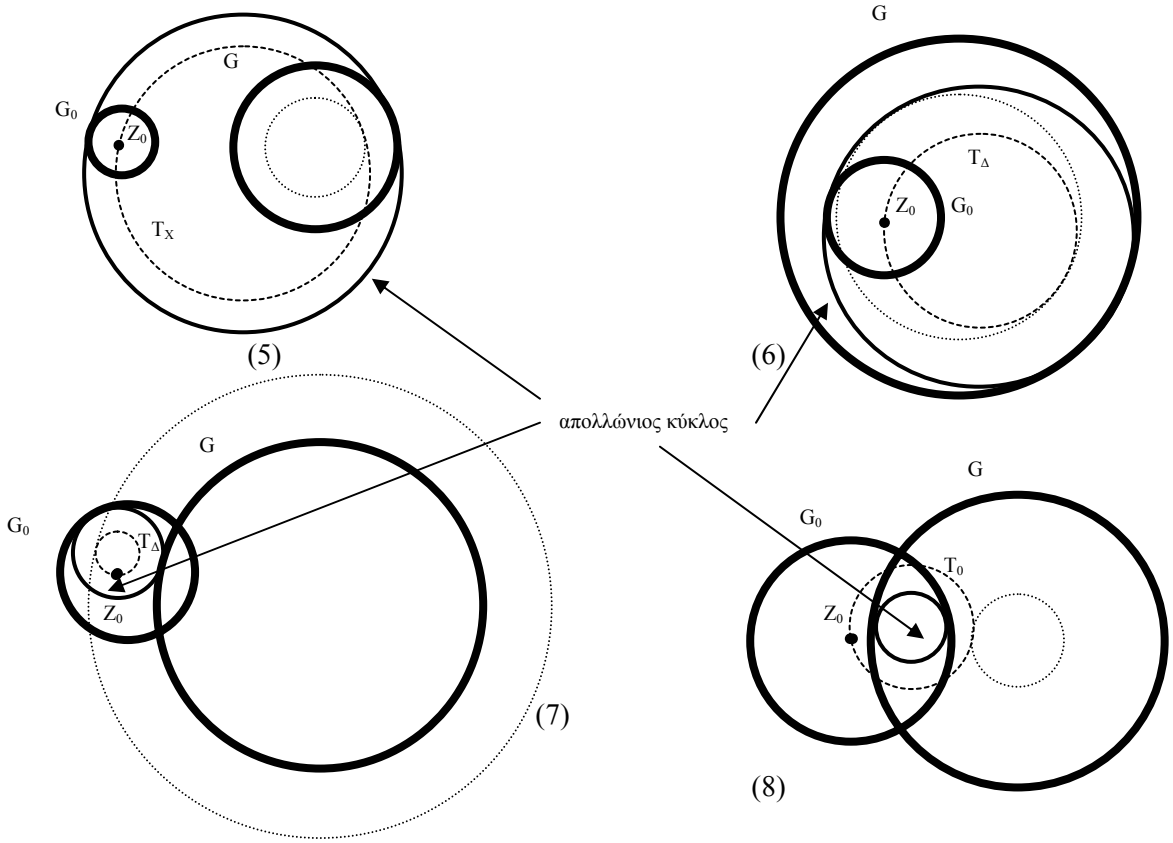
θα έχουμε ως συντεταγμένες του κέντρου του κύκλου $W(Z_i)=f(g(Z_i))$ τις:

$$(a,b)=\frac{1}{(x_i-x_0)^2+(y_i-y_0)^2-r_i^2}(x_i-x_0,-(y_i-y_0)).$$

Επίσης ο τύπος $R=\left|\dfrac{\Phi}{(x_i-x_0)^2+(y_i-y_0)^2-r_i^2}\right|r_i$ δίνει την ακτίνα του κύκλου $\phi(g(Z_i))$ άρα και του $W(Z_i)=f(g(Z_i))$.

εφαπτόμενο σε δύο κύκλους που να διέρχεται επίσης από ένα δοσμένο σημείο. Το πρόβλημα αυτό θα το αναφέρουμε ως το πρόβλημα του εφαπτόμενου κύκλου από εδώ και πέρα.
Όπως περιγράφηκε σε προηγούμενη ενότητα έχουμε τρία επίπεδα: Το Ο-επίπεδο , το Ζ-επίπεδο και το W-επίπεδο. Για μετασχηματίσουμε τους αρχικούς κύκλους γεννήτορες του Ο-επιπέδου σε κύκλους τροποποιημένης ακτίνας πρέπει να συρρικνώσουμε ή να μεγαλώσουμε τις ακτίνες και αυτή η τροποποίηση θα ονομάζεται *πρώτη τροποποίηση*. Από την στιγμή που ο εφαπτόμενος κύκλος έχει βρεθεί τότε ο αντίστοιχος απολλώνιος κύκλος βρίσκεται τροποποιώντας την ακτίνα του εφαπτόμενου κύκλου. Αυτή η τροποποίηση θα ονομαστεί *δεύτερη τροποποίηση*.
Πρώτη τροποποίηση
Για μετασχηματίσουμε το πρόβλημα του Απολλώνιου στο αντίστοιχο πρόβλημα των εφαπτόμενων κύκλων πρέπει να τροποποιήσουμε τους κύκλους γεννήτορες.
Πρώτα θα τροποποιήσουμε τον μικρότερο κύκλο γεννήτορα κάνοντας σμίκρυνση της ακτίνας του μηδενίζοντας την μετατρέποντας έτσι τον κύκλο αυτό σε ένα σημείο.
Τότε οι άλλο δύο γεννήτορες θα σμικρυνθούν ή θα μεγαλώσουν κατά το ίδιο μέγεθος με τον μικρότερο κύκλο και κατά τρόπο που εξαρτάται την περίπτωση. Θα δείξουμε πιο κάτω ότι υπάρχει ένας αυστηρά καθορισμένος τρόπος για να τροποποιήσουμε την ακτίνα.
Πιο κάτω έχουμε σχεδιάσει δύο γεννήτορες (έντονα χαραγμένοι κύκλοι) και τον ζητούμενο Απολλώνιο κύκλο (λιγότερο έντονα χαραγμένος κύκλος) για μια συγκεκριμένη σύνθεση γεννητόρων. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι ο μικρότερος από τους τρεις γεννήτορες δηλαδή ο G_0 είναι σχεδιασμένος στο σχήμα ενώ ο τρίτος γεννήτορας παραλείπεται για χάρη απλότητας του σχήματος. Στο σχήμα οι περιπτώσεις 1,2,3 είναι όλες περιπτώσεις που χαρακτηρίζονται από την κατάσταση Ο για τον μικρότερο γεννήτορα (δηλαδή ο γεννήτορας και ο απολλώνιος κύκλος είναι εξωτερικοί κύκλοι μεταξύ τους)





Παρομοίως στις 4,5,6 έχουμε περιπτώσεις που ο μικρότερος γεννήτορας είναι κατάστασης Χ (δηλαδή περιέχεται στον απολλώνιο κύκλο). Οι περιπτώσεις 7,8 είναι περιπτώσεις κατάστασης Δ (περιπτώσεις που ο μικρότερος γεννήτορας περιέχει τον απολλώνιο κύκλο).
Ας δούμε πιο αναλυτικά την περίπτωση 1 όπου και οι δύο γεννήτορες βρίσκονται σε κατάσταση Ο (εξωτερικοί με τον Απολλώνιο κύκλο)
Για να μετασχηματίσουμε το πρόβλημα στο πρόβλημα εύρεσης ενός εφαπτόμενου κύκλου ο οποίος διέρχεται από ένα συγκεκριμένο σημείο σε κάθε περίπτωση θα πρέπει να συρρικνώνουμε την ακτίνα το μικρότερου γεννήτορα G_0 ώστε να τον μετατρέψουμε σε ένα σημείο Z_0. Ο απολλώνιος κύκλος που ψάχνουμε μπορεί να βρεθεί συρρικνώνοντας τη ακτίνα του κύκλου T_O ο οποίος είναι κύκλος που διέρχεται από το Z_0 και εφάπτεται στον τροποποιημένο κύκλο G.
Ο κύκλος που έχει χαραχθεί με διακεκομμένες γραμμές (και παριστάνει τον T_0) είναι εφαπτόμενος στον κύκλο που έχει χαραχθεί από τελείες (τροποποίηση του κύκλου G) σε όλα τα σχήματα από το 1 έως και το 8. Στην περίπτωση 1 ο κύκλος G είναι κατάστασης Ο σε σχέση με τον απολλώνιο κύκλο και ο G πρέπει να μικρύνει κατά την πρώτη τροποποίηση. Στο σχήμα ο συμβολισμός T_O με έναν δείκτη είναι συνεπής με τον συμβολισμό με δύο δείκτες που αναφέραμε προηγούμενα διότι στο σχήμα λαμβάνεται υπ΄ όψιν η κατάσταση μόνο του ενός γεννήτορα κύκλου.
Οι περιπτώσεις των σχημάτων 2,3 είναι παρόμοιες με την περίπτωση 1 με την έννοια ότι ο Απολλώνιος κύκλος Α μπορεί να ληφθεί μόνο μικραίνοντας τον κύκλο T_i i=Ο,Χ,Δ που κατασκευάζουμε. Είναι ωστόσο διαφορετικές περιπτώσεις υπό την έννοια ότι οι κύκλοι με τις τελείες (τροποποιήσεις του κύκλου G) για να κατασκευαστούν θα πρέπει να μεγαλώσουμε τον κύκλο G. Ας σημειωθεί ότι η κατάσταση του κύκλου G ως προς τον ζητούμενο απολλώνιο είναι Χ και Δ στα σχήματα 2,3 αντίστοιχα. Έτσι η τροποποίηση της ακτίνας είτε αύξηση είναι αυτή είτε ελάττωση για τον G μπορεί να προκύψει συγκρίνοντας την θέση του G ως προς τον απολλώνιο κύκλο με την θέση του G_0 πάλι ως προς τον απολλώνιο κύκλο.
Ας θεωρήσουμε τώρα τις περιπτώσεις 4,5,6.

Η κατάσταση του G_0 σε σχέση με τον απολλώνιο στα σχήματα 4,5,6 είναι Χ. Σε αυτές τις περιπτώσεις ο απολλώνιος κύκλος μπορεί βρεθεί μεγαλώνοντας την ακτίνα του αντιστοίχου εφαπτόμενου κύκλου T_i i=Ο,Χ,Δ.
Στην περίπτωση 4 ο G πρέπει να μεγαλώσει για να πάρουμε τον αντίστοιχο κύκλο με τις τελείες ώστε να βρεθεί ο κύκλος T_i (για ευκολία τον κύκλο T_i θα τον γράφω χωρίς δείκτη). Από την άλλη πλευρά ο κύκλος G πρέπει να μικρύνει για να μπορέσουμε να πάρουμε τους αντίστοιχους κύκλους με τις τελείες στις περιπτώσεις 5,6. Ας σημειωθεί ότι η κατάσταση του κύκλου G στις περιπτώσεις ,4,5,6 είναι Ο,Χ,Δ αντίστοιχα.
Στην περίπτωση 7 έχουμε τον απολλώνιο κύκλο μέσα στον G_0 και εφαπτόμενο σε αυτόν ενώ ως προς τον άλλο γεννήτορα βρίσκεται εξωτερικά και εφαπτόμενο σε αυτόν. Οπότε η ακτίνα του απολλώνιου θα πρέπει να είναι μικρότερη από την ακτίνα του G_0. Η κατάσταση του G_0 ως προς τον απολλώνιο είναι Δ.
Ο απολλώνιος κύκλος περιέχεται στον μικρότερο κύκλο G_0. Όποτε ο απολλώνιος κύκλος πρέπει να μικραίνει συνεχώς για μετασχηματιστεί στον εφαπτόμενο κύκλο Τ καθώς ο G_0 μικραίνει. Ας σημειωθεί ότι ο άλλος γεννήτορας G πρέπει να μεγαλώνει κατά την ίδια ποσότητα ως προς την οποία μικραίνει ο G_0. Στην αρχική θέση ο κύκλος G_0 και ο κύκλος G βρίσκονται σε κατάσταση Δ,Ο αντίστοιχα ως προς τον απολλώνιο κύκλο. Ενώ η σμίκρυνση και η μεγέθυνση των κύκλων G_0 και G λαμβάνει χώρα ταυτόχρονα ο εφαπτόμενος κύκλος Τ μικραίνει μέχρι που γίνεται σημειακός κύκλος Z_X και κατόπιν μεγαλώνει πάλι. Ο εφαπτόμενος αυτός κύκλος ας υποθέσουμε ότι έχει ακτίνα r_T. Είναι σημαντικό να πούμε ότι η κατάσταση του G ήταν αρχικά Ο ως προς τον απολλώνιο ενώ η κατάσταση του μεγαλωμένου G (δηλαδή του κύκλου που γράφεται με τις τελείες) ως προς τον εφαπτόμενο Τ (κύκλος χαραγμένος με παύλες) είναι Δ. Έτσι ενώ η κατάσταση του κύκλου G στο αρχικό Ο-επίπεδο είναι Ο η κατάσταση του G μετά την μεγέθυνση είναι Δ στο Ζ–επίπεδο. Αυτό θα το ερμηνεύσουμε «πρακτικά» ως εξής: Ο εφαπτόμενος κύκλος Τ (Τ είναι ο τροποποιημένος απολλώνιος) αλλάζει ακτίνα καθώς ο κύκλος G_0 μικραίνει και ο κύκλος G μεγαλώνει. Κάποτε ο κύκλος Τ γίνεται σημειακός ενώ ο κύκλος G_0 συνεχίζει να μικραίνει ,οπότε από το σημείο που ο Τ γίνεται σημειακός και πέρα παρόλο που εμφανίζεται πάλι θα θεωρήσουμε ότι *κατά κάποιο τρόπο η ακτίνα του αλλάζει πρόσημο (με άλλα λόγια αλλάζει κατάσταση-προσανατολισμό*) όμως κάτι τέτοιο δεν μπορεί να φανεί στο ευκλείδειο επίπεδο.
Αυτήν την συμπεριφορά θα την ονομάσουμε <u>*αλλαγή κατάστασης*</u> για τους κύκλους μας.
Ας σημειώσουμε ότι ισχύει η σχέση $r_0=r_T+r_A$ όπου r_0 είναι η ακτίνα του G_0 και r_T , r_A είναι οι ακτίνες των Τ και απολλώνιου αντίστοιχα.
Είναι σημαντικό να πούμε ότι στις περιπτώσεις 7,8 δεν μπορεί να υπάρχει γεννήτορας με κατάσταση Χ διότι υπάρχει θεώρημα που αναφέραμε πιο πάνω που δεν επιτρέπει κάτι τέτοιο. Αν θέλουμε να κατασκευάσουμε τώρα τον απολλώνιο κύκλο <u>αλλάζουμε αμοιβαία τις καταστάσεις των γεννητόρων από Δ σε Ο και αντίστροφα</u> και αναγόμαστε στις περιπτώσεις 3,1.
Δεύτερη τροποποίηση της ακτίνας.
Από την στιγμή που ένας εφαπτόμενος κύκλος Τ έχει κατασκευαστεί τότε είναι απαραίτητο να τροποποιήσουμε την ακτίνα του κατάλληλα ώστε ο αντίστοιχος απολλώνιος κύκλος Α να κατασκευαστεί. Ανάλογα με την περίπτωση ο αντίστοιχος απολλώνιος κύκλος θα βρεθεί μεγαλώνοντας ή μικραίνοντας την ακτίνα του εφαπτόμενου κύκλου Τ.
Όταν ο μικρότερος γεννήτορα έχει κατάσταση Ο με τον απολλώνιο όπως δείχνουμε στα σχήματα 1,2,3 θα πρέπει να μικρύνουμε την ακτίνα του εφαπτόμενου κύκλου κατά την ακτίνα του μικρότερου γεννήτορα αφού ο μικρότερος γεννήτορας πρέπει να βρίσκεται εξωτερικά του απολλώνιου κύκλου.
Από την άλλη μεριά οι περιπτώσεις 4,5,6 δείχνουν την αντίθετη κατάσταση. Με άλλα λόγια ο μικρότερος γεννήτορας έχει την κατάσταση Χ ως προς τον απολλώνιο Α. Σε αυτήν την περίπτωση πρέπει η ακτίνα του εφαπτόμενου κύκλου Τ να μεγαλώσει για να μπορέσουμε να πάρουμε τον αντίστοιχο απολλώνιο κύκλο.
Στην περίπτωση 7,8 έχουμε κατάσταση Δ για τον μικρότερο γεννήτορα.
Στην περίπτωση αυτή όπως είδαμε και προηγουμένως ο εφαπτόμενος κύκλος κατά την διαδικασία της σμίκρυνσης της ακτίνας γίνεται ένας σημειακός κύκλος και από το σημείο αυτό και πέρα παρόλο που εμφανίζεσαι και πάλι στο Ζ- επίπεδο θα πρέπει να θεωρήσουμε

ότι η ακτίνα του είναι αρνητική με την έννοια ότι το αρνητικό πρόσημο χαρακτηρίζει την κατάσταση του εφαπτόμενου κύκλου από την μετατροπή του σε σημείο και πέρα. Με αυτήν την έννοια όταν η ακτίνα του αρχίσει (ακολουθώντας την αντίστροφη πορεία) να μικραίνει για να δώσει τον απολλώνιο κύκλο θα φτάσει να μηδενιστεί κάποτε και μετά θα αρχίσει πάλι να μεγαλώνει *«αλλάζοντας για άλλη μια φορά πρόσημο»*. Αυτήν την περίπτωση την χαρακτηρίσαμε ως αλλαγή κατάστασης του αρχικού προβλήματος.

Αλγόριθμος:
Αν η κατάσταση του μικρότερου γεννήτορα είναι Ο ως προς τον απολλώνιο τότε μικραίνουμε όλους τους Ο γεννήτορες και μεγαλώνουμε όλους τους Χ γεννήτορες και όλους τους Δ γεννήτορες. Όταν πάρουμε τον εφαπτόμενο κύκλο Τ (κύκλους Τ) τότε μικραίνουμε τον εφαπτόμενο κύκλο Τ και παίρνουμε τον απολλώνιο
Αν η κατάσταση του μικρότερου γεννήτορα είναι Χ τότε μικραίνουμε όλους τους Χ γεννήτορες και μεγαλώνουμε όλους τους Δ γεννήτορες. Όταν πάρουμε τον εφαπτόμενο κύκλο Τ (κύκλους Τ) μεγαλώνουμε τον Τ για να πάρουμε τον αντίστοιχο απολλώνιο
Αν η κατάσταση του μικρότερου γεννήτορα είναι Δ τότε μικραίνουμε όλους τους Δ γεννήτορες ενώ μεγαλώνουμε όλους τους Ο γεννήτορες. Ας σημειωθεί ότι έχουμε αποδείξει ότι σε αυτήν την κατάσταση γεννητόρων (δηλαδή όταν η κατάσταση του μικρότερου γεννήτορα είναι Δ) δεν έχουμε γεννήτορες Χ. Όταν πάρουμε τον εφαπτόμενο κύκλο Τ μικραίνουμε τον κύκλο αυτόν και αλλάζουμε πρόσημο στην ακτίνα του.
Η συζήτηση που κάναμε μέχρι τώρα εμπλέκει την τροποποίηση της ακτίνας δύο γεννητόρων. Όμως το πρόβλημα του Απολλώνιου έχει τρεις γεννήτορες κύκλους. Το να βρούμε την λύση του προβλήματος όταν έχομε τρεις γεννήτορες δεν είναι δύσκολο.
Βρίσκοντας τον μικρότερο γεννήτορα κύκλο και εφαρμόζοντας τον πιο πάνω αλγόριθμο και για τους δύο άλλους γεννήτορες G_1,G_2 ανεξάρτητα θα χουμε τον απολλώνιο κύκλο που ψάχνουμε.
Ας δώσουμε και ένα ψευδοκώδικα για να πραγματοποιηθεί η διαδικασία εύρεσης του απολλώνιου κύκλου με την βοήθεια ενός προγράμματος Η/Υ.
Αλγόριθμος
Input: G_0 G_1,G_2 και τη ρύθμιση που περιγράφεται στην στήλη Β στον πίνακα 1 που έχουμε πιο κάτω.
Output: απολλώνιος κύκλος.
Procedure:

1. τροποποίηση των ακτινών των G_0 G_1,G_2 σύμφωνα με την στήλη C του πίνακα 1 και λήψη των κύκλων Z_1,Z_2 και z_0
2. μετασχηματισμός των Z_1,Z_2 με την βοήθεια του μετασχηματισμού Möbius W(z)
3. υπολογισμός των εφαπτόμενων ευθειών των κύκλων W_1,W_2 στο W επίπεδο σύμφωνα με την στήλη D του πίνακα 1.
4. Μετασχηματισμός των εφαπτόμενων ευθειών του βήματος 3 σε εφαπτόμενους κύκλους στο Z επίπεδο με τον μετασχηματισμό Z(w)
5. Τροποποίηση των ακτινών των εφαπτόμενων κύκλων σύμφωνα με την στήλη Ε του πίνακα 1.

A τελεστές Ο,Χ,Δ	B Μεταθέσεις των Ο,Χ,Δ	C μεταβολή των ακτινών του μεσαίου και του μεγάλου γεννήτορα	D Αντίστοιχη Εφαπτομένη ευθεία	E Δεύτερη τροποποίηση του κύκλου Τ (εφαπτόμενου κύκλου) για να πάρουμε τον Α (απολλώνιο)
ΟΟΟ	ΟΟΟ	- -	L_{OO}	Σμίκρυνση
ΟΟΧ	ΟΟΧ	- +	L_{OX}	Σμίκρυνση
	ΟΧΟ	+ -	L_{XO}	Σμίκρυνση
	ΧΟΟ	++	L_{OO}	Μεγέθυνση
ΟΟΔ	ΟΟΔ	- +	$L_{O\Delta}$	Σμίκρυνση
	ΟΔΟ	+ -	$L_{\Delta O}$	Σμίκρυνση
	ΔΟΟ	+ +	$L_{\Delta\Delta}$	Σμίκρυνση και αλλαγή κατάστασης

ΟΧΧ	ΟΧΧ	+ +	L_{XX}	Σμίκρυνση
	ΧΟΧ	+ -	L_{OX}	Μεγέθυνση
	ΧΧΟ	- +	L_{OX}	Μεγέθυνση
ΟΧΔ	ΟΧΔ	+ +	$L_{X\Delta}$	Σμίκρυνση
	ΧΔΟ	- +	$L_{\Delta O}$	Μεγέθυνση
	ΧΟΔ	+ -	$L_{O\Delta}$	Μεγέθυνση
ΟΔΔ	ΟΔΔ	+ +	$L_{\Delta\Delta}$	Σμίκρυνση
	ΔΟΔ	+ -	$L_{\Delta O}$	Σμίκρυνση και αλλαγή κατάστασης
	ΔΔΟ	- +	$L_{O\Delta}$	Σμίκρυνση και αλλαγή κατάστασης
ΧΧΧ	ΧΧΧ	- -	L_{XX}	Μεγέθυνση
ΧΧΔ	ΧΧΔ	- -	$L_{X\Delta}$	Μεγέθυνση
ΧΔΔ	ΧΔΔ	- -	$L_{\Delta\Delta}$	Μεγέθυνση
ΔΔΔ	ΔΔΔ	- -	$L_{X\Delta}$	Σμίκρυνση και αλλαγή κατάστασης

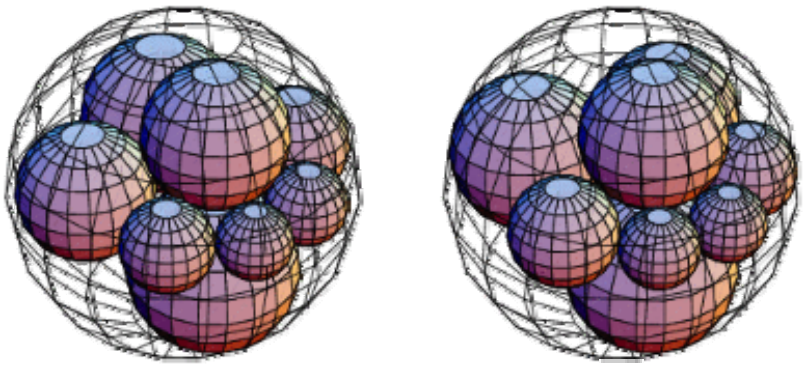
Ας δούμε τώρα παραδείγματα. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε την κατάσταση ΟΧΔ για τους γεννήτορες οι οποίοι είναι οι G_i (c_i,r_i) $i=0,1,2$ όπου $r_0 \le r_1 \le r_2$
Σύμφωνα με τον κανόνα αφού η κατάσταση του μικρότερου γεννήτορα είναι Ο τότε θα μεγαλώσουμε όλους τους γεννήτορες που είναι κατάστασης Χ και Δ. Οπότε θα μεγαλώσουμε τους γεννήτορες G_1,G_2.
Έχουμε λοιπόν ως αποτέλεσμα ένα σημείο $z_o \equiv c_0$ από το οποίο θα διέλθει ο εφαπτόμενος κύκλος και δύο κύκλους τροποποιημένης ακτίνας τους $Z_1=(c_1,r_1+r_0)$ και $Z_2(c_2,r_2+r_0)$. Μετασχηματίζουμε τους κύκλους $Z_1=(c_1,r_1+r_0)$ και $Z_2(c_2,r_2+r_0)$ στους W_1,W_2 του W επιπέδου αντίστοιχα. Αφού υπολογίσουμε τις αντίστοιχες εφαπτόμενες ευθείες $L_{X\Delta}$ στο W επίπεδο μετασχηματίζουμε τις εφαπτόμενες αυτές ευθείες πίσω στο Z επίπεδο κι παίρνουμε τους εφαπτόμενους κύκλους.
Τέλος υπολογίζουμε τους απολλώνιους κύκλους τροποποιώντας την ακτίνα του εφαπτόμενου κύκλου (εφαπτόμενων κύκλων) .
Ας υποθέσουμε ότι έχουμε την κατάσταση ΧΟΔ.
Τότε με βάση τον κανόνα μικραίνουμε τον Δ γεννήτορα G_1 και μεγαλώνουμε τον Ο γεννήτορα G_2 .
Στο επόμενο στάδιο μετασχηματίζουμε τον $Z_1=(c_1,r_1-r_0)$ και τον $Z_2(c_2,r_2+r_0)$ στους W_1,W_2 του W επιπέδου αντίστοιχα. Αφού υπολογίσουμε την εφαπτόμενη ευθεία $L_{X\Delta}$ στο W επίπεδο μετασχηματίζουμε την εφαπτόμενη ευθεία πίσω στο Z επίπεδο και παίρνουμε τον εφαπτόμενο κύκλο $T_{\Delta O}$. Τέλος υπολογίζουμε τον απολλώνιο κύκλο τροποποιώντας την ακτίνα του εφαπτόμενου κύκλου.
Ας υποθέσουμε ότι έχουμε την κατάσταση ΔΟΔ.
Τότε με βάση τον κανόνα μεγαλώνουμε τον Ο γεννήτορα και μικραίνουμε τον Δ γεννήτορα.
Στο επόμενο στάδιο μετασχηματίζουμε τον $Z_1=(c_1,r_1+r_0)$ και τον $Z_2(c_2,r_2-r_0)$ στους W_1,W_2 του W επιπέδου και υπολογίζουμε την $L_{\Delta O}$. Αλλάζουμε τα σύμβολα Ο και Δ αφού ο μικρότερος γεννήτορας είναι Δ. Υπολογίζουμε τον $T_{\Delta O}$ μετασχηματίζοντας την $L_{\Delta O}$ κ.λ.
Η διαδικασία κάνει χρήση μετασχηματισμών Möbius. Η επιλογή αυτή έγινε γιατί μπορούμε έτσι να αυτοματοποιήσουμε την διαδικασία μέσω Υ/Η γράφοντας κάποιον κώδικα. Αντί για μετασχηματισμό Möbius θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε γεωμετρική αντιστροφή και να έχουμε γεωμετρική κατασκευή των απολλώνιων κύκλων που παράγονται από τρεις τυχαίους γεννήτορες κύκλους. Η διαδικασία εύρεσης των λύσεων με την σημειοποίηση του μικρότερου γεννήτορα παράγει όλες τις λύσεις του προβλήματος.

Εξάσφαιρο του Soddy (Soddy's Hexlet)

Ποιο είναι το ανάλογο στις τρεις διαστάσεις, του προβλήματος των τριών εφαπτόμενων κύκλων του Απολλώνιου; Πηγαίνοντας από τις δύο διαστάσεις στις τρεις, ανακαλύπτουμε ότι αυτή η επιπλέον διάσταση, δίνει μια απειρία σφαιρών που η κάθε μια είναι εφαπτόμενη σε τρεις δοσμένες σφαίρες. Μπορεί δε να το διαπιστώσει κανείς αυτό με τρόπο ανάλογο με τον αυτόν που εφαρμόσαμε για την λύση του απολλώνιου προβλήματος των τριών κύκλων: Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τρεις σφαίρες Α, Β, Γ και θέλουμε να βρούμε μια τέταρτη σφαίρα Δ που να εφάπτεται στις τρεις σφαίρες Α, Β, Γ. Έστω ότι η μικρότερη σφαίρα είναι η Γ. Μικραίνουμε τις ακτίνες και των τριών σφαιρών, μέχρι η ακτίνα της μικρότερης από αυτές να μηδενιστεί και έτσι η μικρότερη σφαίρα Γ να γίνει μια σημειακή σφαίρα Γ΄, ενώ από τις σφαίρες Α και Β με την σμίκρυνση παράγονται δυο καινούργιες σφαίρες, οι Α΄, Β΄. Εφαρμόζουμε αντιστροφή στις τρεις διαστάσεις με κέντρο αντιστροφής την σημειακή σφαίρα Γ΄. Οι σφαίρες Α΄ και Β΄ με την αντιστροφή αυτή μετασχηματίζονται σε δύο άλλες σφαίρες τις Α΄΄, Β΄΄. Ας υποθέσουμε ότι ένα επίπεδο Ρ εφάπτεται στις σφαίρες Α΄΄, Β΄΄. Γενικά ένα τέτοιο επίπεδο δεν περνάει από τη σημειακή σφαίρα Γ΄ οπότε μετά από αντιστροφή ως προς το σημείο Γ΄ το επίπεδο αυτό θα μετασχηματιστεί σε μια σφαίρα Σ που εφάπτεται στις δύο σφαίρες Α΄,Β΄. Μεγαλώνουμε τις ακτίνες των δύο σφαιρών Α΄, Β΄ κατά ποσότητα ίση με την ακτίνα της τρίτης σφαίρας Γ και μικραίνουμε κατά την ίδια ποσότητα την ακτίνα της σφαίρας Σ οπότε έχουμε λύσει το πρόβλημα. Όμως πόσα τέτοια επίπεδα Ρ μπορούμε να βρούμε; Ο αριθμός τους είναι προφανώς άπειρος, οπότε το πρόβλημα έχει άπειρες λύσεις. Ένας τρόπος να κατασκευάσουμε ένα τέτοιο εφαπτόμενο επίπεδο Ρ είναι ο εξής: θεωρούμε ένα επίπεδο Π που διέρχεται από τα κέντρα των δύο σφαιρών Α και Β. Το επίπεδο αυτό τέμνει τις δύο σφαίρες κατά μέγιστους κύκλους. Φέρνουμε την κοινή εφαπτόμενη ευθεία L των δύο αυτών (μέγιστων) κύκλων και κατόπιν το κάθετο επίπεδο Ρ στο επίπεδο Π που διέρχεται από την ευθεία L. Το επίπεδο Ρ είναι εφαπτόμενο στις δύο σφαίρες. Το ερώτημα που τώρα έρχεται στο μυαλό μας είναι αν το πρόβλημα του Απολλώνιου στις τρεις διαστάσεις μπορεί να τεθεί λίγο διαφορετικά: Υπάρχει σφαίρα που να είναι εφαπτόμενη σε τέσσερις δοσμένες σφαίρες του χώρου; Η λύση είναι εύκολη και ακολουθεί διαδικασία παρόμοια με αυτήν που περιγράψαμε πιο πάνω. Ας πάρουμε τα πράγματα από την αρχή και ας περιγράψουμε το πρόβλημα και την λύση του: Έστω ότι δίνονται τέσσερις σφαίρες Α,Β,Γ,Δ. Θέλουμε να βρούμε μια πέμπτη σφαίρα η οποία να εφάπτεται στις σφαίρες Α,Β,Γ,Δ. Μικραίνουμε τις ακτίνες των σφαιρών Α,Β,Γ,Δ κατά μήκος ίσο με την ακτίνα της μικρότερης σφαίρας. Έστω ότι η μικρότερη σφαίρα είναι η Δ. Η σφαίρα Δ τότε θα γίνει σημειακή, ενώ οι υπόλοιπες σφαίρες θα μετασχηματιστούν στις σφαίρες Α΄,Β΄,Γ΄. Εφαρμόζουμε αντιστροφή με κέντρο την σημειακή σφαίρα Δ΄. Οι σφαίρες Α΄,Β΄,Γ΄ μετασχηματίζονται στις σφαίρες Α΄΄,Β΄΄,Γ΄΄. Θεωρούμε ένα επίπεδο Ρ που εφάπτεται στις τρεις σφαίρες Α΄΄,Β΄΄,Γ΄΄. Γενικά υπάρχουν 8 τέτοια επίπεδα τα οποία δεν διέρχονται από την σημειακή σφαίρα. Αν κάνουμε αντιστροφή λοιπόν ως προς την σημειακή σφαίρα το επίπεδο Ρ μετασχηματίζεται σε μια σφαίρα Σ. Αν μικρύνουμε την ακτίνα της Σ κατά μήκος ίσο με την ακτίνα της σφαίρας Δ θα έχουμε λύσει το πρόβλημα.

Το πρόβλημα που θα αναπτύξουμε αμέσως πιο κάτω, είναι ανάλογο με το πρόβλημα της αλυσίδας του Steiner (πόρισμα Steiner σελ 322 αυτής της εργασίας) και λέγεται πρόβλημα των έξι σφαιρών του Soddy (Soddy's hexlet).

Στο πρόβλημα αυτό δίνονται τρεις σφαίρες Α,Β,Γ εφαπτόμενες μεταξύ τους και ζητείται να βρεθεί αν υπάρχει ένα περιδέραιο αποτελούμενο από σφαίρες Σ_i όπου η κάθε σφαίρα του περιδέραιου είναι εφαπτόμενη στις δύο γειτονικές της σφαίρες Σ_{i-1} και Σ_{i+1} ενώ όλες οι σφαίρες Σ_i εφάπτονται και στις τρεις αρχικές σφαίρες Α,Β,Γ. Η λύση του προβλήματος, όπως θα δούμε τελικά, είναι πάντοτε μια εξάδα σφαιρών Σ_i $i=1,\ldots,6$.

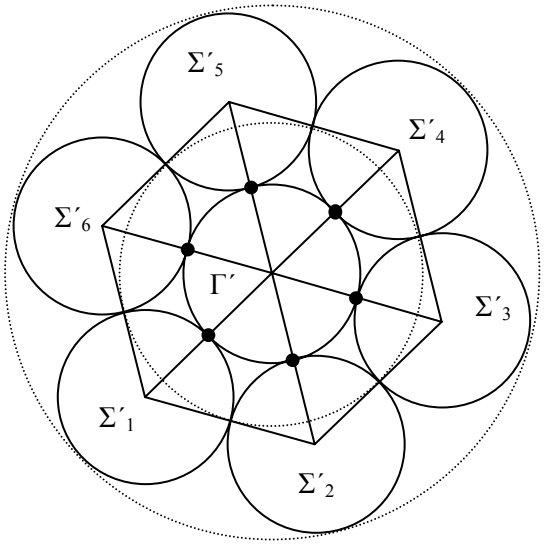


Σχήμα α

Ξεκινάμε επιλέγοντας μια σφαίρα Σ_1 η οποία εφάπτεται στις σφαίρες Α,Β,Γ. Είναι όμως κάτι τέτοιο εφικτό; Η απάντηση είναι καταφατική και έχει δοθεί στην προηγούμενη παράγραφο. Στην ίδια παράγραφο αναφέραμε ότι μπορεί να βρεθεί και μα δεύτερη σφαίρα Σ_2 που να είναι εφαπτόμενη στις σφαίρες Α,Β,Γ,Σ_1. Το ίδιο μπορεί να επαναληφθεί μέχρι να φτάσουμε στην σφαίρα Σ_v, οπότε το ερώτημα που προκύπτει σε αναλογία με το ερώτημα που είχε τεθεί για την αλυσίδα του Steiner, είναι αν η τελευταία σφαίρα Σ_v εφάπτεσαι με την αρχική σφαίρα Σ_1 ώστε το περιδέραιο να συμπληρωθεί. Αν σκεφτεί κάποιος έχοντας στο μυαλό του την διαπραγμάτευση του προβλήματος της αλυσίδας του Steiner είναι υποχρεωμένος να απαντήσει αρνητικά. Όμως προς έκπληξη μας εδώ η απάντηση τελικά είναι καταφατική. Πάντα η αλυσίδα των σφαιρών συμπληρώνεται έτσι ώστε να έχουμε τέλεια επαφή μεταξύ τους αλλά και ο αριθμός των σφαιρών που απαρτίζουν ένα τέτοιο περιδέραιο είναι πάντα σταθερός και αποτελείται από έξι σφαίρες.

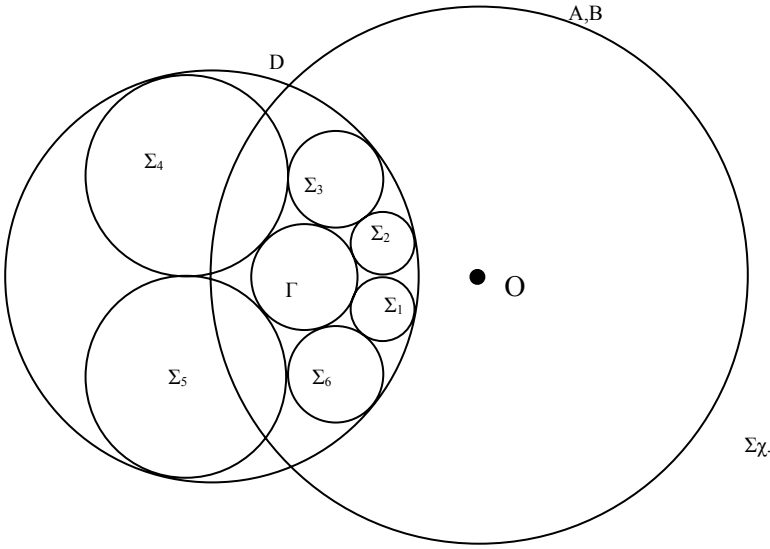
Η απόδειξη του ισχυρισμού αυτού είναι πολύ εύκολη:

Αν αντιστρέψουμε το σχήμα που αποτελείται από τις τέσσερις εφαπτόμενες σφαίρες Α,Β,Γ,Σ_1 με κέντρο αντιστροφής το σημείο επαφής των σφαιρών Α,Β, τότε οι σφαίρες Α, Β θα γίνουν δύο παράλληλα επίπεδα Α΄ και Β΄, ενώ η εικόνα της σφαίρας Γ θα γίνει μια σφαίρα Γ΄ που θα περιέχεται ανάμεσα στα δύο παράλληλα επίπεδα Α΄ και Β΄ και θα είναι εφαπτόμενη με αυτά. Επειδή η σφαίρα Σ_1 είναι εφαπτόμενη στις τρεις σφαίρες Α, Β, Γ θα μετασχηματιστεί σε σφαίρα ίση με την σφαίρα Γ΄, θα βρίσκεται μεταξύ των επιπέδων Α΄ και Β΄ θα εφάπτεται με αυτά καθώς επίσης και με την σφαίρα Γ. Αξίζει να τονιστεί ότι αυτό θα γίνει ανεξάρτητα από το αρχικό μέγεθος της σφαίρας Σ_1. Έχοντας καταλήξει σε ένα τέτοιο σύστημα μετά την αντιστροφή είναι εύκολο να συμπεράνουμε ότι μόνο πέντε ακόμα σφαίρες Σ'_i με i=2,3,4,5,6 ίσες αναγκαστικά σε μέγεθος με την Γ΄, αφού πρέπει να εφάπτονται στα παράλληλα επίπεδα Α΄ και Β΄, μπορούν να προστεθούν στο σύστημα έτσι ώστε να σχηματιστεί μια κλειστή αλυσίδα γύρω από την σφαίρα Γ΄. Τα κέντρα των έξι αυτών σφαιρών Σ'_i με i=1,2,3,4,5,6 είναι οι κορυφές ενός κανονικού εξαγώνου όπως πολύ εύκολα μπορούμε να δούμε.



Σχ.1

Όταν το σύστημα των έξι σφαιρών που εφάπτονται κυκλικά με την Γ΄ καθώς επίσης και με τα δύο επίπεδα Α΄,Β΄ αντιστραφεί και πάλι, θα αποδώσει το hexlet.
Ο καθηγητής Frederick Soddy του πανεπιστημίου της Οξφόρδης (ερασιτέχνης μαθηματικός και Νομπελίστας στην χημεία το 1921) ανακάλυψε την διαμόρφωση του περιδέραιου των έξι σφαιρών, που περιγράψαμε πιο πάνω, όχι με χρήση αντιστροφής αλλά συνθετικά και μάλιστα δημοσίευσε πολλά πράγματα για τις ιδιότητες που ισχύουν, όταν οι σφαίρες έχουν ακτίνες που είναι αριθμοί αντίστροφοι ακέραιων αριθμών.
Στα σχήματα α και 2 που έχουμε σχεδιάσει αναπαριστούμε ένα τέτοιο hexlet. Στο hexlet του σχήματος 2 έχουμε δώσει τιμές για τις ακτίνες των διαφόρων σφαιρών ώστε να πάρουμε μια ιδέα για τις μεθόδους του Soddy.
Οι σφαίρες Α και Β (σχήμα 2) θεωρούμε ότι είναι σφαίρες με διάμετρο 1. Θεωρούμε επίσης ότι αυτές οι σφαίρες εφάπτονται στο επίπεδο του χαρτιού όπου έχουμε σχεδιάσει το σχήμα και πιο συγκεκριμένα στο σημείο Ο. Η μια σφαίρα (έστω η Α) υποθέτουμε ότι τοποθετείται πάνω από το επίπεδο του χαρτιού και η άλλη (η Β) από κάτω.



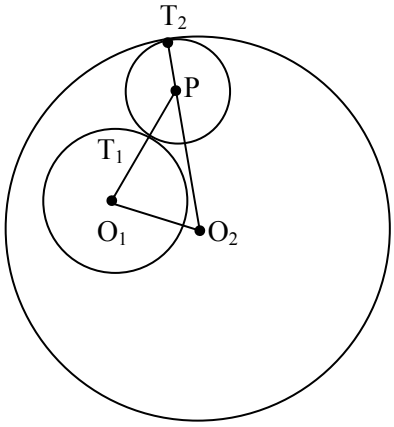
Σχ.2

Ο κύκλος Γ έχει ακτίνα 1/11. Οι κύκλοι Σ_1,Σ_2 έχουν ακτίνες 1/27. Οι κύκλοι Σ_3,Σ_6 έχουν ακτίνες 1/15 και οι κύκλοι Σ_5, Σ_4 έχουν ακτίνες 1/3. Οι κύκλοι Σ_i παριστάνουν τις σφαίρες του hexlet. Οι κύκλοι Γ και Σ_i έχουν κέντρα που βρίσκονται όλα πάνω στο επίπεδο του χαρτιού. Ο Soddy απέδειξε ότι όταν οι σφαίρες Σ_i έχουν τις διαστάσεις αυτές τότε αν είναι εφαπτόμενες στις σφαίρες Α, Β θα εφάπτονται υποχρεωτικά και στην σφαίρα Γ. Για να έχει όμως λύση το πρόβλημα δεν είναι απαραίτητο οι σφαίρες του περιδέραιου να έχουν ακτίνες μόνο με τις αριθμητικές τιμές που δώσαμε πιο πάνω. Από αυτό λοιπόν το σημείο και πέρα θα θεωρούμε ότι οι έξι σφαίρες του hexlet είναι έξι σφαίρες μιας ας το πούμε 'ρέουσας' αλυσίδας χωρίς σταθερές ακτίνες. Το σχήμα που έχουμε φτιάξει πιο πάνω είναι λοιπόν ένα στιγμιότυπο –μια συγκεκριμένη θέση- από ένα άπειρο πλήθος θέσεων των έξι σφαιρών που περιστρέφονται γύρω από την σφαίρα Γ.
Κάθε σφαίρα από τις έξι σφαίρες του hexlet είναι πάντα εφαπτόμενη στις Α,Β,Γ τις οποίες θα αποκαλούμε σταθερές σφαίρες. Το συμμετρικό σύστημα σφαιρών που παίρνουμε με την εφαρμογή της αντιστροφής ως προς το σημείο επαφής Ο των κύκλων Α,Β θα αναφέρεται ως το αντίστροφο hexlet ή ως αντίστροφο σύστημα.
Τα σημεία επαφής των έξι ίσων σφαιρών του αντίστροφου συστήματος βρίσκονται πάνω σε έναν κύκλο ο οποίος είναι ορθογώνιος με τις έξι σφαίρες του αντίστροφου συστήματος στα σημεία επαφής τους (Σχ.1). Αυτός ο κύκλος αντιστρέφεται (όταν θελήσουμε να πάρουμε το αρχικό hexlet) πάλι σε έναν κύκλο με την ορθογωνιότητα όπως επίσης και την εφαπτομενικότητα να διατηρούνται. Σαν συνέπεια έχουμε ότι στο αρχικό hexlet (Σχ.2) τα έξι

σημεία επαφής βρίσκονται επίσης σε ένα κύκλο. Τα κέντρα των έξι σφαιρών του συστήματος μαζί και το κέντρο του κύκλου Γ βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Μέχρι τώρα παρατηρούμε ότι δεν έχει γίνει αναφορά στο μέγεθος των ακτινών των τριών κύκλων Α,Β,Γ οπότε το συμπέρασμα στο οποίο μόλις καταλήξαμε ισχύει για κάθε hexlet.

Στο αντίστροφο σύστημα υπάρχει μια άλλη σφαίρα D΄ ομόκεντρη με την Γ΄ η οποία περιγράφει το σύστημα των έξι σφαιρών. Η εικόνα της D΄ με την αντιστροφή ως προς το Ο γίνεται η σφαίρα D του σχήματος 2 (η αντιστροφή αυτή διατηρεί το κεντρικό επίπεδο – δηλαδή το επίπεδο του χαρτιού- αφού το κεντρικό επίπεδο διέρχεται από το κέντρο Ο της σφαίρας αντιστροφής). Η σφαίρα D εφάπτεται και πάλι στο σύστημα των έξι σφαιρών του αρχικού hexlet.

Ας θυμηθούμε λίγα πράγματα από τις κωνικές τομές. Έλλειψη είναι η κωνική τομή τα σημεία της οποίας έχουν σταθερό άθροισμα αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία (εστίες της έλλειψης). Υπερβολή είναι η κωνική που για τα σημεία της ισχύει ότι η διάφορα των αποστάσεων τους από δύο σταθερά σημεία είναι σταθερή.

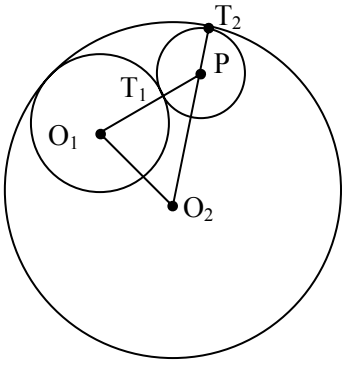


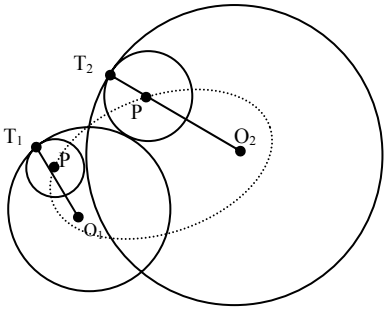
Ας υποθέσουμε ότι δίνονται δύο σταθεροί κύκλοι με κέντρα τα σημεία O_1 και O_2 και ακτίνες ρ_1 και ρ_2 που ο ένας είναι εσωτερικός του άλλου.

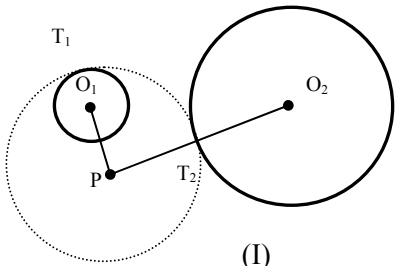
. Θα υποθέσουμε επίσης ότι Ρ είναι το κέντρο και ρ η ακτίνα ενός τυχαίου κύκλου που εφάπτεται στους κύκλους (O_1) και (O_2).

$PO_1+PO_2=\rho_1+\rho+\rho_2-\rho=\rho_1+\rho_2=$σταθερό, οπότε το Ρ ανήκει σε έλλειψη με εστίες τα O_1 και O_2.

Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει ακόμα και όταν οι δύο σταθεροί κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά. Ισχύει επίσης ακόμα και όταν οι δύο σταθεροί κύκλοι τέμνονται σε δύο (πραγματικά) σημεία όμως σε μια τέτοια περίπτωση ο ρόλος των ρ_1 και ρ_2 αλλάζει όταν το Ρ διέρχεται από τα σημεία τομής. Τι γίνεται όμως όταν οι βασικοί κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά ή είναι εξωτερικοί μεταξύ τους;

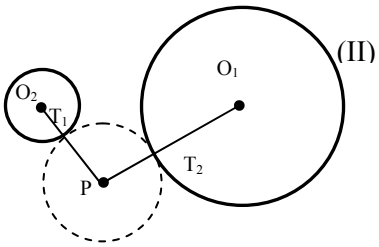






(I)

Έστω ότι οι δύο σταθεροί κύκλοι είναι μεταξύ τους εξωτερικοί. Υπάρχουν άπειροι κύκλοι που εφάπτονται με τον ένα από αυτούς εξωτερικά και με το άλλο εσωτερικά, επίσης άπειροι κύκλοι εφάπτονται και στους δύο εξωτερικά. Σε κάθε μια από τις περιπτώσεις αυτές έχουμε:



(II)

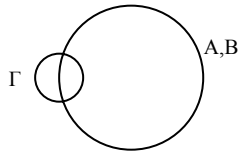
Σχήμα (Ι): $PO_2-PO_1=\rho_2+\rho-(\rho-\rho_1)=\ \rho_1+\rho_2=$σταθ.οπότε το Ρ ανήκει σε υπερβολή με εστίες τα O_1 και O_2.

Για το σχήμα (ΙΙ): $PO_2-PO_1=\rho_2+\rho-(\rho+\rho_1)=\ \rho_2-\rho_1=$σταθ. οπότε το Ρ ανήκει σε υπερβολή με εστίες τα O_1 και O_2. Στην περίπτωση που οι δύο σταθεροί κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά τότε δουλεύοντας με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε τα ίδια αποτελέσματα.

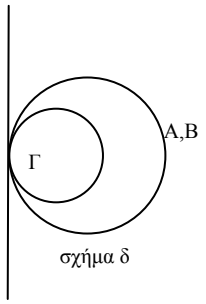
Γυρνώντας πάλι στα hexlet και κάνοντας χρήση του θεωρήματος που μόλις πριν αναφέραμε θα έχουμε ότι τα κέντρα των έξι σφαιρών θα βρίσκονται σε μια έλλειψη η οποία έχει εστίες τα κέντρα των κύκλων D, Γ. Πιο κάτω θα δούμε ότι ακόμα και στην περίπτωση που οι

σφαίρες δεν έχουν την ίδια ακτίνα το αποτέλεσμα δεν αλλάζει, δηλαδή και πάλι οι έξι σφαίρες βρίσκονται σε έλλειψη.

Το σχήμα 2 υποδεικνύει ότι παρόλο που μπορούμε να ξεκινήσουμε παίρνοντας την σφαίρα Σ_1 σε οποιαδήποτε θέση στην μεταβλητή εξάδα σφαιρών, το μέγεθος της Σ_1 είναι στην ουσία περιορισμένο μεταξύ κάποιων ορίων. Οπωσδήποτε η Σ_1 δεν μπορεί να είναι πολύ μικρή αφού σε μια τέτοια περίπτωση θα 'πέσει' μέσα στο κενό που σχηματίζεται μεταξύ των σφαιρών Α,Β,Γ χωρίς να μπορεί πλέον να εφάπτεται με τις Α,Β,Γ. Επίσης η Σ_1 δεν μπορεί να γίνει απεριόριστα μεγάλη διότι σε τέτοια περίπτωση μπορεί η Γ μην είναι επαρκώς μεγάλη και να 'πέφτει' αυτή τώρα στο κενό που σχηματίζεται μεταξύ των Α, Β, Σ_1.

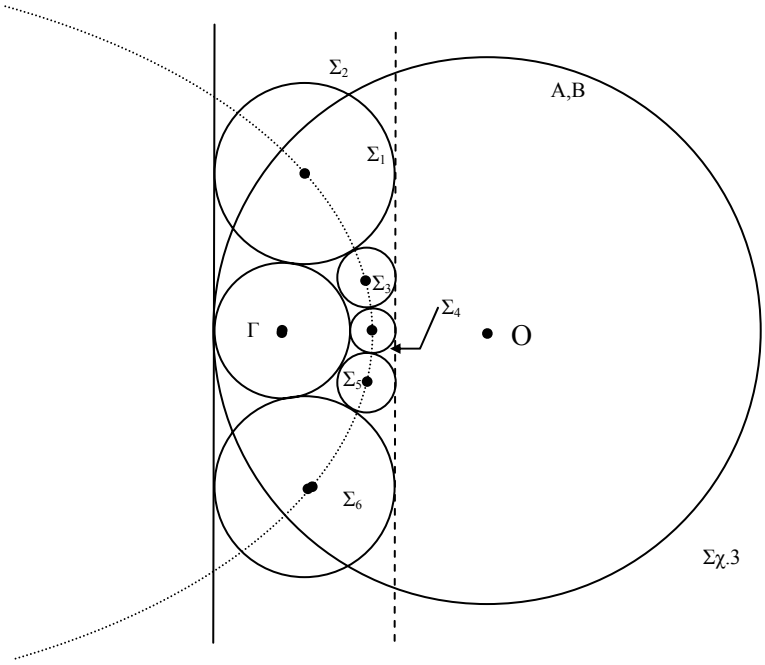


σχήμα γ



σχήμα δ

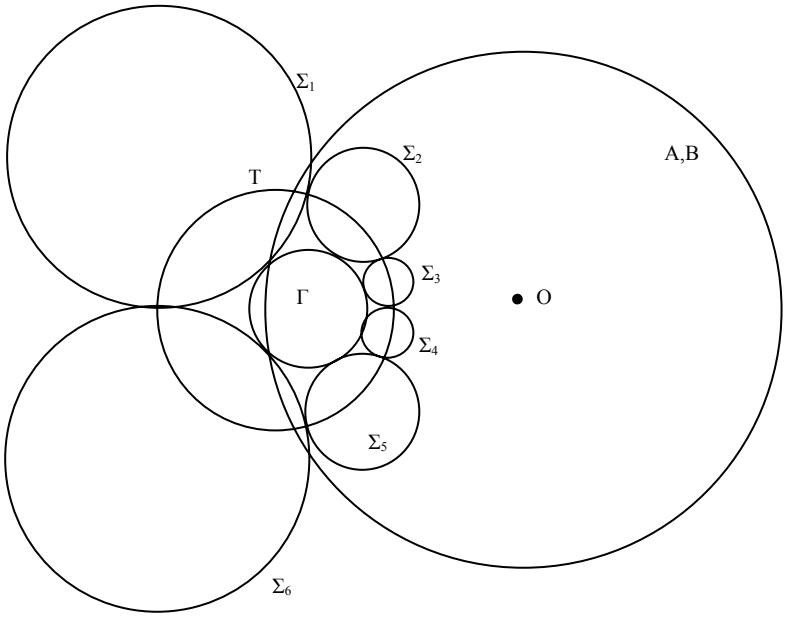
Ας θεωρήσουμε ένα καινούργιο σύστημα έξι σφαιρών με την σφαίρα Γ να είναι αρκετά μεγάλη. Ας υποθέσουμε ότι η Γ είναι τόσο μεγάλη που η προβολή της στο επίπεδο του χαρτιού σχεδίασης (που είναι το επίπεδο που στο οποίο εφάπτονται οι σφαίρες Α,Β ενώ κείνται εκατέρωθεν αυτού του επιπέδου) εκτείνεται πέρα από την προβολή των Α,Β πάνω σε αυτό το επίπεδο (σχήμα γ). Ο καθηγητής Soddy είχε απαντήσει πως δεν υπάρχει hexlet σε αυτήν την περίπτωση. Είχε θέσει ως οριακή περίπτωση, την περίπτωση που η σφαίρα Γ προσεγγίζει το μέγεθος εκείνο που οι σφαίρες Α,Β,Γ έχουν κοινό εφαπτόμενο επίπεδο το οποίο στην οριακή περίπτωση παίζει το ρόλο της Σ_1 (σχήμα δ) .



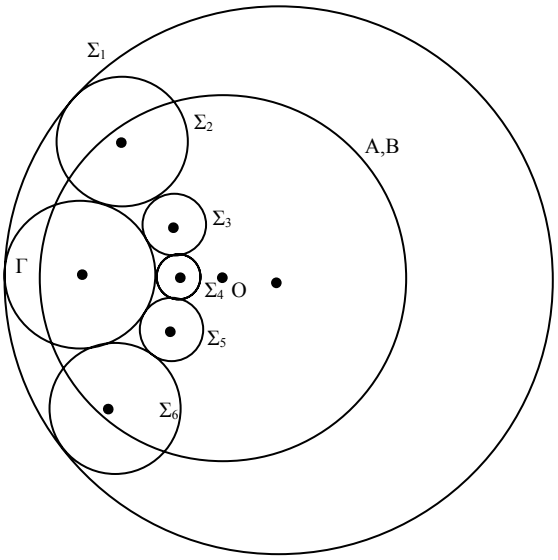
Σχ.3

Σύμφωνα με τον συλλογισμό του Soddy μπορούμε να έχουμε hexlet μόνο όταν οι τρεις σφαίρες Α,Β,Γ βρίσκονται σε κατάλληλη θέση και μέγεθος για να ξεκινήσουμε. Όμως χρειάζεται ένας τέτοιος περιορισμός; Η αρχική μας απόδειξη δεν εξαρτάται από το μέγεθος των αρχικών σφαιρών. Στο αντίστροφο σύστημα πάντα υπάρχει hexlet.

Ας επιχειρήσουμε να κάνουμε ένα hexlet με τον κύκλο Γ πολύ μεγάλο για να απαντήσουμε στο ερώτημα που μόλις τέθηκε. Για απλότητα θα πάρουμε πάλι τους κύκλους Α και Β να είναι της ίδιας ακτίνας και εφαπτόμενους στο σημείο Ο. Η διαδικασία στην ουσία της παραμένει η ίδια ακόμα και όταν οι κύκλοι Α,Β,Γ είναι όλοι διαφορετικής ακτίνας.



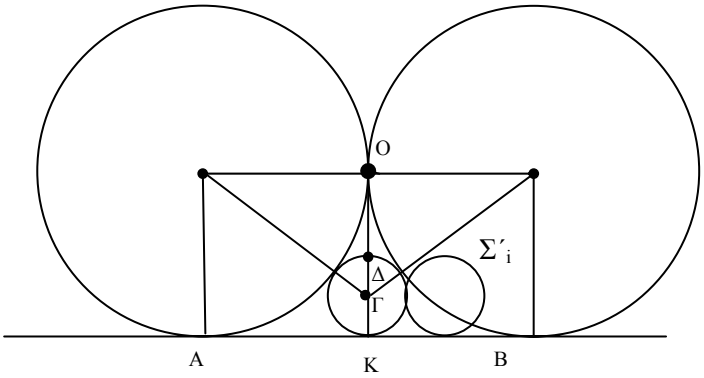
Τα σημεία επαφής των έξι σφαιρών βρίσκονται σε έναν κύκλο Τ (πράγμα που προκύπτει αν σκεφτούμε ότι στο αντίστροφο σύστημα οι σφαίρες είναι ίσες μεταξύ τους αλλά και με την σφαίρα Γ, οπότε τα σημεία επαφής των σφαιρών - στο αντίστροφο σύστημα - είναι τα ίχνη των αποστημάτων του κανονικού εξαγώνου, που σχηματίζεται με κορυφές τα κέντρα των έξι σφαιρών, πάνω στις πλευρές του). Αφού οι κύκλοι διατηρούνται κατά την αντιστροφή άρα αληθεύει ότι και στο αρχικό σύστημα των έξι σφαιρών τα σημεία επαφής τους βρίσκονται πάλι σε κύκλο – τον κύκλο Τ΄. Ας φανταστούμε ότι το σύστημα των έξι σφαιρών περιστρέφεται γύρω από την σφαίρα Γ και ας υποθέσουμε ότι η περιστροφή αντίθετα από τη περιστροφή των δεικτών του ρολογιού. Κάποτε η σφαίρα Σ_1 θα γίνει επίπεδο ακριβώς πριν αλλάξει καμπυλότητα.



Αργότερα πάλι περνάει από το σημείο που γίνεται επίπεδο και στο σημείο αυτό παίρνει πάλι την αρχική καμπυλότητα .

Κάθε σφαίρα πρέπει να γυρίσει 'τα μέσα έξω' κατά κάποιον τρόπο δύο φορές σε κάθε πλήρη περιστροφή του περιδέραιου των έξι σφαιρών. Είναι φανερό πλέον ότι ο Soddy ως φυσικός επιστήμονας δεν θα δέχονταν μια τέτοια συμπεριφορά των σφαιρών διότι φανταζόταν τις

σφαίρες ως χάντρες ενός περιδέραιου πράγμα που σημαίνει ότι δεν θα μπορούσαν ποτέ να έχουν μια τέτοια αλλαγή καμπυλότητας.
Πως όμως κάτι τέτοιο θα μπορούσε να συμβαίνει αφού στο αντίστροφο σύστημα οι έξι σφαίρες περιστρέφονται γύρω από την σφαίρα Γ΄ τελείως ομαλά; Για να δώσουμε την απάντηση αρκεί να σκεφτούμε ότι κάθε σφαίρα του περιδεραίου γίνεται κάποια στιγμή επίπεδο και αμέσως μετά αλλάζει καμπυλότητα. Επίπεδο γίνεται μόλις η εικόνα της στο αντίστροφο σύστημα διέλθει από το κέντρο της αντιστροφής.
Στο εξάσφαιρο (hexlet) του Soddy ο κύκλος Γ έχει τέτοια ακτίνα ώστε το αντίστροφο σύστημα ποτέ δεν διέρχεται από το κέντρο της αντιστροφής.
Συνεχίζουμε την ανάλυσή μας έχοντας κατά νου ότι τα δύο εξάσφαιρα, τόσο το αρχέτυπο όσο και η εικόνα του μέσω της αντιστροφής ως προς το Ο, τα φανταζόμαστε να περιστρέφονται, το μεν αρχέτυπο γύρω από την σφαίρα Γ, η δε εικόνα του γύρω από την σφαίρα Γ΄ (εικόνα της Γ με την αντιστροφή ως προς το Ο). Θα ονομάζουμε *κρίσιμη ακτίνα*, την ακτίνα της σφαίρας Γ πέρα από την οποία οι σφαίρες του αντίστροφου εξάσφαιρου συστήματος διέρχονται από το Ο.
Αφού η ακτίνα της σφαίρας αντιστροφής είναι τυχαία θα πάρουμε τέτοια ακτίνα ώστε η σφαίρα αντιστροφής να είναι ορθογώνια προς την σφαίρα Γ. Τότε η σφαίρα Γ θα μείνει αναλλοίωτη κατά την αντιστροφή.



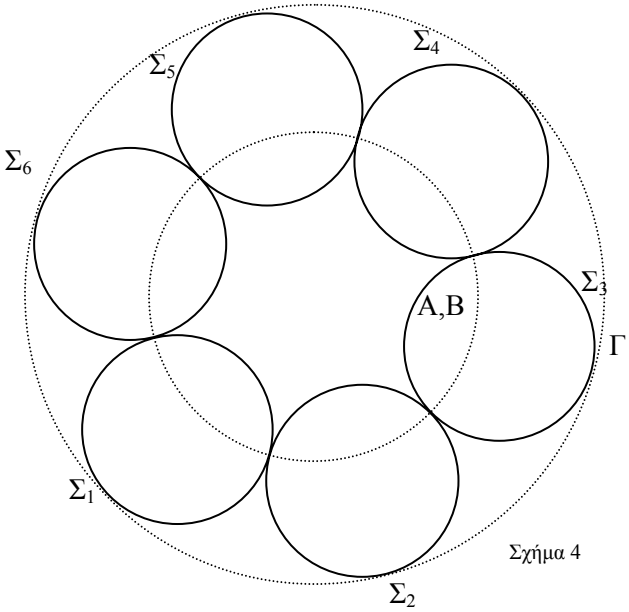
Σχήμα δ

Για να κάνουμε τα πράγματα πιο εύκολα έχουμε σχεδιάσει το διπλανό σχήμα (σχήμα δ). Θα υποθέσουμε για χάρη απλότητας ότι οι σφαίρες Α και Β είναι ίσες.
Αν οι σφαίρες Α, Β είναι διαφορετικής ακτίνας το μόνο που δυσκολεύει είναι το υπολογιστικό μέρος. Παίρνουμε την προβολή των σφαιρών Α,Β,Γ πάνω στο επίπεδο Π το οποίο ορίζεται από τα κέντρα των σφαιρών Α,Β,Γ.
Η ευθεία ΑΒ είναι η προβολή του κοινού εφαπτόμενου επίπεδου των τριών σφαιρών Α,Β,Γ πάνω στο επίπεδο Π. Όπως καταλαβαίνει ο αναγνώστης στο σχήμα δ έχουμε την περίπτωση που η σφαίρα Γ έχει τέτοια ακτίνα ώστε να παίρνει την *οριακή θέση* πέρα από την οποία ο Soddy θεωρεί ότι δεν υπάρχει hexlet οπότε είναι προφανές ότι στην περίπτωση αυτή και μόνο υπάρχει κοινό εφαπτόμενο επίπεδο.
Στην περίπτωση που η ακτίνα της σφαίρας Γ πάρει την κρίσιμη τιμή, τότε κάθε σφαίρα του αντίστροφου εξάσφαιρου συστήματος θα γίνει "κρίσιμα" μεγάλη έτσι ώστε να περάσει "εφαπτομενικά" από το σημείο αντιστροφής Ο. Κατά την αντιστροφή αυτή η Γ μένει όπως είπαμε αναλλοίωτη, ενώ οι σφαίρες του hexlet αντιστρέφονται σε σφαίρες ίσες με την Γ. Παρόλο που η Γ κατά την αντιστροφή μένει αναλλοίωτη εμείς στο αντίστροφο σύστημα θα την συμβολίζουμε με Γ΄. Κατά την περιστροφή λοιπόν του αντίστροφου hexlet γύρω από την Γ΄ οι σφαίρες του $Σ'_i$, διέρχονται από το κενό ΔΟ μεταξύ της σφαίρας Γ΄ (ας θυμηθούμε ότι έχουμε Γ΄≡Γ) και του κέντρου αντιστροφής Ο. Για να μην έχουμε αντιστροφή της καμπυλότητας πρέπει η διάμετρος των σφαιρών του αντίστροφου hexlet να είναι μικρότερη από το ΔΟ (το αντίστροφο hexlet ας το φανταστούμε να περιστρέφεται γύρω από την σφαίρα Γ΄. Στο σχήμα μας φαίνονται οι προβολές Γ΄ και $Σ'_i$ της Γ και μιας από τις σφαίρες $Σ_i$ του αντίστροφου hexlet .Οι προβολές αυτές είναι δύο ίσοι μεταξύ τους κύκλοι). Αφού η διάμετρος των $Σ'_i$ είναι ίση με την διάμετρο της σφαίρας Γ΄ θα πρέπει ΔΟ≤ΚΔ για να έχουμε περίπτωση αντιστροφής καμπυλότητας: $\Delta O \le K\Delta \Rightarrow 2\rho \ge R - 2\rho \Rightarrow \rho \ge \frac{R}{4}$

Η *κρίσιμη ακτίνα* λοιπόν για την σφαίρα Γ θα είναι η $\rho = \frac{R}{4}$. Δηλαδή το 1/4 της ακτίνας R της σφαίρας Α ή της Β. Αξίζει να τονίσουμε ότι όταν η σφαίρα Γ πάρει την οριακή θέση οπότε η εικόνα κάθε σφαίρας του εξάσφαιρου *αγγίζει εφαπτομενικά* το κέντρο της αντιστροφής η αντίστοιχη σφαίρα αρχέτυπο του εξάσφαιρου θα γίνει (στιγμιαία) επίπεδο και κατόπιν θα συνεχίσει την περιστροφή της γύρω από την Γ πάλι ως σφαίρα με τον ίδιο προσανατολισμό στην καμπυλότητά της. Αν η σφαίρα Γ αποκτήσει μεγαλύτερη ακτίνα από αυτήν που έχει όταν βρίσκεται στην οριακή της θέση τότε <u>και πάλι θα έχουμε hexlet</u> το οποίο, αν θεωρήσουμε ότι περιστρέφεται, κατά μια πλήρη περιστροφή του οι αντίστοιχες σφαίρες του θα αλλάζουν δύο φορές προσανατολισμό στην καμπυλότητα.
Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων αυτού του νέου τύπου hexlet;
Το μόνο που ξέρουμε είναι ότι τα κέντρα είναι συνεπίπεδα. Ας θεωρήσουμε δύο σφαίρες σταθερές και διαφορετικού μεγέθους οι οποίες εφάπτονται εξωτερικά μεταξύ τους καθώς και μια τρίτη μεταβλητή σφαίρα, εφαπτόμενη στις δύο προηγούμενες της οποίας όμως το κέντρο είναι πάντα στο ίδιο επίπεδο. Γνωρίζουμε ότι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων της μεταβλητής σφαίρας είναι μια υπερβολή που οι δύο εστίες της είναι τα κέντρα των δύο εφαπτόμενων σφαιρών. Αν άρουμε τον περιορισμό, το κέντρο της μεταβλητής σφαίρας να ανήκει σε ένα επίπεδο, τότε έχουμε ως γεωμετρικό τόπο των κέντρων της μεταβλητής σφαίρας να είναι ένα υπερβολοειδές, το οποίο προκύπτει από περιστροφή της προηγούμενης υπερβολής και με εστίες τις ίδιες. Έτσι ανεξάρτητα από το ποια είναι η τρίτη σταθερή σφαίρα του συστήματος, όλες οι σφαίρες του hexlet έχουν τα κέντρα τους πάνω σε αυτό το υπερβολοειδές. Επιπρόσθετα τα κέντρα αυτά βρίσκονται πάνω στο ίδιο επίπεδο. Η τομή του υπερβολοειδούς εκ περιστροφής με επίπεδο είναι μια κωνική. Στο hexlet του Soddy αυτή η κωνική είναι έλλειψη στην οριακή περίπτωση είναι παραβολή και στην περίπτωση που έχουμε αντιστροφή της κοιλότητας έχουμε υπερβολή. Θα ονομάζουμε τις εξάδες ανάλογα με την κωνική πάνω στην οποία ανήκουν τα κέντρα τους και έτσι έχουμε τις ελλειπτικές τις παραβολικές και τις υπερβολικές εξάδες.
Θα περιγράψουμε με λεπτομέρεια κάποια πράγματα σχετικά με αυτές τις κωνικές. Παρατηρώντας το σχήμα 3 και αν φανταστούμε την εξάδα των σφαιρών να περιστρέφεται γύρω από την σφαίρα Γ τότε τα κέντρα της εξάδας υποχωρούν προς την μια κατεύθυνση μόνο και μάλιστα απεριόριστα μακριά και κατόπιν να επιστρέψουν από την ίδια κατεύθυνση. Αυτό όμως είναι χαρακτηριστικό του τρόπου που μια παραβολή τείνει στο άπειρο. Στην περίπτωση που έχουμε αλλαγή της κοιλότητας το κέντρο μιας σφαίρας του εξάσφαιρου υποχωρεί προς το άπειρο κατά μήκος ενός κλάδου της υπερβολής είναι στο άπειρο όταν η εν λόγω σφαίρα γίνεται επίπεδο και κατόπιν επιστρέφει από το άπειρο ακολουθώντας τον άλλο κλάδο της υπερβολής μένοντας σε αυτόν το κλάδο όσο η σφαίρα καμπυλώνεται κατά την αντίθετη φορά από την φορά κατά την οποία καμπυλώνονταν όταν το κέντρο της διέγραφε τον άλλο κλάδο της υπερβολής. Έτσι το κέντρο κάθε μιας σφαίρας διαγράφει μια πορεία κατά μήκος ολόκληρης της υπερβολής καθώς η εικόνα της διαγράφει μια ολόκληρη περιστροφή γύρω από την σφαίρα Γ΄. Σε μια ελλειπτική εξάδα το κέντρο της αντιστροφής είναι εξωτερικά από κάθε σφαίρα του αντίστροφου συστήματος. Υπάρχουν λοιπόν δύο σφαίρες που είναι εφαπτόμενες σε κάθε μια σφαίρα της εξάδας του αντίστροφου συστήματος και ταυτόχρονα διέρχονται από το κέντρο της αντιστροφής. Τα σχήματα που έχουν μέσω της αντιστροφής ως εικόνες τους τις δύο αυτές εφαπτόμενες σφαίρες είναι επίπεδα που δεν διέρχονται από το κέντρο της αντιστροφής Ο αλλά είναι εφαπτόμενα σε όλες τις σφαίρες της αρχικής εξάδας. Έτσι η εξάδα ενός ελλειπτικού τύπου εφάπτεται στις πλευρές μιας δίεδρης γωνίας την οποία σχηματίζουν αυτά τα δύο εφαπτόμενα επίπεδα. Αν Αυξήσουμε την ακτίνα της σφαίρας Γ έτσι ώστε η ελλειπτική εξάδα να προσεγγίζει την παραβολική τότε τα δύο εφαπτόμενα επίπεδα τείνουν να ταυτιστούν και πράγματι αυτό συμβαίνει στην περίπτωση της παραβολικής εξάδας τα δύο εφαπτόμενα επίπεδα πράγματι ταυτίζονται και μάλιστα παίρνουν την θέση του επιπέδου που είναι σχεδιασμένο με διακεκομμένες γραμμές στο σχήμα 3. Στο σύστημα που προκύπτει από την αντιστροφή στην περίπτωση του παραβολικού συστήματος οι δύο εφαπτόμενες σφαίρες γίνονται μια η οποία διέρχεται από το Ο.
Τέτοια ή τέτοιες σφαίρες δεν υπάρχουν στην περίπτωση της υπερβολικής εξάδας.

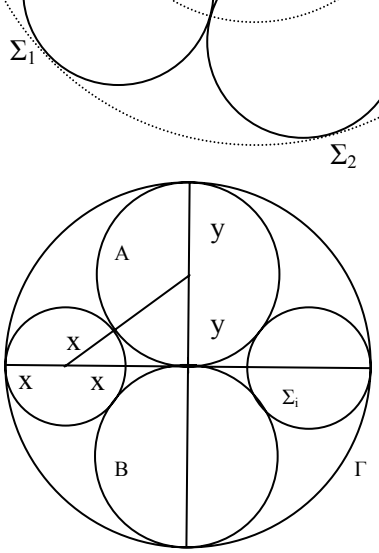
Κάθε εξάδα που προκύπτει από την αντιστροφή (αντίστροφο σύστημα) έχει απειρία σφαιρών που περιέχουν την εξάδα και εφάπτονται σε αυτήν. Τα κέντρα τους είναι συγγραμμικά και βρίσκονται πάνω στην κάθετη ευθεία στο κεντρικό επίπεδο (μεσοπαράλληλο επίπεδο των παράλληλων επιπέδων Α΄ και Β΄ τα οποία είναι οι εικόνες των σφαιρών Α και Β) που διέρχεται από το κέντρο της Γ΄. Όλες οι εφαπτόμενες σφαίρες που δεν διέρχονται από το κέντρο αντιστροφής Ο αντιστρέφονται σε σφαίρες που είναι εφαπτόμενες στην αρχική εξάδα σφαιρών και στην περίπτωση της ελλειπτικής εξάδας μια από αυτές παίζει το ρόλο του εξωτερικού σταθερού κύκλου του Steiner.

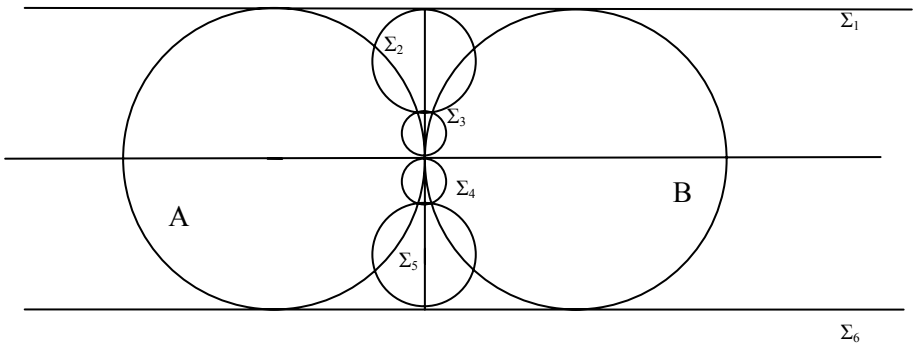
Ας θεωρήσουμε τώρα εξάδες που εφάπτονται σε δύο σφαίρες Α και Β που είναι ίσες όμως η ακτίνα της τρίτης σφαίρας Γ αυξάνεται συνεχώς. Οι σφαίρες Α,Β,Γ είναι φυσικά σταθερές για κάθε εξάδα οπότε όταν λέμε ότι η σφαίρα Γ είναι μια μεταβλητή σφαίρα ουσιαστικά αυτό που θέλουμε να μελετήσουμε είναι πως επιδρά στην εξάδα η μεταβολή της ακτίνας της σφαίρας Γ.



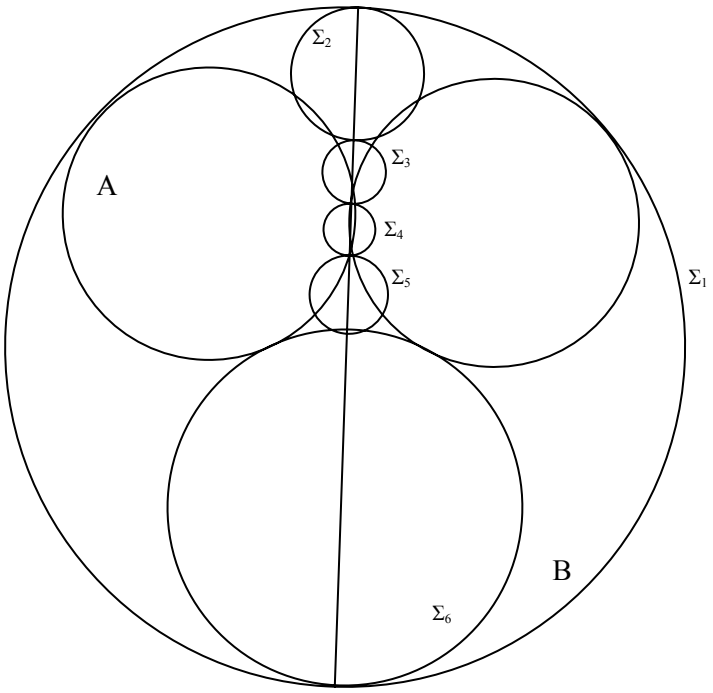
Σχήμα 4

Όταν η σφαίρα Γ αυξάνεται τόσο ώστε η ακτίνα της να τείνει στο άπειρο τότε η σφαίρα Γ τείνει να γίνει επίπεδο και η εικόνα της μέσω της αντιστροφής ως προς το Ο τείνει να γίνει σφαίρα που να διέρχεται από το σημείο Ο και αυτό πράγματι γίνεται όταν η σφαίρα Γ γίνεται πραγματικά ένα επίπεδο. Καθώς η σφαίρα Γ΄ συνεχίζει να μεγαλώνει έχοντας τώρα το σημείο Ο στο εσωτερικό της τότε το επίπεδο Γ επιστρέφει πάλι στο σφαιρικό σχήμα έχοντας όμως τώρα αλλάξει κατεύθυνση καμπυλότητας περιέχοντας τώρα τις έξι σφαίρες της εξάδας καθώς επίσης και τις σφαίρες Α,Β. Η σφαίρα Γ είναι το ανάλογο του εξωτερικού κύκλου της αλυσίδας του Steiner. Αυτό που είναι σημαντικό να πούμε εδώ είναι ότι αυτό είναι και το σημείο από το οποίο ξεκίνησε ο Soddy. Αυτός θεώρησε την περίπτωση αυτή ως την απλούστερη περίπτωση σφαιρικής εξάδας. Στο σχήμα 4 η σφαίρα Γ έχει ακτίνα 1, οι σφαίρες Α, Β εφάπτονται στο επίπεδο του χαρτιού στο σημείο Ο και βρίσκονται σε διαφορετικούς ημιχώρους ως προς το επίπεδο του χαρτιού, παριστάνονται με διακεκομμένες γραμμές και η καθεμία έχει ακτίνα 1/2 ενώ οι έξι ίσες σφαίρες της εξάδας έχουν ακτίνα 1/3.Ειναι πολύ εύκολο να υπολογίσουμε τις ακτίνες των κύκλων αν ξέρουμε ότι η ακτίνα του Γ είναι 1 μέσω Πυθαγορείου θεωρήματος.





Έχουμε αποδείξει προηγουμένως ότι τα σημεία επαφής μεταξύ των σφαιρών μιας εξάδας βρίσκονται πάνω σε ένα κύκλο (Κ). Υπάρχει μια περίπτωση όπου αυτό δεν ισχύει, εκτός και αν θεωρήσουμε την ευθεία ως ειδική περίπτωση κύκλου. Στην περίπτωση αυτή ο κύκλος (Κ) που περιέχει τα σημεία επαφής των σφαιρών του αντίστροφου συστήματος (αντίστροφο σύστημα είναι το σύστημα των έξι σφαιρών που προκύπτει από την αντιστροφή του αρχικού hexlet) διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής Ο. Σε αυτήν την περίπτωση η εικόνα του κύκλου (Κ) είναι μια ευθεία οπότε τα σημεία επαφής των σφαιρών του αρχικού hexlet όπως επίσης και τα κέντρα τους είναι συνευθειακά. Αυτό συμβαίνει τότε και μόνο τότε όταν οι τρεις σταθερές σφαίρες Α,Β,Γ είναι ίσες μεταξύ τους. Ας παρακολουθήσουμε την συμπεριφορά μιας σφαίρας Σ_1 καθώς αυτή κινείται, για να συμπληρωθεί μια εξάδα σφαιρών. Η σφαίρα Σ_1 είναι μικρή καθώς περνάει μέσα από το κενό που δημιουργούν οι τρεις σταθερές σφαίρες Α,Β,Γ και αυξάνει σε μέγεθος μέχρι να γίνει επίπεδο που εφάπτεται και στις τρεις αυτές. σφαίρες Α,Β,Γ. Όταν η σφαίρα Σ_1 είναι επίπεδο τότε στο αντίστροφο σύστημα η εικόνα της διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής Ο. Μην ξεχνάμε ότι στο συγκεκριμένο hexlet τα σημεία επαφής των εικόνων Σ'_i των σφαιρών Σ_i βρίσκονται σε κύκλο που διέρχεται από το Ο .Όταν λοιπόν ο κύκλος Σ_1 διέλθει από το σημείο Ο το σημείο αυτό είναι υποχρεωτικά και σημείο επαφής μιας άλλης σφαίρας Σ'_i με την Σ'_1 .Έστω ότι αυτή η σφαίρα είναι η Σ'_6 οπότε η αντίστοιχη σφαίρα Σ_6 που έχει εικόνα την Σ'_6 θα είναι και αυτή ένα επίπεδο που εφάπτεται στις Α,Β,Γ. Καθώς η σφαίρα Σ_1 συνεχίζει να κινείται ξαναγίνεται σφαίρα τώρα με αντίθετη καμπυλότητα και έτσι περιέχει τώρα όλες τις υπόλοιπες οκτώ σφαίρες και εφάπτεται εσωτερικά με την σφαίρα Α,Β,Γ,Σ_2 καθώς και με την Σ_6 .Καθώς η Σ_2 συνεχίζει να κινείται και να μεγαλώνει η Σ_6 μικραίνει και η Σ_1 πλησιάζει και τελικά γίνεται το εφαπτόμενο επίπεδο στις σφαίρες Α,Β,Γ θέση που λίγο πιο πριν κατείχε η σφαίρα Σ_6. Τότε ξανααντιστρέφει τον προσανατολισμό της καμπυλότητας της και επαναλαμβάνεται η διαδικασία από την αρχή. Αν παρατηρήσουμε καλά το κέντρο της Σ_1 έχει διαγράψει ολόκληρη την ευθεία των κέντρων των σφαιρών Σ_i



Πρόβλημα Malfatti Steiner

Εισαγωγικά και ιστορικά στοιχεία

Το πρόβλημα του Malfatti τέθηκε για πρώτη φορά από τον Ιταλό μαθηματικό Giovanni Francesco Malfatti (1731-1807) το 1803.

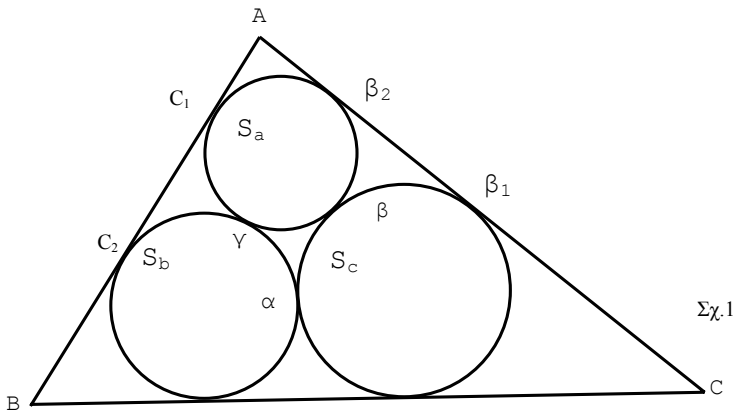
Το πρόβλημα έχει δύο όψεις. Η μια είναι να μεγιστοποιηθεί η περιοχή που περιέχεται σε τρεις κύκλους μη τεμνόμενους και οι οποίοι βρίσκονται μέσα σε ένα τρίγωνο. Ο Malfatti πίστευε ότι η απάντηση βρίσκεται στο να πάρουμε τους τρεις κύκλους εφαπτόμενους μεταξύ τους οι οποίοι είναι επίσης εφαπτόμενοι ταυτόχρονα και στις πλευρές του τριγώνου. Αυτό βέβαια αποδείχθηκε λανθασμένο (Lob and Richmond 1929).

Η άλλη όψη του προβλήματος είναι να δοθεί μια Ευκλείδεια κατασκευή των τριών αυτών κύκλων. Ο Malfatti έδωσε μόνο μια αναλυτική απόδειξη. Υπολόγισε μόνο τις ακτίνες των κύκλων. Το κλειδί της λύσης βρέθηκε από τον J. Steiner (1796-1863). Ο J. Steiner δεν απέδειξε την κατασκευή αυτή. Η κατασκευή αυτή είναι μια καταπληκτική και απίθανης ευρηματικότητας επινόηση, ώστε δεν θα μπορούσε να υποθέσει κανείς έτσι εύκολα, ότι ο Steiner απλώς την μάντεψε. Ο Steiner παρόλο που δεν παρουσίασε λεπτομερή απόδειξη για την κατασκευή του, εντούτοις έδωσε ενδείξεις για το πώς η κατασκευή αυτή θα μπορούσε να αποδειχθεί. Σε άλλο σημείο της εργασίας μας και συγκεκριμένα στο κεφάλαιο που αναφέρεται στις ιστορικές ρίζες της γεωμετρικής αντιστροφής έχουμε αναφερθεί στο πρόβλημα αυτό και συγκεκριμένα στον ισχυρισμό του Plücker ότι ο Steiner δεν είχε λύση του προβλήματος. Η κατασκευή του Steiner με την απόδειξη που έδωσε ο Hart το 1857 μπορεί να βρεθεί σε πάρα πολλά βιβλία. Ο Steiner επίσης έδωσε γενικεύσεις όπως η περίπτωση της αντικατάστασης των πλευρών του τριγώνου με κύκλους. Πολλοί μαθηματικοί δούλεψαν με αυτό το πρόβλημα. Ανάμεσα σε αυτούς ήταν και οι μαθηματικοί Cayley (1852), ο Schellbach (1853), ο Clebsch (1857). Στο αρχικό πρόβλημα του Malfatti (χωρίς τις διάφορες γενικεύσεις του) υπάρχουν κάπου 32 λύσεις. Οι διάφορες γενικεύσεις κατά την έρευνα του Clebsch δίνουν περί τις 64 συνολικά λύσεις.

Η κατασκευή και η απόδειξή της

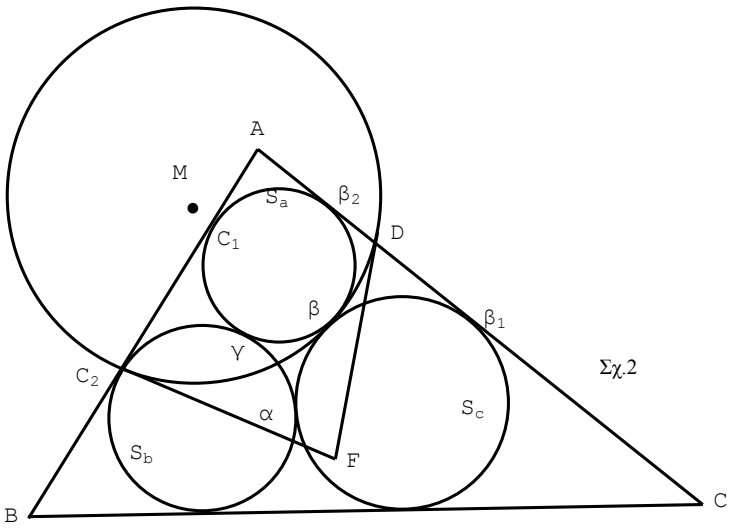
Θα πάρουμε το τρίγωνο ABC και θα υποθέσουμε ότι το πρόβλημα έχει λυθεί.

Ας θεωρήσουμε ότι οι κύκλοι που ζητάμε είναι οι S_a, S_b,S_c . Ας υποθέσουμε ότι τα σημεία επαφής είναι τα α,β,γ και ότι τα σημεία επαφής των κύκλων με την πλευρά AB είναι τα C_1 και C_2 και με την CA είναι τα β_1 και β_2.



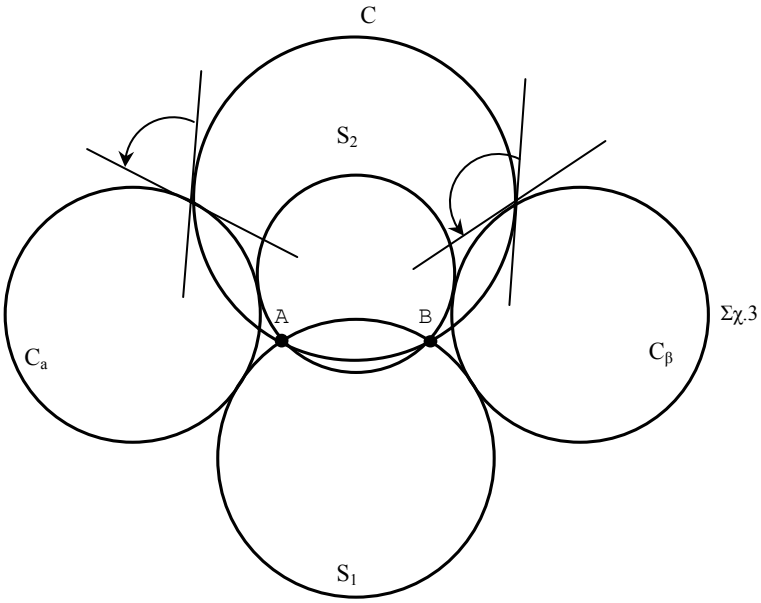
Σχ.1

Γράφουμε τον κύκλο ο οποίος είναι εφαπτόμενος στους κύκλους S_a, S_c, στο σημείο επαφής τους β και ο οποίος διέρχεται από το C_2. Θα ονομάσουμε αυτόν τον κύκλο S_M. Η κατασκευή αυτή είναι απλή οπότε δεν θα την παραθέσουμε. Το κέντρο του S_M είναι το σημείο M. Ας υποθέσουμε ότι ο κύκλος S_M τέμνει την πλευρά CA στο σημείο D. Φέρνουμε τις εφαπτόμενες στον κύκλο S_M στα σημεία C_2 και D. Ας υποθέσουμε ότι F είναι το σημείο τομής των δύο εφαπτόμενων.



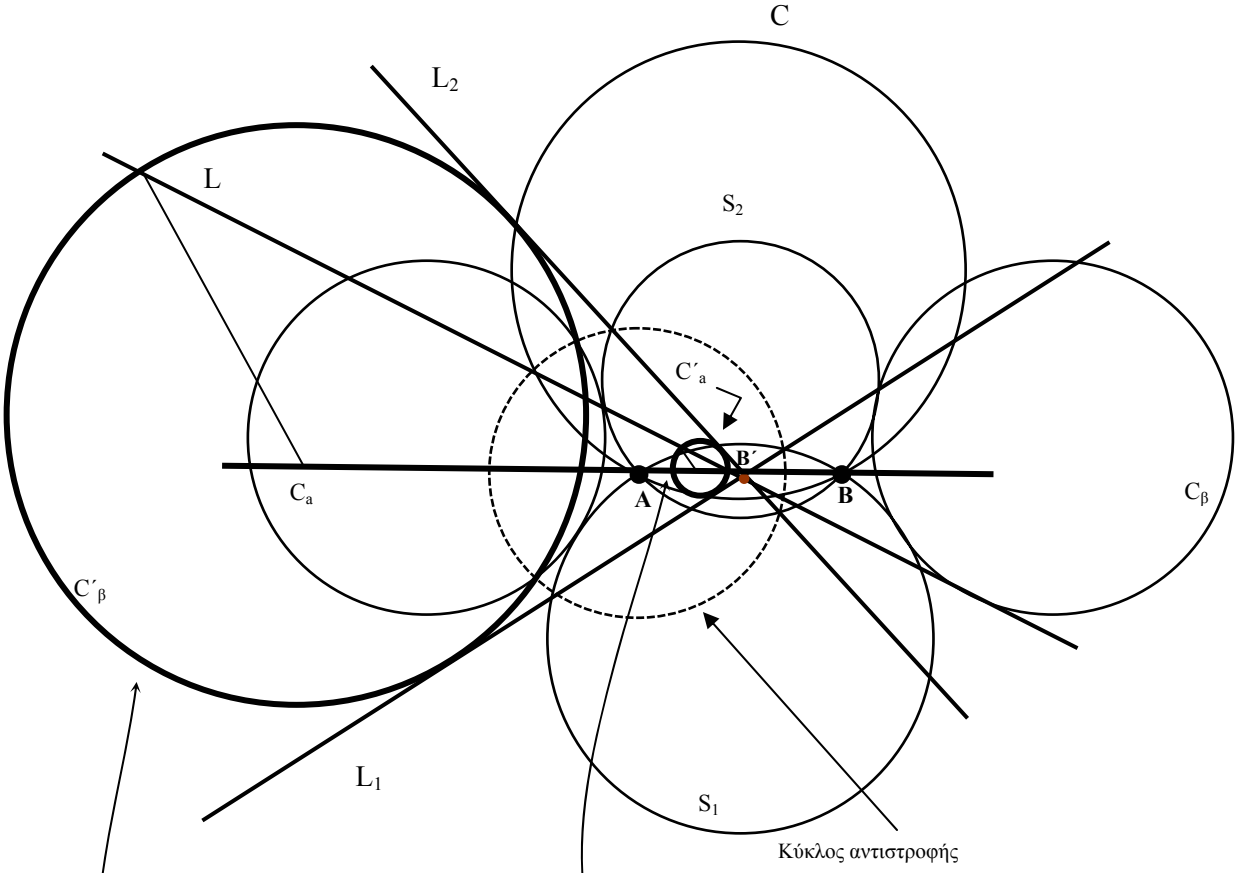
Σχ.2

Ο κύκλος S_M τέμνει τον κύκλο S_b και την πλευρά CA υπό ίσες γωνίες. Δηλαδή η γωνία $\angle AC_2F$ είναι παραπληρωματική της γωνίας $\angle FDA$.

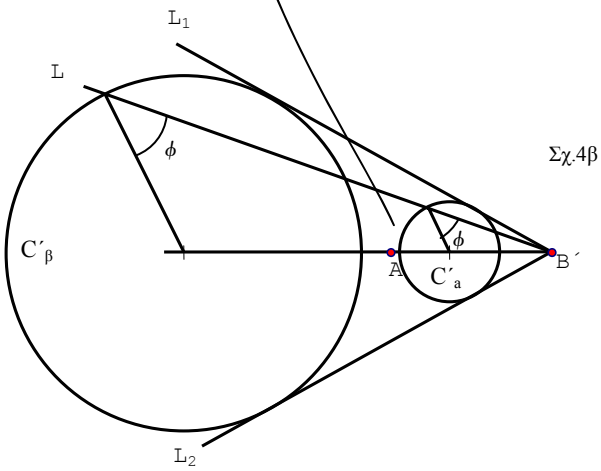


Σχ.3

Απόδειξη:
Θα αποδείξουμε πρώτα το κάτωθι θεώρημα:
Θεώρημα Α:
Αν δοθούν δύο κύκλοι S_1 και S_2 οι οποίοι τέμνονται στα σημεία Α και Β τότε κάθε κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Α και Β τέμνει όλους τους κύκλους της ίδιας μορφής με τους κύκλους C_a και C_b οι οποίοι είναι εφαπτόμενοι στους S_1 και S_2 υπό ίσες γωνίες. (παραπληρωματικές αν οι κύκλοι βρίσκονται σε αντίθετες πλευρές – όπως στο σχήμα)



Σχ.4α

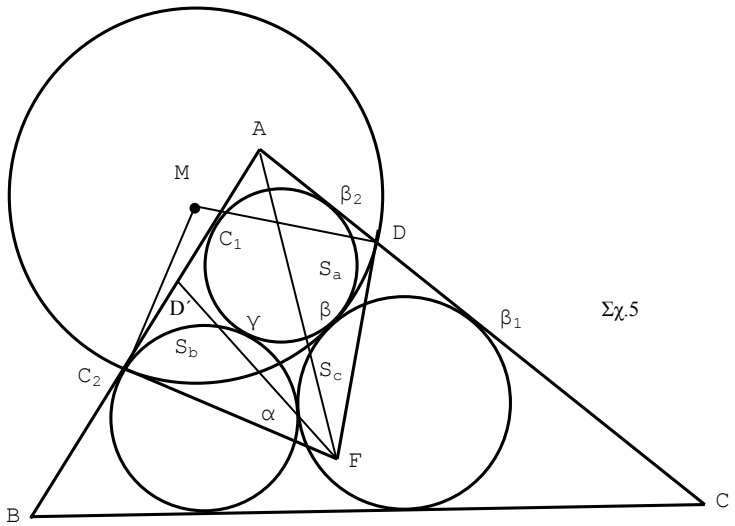


Σχ.4β

Το σχήμα είναι μια λεπτομέρεια του προηγούμενου σχήματος και δίνει μια μεγέθυνση των δύο κύκλων C'_a και C'_β

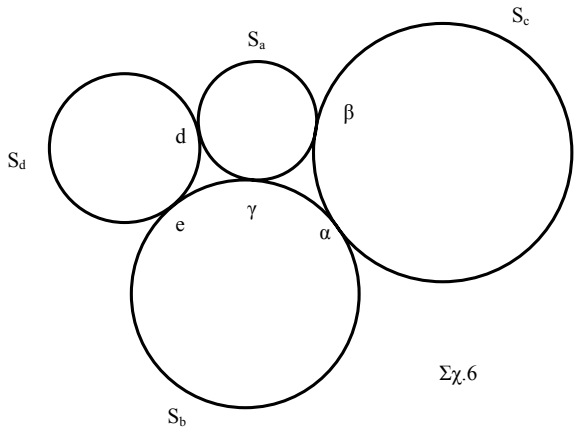
Αντιστρέφουμε το σύστημα ως προς κύκλο κέντρου Α. Με την αντιστροφή αυτή ο κύκλος C γίνεται η ευθεία L. Ο κύκλος S_1 απεικονίζεται στην ευθεία L_1. Επίσης ο κύκλος S_2 αντιστοιχίζεται στην ευθεία L_2.
Το σημείο Α με την αντιστροφή απεικονίζεται στο σημείο στο άπειρο.

Το σημείο Β απεικονίζεται στο σημείο Β΄ (σημείο στο οποίο συντρέχουν οι L,L_1,L_2 – και αυτό διότι οι αντίστοιχοι κύκλοι S_1 , S_2 και C διέρχονται και οι τρεις από το Β).
Οι κύκλοι C_a και C_β απεικονίζονται στους κύκλους C'_a και C'_β αφού δεν διέρχονται από το κέντρο αντιστροφής Α. Οι κύκλοι C'_a και C'_β είναι εφαπτόμενοι στις ευθείες L_1 και L_2 διότι οι κύκλοι C_a και C_β είναι εφαπτόμενοι στους κύκλους S_1 , S_2 .
Η αντιστροφή απεικονίζει το σημείο Β στο σημείο Β΄ το οποίο βρίσκεται στην ημιευθεία ΑΒ. Οι κύκλοι C'_a και C'_β είναι εφαπτόμενοι στις ευθείες L_1 και L_2 οι οποίες τέμνονται στο σημείο Β΄. Άρα το σημείο Β΄ είναι κέντρο ομοιοθεσίας των κύκλων C'_a και C'_β. Αφού λοιπόν οι κύκλοι C'_a και C'_β είναι ομοιόθετοι ως προς το σημείο Β τα σημεία στα οποία η L τέμνει τους C'_a και C'_β είναι αντίστοιχα σημεία ως προς την ομοιοθεσία αυτή οπότε οι ακτίνες προς τα σημεία αυτά είναι μεταξύ τους παράλληλες και σχηματίζουν γωνία ϕ με την ευθεία L. Έτσι η ευθεία L σχηματίζει ίσες γωνίες με τους κύκλους C'_a και C'_β. Η αντιστροφή διατηρεί τις γωνίες οπότε θα έχουμε ότι και ο αρχικός κύκλος C (εικόνα του οποίου είναι η L) τέμνει τους κύκλους C_a και C_β (εικόνες των οποίων είναι οι C'_a και C'_β) υπό ίση γωνία. Αν οι κύκλοι C_a και C_β βρίσκονται σε αντίθετες πλευρές τότε οι γωνίες είναι παραπληρωματικές.
Στην περίπτωσή του σχήματος 2 οι κύκλοι S_1 και S_2 του θεωρήματος Α είναι οι κύκλοι S_a και S_c. Τα σημεία Α και Β του θεωρήματος Α συμπίπτουν με το σημείο β του σχήματος μας διότι στην περίπτωση που εξετάζουμε οι κύκλοι S_a και S_c είναι μεταξύ τους εφαπτόμενοι. Οι εφαπτόμενοι κύκλοι C_a και C_β είναι στο σχήμα 2 ο κύκλος C_b και ο γενικευμένος κύκλος CA, δηλαδή η ευθεία CA (κύκλος με κέντρο το σημείο στο άπειρο) αντίστοιχα. Ο κύκλος C του θεωρήματος Α είναι στην περίπτωση του σχήματος 2 ο κύκλος S_M οπότε ισχύει ότι ο κύκλος S_M τέμνει τους κύκλους C_b και CA κατά γωνίες οι οποίες είναι παραπληρωματικές. Δηλαδή έχουμε $\angle FC_2A+\angle FDA=180^o$

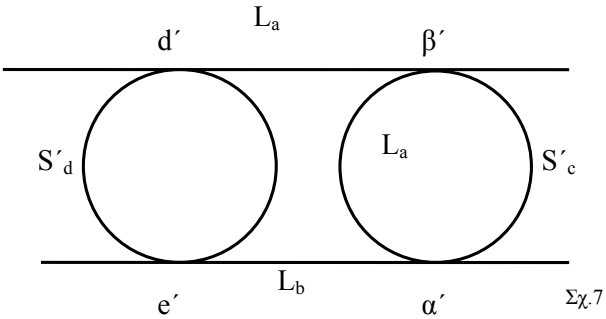


Ας θεωρήσουμε τώρα τα τετράπλευρα MC_2FD και AC_2FD.
Αποδείξαμε ότι οι απέναντι γωνίες με κορυφή το C_2 και το D στο τετράπλευρο AC_2FD έχουν άθροισμα 180°.
Στο τετράπλευρο MC_2FD η γωνία $\angle MC_2F=90^o$ διότι η C_2F είναι εφαπτομένη του κύκλου S_M οπότε είναι κάθετη στην ακτίνα MC_2 στο σημείο C_2 . Παρομοίως η FD είναι κάθετη στην MD. Οπότε και στην περίπτωση αυτή έχουμε το άθροισμα των δύο απέναντι γωνιών είναι 180°. Επίσης τα δύο τετράπλευρα έχουν την γωνία $\angle C_2FD$ κοινή οπότε και $\angle C_2MD=\angle C_2AD$.
Φέρνουμε την AF και θα αποδείξουμε ότι η AF είναι η διχοτόμος της $\angle A =\angle C_2MD$
Ας υποθέσουμε ότι D΄ είναι το σημείο εκείνο πάνω στην AB για το οποίο ισχύει $FC_2=FD'$

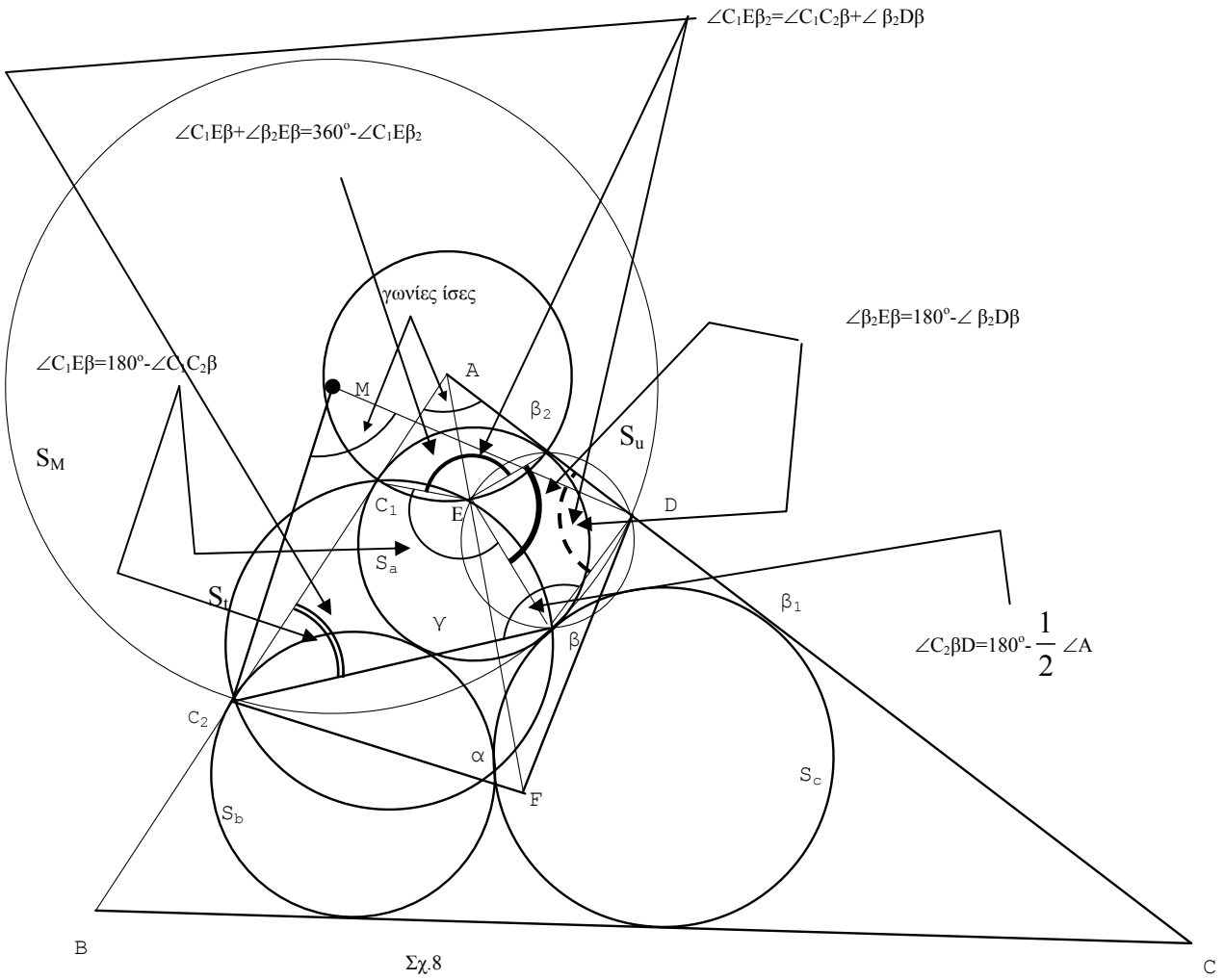
Τα τρίγωνα AD΄F= ADF διότι : 1. AF=AF (κοινή) 2. FD=FD΄ (διότι $FD=FC_2$ ως εφαπτόμενες στο κύκλο S_M και πήραμε $FC_2=FD'$) 3. ∠AD΄F= ∠ ADF (διότι το τρίγωνο C_2FD' είναι ισοσκελές οπότε η ∠ ADF είναι παραπληρωματική στην $\angle AC_2F$ όμως έχουμε δείξει ότι και ∠ ADF είναι παραπληρωματική της $\angle AC_2F$. Οπότε ∠AD΄F= ∠ADF).
Ισχυρισμός: Τα σημεία α, β, C_1 ,C_2 βρίσκονται σε ένα κύκλο. Αυτόν τον κύκλο θα τον ονομάσουμε S_t και θα αποδείξουμε τον ισχυρισμό ευθύς αμέσως:
Θεώρημα:
Δίνονται δύο εφαπτόμενοι μεταξύ τους κύκλοι S_a και S_b και το σημείο επαφής τους είναι το σημείο γ. Θεωρούμε τους κύκλους S_c, S_d οι οποίοι εφάπτονται με τους S_a και S_b στα σημεία α,β,d,e. Τα σημεία α,β,d,e βρίσκονται πάνω στον ίδιο κύκλο.
Η απόδειξη θα γίνει πάλι με αντιστροφή. Θα πάρω ως κέντρο του κύκλου της αντιστροφής το σημείο γ. Οι κύκλοι S_a και S_b γίνονται ως προς την αντιστροφή αυτή δύο ευθείες L_a και L_b . Το σημείο γ ως κέντρο του κύκλου αντιστροφής απεικονίζεται στο σημείο στο άπειρο. Επειδή οι κύκλοι S_a και S_b δεν έχουν δεύτερο κοινό σημείο γίνονται οι ευθείες L_a και L_b οι οποίες είναι μεταξύ τους παράλληλες. Οι κύκλοι S_c, S_d είναι εφαπτόμενοι και στους δύο κύκλους S_a και S_b και ως εκ τούτου οι εικόνες τους πρέπει να είναι εφαπτόμενες στις εικόνες των κύκλων S_a και S_b. Προφανώς τα σημεία α΄, β΄,d΄,e΄ βρίσκονται σε κύκλο διότι το α΄β΄d΄e΄ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο . Η εικόνα αυτού του κύκλου (α΄,β΄,d΄,e΄) μέσω της αντιστροφής ως προς τον κύκλο κέντρου γ διέρχεται από τα σημεία α, β,d,e αφού τα α, β,d,e είναι εικόνες των α΄, β΄,d΄,e΄. Αφού τα α΄, β΄,d΄,e΄ είναι ομοκυκλικά το ίδιο θα ισχύει και για τα σημεία α, β,d,e. Στην περίπτωσή του σχήματος 5 ο κύκλος S_d είναι γενικευμένος κύκλος, δηλαδή ευθεία και συγκεκριμένα η ευθεία C_1C_2, η οποία εφάπτεται στους κύκλους S_a και S_b. Έτσι αποδείξαμε ότι τα σημεία α,β, C_1,C_2 βρίσκονται σε κύκλο τον οποίο και ονομάζουμε κύκλο S_t



Σχ.6



Σχ.7

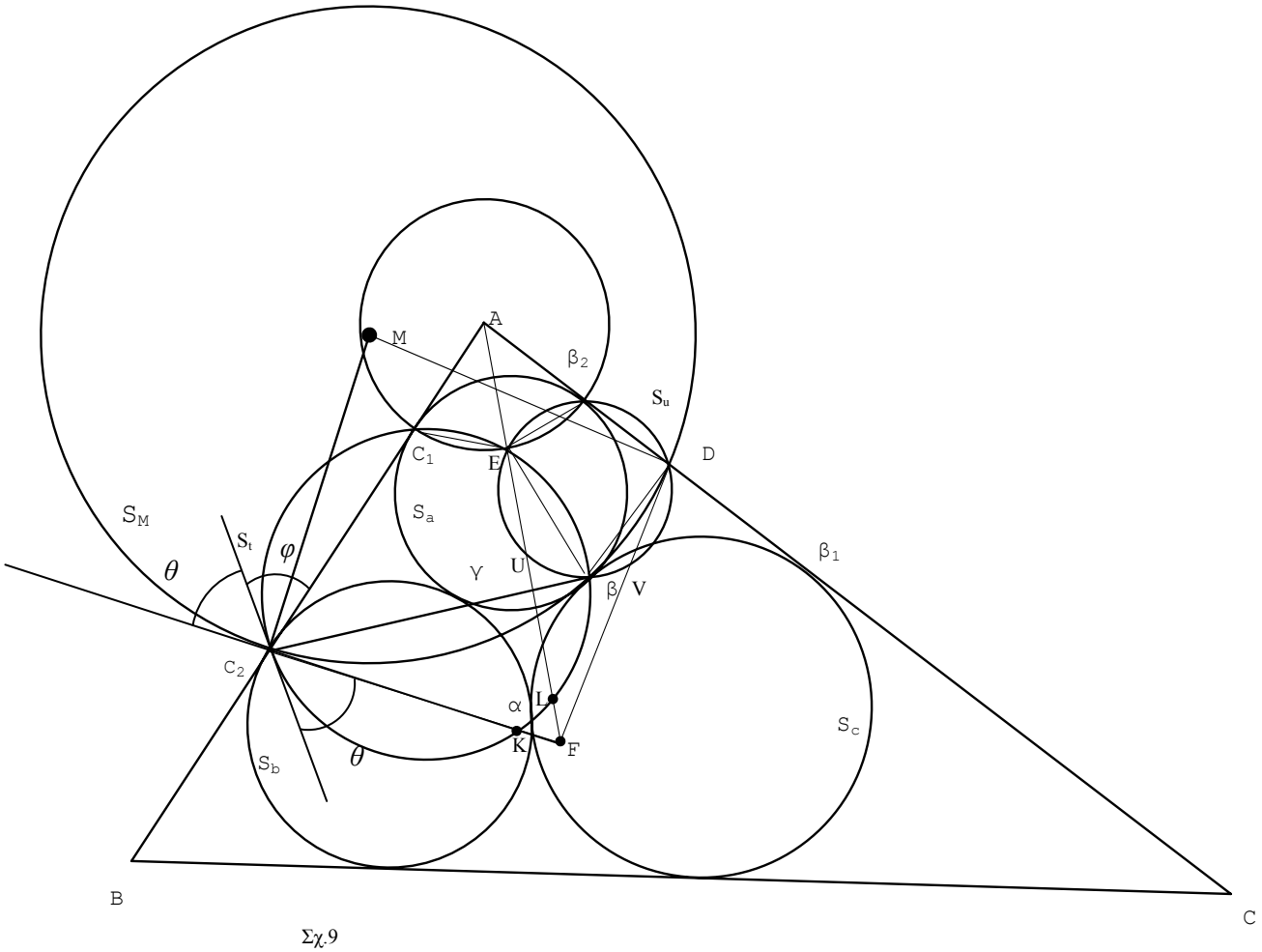


Σχ.8

Σχεδιάζουμε τον κύκλο που διέρχεται από τα σημεία β,β_2,D. Αυτόν τον κύκλο τον ονομάζουμε S_u. Ο κύκλος S_u τέμνει τον κύκλο S_t στο σημείο Ε.
Φέρνουμε το τμήμα που έχει άκρα τα C_1 και Ε, το τμήμα που έχει άκρα το β_2 και το Ε, το τμήμα με άκρα τα C_2 και β και το τμήμα με άκρα το Ε και το β.
Θα αποδείξουμε ότι το Ε βρίσκεται πάνω στον κύκλο με κέντρο το σημείο Α ο οποίος διέρχεται από τα σημεία C_1 και β_2 (τα τμήματα AC_1 και $A\beta_2$ είναι ίσα μεταξύ τους ως εφαπτόμενα στον κύκλο S_a).
Από τον κύκλο S_t έχουμε $\angle C_1E\beta=180^o-\angle C_1C_2\beta$ (διότι το τετράπλευρο $EC_1C_2\beta$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο άρα οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές).
Από τον κύκλο S_u έχουμε $\angle\beta_2E\beta=180^o-\angle\ \beta_2D\beta$ (πάλι το τετράπλευρο $E\beta_2D\beta$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο).
Προσθέτοντας έχουμε : $\angle C_1E\beta+\angle\beta_2E\beta=360^o-(\angle C_1C_2\beta+\angle\ \beta_2D\beta)$
Όμως $\angle C_1E\beta+\angle\beta_2E\beta=360^o-\angle C_1E\beta_2$
Άρα $\angle C_1E\beta_2=\angle C_1C_2\beta+\angle\ \beta_2D\beta$
Όμως $\angle C_1C_2\beta+\angle\ \beta_2D\beta=360^o-\angle A-\angle C_2\beta D$
Οπότε $\angle C_1E\beta_2=360^o-\angle A-\angle C_2\beta D$
Η γωνία $\angle C_2\beta D$ είναι μια γωνία στον κύκλο S_M και $\angle C_2\beta D=180^o-\frac{1}{2}\angle A$ (Αφού: $\angle A=\angle C_2MD$ και $\angle C_2MD$ είναι επίκεντρη γωνία που βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{C_2D}$.

Η γωνία $\angle C_2\beta D$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο $360^o - \widehat{C_2D}$ άρα $\widehat{C_2BD} = \frac{1}{2}\left(360^o - \widehat{C_2D}\right) = 180^o - \frac{1}{2}\widehat{A}$).

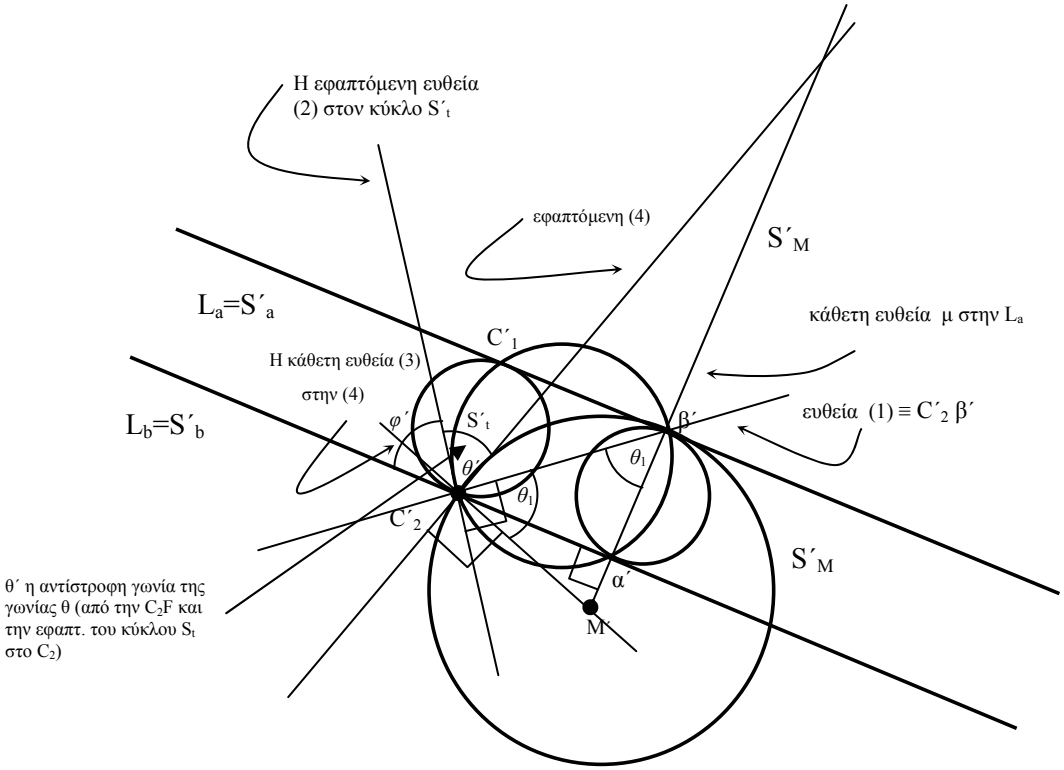
Τελικά $\angle C_1E\beta_2 = 360^o - \angle A - 180^o + \frac{1}{2}\angle A = 180^o - \frac{1}{2}\angle A$. Άρα το Ε βρίσκεται σε κύκλο με κέντρο το Α ο οποίος διέρχεται από το C_1 και το β_2.



Σχ.9

Ας θεωρήσουμε τον κύκλο S_t . Είναι C_1C_2=EL.
{Διότι: $AC_1 \cdot AC_2$=AE · AL (Δύναμη σημείου ως προς κύκλο) και AC_1=AE}
Θα δείξουμε ότι $C_2K=C_1C_2$.
Για να δείξουμε ότι τα δύο αυτά τμήματα του S_t είναι ίσα θα πρέπει ότι οι αντίστοιχες γωνίες υπό χορδής και εφαπτομένης είναι μεταξύ τους ίσες.
Αντιστρέφουμε το σύστημα ως προς ένα κύκλο κέντρου γ (σημείο επαφής των κύκλων S_a και S_b).
Τότε ο κύκλος S_a μετασχηματίζεται στην ευθεία L_a (σχήμα 10).
και ο κύκλος S_b μετασχηματίζεται στην ευθεία L_b.
Αυτές οι δύο ευθείες είναι παράλληλες διότι το μόνο κοινό σημείο των δύο κύκλων S_a ,S_b είναι το γ, το οποίο είναι το κέντρο του κύκλου αντιστροφής, άρα μετασχηματίζεται στο σημείο στο άπειρο.
Η ευθεία C_1C_2 γίνεται κύκλος που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής.
Έτσι ο κύκλος S_b και η ευθεία C_1C_2 αλλάζουν ρόλους μετά την αντιστροφή.

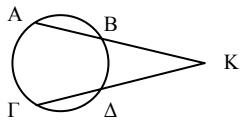
Πριν την αντιστροφή η ευθεία C_1C_2 είναι εφαπτόμενη στον κύκλο S_b. Μετά την αντιστροφή ο κύκλος $C'_1C'_2$ (εικόνα του C_1C_2) εφάπτεται στην ευθεία L_b και την ευθεία L_a. Το σημείο επαφής του κύκλου $C'_1C'_2$ και της ευθείας L_b είναι το C'_2 ενώ το σημείο επαφής του κύκλου $C'_1C'_2$ και της ευθείας L_α είναι το C'_1.
Τα ίδια συμβαίνουν (αλλαγή ρόλων δηλαδή) και για τον κύκλο S_α και την ευθεία C_1C_2.
Ο κύκλος S_M που διέρχεται από τα σημεία C_2 και β γίνεται ο κύκλος S'_M που διέρχεται από τα σημεία C'_2 και β΄.
Ο κύκλος S_t που διέρχεται από τα σημεία C_1,C_2 και β γίνεται ο κύκλος S'_t που διέρχεται από τα σημεία C'_1,C'_2 και β΄.
Ο κύκλος S_c που πριν την αντιστροφή ήταν εφαπτόμενος με τους κύκλους S_a και S_b γίνεται ο κύκλος S'_c ο οποίος εφάπτεται στις παράλληλες ευθείες L_α και L_b με σημεία επαφής τα α΄, β΄.
Ας δώσουμε την προσοχή μας τώρα στο σχήμα που προέκυψε από την αντιστροφή.
Επειδή η L_α είναι εφαπτομένη στον κύκλο S'_M στο σημείο β΄ η κάθετη (μ) σε αυτήν την εφαπτόμενη διέρχεται από το κέντρο M΄ του κύκλου S'_M.
Παίρνουμε την εφαπτόμενη ευθεία (4) στον κύκλο S'_M στο σημείο C'_2 που αυτός τέμνει την L_b. Επίσης παίρνουμε την κάθετη ευθεία (3) στην ευθεία (4) που διέρχεται από το σημείο C'_2. Η ευθεία (3) διέρχεται από το κέντρο M΄ του κύκλου S'_M.
Η C'_2 β΄ είναι η διάμετρος του κύκλου S'_t που είναι η εικόνα του κύκλου S_t.



Σχ.10
λεπτομέρεια

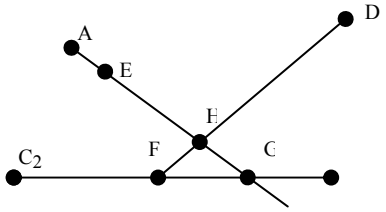
Αυτό συμβαίνει διότι το $C'_1C'_2\alpha'\beta'$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ο κύκλος S'_t διέρχεται και από τα τέσσερα σημεία C'_1,C'_2, β΄, α΄.
Στο σχήμα 10 η γωνία θ είναι η γωνία που σχηματίζεται από την C_2F (εφαπτόμενη στον κύκλο S_M στο σημείο C_2) και την εφαπτομένη στον κύκλο S_t στο σημείο C_2.
Με την αντιστροφή μετασχηματίζεται στην γωνία θ' ανάμεσα στην ευθεία (4) (εφαπτομένη στον κύκλο S'_M στο C'_2) και στην ευθεία (2) (εφαπτόμενη στον S'_t στο C'_2).

Η ευθεία (1) (δηλαδή η $C'_2\beta'$) είναι κάθετη στην ευθεία (2) διότι η ευθεία (1) είναι φορέας της διαμέτρου $C'_2\ \beta'$ του κύκλου S'_t και η ευθεία (2) είναι εφαπτομένη στον κύκλο S'_t στο σημείο C'_2.
Η ευθεία (3) από την άλλη μεριά (δηλαδή η C'_2M'), είναι κάθετη στην ευθεία (4).
Άρα οι γωνίες $\theta'=\theta_1$ (γωνίες με κάθετες πλευρές).
Στο σχήμα 10 η ϕ είναι η γωνία που σχηματίζεται από την εφαπτόμενη στον κύκλο S_t στο σημείο C_2 και την ευθεία C_1C_2.
Μετά την αντιστροφή από τον κύκλο S_t προκύπτει ο κύκλος S'_t και το αντίστοιχο του σημείου C_2 θα είναι το C'_2 . Η εφαπτόμενη λοιπόν στον κύκλο S'_t στο σημείο C'_2 είναι η ευθεία (2).
Η ευθεία C_1C_2 από την άλλη μεριά, που ήταν εφαπτόμενη στον κύκλο S_b, γίνεται όπως είπαμε, ο κύκλος $C'_1C'_2$ που είναι εφαπτόμενος στην ευθεία L_b.
Έτσι η εικόνα της ϕ είναι η ϕ' η οποία είναι η γωνία μεταξύ της ευθείας (2) και της L_b.
Ισχύει: $\phi=\phi'$.
Επειδή η $M'\beta'$ είναι κάθετη στην L_b (αφού η $M'\beta'$ είναι κάθετη στην L_α και οι L_α ,L_b είναι μεταξύ τους παράλληλες) και η ευθεία (1) είναι κάθετη στην ευθεία (2) θα έχουμε
$\theta_1=\phi'$
Το τρίγωνο $C_2\beta'M$ είναι ισοσκελές αφού M C_2 και $\beta'M$ είναι ίσες ως ακτίνες του κύκλου S'_M οπότε οι γωνίες $\angle\ C_2\beta'M=\angle\ \beta'C_2M=\theta_1$
Έχουμε όμως $\theta=\theta_1$ (ως αντίστροφες γωνίες)
Οπότε $\theta=\theta_1=\phi'=\phi$
Αυτό αποδεικνύει ότι $C_2K=C_1C_2$ διότι αυτά τα τμήματα είναι τα τμήματα που αντιστοιχούν στην εφαπτόμενη του S_t στο C_2 με ίσες γωνίες
Θα παρατηρήσουμε τώρα ότι οι κύκλοι S_t και S_u παίζουν παρόμοιο ρόλο ως προς τον κύκλο S_M και το σημείο F (υπάρχει συμμετρία ως προς τις σχέσεις τους με τον S_M και το σημείο F).
Αποδείξαμε ότι $C_2K=C_1C_2$ όπου το C_2K είναι πάνω στην εφαπτόμενη από το F στον S_M .
Ακριβώς η ίδια απόδειξη μπορεί να γίνει για αποδειχθεί ότι $D\beta_2=DV$ όπου DV είναι η εφαπτόμενη από το F στον S_M
Επειδή $AE=A\beta_2$ διότι είναι ακτίνες του ίδιου κύκλου θα είναι και $AE\cdot AU=A\beta_2\cdot AD$ (δύναμη σημείου ως προς κύκλο). Άρα EU=DV.
Μένει μια ακόμα εκκρεμότητα να αποδειχθεί. Συγκεκριμένα πρέπει να αποδείξουμε ότι η AE διέρχεται από το σημείο F.
Ας υποθέσουμε ότι η AE δεν περνάει από το σημείο F. Ας υποθέσουμε ότι G είναι το σημείο τομής της AE με την εφαπτομένη C_2F. Επίσης ας υποθέσουμε ότι H είναι το σημείο τομής της AE με την FD.
Έχουμε:
α) $C_2F=FD$ (εφαπτόμενες στον ίδιο κύκλο S_M)
Σε έναν κύκλο αν $AB=\Gamma\Delta$ τότε και $BK=K\Delta$ (Σχ.Ι)
Οπότε: β) $GC_2=GE$ (διότι τα τμήματα $C_2K=EL$)
γ) HD=HE (διότι τα τμήματα EU=DV)

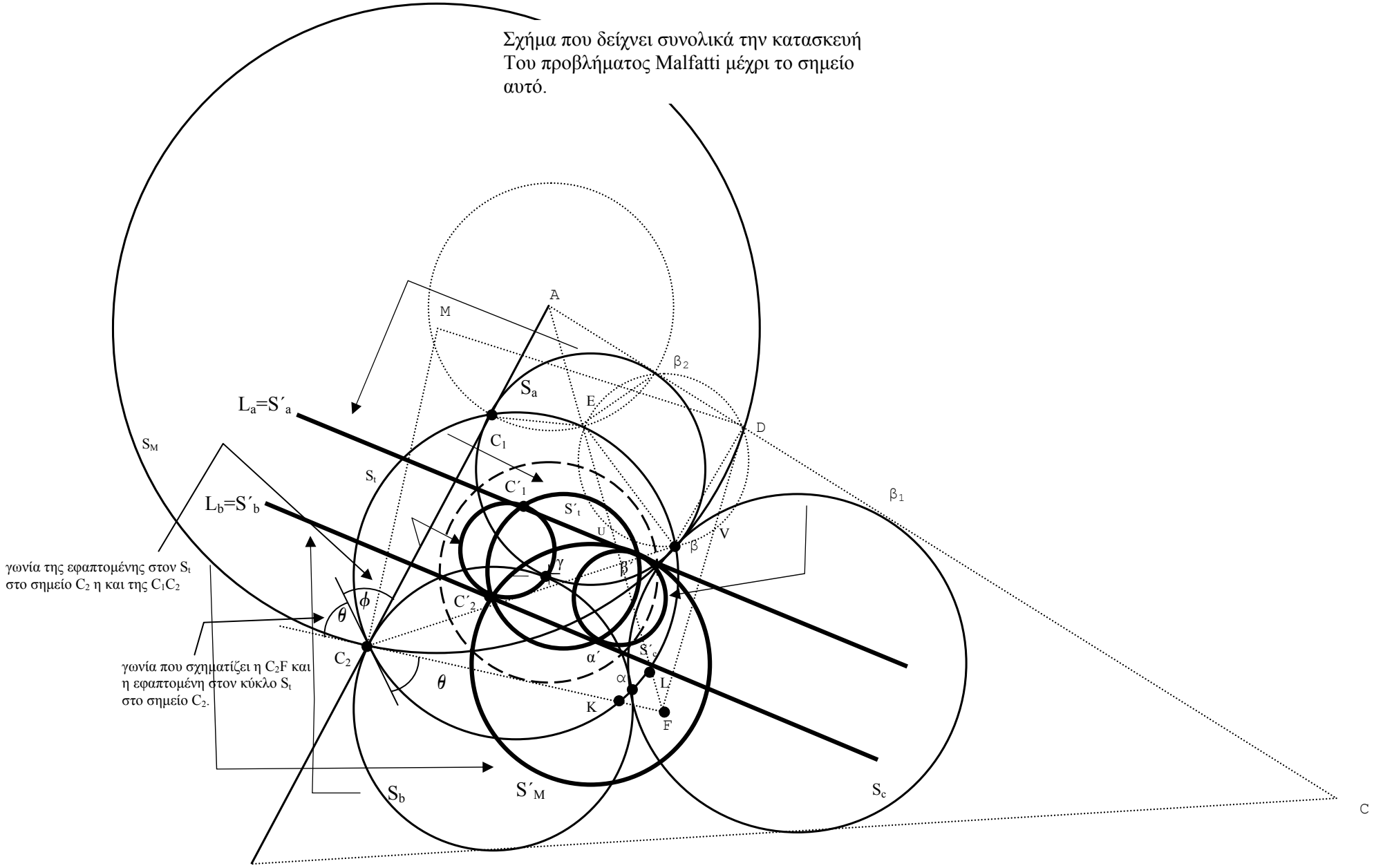


Σχ.Ι

Αφαιρούμε: (α)-(β) και έχουμε:
$GC_2- C_2F=FG=FD- GE=FH+HD-(GH+HE)\Rightarrow FG= FH+HD-(GH+HE)\Rightarrow FG+GH=FH$
Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε:F,G,H είναι συνευθειακά. Άρα ταυτίζονται . Από αυτό συμπεραίνουμε ότι το E βρίσκεται πάνω στην AF.

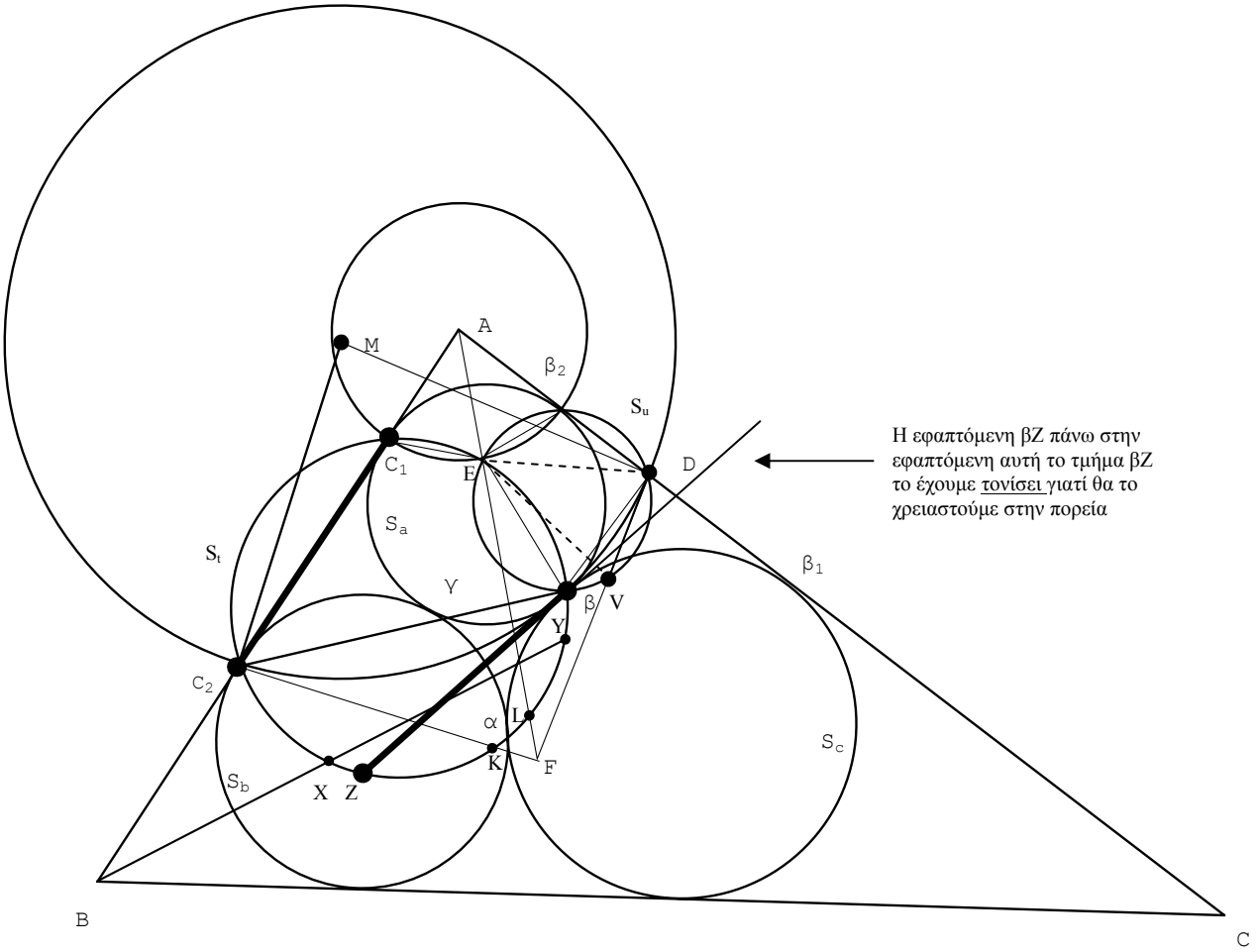


Σχήμα που δείχνει συνολικά την κατασκευή Του προβλήματος Malfatti μέχρι το σημείο αυτό.



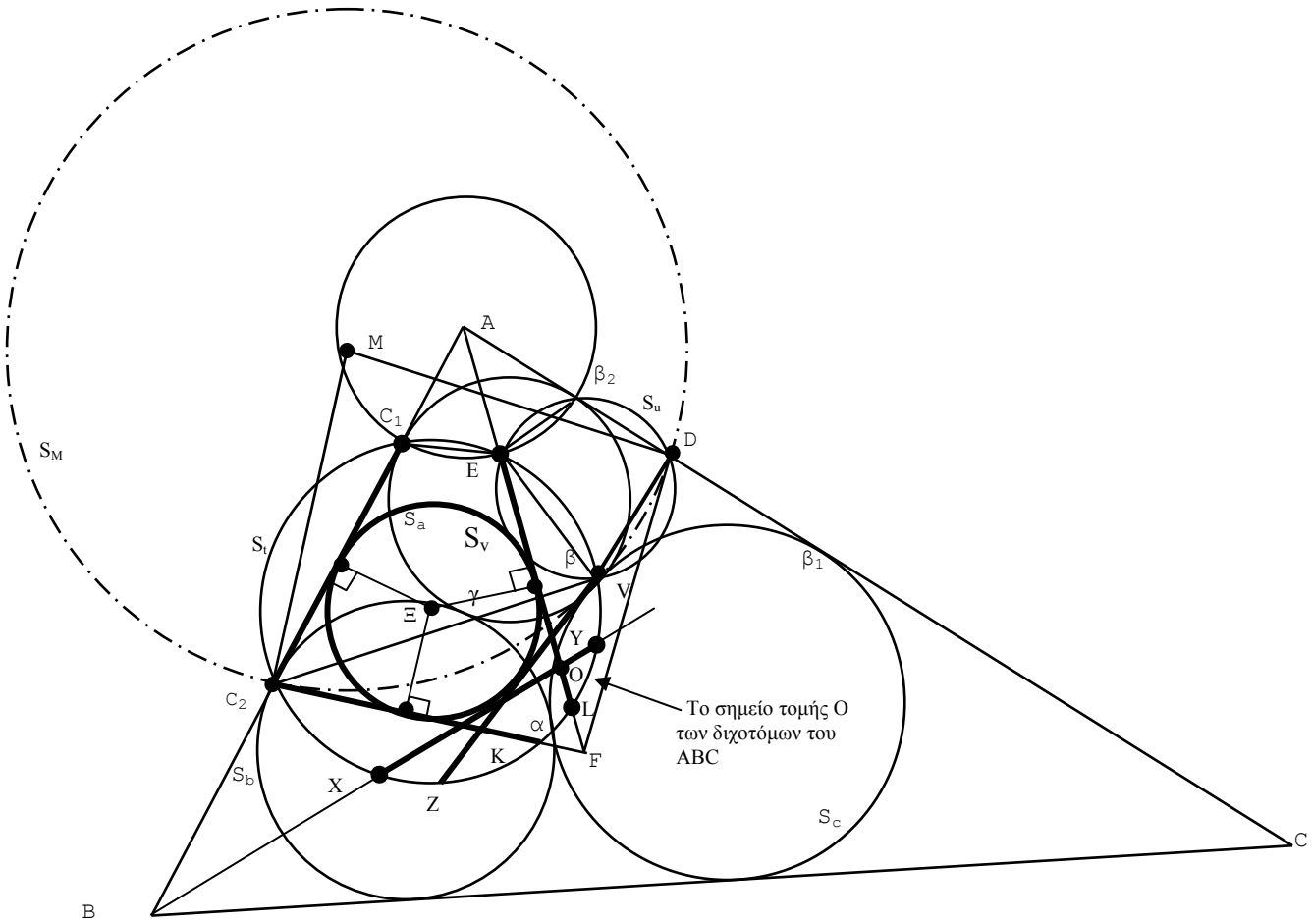
Σχ.10

Θα αποδείξουμε ότι το τμήμα XY το οποίο βρίσκεται πάνω στην διχοτόμο της γωνίας ∠B είναι επίσης ίσο με τα ευθύγραμμα τμήματα για τα οποία μόλις μιλήσαμε.
Πιο συγκεκριμένα $XY=C_2C_1=C_2K=EL$ (1)
Ο λόγος είναι ο εξής: Το τμήμα C_2C_1 παίζει έναν ισοδύναμο ρόλο ως προς τις δύο κορυφές του τριγώνου (A και B). Υπάρχει συμμετρία στην διαδικασία αντιμετώπισης (όπως



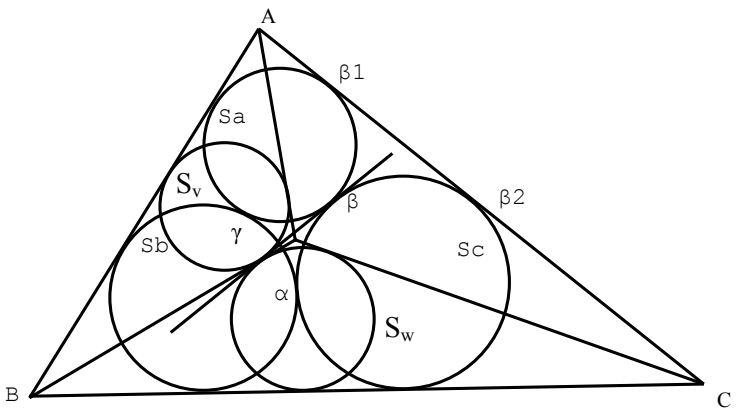
δουλέψαμε για την διχοτόμο AF μπορούμε να δουλέψουμε και για την διχοτόμο της γωνίας B και να αποδείξουμε τις ισότητες (1))
Πιο συγκεκριμένα:
Επικεντρώσαμε την προσοχή μας στους κύκλους S_a και S_u προς την μεριά της κορυφής A.
Βρήκαμε ότι $AC_1=AE$ και $C_2C_1=EL$
Αν είχαμε κατασκευάσει τον αντίστοιχο κύκλο προς μεριά της κορυφής B θα είχαμε αποδείξει την αντίστοιχη ισότητα της ισότητας $C_2C_1=EL$ (που αποδείξαμε). Αυτή η ισότητα είναι η $XY=C_2C_1$.
Το επόμενο βήμα μας είναι να κατασκευάσουμε την κοινή εφαπτόμενη βZ των κύκλων S_a ,S_b
Το $\beta Z=C_1C_2$ διότι: Έστω οι κύκλοι S_t και S_a. Αυτοί τέμνονται στα σημεία C_1 και β. Αν κατασκευάσουμε εφαπτόμενες του C_a στα σημεία C_1 και β αυτές είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία που συνδέει τα κέντρα των κύκλων S_t και S_a άρα $\beta Z=C_1C_2$.
Έτσι έχουμε ότι τα ακόλουθα τμήματα του κύκλου S_t είναι μεταξύ τους ίσα: $XY=\beta Z=C_2C_1=C_2K=EL$.
Μπορούμε τώρα να κατασκευάσουμε τον κύκλο S_v ο οποίος είναι εφαπτόμενος σε όλα αυτά τα τμήματα. (αυτή η κατασκευή πως μπορεί να γίνει; Φέρνουμε τις κάθετες από το κέντρο του κύκλου S_t προς τα τμήματα αυτά. Τα ίχνη των καθέτων αυτών στα τμήματα ανήκουν στον εφαπτόμενο κύκλο που ψάχνουμε.).

Προφανώς κύκλος S_v έχει το ίδιο κέντρο Ξ με τον κύκλο S_t.
Αυτός ο κύκλος είναι ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ABO όπου το σημείο O είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου ABC.

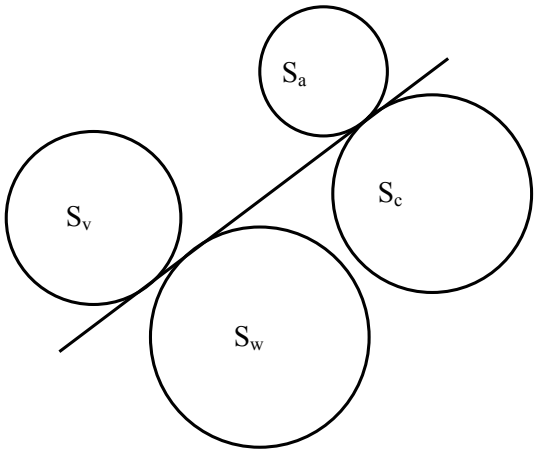


Η εφαπτόμενη στους κύκλους S_a και S_c στο σημείο β είναι επίσης εφαπτόμενη στον κύκλο S_v
Η εφαπτόμενη αυτή είναι επίσης εφαπτόμενη στον εγγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου OBC τον οποίο θα συμβολίσουμε με S_w. Αυτό συμβαίνει διότι οι ρόλοι των S_v και S_w είναι ως προς τους κύκλους S_a, S_c είναι παρόμοιοι (άρα η αντίστοιχη διαδικασία απόδειξης είναι συμμετρική). Αν είχαμε επικεντρωθεί στον S_w αντί για τον S_v θα είχαμε βρει ότι η εφαπτόμενη ευθεία στους κύκλους S_a,S_c στο σημείο β είναι επίσης εφαπτόμενη στον κύκλο S_w. Στο σημείο αυτό έχουμε φτάσει στο τέλος της απόδειξης της εικασίας του Steiner.

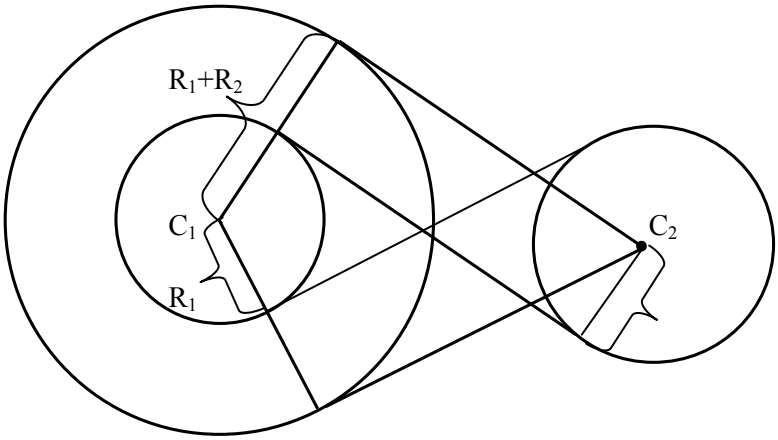
Εικασία του Steiner:
Ας υποθέσουμε το πρόβλημα του Malfatti έχει λυθεί. Τότε η εφαπτόμενη ευθεία σε δύο από τους τρεις κύκλους, ας πούμε τους S_a και S_c στο σημείο επαφής τους β είναι εφαπτόμενη στους κύκλους S_v και S_w οι οποίοι είναι εγγεγραμμένοι στα τρίγωνα ABO και OBC όπου το O είναι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών A και B του δεδομένου τριγώνου.



Επειδή η ευθεία του Steiner είναι δύσκολο να παρατηρηθεί, θα δώσουμε εδώ μια μεγεθυμένη είκόνα. Εδώ οι S_a και S_c είναι δύο από τους κύκλους των Malfatti Steiner. Οι άλλοι δύο κύκλοι είναι δύο από τους κύκλους που είναι εγγεγραμμένοι στα τρίγωνα που σχηματίζονται απο μια απο τις πλευρές του αρχικού τριγώνου ABC και από δύο από τις τρεις διχοτόμους των γωνιών του.



Κατασκευή:
Κατασκευάζουμε τις τρεις διχοτόμους AO, BO, CO του τριγώνου ABC. Τότε προκύπτουν τρία τρίγωνα. Κατασκευάζουμε τον εγγεγραμμένο κύκλο S_v του τριγώνου ABO. Κατασκευάζουμε τον εγγεγραμμένο τρίγωνο S_w του τριγώνου OBC. Κατασκευάζουμε μία από τις κοινές εσωτερικές εφαπτόμενες των κύκλων S_v και S_w. Καλούμε αυτήν την κοινή εφαπτόμενη, ευθεία του Steiner.
Η ευθεία του Steiner είναι επίσης εφαπτόμενη σε έναν από τους τρεις κύκλους του Malfatti.
Έτσι το πρόβλημα ανάγεται στο να κατασκευαστεί ο κύκλος που εφάπτεται σε δύο πλευρές ας πούμε στις AB και CA του τριγώνου ABC και στην ευθεία του Steiner. Για να κατασκευάσουμε την κοινή εσωτερική εφαπτόμενη δύο δεδομένων κύκλων με κέντρα C_1 και C_2 και ακτίνες R_1 και R_2 θα κατασκευάσουμε κύκλο με κέντρο το κέντρο του C_1 (ή του C_2) και ακτίνα R_1+R_2.Μετά φέρνουμε την εφαπτόμενη L από το σημείο C_2 σε αυτόν τον κύκλο.
Φέρνουμε την ευθεία που διέρχεται από το σημείο επαφής της εφαπτόμενης L και από το κέντρο C_1 του κύκλου (C_1). Η ευθεία αυτή τέμνει τον κύκλο C_1 στο σημείο K. Από το K φέρνουμε την παράλληλη M προς την L. Αυτή είναι η κοινή εσωτερική εφαπτόμενη στους δοσμένους κύκλους.



Απόσταση αντιστροφής

Όπως γνωρίζουμε υπάρχει θεώρημα (το λεγόμενο και θεώρημα ομοκεντρότητας), το οποίο επιτρέπει σε δύο μη τεμνόμενους κύκλους να απεικονιστούν σε δύο ομόκεντρους κύκλους μέσω μιας αντιστροφής.
Δύο τυχαίοι, μη τεμνόμενοι μεταξύ τους κύκλοι, συνδέονται με μια σχέση η οποία είναι ένα είδος απόστασης και είναι αναλλοίωτη ως προς την αντιστροφή.
Η απόσταση αυτή είναι ο φυσικός λογάριθμος του λόγου των ακτινών (ακτίνα του μεγαλύτερου κύκλου προς την ακτίνα του μικρότερου) των ομόκεντρων κύκλων στους οποίους, οι δύο κύκλοι που μας δόθηκαν μπορούν να αντιστραφούν.
Με αυτήν την απόσταση θα ασχοληθούμε στην ενότητα αυτή.
Η απόσταση αυτή είναι ένας αριθμός ο οποίος καθορίζεται με τέτοιον τρόπο ώστε να έχει την προσθετική ιδιότητα για τρεις κύκλους που ανήκουν σε μια δέσμη μη τεμνόμενων κύκλων. Αυτό είναι κάτι που μας ενδιαφέρει γιατί η προσθετική ιδιότητα είναι μια ιδιότητα η οποία χαρακτηρίζει και την κανονική απόσταση. Η απόσταση αυτή είναι αναλλοίωτη ως προς την ομάδα που παράγεται από όλες τις αντιστροφές.
Αν δουλέψουμε στο σώμα των μιγαδικών αριθμών κάθε δύο τεμνόμενοι (ή μη) κύκλοι έχουν μια γωνία τομής δ ή δi (όπου δ είναι πραγματικός αριθμός). Στην δεύτερη περίπτωση (περίπτωση γωνίας δi) οι κύκλοι είναι μη τεμνόμενοι και δ είναι η απόσταση αντιστροφής.
Έστω ότι έχουμε τέσσερα διαφορετικά μεταξύ τους σημεία Α,Β,Γ,Δ, τα οποία βρίσκονται σε μια ευθεία ή έναν κύκλο και σε τέτοιες θέσεις, ώστε το τόξο ΑΓ (αντίστοιχα το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ) να περιέχει ένα και μόνο ένα από τα σημεία Β,Δ. Σε τέτοια περίπτωση λέμε ότι: τα Α,Γ *χωρίζονται* από τα Β,Δ και γράφουμε: {ΑΓ}//{ΒΔ}.
Γνωρίζουμε ότι κάθε δύο μη τεμνόμενοι κύκλοι, μπορούν να αντιστραφούν σε δύο ομόκεντρους κύκλους. Από την άλλη μεριά κάθε ζεύγος τεμνόμενων κύκλων αντιστρέφεται σε ένα ζεύγος τεμνόμενων ευθειών, ενώ δύο εφαπτόμενοι κύκλοι αντιστρέφονται σε δύο παράλληλες ευθείες.
Κάθε δύο διαφορετικοί μεταξύ τους κύκλοι έχουν έναν ή δύο μεσόκυκλους. Ειδικότερα όταν έχουμε δύο σύμφωνους κύκλους, ο ριζικός τους άξονας είναι ένας μεσόκυκλος[7] τους.

---

[7] Έστω ότι δίνονται δύο κύκλοι α και β διαφορετικοί μεταξύ τους . Ας θεωρήσουμε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Π όπου Π είναι το σημείο επαφής δύο κύκλων οι οποίοι εφάπτονται στους κύκλους α και β. Η αντιστροφή δείχνει ότι ο γεωμετρικός τόπος αποτελείται είτε από δύο ορθογώνιους μεταξύ τους κύκλους ή από έναν και μοναδικό κύκλο. Πιο συγκεκριμένα αν α και β τέμνονται έχουμε δύο κύκλους που διχοτομούν τις παραπληρωματικές γωνίες των γωνιών που σχηματίζουν οι δύο τεμνόμενοι κύκλοι. Αν α και β είναι δύο εφαπτόμενοι κύκλοι τότε έχουμε έναν κύκλο που ανήκει στην δέσμη αβ.
Σαφώς η αντιστροφή ως προς έναν τέτοιο κύκλο αλλάζει τους κύκλους α και β μεταξύ τους. Δηλαδή ο αντίστροφος του α είναι ο β και το ανάποδο. Ένας τέτοιος κύκλος λοιπόν είναι μεσόκυκλος των α,β. Με επαναλαμβανόμενη εφαρμογή της κατασκευής μεσόκυκλων μπορούμε να βρούμε απεριόριστο αριθμό μελών της

Όταν έχουμε δύο τεμνόμενους κύκλους τότε ο μεσόκυκλος τους, διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν μεταξύ τους οι κύκλοι αυτοί. Το ίδιο συμβαίνει και στην περίπτωση που οι δύο κύκλοι δεν τέμνονται αλλά είναι εφαπτόμενοι. Όταν οι δύο κύκλοι είναι μη τεμνόμενοι, υπάρχει μια αριθμητική σχέση που κατά κάποιον τρόπο *'διχοτομείται'* από τον αντίστοιχο μεσόκυκλο και αυτή είναι η απόσταση αντιστροφής.
Δύο μη τεμνόμενοι κύκλοι μπορούν να αντιστραφούν σε δύο ομόκεντρους κύκλους με ακτίνες *α* και *b,* όπου *α>b* και έτσι μπορούμε να επιλέξουμε μια ***μονάδα*** ώστε η απόστασή τους να είναι $\delta = \ln\frac{a}{b}$.
Γιατί όμως να σκεφτούμε έτσι; Η απάντηση είναι απλή αρκεί να σκεφτούμε ότι αν έχουμε τρεις κύκλους μιας δέσμης μη τεμνόμενων κύκλων, τότε οι κύκλοι αυτοί μπορούν να αντιστραφούν σε τρεις ομόκεντρους κύκλους οι ακτίνες των οποίων είναι a,b,c και ικανοποιούν την σχέση $a > b > c$ οπότε:

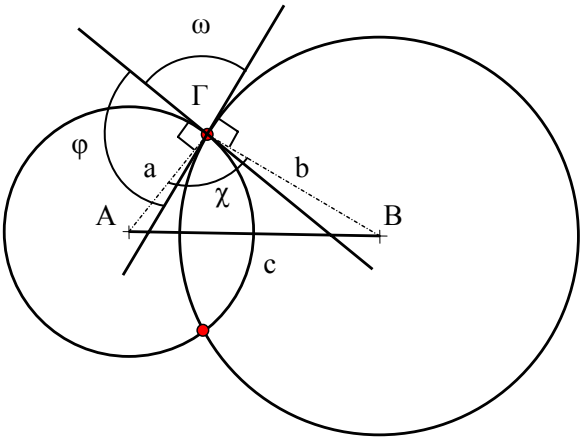
$$\ln\frac{a}{b} + \ln\frac{b}{c} = \ln\left(\frac{a}{b}\frac{b}{c}\right) = \ln\frac{a}{c}$$

Δηλαδή ικανοποιείται η προσθετική ιδιότητα.
Σαν λογική συνέπεια των όσων είπαμε, έρχεται ο εξής ορισμός για την απόσταση αντιστροφής:
Απόσταση αντιστροφής δύο μη τεμνόμενων κύκλων είναι ο λογάριθμος του λόγου των ακτινών (μεγαλύτερη ακτίνα προς μικρότερη) δύο ομόκεντρων κύκλων, στους οποίους οι δύο μη τεμνόμενοι κύκλοι μπορούν να αντιστραφούν μέσω μιας αντιστροφής I_c. (Ας σημειωθεί ότι η μονάδα μέτρησης της απόστασης αντιστροφής είναι η απόσταση αντίστροφης μεταξύ των ομόκεντρων κύκλων με ακτίνα 1 και e).

Απόσταση αντιστροφής με όρους κανονικής απόστασης και ακτίνας.

Ας θεωρήσουμε στο Ευκλείδειο επίπεδο, δύο κύκλους με ακτίνες a και b, τέτοιους ώστε η απόσταση μεταξύ των κέντρων τους να είναι c.
Αν κάθε ένα από τα ευθύγραμμα τμήματα a,b,c είναι μικρότερο από το άθροισμα των άλλων δύο, τότε οι δύο κύκλοι τέμνονται και σχηματίζουν δύο παραπληρωματικές γωνίες των οποίων τα συνημίτονα είναι :

$$\pm\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$



Ας τα δούμε αυτά πιο λεπτομερειακά:

δέσμης αβ. Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τους μεσόκυκλους μπορεί ο αναγνώστης να ανατρέξει στο κεφάλαιο: Μεσόκυκλοι και Άρβηλος.

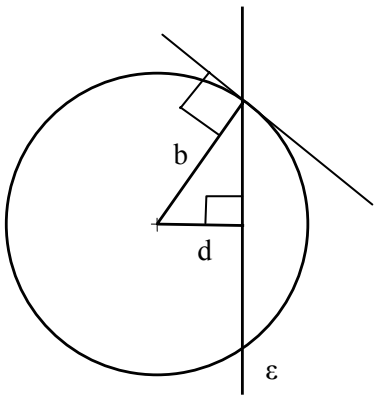
Αν η ∡ φ είναι οξεία τότε η ∡ ω είναι αμβλεία (και ανάποδα) αφού οι δύο αυτές γωνίες είναι παραπληρωματικές.
Η γωνία ∡ χ είναι ίση με μια από τις γωνίες ∡ φ και ∡ ω και αυτό διότι είναι γωνίες με κάθετες πλευρές.
Αν ∡ χ, ∡ ω είναι ταυτόχρονα οξείες ή αμβλείες τότε είναι ίσες.
Αν πάλι η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία τότε οι ∡ χ, ∡ φ είναι ίσες.
Από τον νόμο των συνημίτονων έχουμε:

$$\cos\chi = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

Αν ∡ χ , ∡ ω είναι ίσες τότε $\cos\omega = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ και $\cos\phi = -\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ αφού ω και φ είναι παραπληρωματικές.

Αν ∡ χ , ∡ φ είναι ίσες τότε $\cos\omega = -\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ και $\cos\phi = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

Ως οριακή περίπτωση δύο τέτοιων κύκλων είναι η περίπτωση που ο ένας από τους κύκλους είναι η ευθεία ε και ο άλλος είναι κύκλος ακτίνας b του οποίου το κέντρο βρίσκεται σε απόσταση d από την ευθεία ε. Αν d<b τότε αυτοί τέμνονται και η γωνία τους έχει συνημίτονο $\pm\frac{d}{b}$.



Με στόχο να φτάσουμε σε ανάλογα με τα πιο πάνω αποτελέσματα και για τις περιπτώσεις μη τεμνόμενων κύκλων, θα βόλευε να εκφράσουμε την απόσταση αντιστροφής με όρους διπλού λόγου τεσσάρων σημείων. Αυτό συμβαίνει διότι ο διπλός λόγος είναι ένα αναλλοίωτο ως προς την αντιστροφή.
Πριν προχωρήσουμε πιο κάτω θα παραθέσουμε μερικά βασικά στοιχεία από τις υπερβολικές συναρτήσεις:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Από τους τύπους αυτούς πολύ εύκολα μπορούμε να συνάγουμε:

$$\sinh x + \cosh x = e^x$$
$$\sinh x - \cosh x = e^{-x}$$
$$\sinh 0 = 0, \cosh 0 = 1, \tanh 0 = 0, \tanh\infty = 1$$
$$\sinh^2 x - \cosh^2 x = 1$$
$$\frac{\sinh x}{\cosh x} = \tanh x$$

$$\sinh^2 x = \frac{\cosh x - 1}{2}$$

$$\cosh^2 x = \frac{\cosh x + 1}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x}$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

Ας θυμηθούμε τώρα τον διπλό λόγο στο μιγαδικό επίπεδο: $[z, z_1, z_2, z_3] = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \frac{z - z_1}{z - z_3}$.

Αυτή η ποσότητα είναι ένα αναλλοίωτο των μετασχηματισμών Möbius και είναι πραγματικός αριθμός όταν τα z, z_1, z_2, z_3 είναι ομοκυκλικά ή συνευθειακά. Αυτό μας οδηγεί στο να ορίσουμε στο Ευκλείδειο επίπεδο τον διπλό λόγο τεσσάρων σημείων A,B,C,D, τα οποία είναι δοσμένα με αυτήν την σειρά, ως εξής.

Ορισμός: ορίζουμε ως διπλό λόγο των τεσσάρων σημείων A,B,C,D, δοσμένων με αυτήν την σειρά και τον οποίο συμβολίζουμε με (AB:CD), την ποσότητα(AB:CD)=$\frac{\mathrm{AC} \cdot \mathrm{BD}}{\mathrm{AD} \cdot \mathrm{BC}}$.

Πιο κάτω θα αποδείξουμε με την βοήθεια της αντιστροφής το θεώρημα του Πτολεμαίου:

Αν A,B,C,D είναι τέσσερα σημεία σε ένα επίπεδο, τότε ισχύει AB·CD+AD·BC>AC·BD, εκτός από την περίπτωση που τα A,B,C,D βρίσκονται στην διάταξη [A-B-C-D] (ή [A-D-C-B] οπότε ισχύει ανάλογη σχέση) και πάνω σε κύκλο ή ευθεία, οπότε δεν ισχύει η ανισότητα αλλά η ισότητα.

Αν πάρουμε την σχέση AB·CD+AD·BC=AC·BD και την διαιρέσουμε με AC·BD παίρνουμε:

(AD:BC)+(AB:DC)=1

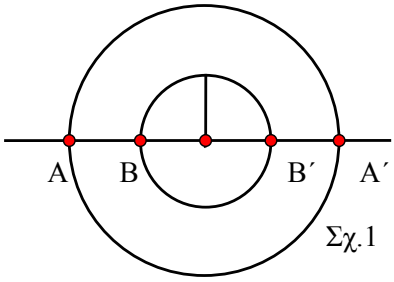
οπότε συμπεραίνουμε ότι ο διπλός λόγος τεσσάρων σημείων A,B,C,D (με διάταξη [A-B-C-D]) ικανοποιεί την (AD:BC)+(AB:DC)=1 αν και μόνο αν AC//BD.

Έστω ότι ο κύκλος αντιστροφής είναι ο C(O,R). Τότε, όπως ξέρουμε, αν A,B είναι ένα ζεύγος σημείων το οποίο αντιστρέφεται στο ζεύγος A΄,B΄ ισχύει: $A'B' = \frac{R^2 AB}{OA \cdot OB}$. Έτσι αν τα A,B,C,D αντιστρέφονται στα A΄,B΄,C΄,D΄ τότε (A΄B΄:C΄D΄)=(AB:CD) αφού:

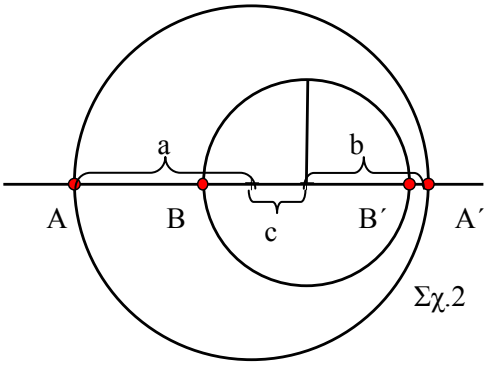
$$(A'B' : C'D') = \frac{A'C' \cdot B'D'}{A'D' \cdot B'C'} = \frac{\frac{R^2 AC}{OA \cdot OC} \frac{R^2 BD}{OB \cdot OD}}{\frac{R^2 AD}{OA \cdot OD} \frac{R^2 BC}{OC \cdot OB}} = \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC}.$$

Σαν συνέπεια έχουμε ότι αν τα A,B,C,D αντιστρέφονται στα A΄,B΄,C΄,D΄ και AC//BD τότε και A΄C΄//B΄D΄.

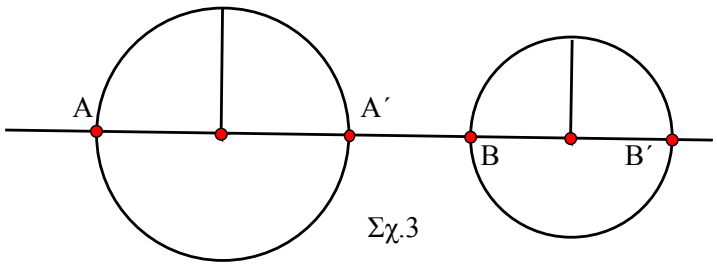
Με άλλα λόγια ο χωρισμός AC//BD των σημείων είναι ένα αναλλοίωτο ως προς την αντιστροφή, δηλαδή: A΄C΄//B΄D΄.



Σχ.1



Σχ.2



Σχ.3

Έστω δύο ομόκεντροι κύκλοι των οποίων η ακτίνες ικανοποιούν την ανισότητα a>b. Μια κοινή διάμετρος τέμνει τους κύκλους στα ζεύγη σημείων {AA΄}, {BB΄} με AB΄//A΄B όπως στο σχήμα (1). Με όρους απόστασης αντιστροφής έχουμε $\delta = \ln\frac{a}{b}$.

Βρίσκουμε τώρα τον διπλό λόγο των τεσσάρων σημείων :

$$(\mathrm{AA}':\mathrm{BB}') = \frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A'B'}}{\mathrm{AB'}\cdot\mathrm{A'B}} = \left(\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AB'}}\right)^2 = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 = \left(\frac{e^{\delta}-1}{e^{\delta}+1}\right)^2 = \tanh^2\frac{\delta}{2} = \frac{\cosh\delta - 1}{\cosh\delta + 1}$$

Αν αυτοί οι κύκλοι προέρχονται από την αντιστροφή δύο μη τεμνόμενων κύκλων k_1 και k_2 των οποίων το κέντρα βρίσκονται σε Ευκλείδεια απόσταση c, είναι βολικό να χρησιμοποιήσουμε τα ίδια γράμματα a,b για τις ακτίνες των κύκλων αυτών (δηλαδή των k_1 και k_2) όπως επίσης τα ίδια γράμματα A, A', B, B' για τα σημεία τομής με την κοινή τους διάμετρο (με AB΄//A΄B όπως και πριν). Ο απλός λόγος τεσσάρων σημείων, όπως και ο χωρισμός (AC//BD) έχουμε αποδείξει πιο πάνω, ότι είναι αναλλοίωτα ως προς την αντιστροφή.

$(\mathrm{AA}':\mathrm{BB}') = \dfrac{\cosh\delta - 1}{\cosh\delta + 1}$ (στο αντίστροφο σύστημα των ομόκεντρων κύκλων).

Τώρα θα πρέπει να εκφράσουμε αυτό το λόγο (και ως εκ τούτου το δ), με όρους των *καινούργιων* a,b καθώς και της απόστασης c.

Αν a-b>c, όπως στο σχήμα 2, τότε θα έχουμε:

$$(\mathrm{AA}':\mathrm{BB}') = \frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A'B'}}{\mathrm{AB'}\cdot\mathrm{A'B}} = \frac{(a+c-b)(a-c-b)}{(a+c+b)(a-c+b)} = \frac{(a-b)^2-c^2}{(a+b)^2-c^2} = \frac{a^2+b^2-c^2-2ab}{a^2+b^2-c^2+2ab}$$

και έτσι: $\cosh\delta = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

Αν όμως a+b<c όπως στο σχήμα 2 τότε θα έχουμε:

$$(\mathrm{AA}':\mathrm{BB}') = \frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A'B'}}{\mathrm{AB'}\cdot\mathrm{A'B}} = \frac{(a+c+b)(c-b-a)}{(c-a+b)(c+a-b)} =$$

$$\frac{c^2-(a+b)^2}{c^2-(a-b)^2} = \frac{c^2-a^2-b^2-2ab}{c^2-a^2-b^2+2ab}$$

οπότε: $\cosh\delta = \dfrac{c^2-a^2-b^2}{2ab}$.

Σε κάθε περίπτωση έχουμε λοιπόν: $\cosh\delta = \left|\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right|$.

Σε αυτό το σημείο μπορούμε πλέον να εκφράσουμε την εξής πρόταση:

Αν *c* είναι η (*κανονική*) απόσταση μεταξύ των κέντρων δύο μη τεμνόμενων κύκλων με ακτίνες *α* και *b*, τότε η απόσταση αντιστροφής τους *δ*, δίνεται από τον τύπο:

$\cosh\delta = \left|\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right|$.Η ποσότητα αυτή είναι ένα αναλλοίωτο, αφού ο διπλός λόγος τεσσάρων σημείων είναι και αυτός ένα αναλλοίωτο.

Βλέπουμε από τον τύπο: $\cosh\delta = \left|\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right|$ ότι όταν το b τείνει στο μηδέν τότε το δ τείνει στο άπειρο. Βάζοντας c=a±b βλέπουμε ότι εφαπτόμενοι μεταξύ τους κύκλοι μπορούν να θεωρηθούν ως έχοντες απόσταση αντιστροφής ίση με το μηδέν.

Ως μια δεύτερη οριακή περίπτωση μπορούμε να θεωρήσουμε μια ευθεία και έναν κύκλο ακτίνας b του οποίου το κέντρο έχει απόσταση d από την ευθεία με d>b .Τότε ο διπλός λόγος υποβιβάζεται σε απλό λόγο και η απόσταση αντιστροφής μεταξύ της ευθείας και του κύκλου θεωρούμε ότι είναι η δ με $\cosh\delta = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{b}}$.

Πόρισμα του Steiner

Θεώρημα:(Πόρισμα του Steiner)

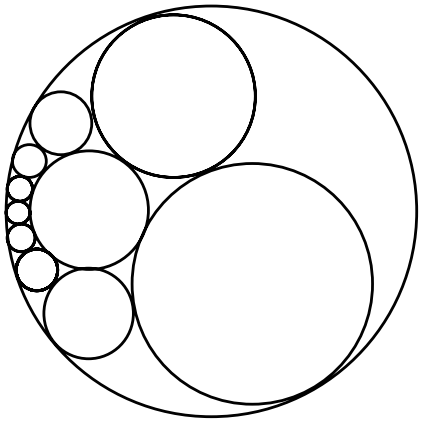
Ας υποθέσουμε ότι C_1 και C_2 είναι δύο κύκλοι οι οποίοι δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

Θεωρούμε ότι ο κύκλος C_1 είναι εσωτερικός του κύκλου C_2.

Τότε μπορεί να συμβούν δύο πράγματα:

1. Είτε δεν υπάρχει αλυσίδα κύκλων ανάμεσα στους κύκλους C_1 και C_2, κάθε κύκλος της οποίας να εφάπτεται στους κύκλους C_1 και C_2 και σε δύο άλλους κύκλους της αλυσίδας.

1. Είτε είναι δυνατό να κατασκευαστεί η αλυσίδα αυτή και σε τέτοια περίπτωση ο πρώτος κύκλος C, μπορεί να τοποθετηθεί σε οποιαδήποτε θέση παραμένοντας βέβαια πάντα εφαπτόμενος στους κύκλους C_1 και C_2.

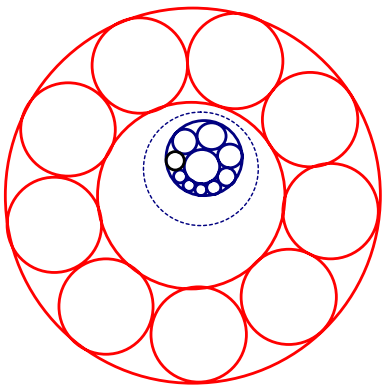


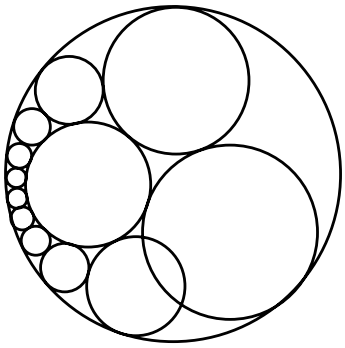
Απόδειξη:

Αυτό που πρέπει να αποδειχθεί είναι ότι στην περίπτωση που υπάρχει μια τέτοια αλυσίδα $\mathcal{F}$ τότε αυτή υπάρχει για κάθε επιλογή του πρώτου κύκλου της.

Από το θεώρημα της ομοκεντρότητας γνωρίζουμε ότι υπάρχει αντιστροφή I_C, που απεικονίζει τους κύκλους C_1 και C_2 σε δύο νέους κύκλους C'_1 και C'_2 οι οποίοι είναι ομόκεντροι. Μέσω της αντιστροφής I_C, η αλυσίδα $\mathcal{F}$ απεικονίζεται σε μια νέα αλυσίδα κύκλων $\mathcal{G}$, η οποία αναπτύσσεται ανάμεσα στους κύκλους C'_1 και C'_2 με τον C να απεικονίζεται τώρα σε έναν κύκλο C', ο οποίος εφάπτεται στους κύκλους C'_1 και C'_2.

Ας υποθέσουμε ότι παίρνουμε τον κύκλο C σε μια άλλη θέση μεταξύ των κύκλων C_1 και C_2. Σε αυτή τη θέση του δίνουμε το όνομα Σ. Μέσω της αντιστροφής I_C ο κύκλος Σ απεικονίζεται σε έναν κύκλο Φ. Επειδή οι κύκλοι C'_1 και C'_2 είναι ομόκεντροι θα μπορούσαμε να μετακινήσουμε την αλυσίδα $\mathcal{G}$ κατά τέτοιο τρόπο ώστε ο πρώτος κύκλος της, δηλαδή ο C', να συμπέσει με τον Φ.

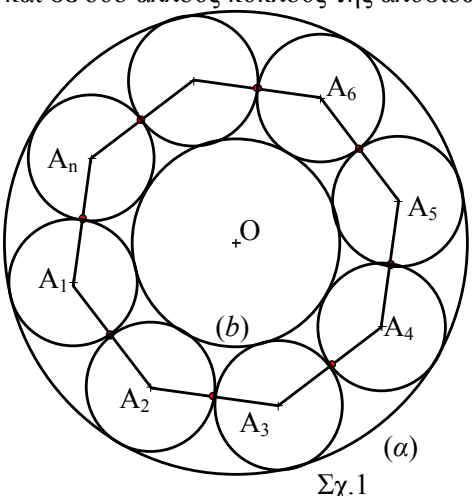




Ας ονομάσουμε την αλυσίδα που προκύπτει κατ΄ αυτόν τον τρόπο με το όνομα Θ. Η αλυσίδα Θ είναι λοιπόν η αλυσίδα $\mathcal{G}$ στην νέα της θέση. Τότε αν εφαρμόσουμε την αντιστροφή I_C και πάλι, θα απεικονίσουμε τον κύκλο Φ στον κύκλο C και η αλυσίδα Θ που έχει πρώτο κύκλο τον Φ απεικονίζεται στην αλυσίδα Θ΄ την ύπαρξη της οποίας θέλαμε να αποδείξουμε.

Κατασκευή της αλυσίδας του Steiner- απόσταση αντιστροφής εσωτερικού και εξωτερικού κύκλου της αλυσίδας

Ο απλούστερος τρόπος για να κατασκευαστεί μια αλυσίδα του Steiner, είναι η εφαρμογή της αντιστροφής $I_{C(K,1)}$ σε μια συμμετρική διάταξη n κύκλων που δημιουργούν μια '*αλυσίδα*' και οι οποίοι είναι '*πακεταρισμένοι*' μεταξύ δύο ομόκεντρων[8] κύκλων εκ των οποίων ο εξωτερικός έχει ακτίνα a και ο εσωτερικός, ακτίνα b. Σε αυτή τη διαδικασία ο κάθε 'πακεταρισμένος' κύκλος εφάπτεται και στον εσωτερικό και στον εξωτερικό κύκλο καθώς και σε δύο άλλους κύκλους της αλυσίδας.



Σχ.1

Ας εξηγήσουμε όμως πιο αναλυτικά πως μπορούμε να κατασκευάσουμε μια τέτοια αλυσίδα.

Ένας φυσικός αριθμός[9] p > 2 καθορίζει ένα κανονικό πολύγωνο {p} του οποίου οι πλευρές κείνται απέναντι από κεντρικές γωνίες $\frac{2\pi}{p}$.

Αν διαιρέσουμε έναν κύκλο σε n ίσα μέρη και συνδέσουμε ανά m τα σημεία διαιρέσεως τότε αν οι m,n είναι πρώτοι μεταξύ τους, σχηματίζεται ένα αστεροειδές κανονικό n-γωνο. [βλέπε και : Lázló Fejes Tóth, Regular figures (New York, 1964)]. Αν χρησιμοποιήσουμε το μισό της πλευράς λ ενός κανονικού n-γώνου ως ακτίνα και ως κέντρο τις κορυφές του n-γώνου τότε κατασκευάζουμε μια συμμετρική διάταξη $\{C_i\}$ i=1,2,…,n από n κύκλους, που είναι μεταξύ τους διαδοχικά εφαπτόμενοι και σχηματίζουν μια αλυσίδα, η οποία εφάπτεται σε δύο ομόκεντρους κύκλους (α) και (b). Μια ιδέα για το πώς γίνεται κάτι τέτοιο δίνεται στο σχήμα 1. Γιατί όμως οι n

---

[8] Οι δύο αυτοί ομόκεντροι κύκλοι, παράγονται από την αντιστροφή $I_{C(K,1)}$ η οποία αντιστρέφει δύο μη τεμνόμενους κύκλους στους εν λόγω ομόκεντρους κύκλους. Οι μη τεμνόμενοι κύκλοι είναι ο εξωτερικός και ο εσωτερικός κύκλος στους οποίους θέλουμε να πακετάρουμε την αλυσίδα του Steiner.

[9] Για να είναι κατασκευάσιμο μόνο με κανόνα και διαβήτη ένα κανονικό p-γωνο πρέπει p=3 ή $p=2^k r_1 r_2 r_3 \ldots r_m$ όπου $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_m$ είναι πρώτοι αριθμοί της μορφής $2^{2^\lambda}+1$ με k,λ φυσικούς (Gauss 1796). Αν p≥3 είναι τυχαίος φυσικός αριθμός τότε υπάρχει κανονικό πολύγωνο, μόνο που δεν κατασκευάζεται.

κύκλοι της συμμετρικής διάταξης $\{C_i\}$ i=1,2,…,n είναι πράγματι διαδοχικά εφαπτόμενοι μεταξύ τους όπως επίσης και στους δύο ομόκεντρους κύκλους (α) και (b);
Η απάντηση είναι αρκετά απλή: δυο διαδοχικοί κύκλοι $\{C_k, C_{k+1}\}$ της αλυσίδας των n κύκλων έχουν διάκεντρο την πλευρά $A_kA_{k+1}=\lambda$ του κανονικού n-γώνου και η ακτίνα τους είναι ίση με το μισό της πλευράς του κανονικού n-γώνου. Άρα για κάθε ζεύγος $\{C_k, C_{k+1}\}$ δύο τέτοιων διαδοχικών κύκλων ικανοποιείται η σχέση $\rho_k+\rho_{k+1}=\lambda$ όπου ρ_k και ρ_{k+1} είναι οι ακτίνες τους και λ η διάκεντρός τους.
Οι κύκλοι (α) και (b) έχουν κέντρο το κέντρο Ο του κανονικού n-γώνου.
Ο κύκλος (b) κατασκευάζεται με ακτίνα $b=R-\frac{\lambda}{2}$, ενώ ο κύκλος (α) με ακτίνα $\alpha=R+\frac{\lambda}{2}$ όπου R είναι η ακτίνα του κανονικού n-γώνου. Η διάκεντρος των κύκλων (α) και C_i (όπου C_i είναι ένας οποιοσδήποτε κύκλος της συμμετρικής διάταξης $\{C_i\}$ i=1,2,…,n) είναι R όπως επίσης και η διάκεντρος των κύκλων (b) και C_i.
Ισχύει: $b+\rho_i=R-\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{2}=R$ καθώς και: $a-\rho_i=R+\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda}{2}=R$
Άρα οι κύκλοι (α) και C_i είναι μεταξύ τους εφαπτόμενοι εσωτερικά ενώ οι κύκλοι (b) και C_i είναι μεταξύ τους εφαπτόμενοι εξωτερικά.
Για να μετασχηματίσουμε την συμμετρική αυτή αλυσίδα σε μια αλυσίδα του Steiner εφαρμόζουμε την αντιστροφή $I_{C(K,1)}$ παίρνοντας ως ακτίνα του κύκλου αντιστροφής την μονάδα, ενώ το κέντρο του είναι σε απόσταση d από το κέντρο των ομόκεντρων κύκλων της συμμετρικής διάταξης.
Τότε οι ακτίνες a', b' των κύκλων που είναι οι εικόνες του εξωτερικού και του εσωτερικού κύκλου της συμμετρικής αλυσίδας και οι οποίοι γίνονται μέσω της αντιστροφής ο ένας εσωτερικός και ο άλλος εξωτερικός της αλυσίδας του Steiner δίνονται από την σχέση:

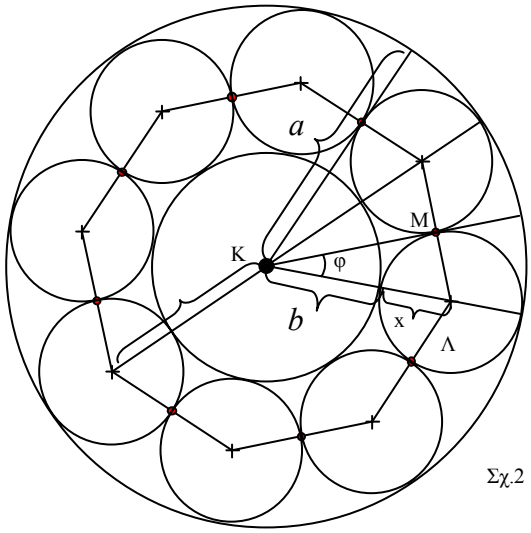
$$a'=\frac{a}{\left|d^2-a^2\right|} \qquad b'=\frac{b}{\left|d^2-b^2\right|}$$

Αυτό συμβαίνει διότι ξέρουμε ότι: Αν ένας κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα k αντιστρέφει ένα ζεύγος σημείων AB στο ζεύγος $A'B'$ τότε οι αποστάσεις τους συνδέονται με την σχέση:

$$A'B'=\frac{k^2AB}{OA\cdot OB}, \text{ όπου } OA\cdot OB=\left|d^2-a^2\right|.$$

Άρα και στην περίπτωσή μας έχουμε: $a'=\frac{a}{\left|d^2-a^2\right|} \qquad b'=\frac{b}{\left|d^2-b^2\right|}$.

Ας πάρουμε λοιπόν μια τέτοια διάταξη n κύκλων (n=8) (Σχήμα 2):



Σχ.2

Σε αυτήν την διάταξη ισχύει: $2n\phi = 2\pi \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{n}$ (εδώ n=8).

αφού $a-b = 2x \Rightarrow x = \frac{a-b}{2}$ άρα θα έχουμε στο τρίγωνο ΚΛΜ: $\text{ΜΛ} = \frac{a-b}{2}$.

Επίσης: $\text{ΚΛ} = b + x = b + \frac{a-b}{2} = \frac{2b+a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$

οπότε: $sin\phi = sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{\text{ΜΛ}}{\text{ΚΛ}} = \frac{a-b}{a+b}$ (1)

Όπως είπαμε σε προηγούμενες ενότητες, δύο μη τεμνόμενοι κύκλοι μπορούν να αντιστραφούν σε δύο ομόκεντρους κύκλους με ακτίνες *α* και *b* όπου *α*>*b* και έτσι μπορούμε να επιλέξουμε κατά τέτοιον τρόπο την μονάδα έτσι ώστε η απόστασή τους να είναι $\delta = \ln\frac{a}{b}$.

Η δ είναι η απόσταση αντιστροφής.

$$sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{\frac{a}{b} - \frac{b}{b}}{\frac{a}{b} + \frac{b}{b}} = \frac{e^{\delta} - 1}{e^{\delta} + 1}$$

Γνωρίζουμε όμως ότι:

$$\tanh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

Άρα $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{e^{\delta} - 1}{1 + e^{\delta}} = \tanh\frac{\delta}{2}$.

Ας θυμηθούμε μερικούς τύπους από την τριγωνομετρία:

$$\sec\ t = \frac{1}{\cos t}$$

$$\csc t = \frac{1}{\sin t}$$

Άρα

$$\tan\frac{\pi}{2n} = \frac{1 - \cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}} - \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} = \csc\frac{\pi}{n} - \cot\frac{\pi}{n} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}} - \frac{1}{\tan\frac{\pi}{n}} = \coth\frac{\delta}{2} - \csc h\frac{\delta}{2} = \tanh\frac{\delta}{4}$$

Στον τύπο που αποδείξαμε χρησιμοποιήσαμε την σχέση $\tan\frac{\pi}{n}=\sinh\frac{\delta}{2}$ η οποία δεν είναι τόσο απλή στην απόδειξή της. Η σχέση αυτή αποδεικνύεται ως εξής:

$$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)=\tanh\frac{\delta}{2}\Rightarrow\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)=\tanh^2\frac{\delta}{2}\Rightarrow 1-\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)=1-\tanh^2\frac{\delta}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)=1-\left(\frac{\cosh\delta-1}{\sinh\delta}\right)^2\Rightarrow\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)=\frac{\sinh^2\delta-\cosh^2\delta+2\cosh\delta-1}{\sinh^2\delta}=$$

$$\frac{2(\cosh\delta-1)}{\sinh^2\delta}\Rightarrow\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)=\frac{2\left(2\sinh^2\frac{\delta}{2}\right)}{\sinh^2\delta}\Rightarrow\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)=\frac{2\sinh\frac{\delta}{2}}{\sinh\delta}$$

Άρα

$$\tan\frac{\pi}{n}=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}=\frac{\tanh\frac{\delta}{2}\sinh\delta}{2\sinh\frac{\delta}{2}}=\frac{\frac{\cosh\delta-1}{\sinh\delta}\sinh\delta}{2\sinh\frac{\delta}{2}}=$$

$$=\frac{\cosh\delta-1}{2}\frac{1}{\sinh\frac{\delta}{2}}=\frac{\sinh^2\frac{\delta}{2}}{\sinh\frac{\delta}{2}}=\sinh\frac{\delta}{2}$$

Ισχύει επίσης: $\sec\frac{\pi}{n}+\tan\frac{\pi}{n}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}+\tan\frac{\pi}{n}=\cosh\frac{\delta}{2}+\sinh\frac{\delta}{2}=e^{\frac{\delta}{2}}$

όμως πως προκύπτει ο τύπος $\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}=\cosh\frac{\delta}{2}$;

ισχύει:

$$\sinh(x+y)=\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y$$

οπότε για $x=y$

$$\sinh 2x=2\sinh x\cosh x$$

Από τον τύπο αυτό έχουμε

$$\frac{2\sin\frac{\delta}{2}}{\sin\delta}=\frac{1}{\cosh\frac{\delta}{2}}$$

Αποδείξαμε πιο πριν ότι $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)=\frac{2\sinh\frac{\delta}{2}}{\sinh\delta}$

άρα $\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{n}} = \cosh\dfrac{\delta}{2}$

$$\sec\frac{\pi}{n}+\tan\frac{\pi}{n}=e^{\frac{\delta}{2}} \Rightarrow \delta = 2\log(\sec\frac{\pi}{n}+\tan\frac{\pi}{n}) = 2\log\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}+\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right) = 2\log\left(\frac{1+\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right) =$$

$$= \log\left(\frac{1+\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)^2 = \log\left(\frac{\left(1+\sin\frac{\pi}{n}\right)^2}{\cos^2\frac{\pi}{n}}\right) = \log\left(\frac{\left(1+\sin\frac{\pi}{n}\right)^2}{1-\sin^2\frac{\pi}{n}}\right) = \log\left(\frac{1+\sin\frac{\pi}{n}}{1-\sin\frac{\pi}{n}}\right) = \log\left(\frac{\cos\frac{\pi}{n}+\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{n}}\right)^2 =$$

$$= \log\left(\frac{1+\tan\frac{\pi}{n}}{1-\tan\frac{\pi}{n}}\right)^2 = 2\log\left(\frac{1+\tan\frac{\pi}{n}}{1-\tan\frac{\pi}{n}}\right) = 2\log\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2n}\right)\right)$$

Εφαρμόζοντας λοιπόν σε δύο ομόκεντρους κύκλους C_a C_b με αντίστοιχες ακτίνες a,b την αντιστροφή $I_{C(K,1)}$, όπου $C(K,1)$ ο κύκλος αντιστροφής, παίρνουμε μια αλυσίδα Steiner $\mathrm{A}_{C_a,C_b,C(K,1)}$, στην οποία ο κάθε κύκλος της εφάπτεται στις εικόνες C'_a C'_b των C_a C_b. Η αντίστροφη απόσταση των C'_a C'_b δίνεται από τον τύπο $\delta = 2\log\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2n}\right)\right)$. Κάθε κύκλος της αλυσίδας $\mathrm{A}_{C_a,C_b,C(K,1)}$ μπορεί να θεωρηθεί ως αρχικός της κύκλος. Η αλυσίδα θα δημιουργηθεί ανεξάρτητα από την θέση του κέντρου του πρώτου κύκλου της.
Αντίστροφα αν δ είναι η απόσταση αντιστροφής μεταξύ δύο δοσμένων μη τεμνόμενων κύκλων C'_a C'_b, τότε μια ακολουθία διαδοχικών εφαπτόμενων μεταξύ τους κύκλων που εφάπτονται στους κύκλους C'_a C'_b μπορεί να γίνει με όσο μεγάλη προσέγγιση θέλουμε, μέσω μιας αλυσίδας n εφαπτόμενων και ίσων μεταξύ τους κύκλων, που παράγεται μέσω ενός κανονικού n-γώνου, όπου n προκύπτει ως η ακέραια προσέγγιση του $\dfrac{\pi}{\arcsin\left(tahh\frac{\delta}{2}\right)}$.

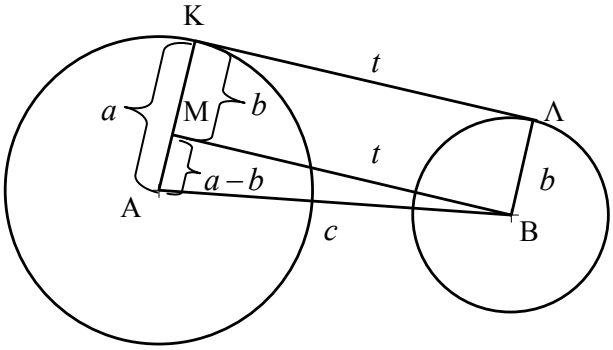
Για να έχουμε ακολουθία διαδοχικών εφαπτόμενων κύκλων που να εφάπτονται χωρίς προσεγγίσεις στους κύκλους C'_a C'_b πρέπει το n να γράφεται στην μορφή: $n=2^k r_1 r_2 r_3 \ldots r_m$ όπου $r_1,r_2,r_3,\ldots,r_m$ είναι πρώτοι αριθμοί της μορφής $2^{2^\lambda}+1$ με k,λ φυσικούς (Gauss 1796). Αλυσίδα λοιπόν *άπειρης* ακρίβειας κατασκευάζεται όταν είναι κατασκευάσιμο με κανόνα και διαβήτη και το αντίστοιχο κανονικό n-γωνο που την παράγει.
Πιο συγκεκριμένα τρεις οποιοιδήποτε κύκλοι εφαπτόμενοι μεταξύ τους σε διαφορετικά ανά δύο σημεία είναι εφαπτόμενοι σε δύο μη τεμνόμενους κύκλους των οποίων η απόσταση αντιστροφής δίνεται από

$$\cosh\frac{\delta}{2} = \sec\frac{\pi}{3} = 2$$

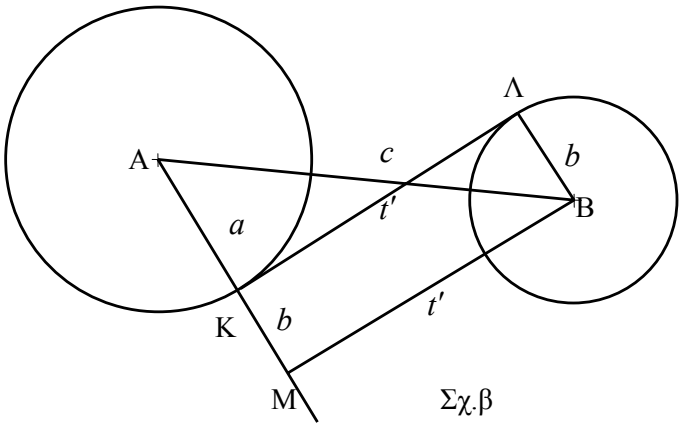
$$\delta = \log(2+\sqrt{3})$$

Με άλλα λόγια δ είναι η αντίστροφη απόσταση μεταξύ των δύο κύκλων Soddy ενός οποιουδήποτε τριγώνου (H.S.M. Coxeter: Introduction to geometry σελ. 13-14).

Απόσταση αντιστροφής και κοινές εφαπτόμενες



Σχ. α



Σχ.β

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο κύκλους με ακτίνες a, b και διάκεντρο c.

Αν $a+b<c$ τότε οι κύκλοι έχουν τέσσερις κοινές εφαπτόμενες. Δύο από αυτές έχουν μήκος t (σχήμα α) και οι άλλες δύο t' (σχήμα β).

Από τα ορθογώνια τρίγωνα που σχηματίζονται αν φέρουμε την κάθετη ΒΜ προς την ευθεία της ακτίνας ΑΚ (και για το σχήμα α και για το β) θα έχουμε:

$$t^2 = c^2 - (a-b)^2 \Rightarrow t = \sqrt{c^2 - (a-b)^2}$$
$$(t')^2 = c^2 - (a+b)^2 \Rightarrow t' = \sqrt{c^2 - (a+b)^2}$$

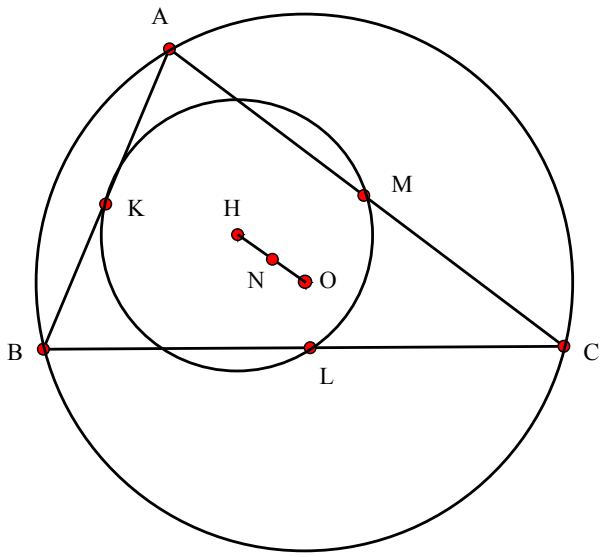
Άρα

$$\left(\frac{t}{t'}\right)^2 = \frac{c^2-(a-b)^2}{c^2-(a+b)^2} = (AA', BB') = \tanh^2\frac{\delta}{2}$$

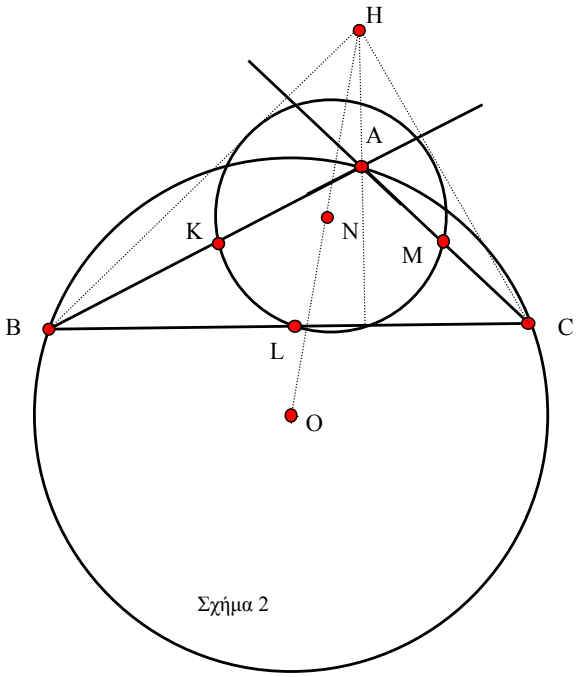
οπότε $\tanh\frac{\delta}{2} = \frac{t}{t'}$.

Αυτός ο τύπος δεν ισχύει όταν ο ένας κύκλος περιέχει τον άλλο εκτός και αν θεωρήσουμε το πραγματικό επίπεδο μέσα στο μιγαδικό επίπεδο και επιτρέψουμε στις κοινές εφαπτόμενες να έχουν φανταστικά μήκη.

Απόσταση αντιστροφής και χαρακτηριστικοί κύκλοι ενός τριγώνου



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Ας θυμηθούμε μερικές βασικές σχέσεις από την γεωμετρία των τριγώνων.
Οι κορυφές κάθε τριγώνου βρίσκονται πάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο του οποίου η ακτίνα είναι R και το κέντρο Ο, ενώ τα μέσα των πλευρών του κείνται πάνω στον κύκλο των Euler- Feuerbach (κύκλος των εννέα σημείων) του οποίου η ακτίνα είναι $\frac{R}{2}$ ενώ το κέντρο του Ν, είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος το οποίο έχει άκρα το κέντρο Ο του περιγεγραμμένου κύκλου και το ορθόκεντρο Η του τριγώνου ΑΒΓ.

Επειδή $OH^2 = R^2\left(1-8\cos A\cos B\cos C\right)$ (E.W.HOBSON, *A treatise on plane trigonometry* (6 έκδοση, Cambridge 1924)) μπορούμε να βρούμε την γωνία ή την απόσταση ανάμεσα σε αυτούς τους δύο κύκλους αντικαθιστώντας:

$$a = R, b = \frac{R}{2}, c = \frac{OH}{2}$$

Τα αποτελέσματα προκύπτουν κατά τον ακόλουθο τρόπο:

1. Αν το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο (σχήμα α) :
τότε ο περιγεγραμμένος κύκλος τέμνει τον κύκλο των εννέα σημείων έτσι ώστε :

$$\sin\frac{\delta}{2} = \sqrt{-\cos A\cos B\cos C}$$

Ο τύπος αυτός προκύπτει ως εξής:

Δύο κύκλοι που τέμνονται σχηματίζουν δύο γωνίες ω παραπληρωματικές μεταξύ τους και τέτοιες ώστε $\cos\omega = \pm\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ με το '+' για την οξεία και το '$-$' γα την αμβλεία γωνία.
Γνωρίζουμε από την τριγωνομετρία τον εξής τύπο:

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

Οπότε θεωρώντας ότι η δ είναι η οξεία γωνία από τις δύο παραπληρωματικές γωνίες που σχηματίζουν οι δύο τεμνόμενοι κύκλοι και κάνοντας τις πράξεις έχουμε τα εξής:

$$\sin\frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\delta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{2}} = \sqrt{\frac{c^2-(a-b)^2}{4ab}} =$$

$$\sqrt{\frac{\frac{R^2}{4}(1-8\cos A\cos B\cos C)-\left(R-\frac{R}{2}\right)^2}{4R\frac{R}{2}}} = \sqrt{-\cos A\cos B\cos C}$$

2. Το τρίγωνο είναι οξυγώνιο:

Από τον τύπο $\cosh\delta = \left|\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right| = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ διότι $a^2+b^2 > c^2$

και θέτοντας πάλι $a = R, b = \frac{R}{2}, c = \frac{OH}{2}$ θα έχουμε:

$$\sinh^2\frac{\delta}{2} = \frac{\cosh\delta - 1}{2} = \frac{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}-1}{2} = \frac{(a-b)^2-c^2}{4ab} =$$

$$= \frac{\frac{R^2}{4}-\frac{R^2}{4}(1-8\cos A\cos B\cos C)}{4R\frac{R}{2}} = \cos A\cos B\cos C$$

Παρομοίως αντικαθιστώντας $a = R, b = r, c^2 = R^2 - 2Rr$ στον τύπο:

$$\cosh\delta = \left|\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right| = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

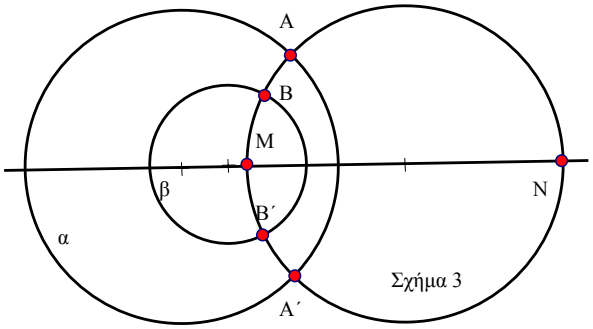
μπορούμε να βρούμε ότι η αντίστροφη απόσταση δ του περιγεγραμμένου και του εγγεγραμμένου κύκλου είναι $\sinh\frac{\delta}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{R}}$ διότι:

$$\sinh^2\frac{\delta}{2} = \frac{\cosh\delta - 1}{2} = \frac{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}-1}{2} = \frac{(a-b)^2-c^2}{4ab} =$$

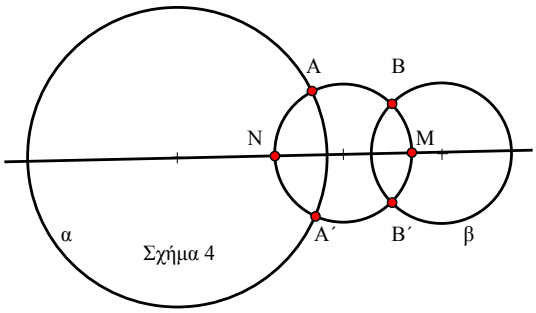
$$\frac{(R-r)^2-R^2-2Rr}{4Rr} = \frac{r^2}{4Rr} = \frac{r}{4R}$$

Και στις δύο τελευταίες περιπτώσεις το $\delta = \log 2$ είναι η μέγιστη τιμή για το δ και επιτυγχάνεται όταν έχουμε ισόπλευρο τρίγωνο

Υπερβολική γεωμετρία



Σχήμα 3



Σχήμα 4

Στο μοντέλο του Poincaré, του άνω ημιεπιπέδου, για την Υπερβολική Γεωμετρία οι γωνίες μετρώνται με τον τρόπο που μετρώνται και στην Ευκλείδεια γεωμετρία, αλλά οι αποστάσεις εκφράζονται με την μορφή διπλού λόγου τεσσάρων σημείων με τον τρόπο που θα περιγράψουμε αμέσως πιο κάτω:

Για να βρούμε την υπερβολική απόσταση δ μεταξύ δύο σημείων A,B χαράσσουμε τον κύκλο που διέρχεται από τα σημεία Α και Β ο οποίος είναι ορθογώνιος στην περιφερειακή ευθεία (απόλυτο σύνορο) του μοντέλου. Ας θεωρήσουμε τα σημεία A',B' (πάνω σε αυτόν τον κύκλο) τα οποία είναι οι εικόνες των A,B μέσω ανάκλασης ως προς την περιφερειακή ευθεία και ας υποθέσουμε ότι M,N είναι τα σημεία τομής του κύκλου και της ευθείας. Η απόσταση τους δίνεται από τους δύο ισοδύναμους τύπους[10] $\delta = \log(AB:MN)$ και $\tanh\frac{\delta}{2} = (\mathrm{AA}':\mathrm{BB}')^{\frac{1}{2}}$.

Ας υποθέσουμε α,β είναι οι κύκλοι οι οποίοι διέρχονται από τα σημεία A,A' & B,B' αντίστοιχα και είναι ορθογώνιοι ως προς τον κύκλο AMN. Αυτοί οι δύο κύκλοι αντιπροσωπεύουν δύο συνήθεις παράλληλες με μια κοινή κάθετο, που είναι το τόξο AB.

Η απόσταση των ευθειών α,β, ορίζεται ως το μήκος του κοινού κάθετου τμήματος τους, δηλαδή το δ. Αυτό που προκύπτει είναι ότι η υπερβολική απόσταση μεταξύ δύο συνήθων παράλληλων είναι ίση με την απόσταση αντιστροφής μεταξύ των αντίστοιχων κύκλων. Και αυτό διότι ο τύπος $\tanh^2\frac{\delta}{2} = (\mathrm{AA}':\mathrm{BB}')$ ο οποίος εμφανίζεται πιο πάνω εκφράζει την αντίστροφη απόσταση μεταξύ των δύο κύκλων κάνοντας χρήση των σημείων τομής τους με έναν κύκλο που είναι ορθογώνιος με αυτούς (αυτό γίνεται πιο εύκολα κατανοητό αν κάποιος διαβάσει το θεώρημα της ομοκεντρότητας που έχουμε αναφέρει σε προηγούμενο κεφάλαιο αφού με την αντιστροφή που μετασχηματίζει δύο μη τεμνόμενους κύκλους σε ομόκεντρους οι αντίστοιχοι ορθογώνιοι προς αυτούς κύκλοι μετασχηματίζονται σε ευθείες που διέρχονται από το κοινό κέντρο, ενώ ο διπλός λόγος των τεσσάρων σημείων μένει αναλλοίωτος).

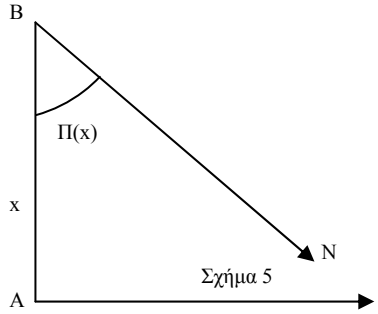
Στα σχήματα 3 και 4 χρησιμοποιήσαμε την ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα τους αλλά κάθε άλλος κύκλος που διέρχεται από τα M,N και είναι ορθογώνιος με αυτούς τους δύο κύκλους είναι κύκλος που διατηρεί τον διπλό λόγο.

Στην ιδιαίτερη περίπτωση που οι κύκλοι α,β είναι ομόκεντροι[11] τότε το Μ είναι το κέντρο και το Ν είναι το σημείο στο άπειρο. Σε τέτοια περίπτωση ο διπλός λόγος υποβιβάζεται σε απλό λόγο και $\delta = \log\frac{AM}{BM}$, $tahh\frac{\delta}{2} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AB}'}$

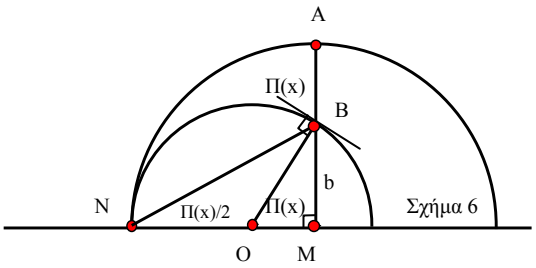
[10] Βλέπε σημείωση 11, αμέσως πιο κάτω.

[11] Έστω ότι οι α,β κύκλοι δεν είναι ομόκεντροι. Οι κύκλοι ΜΝ (γενικευμένος) και (Α,Β,Μ) είναι ορθογώνιοι στους α,β (άρα είναι ορθογώνιοι σε κάθε κύκλο της δέσμης αβ) και τα σημεία Μ,Ν είναι οριακά σημεία της δέσμης αβ. Η αντιστροφή που μετασχηματίζει τους κύκλους α,β σε ομόκεντρους κύκλους είναι η αντιστροφή που έχει κέντρο το ένα από τα δύο οριακά σημεία. Αν υποθέσουμε ότι για

Η γωνία παραλληλίας:



Σχήμα 5



Σχήμα 6

Αυτές οι ιδέες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να παραχθεί με τον απλούστερο δυνατό τρόπο ο διάσημος τύπος των Bolyai και Lobachevsky για την γωνία παραλληλίας Π(x) που αντιστοιχεί σε μια ορισμένη απόσταση x στο υπερβολικό επίπεδο (σχήμα 5).
Στο σχήμα 5 & 6 το τμήμα μήκους x αναπαριστάται από το AB το οποίο βρίσκεται πάνω σε ένα ευθύγραμμο τμήμα κάθετο στην περιφερειακή ευθεία με το σημείο του M να ανήκει σε αυτήν.
Ο κύκλος που διέρχεται από το A και έχει κέντρο το σημείο M αντιπροσωπεύει μια ευθεία του υπερβολικού επιπέδου κάθετη στο τμήμα μήκους x. Ο εφαπτόμενος κύκλος που διέρχεται από το B και με κέντρο O (το κέντρο O είναι και αυτό πάνω στην περιφερειακή ευθεία) αντιπροσωπεύει μια παράλληλη ευθεία προς την ευθεία (M,MA) (με την έννοια φυσικά που δίνουμε για την παραλληλία στην υπερβολική γεωμετρία).
Με όρους Ευκλείδειας απόστασης έχουμε: $\alpha = \mathrm{MA}, b = \mathrm{MB}$. $\delta = \log\frac{AM}{BM} \overset{\delta=x}{\Rightarrow} x = \log\frac{a}{b}$
διότι η ευθεία MA είναι ένας γενικευμένος κύκλος ορθογώνιος προς την περιφερειακή ευθεία του μοντέλου με σημεία τομής με αυτήν τα M και N=∞ οπότε ο λόγος (AB:MN) εκφυλίζεται σε απλό λόγο.
Από την Ευκλείδεια Γεωμετρία πάλι παίρνουμε πολύ εύκολα ότι:

$$\angle \mathrm{MOB} = \Pi(x) \quad \text{και} \quad \angle \mathrm{MNB} = \frac{\Pi(x)}{2}$$

και συνακολούθως:

$$\cot\frac{1}{2}\Pi(x) = \frac{MN}{MB} = \frac{MA}{MB} = \frac{a}{b} = e^{x}$$

$$\Pi(x) = 2\arctan e^{-x}$$

Το θεώρημα του Feuerbach

Μια από τις πιο διάσημες εφαρμογές της κλασικής γεωμετρικής αντιστροφής είναι και το θεώρημα του Feuerbach, το οποίο δηλώνει ότι ο κύκλος των εννέα σημείων ενός τριγώνου είναι εφαπτόμενος στον εγγεγραμμένο κύκλο και σε κάθε έναν από τους παρεγγεγραμμένους κύκλους του τριγώνου. Θα ξεκινήσουμε με την περιγραφή του κύκλου των εννέα σημείων μέσω ενός θεωρήματος. Θα θυμίσουμε επίσης ότι το σημείο στο οποίο συντρέχουν τα τρία ύψη καλείται ορθόκεντρο του τριγώνου.
Θεώρημα:

κέντρο αντιστροφής παίρνουμε το σημείο N τότε το M θα αντιστοιχίζεται στο κέντρο της δέσμης των ομόκεντρων κύκλων στους οποίους μετασχηματίζονται οι κύκλοι της δέσμης αβ ενώ το σημείο N αντιστοιχίζεται στο σημείο στο ∞.

Σε ένα τρίγωνο τα μέσα των πλευρών, οι προβολές των κορυφών στις απέναντι πλευρές και τα μέσα των τμημάτων που έχουν άκρα το ορθόκεντρο και τις κορυφές του τριγώνου είναι ομοκυκλικά.

Απόδειξη:

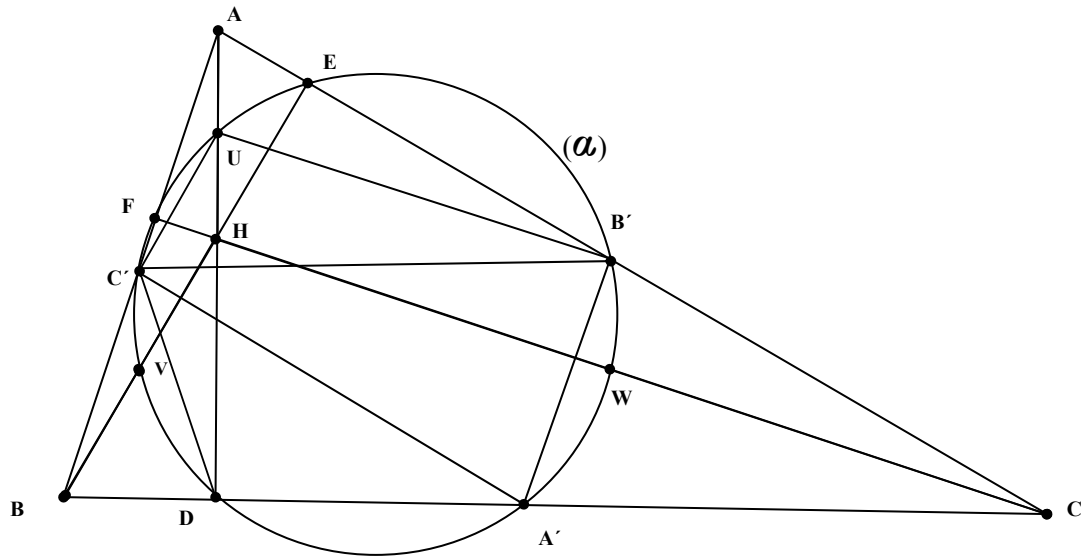
Ας υποθέσουμε ότι ABC είναι ένα τρίγωνο.

Έστω Α΄, Β΄, C΄είναι τα μέσα των πλευρών του τρίγωνου (Α΄ το μέσο της BC, το Β΄ είναι το μέσο της AC και το C΄ είναι το μέσο της AB).

Έστω ότι το D είναι η προβολή της κορυφής A στην BC, το E είναι η προβολή της κορυφής B στην AC και το F είναι η προβολή της κορυφής C στην BA.

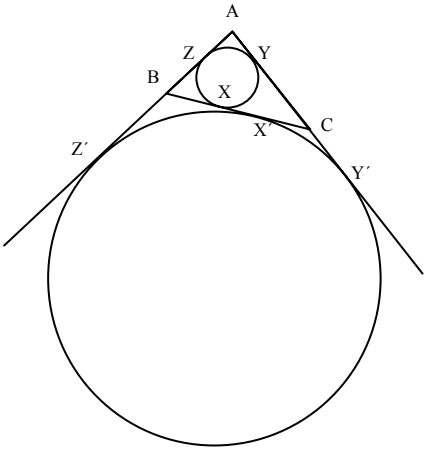
Έστω το U είναι το μέσο του τμήματος AH, το V είναι το μέσο του τμήματος BH και το W είναι το μέσο του τμήματος CH.

Θεωρούμε τον κύκλο C ο οποίος διέρχεται από τα Α΄, Β΄,C΄. Θα δείξουμε ότι τα σημεία D,E,F και U,V,W βρίσκονται και αυτά επί του κύκλου C.



Πρώτα απ΄ όλα θα σημειώσουμε ότι στο ορθογώνιο τρίγωνο ABD το σημείο C΄ είναι το μέσο της υποτείνουσας οπότε C΄D=C΄B. Επίσης το σχήμα C΄B΄A΄B είναι παραλληλόγραμμο διότι σε κάθε τρίγωνο το ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα τα μέσα δύο πλευρών είναι παράλληλο με την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της. Όπως πολύ εύκολα μπορεί να προκύψει τώρα το C΄B΄A΄D είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Ένα τραπέζιο μπορεί να εγγραφεί σε έναν κύκλο τότε και μόνο τότε όταν είναι ισοσκελές τραπέζιο. Άρα λοιπόν ο κύκλος (α) που διέρχεται από τα σημεία Α΄, Β΄ και C΄ περνάει επίσης και από το σημείο D. Με ανάλογο τρόπο δείχνουμε ότι και τα άλλα δύο σημεία F,E ανήκουν στον κύκλο (α). Για να δείξουμε ότι τα V,W,U είναι σημεία του ίδιου κύκλου (α) πρέπει να παρατηρήσουμε αρχικά ότι το C΄U είναι παράλληλο προς το BE (διότι το C΄U έχει άκρα τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου AHB). Αφού λοιπόν το C΄U είναι παράλληλο προς το BE θα είναι κάθετο προς το A΄C΄. Παρομοίως το B΄U είναι κάθετο προς το A΄B΄. Άρα το A΄B΄C΄U είναι εγγράψιμμο τετράπλευρο οπότε το U ανήκει στον κύκλο που ορίζουν τα A΄B΄C΄ . Ο κύκλος όμως που ορίζουν τα A΄B΄C΄ είναι ο κύκλος



(α).

Ο κύκλος (α) λέγεται κύκλος των εννέα σημείων του κύκλου ΑΒC.
Είναι γνωστό ότι οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου, συντρέχουν σε ένα σημείο το οποίο ισαπέχει από τις πλευρές του τριγώνου και ως εκ τούτου είναι το κέντρο ενός κύκλου που εφάπτεται στις πλευρές του τριγώνου. Ο κύκλος αυτός λέγεται εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου. Επίσης η διχοτόμος μιας γωνίας του τριγώνου και οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών από τις δύο άλλες κορυφές του τριγώνου συντρέχουν. Το κοινό σημείο των διχοτόμων αυτών, είναι το κέντρο ενός κύκλου που εφάπτεται σε μια πλευρά του τριγώνου και στις προεκτάσεις των δύο άλλων και λέγεται παρεγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒC.
Στο τρίγωνο ΑΒC ας υποθέσουμε ότι Χ,Υ,Ζ είναι τα σημεία επαφής των πλευρών του εγγεγραμμένου κύκλου με τις πλευρές του τριγώνου. Επίσης έστω ότι Χ΄,Υ΄,Ζ΄ είναι τα σημεία επαφής του παρεγγεγραμμένου τριγώνου που εφάπτεται στην πλευρά ΒC με Χ΄ το σημείο επαφής με την πλευρά ΒC. Το Α΄ είναι το μέσο του ΒC. Θα αποδείξουμε τώρα ότι το Α΄ είναι επίσης το μέσο του τμήματος ΧΧ΄. Δηλαδή ΧΑ΄=Α΄Χ΄
Απόδειξη:
Είναι ΒΧ΄=ΒΖ΄ και CΧ΄=CΥ΄ οπότε η περίμετρος του τριγώνου είναι ΑΖ΄+ΑΥ΄=2ΑΥ΄.
Τώρα έχουμε ΒΧ=ΒΖ=ΑΒ-ΑΖ=ΑΒ-ΑΥ και ΒΧ=ΒC-CΧ=ΒC-CΥ και ως εκ τούτου 2ΒΧ=ΑΒ+ΒC-ΑC=περίμετρος -2ΑC.
Επίσης CΧ΄=ΑΥ΄-ΑC $\Rightarrow$ 2CΧ΄=περίμετρος-2ΑC.
Άρα ΒΧ=CΧ΄ οπότε προκύπτει και το ζητούμενο.

Ας πάμε τώρα στο θεώρημα του Feuerbach.

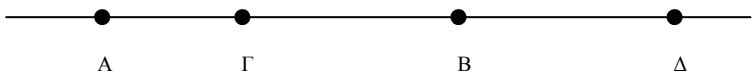
Θεώρημα:
Ο κύκλος των εννέα σημείων ενός τριγώνου είναι εφαπτόμενος στον εγγεγραμμένο κύκλο και στους τρεις παρεγγεγραμμένους κύκλους του τριγώνου ΑΒC.
Απόδειξη:
Πρώτα απ΄ όλα θα θυμίσουμε μερικά στοιχεία από την θεωρία.
Αν έχουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Τότε με το σύμβολο ΑΒ θα εννοούμε και το μήκος του εκτός το ευθύγραμμο τμήμα.
Οι παύλες πάνω από το ευθύγραμμο τμήμα δηλώνουν την αλγεβρική τιμή (προσημασμένο μήκος) του τμήματος δηλαδή δύο τμήματα ΑΒ και ΚΛ που έχουν την ίδια αλγεβρική τιμή ($\overline{\text{ΑΒ}} = \overline{\text{ΚΛ}}$) τότε η μια από τις δύο ημιευθείες ΑΒ και ΚΛ περιέχει την άλλη. Αν δύο τμήματα ΑΒ και ΚΛ έχουν διαφορετική αλγεβρική τιμή τότε ούτε η ΑΒ περιέχει την ΚΛ ούτε η ΚΛ περιέχει την ΑΒ.
Έστω ότι έχουμε μια ευθεία L πάνω στην οποία έχουμε πάρει τρία σημεία Α,Β,Γ.

Τότε $\dfrac{\overline{\text{ΑΒ}}}{\overline{\text{ΒΓ}}} = \dfrac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}}$ αν το Β είναι μεταξύ των Α,Γ.

και

$\dfrac{\overline{\text{ΑΒ}}}{\overline{\text{ΒΓ}}} = -\dfrac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}}$ αν το Β δεν είναι μεταξύ των Α,Γ.

Έστω ότι έχουμε μια ευθεία L πάνω στην οποία έχουμε πάρει τέσσερα σημεία Α,Β,Γ,Δ.
Θα θεωρούμε ότι ο διπλός λόγος $(\text{ΑΒ},\Gamma\Delta)$ των τεσσάρων σημείων Α,Β,Γ,Δ ως έκφραση αλγεβρικών τιμών των αντίστοιχων ευθυγράμμων τμημάτων είναι ο αριθμός::
$(\text{ΑΒ}:\Gamma\Delta) = \dfrac{\overline{\text{ΑΓ}}}{\overline{\text{ΓΒ}}}\dfrac{\overline{\Delta\text{Β}}}{\overline{\text{ΑΔ}}}$.
Θα λέμε ότι τα Α,Β,Γ,Δ αποτελούν αρμονική τετράδα αν $(\text{ΑΒ}:\Gamma\Delta) = -1$
Θα δηλώνουμε την αρμονική τετράδα με το σύμβολο $\text{Η}(\text{ΑΒ},\Gamma\Delta)$ και θα λέμε ότι τα Γ,Δ είναι συζυγή αρμονικά των Α,Β.



Θα αποδείξουμε επίσης ένα θεώρημα που θα μας χρειαστεί πιο κάτω.

Θεώρημα:

Έστω (α) είναι ένας κύκλος με κέντρο το σημείο Ο και C,D είναι δύο σημεία τα οποία είναι αντίστροφα ως προς τον κύκλο (α). Έστω επίσης ότι Α και Β είναι τα άκρα της διαμέτρου που διέρχεται από τα C,D. Τότε (AB, CD)= -1. Αντίστροφα αν Α και Β είναι τα άκρα μιας διαμέτρου και (AB, CD)= -1 τότε τα C,D είναι αντίστροφα σημεία ως προς τον κύκλο (α).

Απόδειξη:

(AB, CD)= -1

Τότε $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$. Από αυτήν την ισότητα ένα συμπέρασμα που μπορούμε να βγάλουμε είναι ότι αν το C είναι εσωτερικό του AB τότε το D είναι εξωτερικό και αντίστροφα αν το D είναι εσωτερικό του AB τότε το C είναι εξωτερικό.

Για το ευθύγραμμο τμήμα OA έχουμε: $\overline{OA} = -\overline{AO}$.

Οπότε από την ισότητα $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$ έχουμε:

$$\frac{\overline{OC} - \overline{OA}}{\overline{OB} - \overline{OC}} = \frac{\overline{OD} - \overline{OA}}{\overline{OB} - \overline{OD}}.$$

Όμως

$\overline{OA} = -\overline{OB}$ οπότε

$$\left(\overline{OC} + \overline{OB}\right)\left(\overline{OB} - \overline{OD}\right) = -\left(\overline{OD} + \overline{OB}\right)\left(\overline{OB} - \overline{OC}\right)$$

κάνουμε τις πράξεις οπότε καταλήγουμε: $\overline{OC} \cdot \overline{OD} = \overline{OB}^2 > 0$ άρα τα C και D είναι ομόρροπα και έτσι θα έχουμε: $OC \cdot OD = OB^2$.

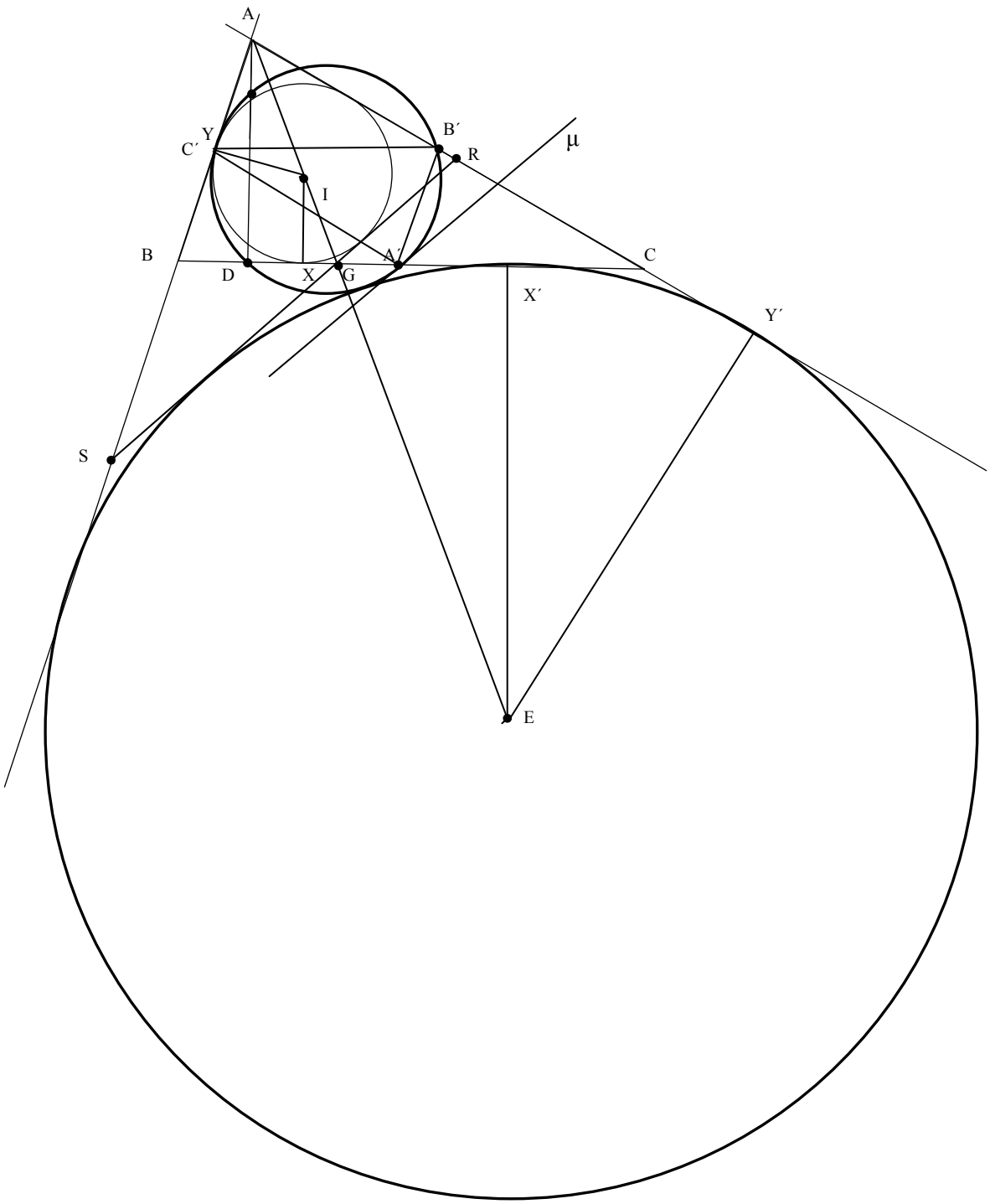
Αντίστορφα : Αν A,B είναι τα άκρα μιας διαμέτρου του κύκλου (α) και C,D δύο σημεία αντίστροφα ως προς τον κύκλο (α) τότε $OC \cdot OD = OB^2$ με C και D ομόρροπα άρα $\overline{OC} \cdot \overline{OD} = \overline{OB}^2$ οπότε $\left(\overline{OC} + \overline{OB}\right)\left(\overline{OB} - \overline{OD}\right) = -\left(\overline{OD} + \overline{OB}\right)\left(\overline{OB} - \overline{OC}\right)$

άρα

$$\frac{\overline{OC} - \overline{OA}}{\overline{OB} - \overline{OC}} = \frac{\overline{OD} - \overline{OA}}{\overline{OB} - \overline{OD}}$$

οπότε $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$ και έτσι (AB, CD)= -1

Έστω ότι ABC είναι το τρίγωνο στο οποίο αναφερθήκαμε όταν περιγράφαμε τον κύκλο των εννέα σημείων. Κρατάμε για το τρίγωνο ABC τους ίδιους συμβολισμούς.



Ας θεωρήσουμε ότι I είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου και E είναι το κέντρο του παρεγγεγραμμένου κύκλου που εφάπτεται στην πλευρά BC.
Οι κύκλοι I και E έχουν τις ίδιες εφαπτόμενες AB,AC,CB και μια τέταρτη την SR που τέμνει την BC στο G, με το R να είναι πάνω στην AC και το S πάνω στην AB.
Τα σημεία A,I,G,E είναι μεταξύ τους συγγραμμικά
Τα τρίγωνα AYI και AY΄E είναι όμοια όπως επίσης και τα τρίγωνα GXI και GX΄E.

Άρα $\frac{AI}{AE}=\frac{IY}{EY'}=\frac{IX}{EX'}=\frac{IG}{EG}$

αφού

$IX = IY$ ως ακτίνες του ίδιου κύκλου

και

$EY' = EX'$ ως ακτίνες του ίδιου κύκλου

Άρα $\frac{AI}{IG}=\frac{AE}{EG}$

Όμως $\frac{AI}{IG}=\frac{\overline{AI}}{\overline{IG}}$ διότι το I είναι εσωτερικό σημείο του AG

και $\frac{\overline{AE}}{\overline{EG}}=-\frac{AE}{EG}$ διότι το E είναι εξωτερικό σημείο του AG

Άρα $\frac{\overline{AI}}{\overline{IG}}=-\frac{\overline{AE}}{\overline{EG}}$

Επειδή AD, IX, EX' είναι μεταξύ τους παράλληλες θα έχουμε $\frac{\overline{DX}}{\overline{XG}}=-\frac{\overline{DX'}}{\overline{X'G}}\Rightarrow\frac{\overline{DX}}{\overline{XG}}\frac{\overline{X'G}}{\overline{DX'}}=-1\Rightarrow(DG,XX')=-1\Rightarrow(XX',DG)=-1$

Αντιστρέφουμε ως προς τον κύκλο με κέντρο το Α΄ και ακτίνα $\overline{XA'}$ το οποίο είναι ίσο με το $\overline{A'X'}$ (από το λήμμα). Επειδή IX είναι κάθετη στην DC και EX΄ είναι κάθετη στην DC θα έχουμε ότι οι κύκλοι I και E είναι ορθογώνιοι ως προς τον κύκλο αντιστροφής και ως εκ τούτου αντιστρέφονται στον εαυτό τους. Ο κύκλος των εννέα σημείων διέρχεται από το σημείο Α΄ και από το D οπότε αντιστρέφεται σε μια ευθεία L που διέρχεται από το G που είναι το αντίστροφο σημείο του C αφού $(XX',DG)=-1$.

Θα δείξουμε ότι η ευθεία αυτή είναι η ευθεία RS η οποία όπως ξέρουμε είναι εφαπτόμενη στους I,E κύκλους. Αν αποδείξουμε κάτι τέτοιο θα έχουμε αποδείξει ότι η εικόνα του κύκλου των εννέα σημείων είναι εφαπτόμενη στις εικόνες των κύκλων I,E άρα και ο κύκλος των εννέα σημείων εφάπτεται και στους κύκλους I,E. Θα αποδείξουμε ότι η ευθεία RS είναι παράλληλη προς την εφαπτόμενη του κύκλου των εννέα σημείων στο σημείο Α΄.

Αυτό όμως γιατί να είναι αρκετό;

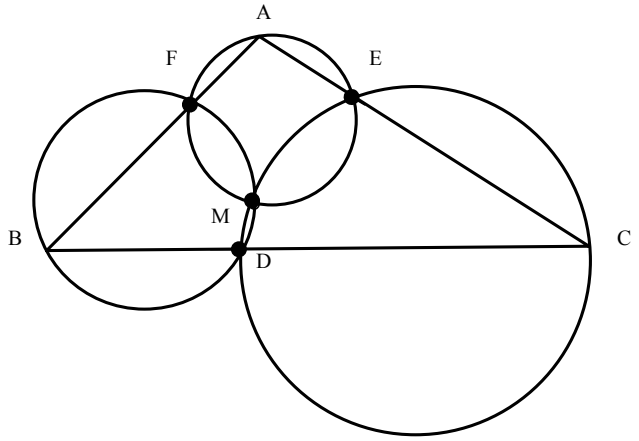
Ξέρουμε ότι η εικόνα ενός κύκλου που διέρχεται από το κέντρο της αντιστροφής είναι μια ευθεία που είναι κάθετη στην διάμετρο του κύκλου που περνάει από το σημείο Α΄. Άρα αυτή η ευθεία (η εικόνα του κύκλου) θα είναι παράλληλη προς την εφαπτόμενη του κύκλου στο Α΄. Η RS ξέρουμε ότι περνάει από το σημείο G. Η L ξέρουμε ότι είναι παράλληλη με την εφαπτόμενη του κύκλου στο Α΄ και περνάει από το G. Αν αποδείξουμε λοιπόν ότι η RS είναι επίσης παράλληλη προς την εφαπτόμενη του κύκλου στο σημείο Α΄ θα έχουμε αποδείξει ότι η RS και η L είναι η ίδια ευθεία.

Η γωνία ∠Β΄Α΄μ που σχηματίζεται από την εφαπτομένη στο σημείο Α και την χορδή Α΄Β΄ (Β΄ είναι το μέσο του τμήματος ΑC) ισούται με την γωνία ∠Β΄C΄Α΄ (αφού η μια γωνία είναι εγγεγραμμένη και η άλλη υπό χορδής και εφαπτομένης που βαίνουν στο ίδιο τόξο Α΄Β΄). Η γωνία ∠Β΄C΄Α΄ είναι ίση με την γωνία ∠Α΄CΒ΄ αφού το Β΄C΄Α΄C είναι παραλληλόγραμμο. Τέλος λόγω συμμετρίας ως προς την IE έχουμε ότι η γωνία ∠Α΄CΒ΄ είναι ίση με την γωνία ∠RSA. Έτσι αφού η AS είναι παράλληλη στην Α΄Β΄ θα έχουμε ότι και η RS είναι παράλληλη προς την εφαπτόμενη στο Α΄ οπότε θα είναι η L.

Θεώρημα του Miquel

Η επόμενη εφαρμογή της αντιστροφής είναι το θεώρημα του Miquel.

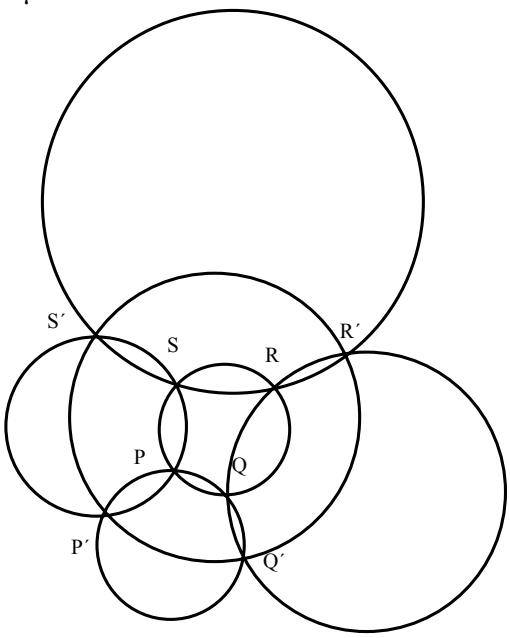
Αυτό το θεώρημα δεν είναι μόνο μια θαυμάσια εφαρμογή της αντιστροφής αλλά από αξιωματική άποψη παίζει έναν πολύ ιδιαίτερο ρόλο, διότι στην αξιωματική θεμελίωση της γεωμετρίας της αντιστροφής, παίρνει την θέση αξιώματος.
Πρώτα θα ξεκινήσουμε με ένα βοηθητικό λήμμα (*μικρό* θεώρημα του Miquel):
Σε ένα τρίγωνο ABC ας υποθέσουμε ότι:D,E,F είναι σημεία πάνω στις πλευρές του τριγώνου ABC. Το D βρίσκεται στην BC το E στην AC και το F στην AC. Τότε οι κύκλοι (AEF), (BDF), (CDE) διέρχονται από κοινό σημείο M.

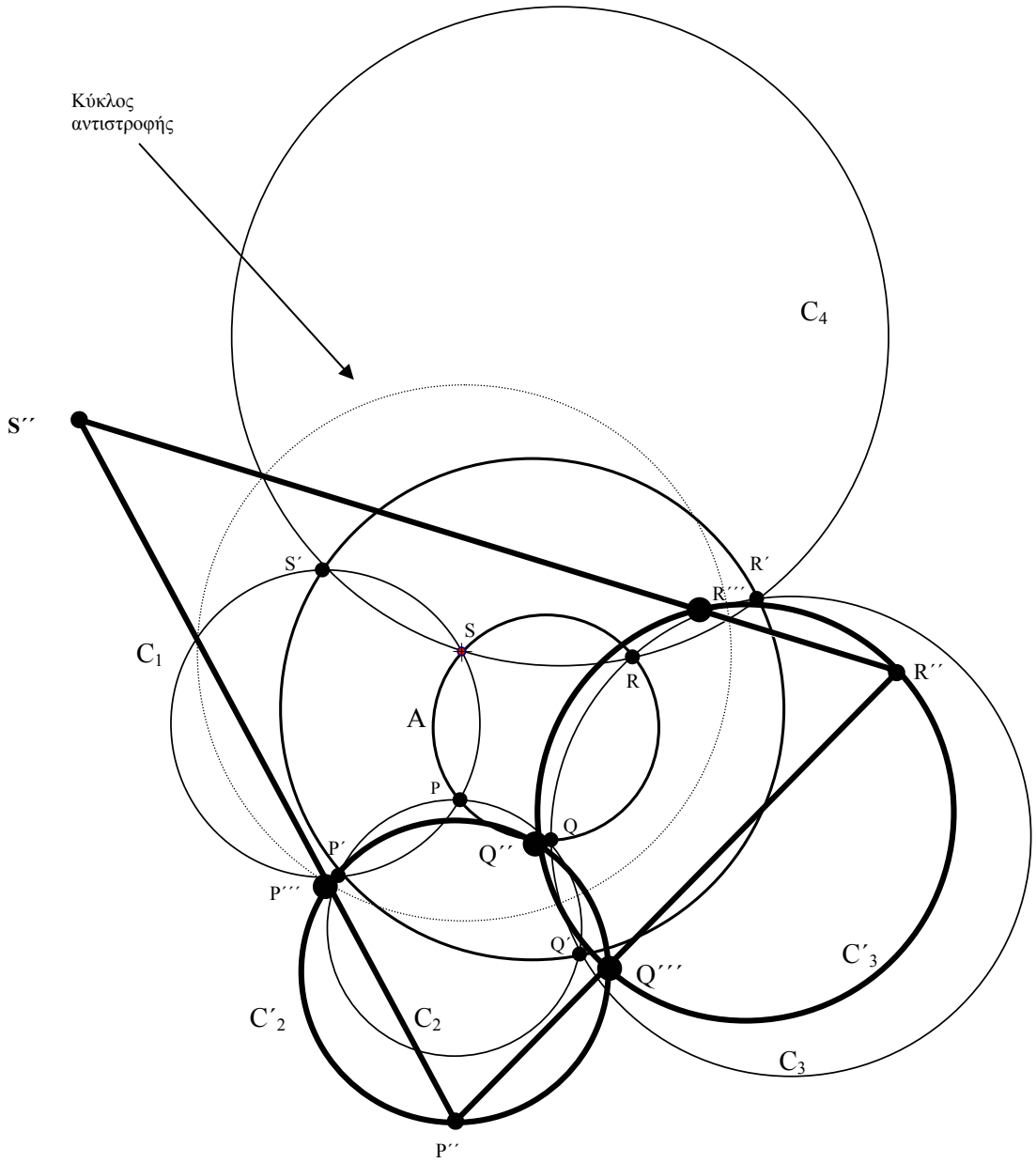


Απόδειξη:
Ας υποθέσουμε ότι BDF και CDE τέμνονται στο σημείο M. Θα δώσουμε την απόδειξη όταν το σημείο M βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου. Το θεώρημα αληθεύει επίσης όταν το M≡D (σε τέτοια περίπτωση τα τρίγωνα BDF και CDE εφάπτονται στο D).
Για συντομία στην γραφή θα συμβολίσουμε την παραπληρωματική μιας γωνίας με π(γωνία)
∠MFA=π(MFB)=∠MDB=∠π(MDC)=∠MEC=∠π(MEA). Έτσι συμπεραίνουμε ότι οι κορυφές του τετραπλεύρου AFME βρίσκονται πάνω σε έναν κύκλο.

Θα διατυπώσουμε τώρα και θα αποδείξουμε το *μεγάλο* θεώρημα του Miquel.

Θεώρημα:
Έστω C_1,C_2,C_3,C_4 είναι τέσσερις κύκλοι οι οποίοι δεν διέρχονται ανά τρεις από το ίδιο σημείο. Ας υποθέσουμε ότι οι κύκλοι C_1,C_2 τέμνονται στα σημεία P και P΄, οι C_2,C_3 τέμνονται στα σημεία Q και Q΄, οι C_3,C_4 τέμνονται στα σημεία R και R΄ και οι κύκλοι C_1,C_4 τέμνονται στα σημεία S και S΄ Τα σημεία P,Q,R,S είναι ομοκυκλικά αν και μόνο αν τα σημεία P΄,Q΄,R΄,S΄ είναι ομοκυκλικά.





Απόδειξη:

Ας υποθέσουμε ότι τα σημεία P,Q,R,S είναι ομοκυκλικά και κείνται πάνω σε έναν κύκλο A. Αντιστρέφουμε το σύστημα ως προς έναν κύκλο *I* ο οποίος έχει για κέντρο το σημείο S και ακτίνα SS´.

Τότε οι κύκλοι C_1,C_4 και ο κύκλος A αντιστρέφονται σε ευθείες αφού διέρχονται από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής. Οι ευθείες αυτές σχηματίζουν το τρίγωνο P´´S´´R´´

Η εικόνα του S είναι το σημείο στο άπειρο διότι το S είναι το κέντρο του κύκλου αντιστροφής.

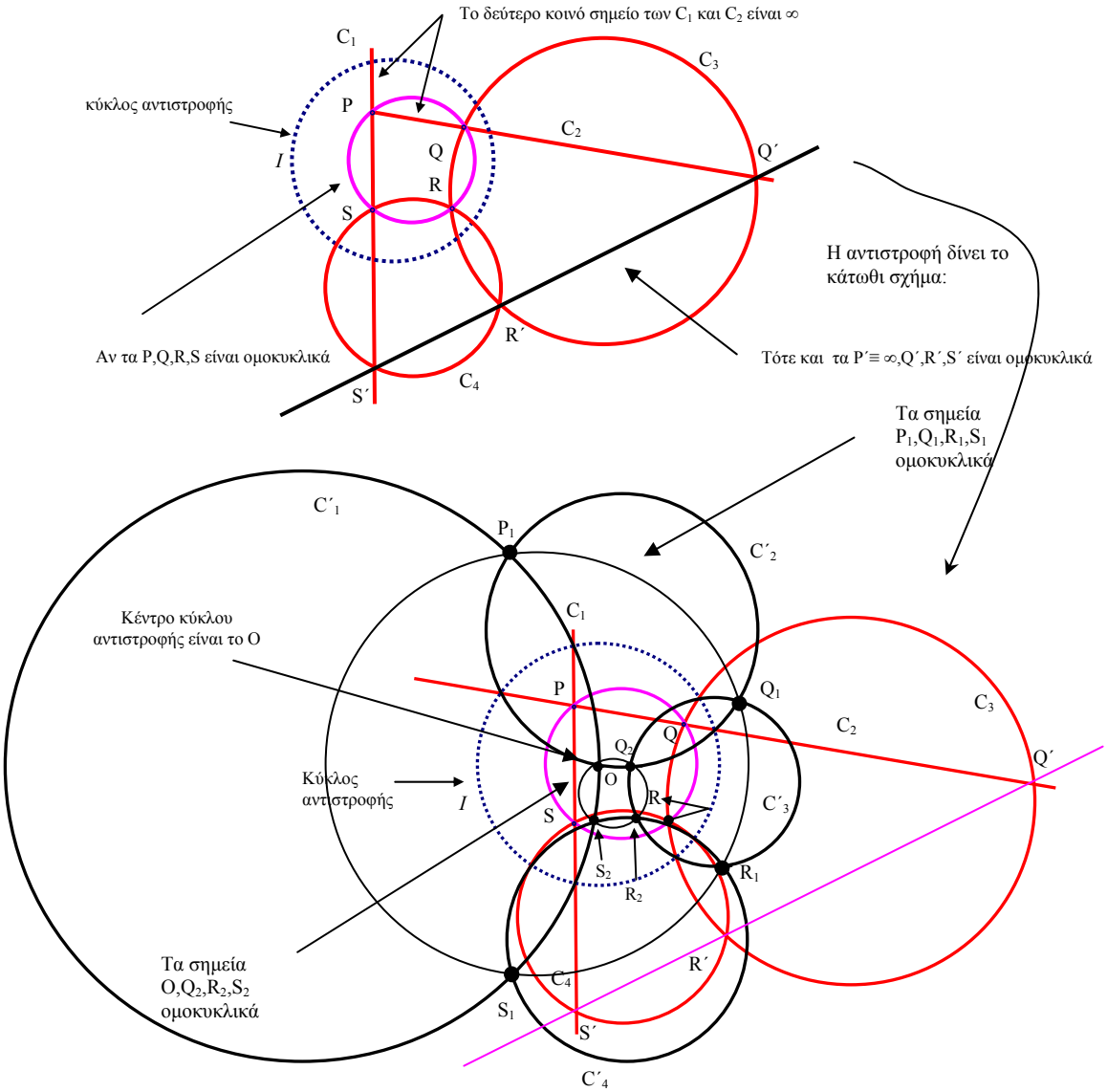
Η εικόνα του S´ είναι το σημείο S´´ το οποίο είναι το σημείο τομής των ευθειών S´´P´´ και S´´R´´(εικόνες των κύκλων C_1 και C_4).

Η εικόνα του P, που είναι το σημείο που συντρέχουν οι κύκλοι C_1 και C_2 και A, είναι το P´´ που είναι το σημείο από το οποίο διέρχονται οι εικόνες των κύκλων C_1 και C_2 και του κύκλου A (όπου εικόνα του C_1 είναι η ευθεία S´´P´´ αφού ο κύκλος C_1 διέρχεται από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής , εικόνα του C_2 είναι ο κύκλος $C´_2$ και εικόνα του κύκλου A είναι ευθεία R´´P´´ αφού ο κύκλος A διέρχεται από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής). Η

εικόνα του P΄ είναι το P΄΄΄ το οποίο είναι σημείο τομής των εικόνων του κύκλου C_2 και του κύκλου C_1 (που είναι οι C'_2 και S΄΄P΄΄αντίστοιχα).
Η εικόνα του R΄ είναι το R΄΄΄ το οποίο είναι σημείο τομής των εικόνων του κύκλου C_3 και του κύκλου C_4 (που είναι οι C'_3 και S΄΄R΄΄) ενώ η εικόνα του R είναι το σημείο R΄΄.
Εφαρμόζουμε το *μικρό* θεώρημα του Miquel για το τρίγωνο P΄΄S΄΄R΄΄ και για τις εικόνες C'_2,C'_3 των κύκλων C_2,C_3. Οι εικόνες C'_2,C'_3 τέμνονται στο σημείο Q΄΄΄ που βρίσκεται πάνω στην ευθεία P΄΄R΄΄ και το οποίο είναι η εικόνα του Q (Q είναι το σημείο τομής των κύκλων C_2,C_3 και του κύκλου A). Η εικόνα του Q΄ το οποίο είναι το δεύτερο κοινό σημείο των C_2,C_3 είναι το Q΄΄ (που είναι το σημείο τομής των C'_2 και C'_3 που δεν ανήκει στην ευθεία P΄΄R΄΄).
Από το *μικρό* θεώρημα του Miquel θα έχουμε λοιπόν ότι ο κύκλος που διέρχεται από τα S΄΄, P΄΄΄, R΄΄΄ θα περνάει επίσης και από το σημείο Q΄΄. Ο κύκλος S΄΄P΄΄΄R΄΄΄Q΄΄ θα έχει εικόνα (μέσω της αντιστροφής ως προς τον κύκλο *I* κέντρου S) που είναι επίσης κύκλος. Τα σημεία S΄,P΄,R΄,Q΄ είναι οι εικόνες των S΄΄P΄΄΄R΄΄΄Q΄΄ . Αφού η εικόνα του S΄΄P΄΄΄R΄΄΄Q΄΄΄ είναι κύκλος άρα τα S΄,P΄,R΄,Q΄ είναι επίσης ομοκυκλικά.

Ας επιχειρήσουμε μια γενίκευση τώρα του *μεγάλου* θεωρήματος του Miquel.

Στο σχήμα έχουμε την περίπτωση του θεωρήματος του Miquel με δύο κανονικούς κύκλους και δύο γενικευμένους:

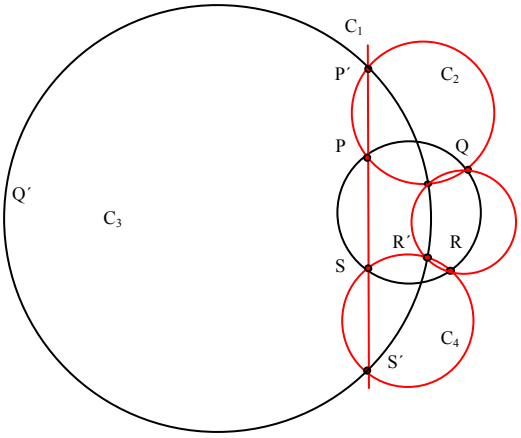


Αν τα σημεία P,Q,R,S είναι ομοκυκλικά τότε και τα αντίστροφά τους σημεία ως προς τον κύκλο *I* δηλαδή τα σημεία P_1,Q_1,R_1,S_1 είναι ομοκυκλικά οπότε από το θεώρημα Miquel και τα σημεία και τα σημεία O,Q_2,R_2,S_2 είναι ομοκυκλικά οπότε και τα αντίστροφά τους σημεία ως προς τον κύκλο *I* δηλαδή τα σημεία ∞,S΄,R΄,Q΄ είναι ομοκυκλικά.

Ας υποθέσουμε ότι C_1,C_2,C_3,C_4 είναι τέσσερις γενικευμένοι κύκλοι (δηλαδή ευθείες ή κανονικοί κύκλοι) οι οποίοι δεν διέρχονται ανά τρεις από το ίδιο σημείο. Ας υποθέσουμε ότι οι κύκλοι C_1,C_2 τέμνονται στα σημεία P και P΄, οι C_2,C_3 τέμνονται στα σημεία Q και Q΄, οι C_3,C_4 τέμνονται στα σημεία R και R΄ και οι κύκλοι C_1,C_4 τέμνονται στα σημεία S και S΄. Κάποια από αυτά τα κοινά σημεία είναι το σημείο στο άπειρο. Τα σημεία P,Q,R,S είναι ομοκυκλικά αν και μόνο αν τα σημεία P΄,Q΄,R΄,S΄ είναι ομοκυκλικά.

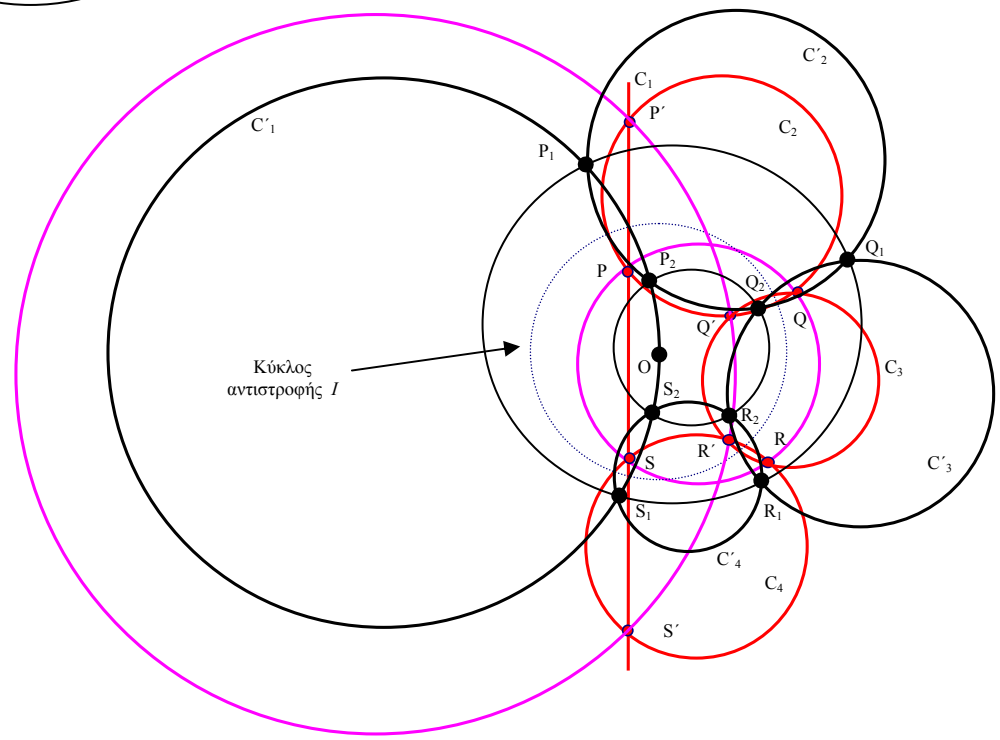
Απόδειξη:

Αντιστρέφουμε το σχήμα ως προς έναν κύκλο *I* του οποίου το κέντρο δεν είναι σημείο του συστήματος των τεσσάρων γενικευμένων κύκλων. Το σύστημα των εικόνων των τεσσάρων γενικευμένων κύκλων με την αντιστροφή θα είναι τέσσερις κανονικοί κύκλοι οι οποίο τέμνονται ανά δύο. Οι εικόνες των ευθειών θα είναι κύκλοι που διέρχονται από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής. Το μεγάλο θεώρημα του Miquel εφαρμόζεται για το αντίστροφο σύστημα. Αφού τα P,Q,R,S είναι ομοκυκλικά άρα και οι εικόνες τους P_1,Q_1,R_1,S_1 στο αντίστροφο σύστημα θα είναι ομοκυκλικά σημεία οπότε και η δεύτερη τετράδα σημείων τομής O,Q_2,R_2,S_2 θα είναι ομοκυκλική. Άρα και οι εικόνες αυτών των σημείων μέσω της αντιστροφής *I* θα αποτελούν τετράδα ομοκυκλικών σημείων. Δηλαδή τα σημεία P΄=∞,S΄,R΄,Q΄ είναι ομοκυκλικά. Ο κύκλος των τεσσάρων σημείων που αποτελούν τετράδα είναι ο γενικευμένος κύκλος που διέρχεται επίσης από τα σημεία S΄,R΄,Q΄.



Τα κάτωθι σχήματα δίνουν την περίπτωση του θεωρήματος Miquel όπου έχουμε τρεις κανονικούς κύκλους και έναν γενικευμένο κύκλο .

Η αντιστροφή δίνει το κάτωθι σχήμα:

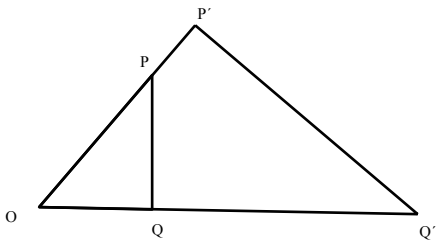


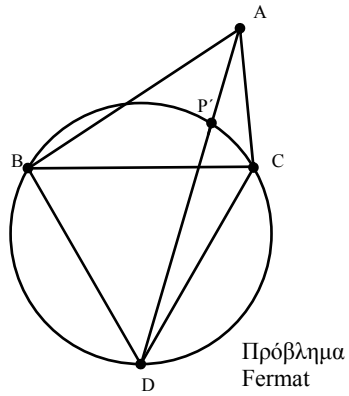
Αν τα σημεία P,Q,R,S είναι ομοκυκλικά τότε και τα αντίστροφά τους σημεία ως προς τον κύκλο *I* δηλαδή τα σημεία P_1,Q_1,R_1,S_1 είναι ομοκυκλικά οπότε από το θεώρημα Miquel και τα σημεία και τα σημεία O,Q_2,R_2,S_2 είναι ομοκυκλικά οπότε και τα αντίστροφά τους σημεία ως προς τον κύκλο *I* δηλαδή τα σημεία P΄,S΄,R΄,Q΄ είναι ομοκυκλικά.

Στην θεμελίωση της γεωμετρίας της αντιστροφής το θεώρημα του Miquel παίζει όπως είπαμε και στην αρχή, έναν ουσιαστικό και πρωτεύοντα ρόλο. Δεν είναι απλά ένα θεώρημα που αξίζει ιδιαίτερης προσοχής αλλά σε αυτήν την γεωμετρία το θεώρημα αυτό έχει την θέση αξιώματος.
Τα αξιώματα πρόσπτωσης της γεωμετρίας της αντιστροφής είναι αυτά που θα περιγράψουμε πιο κάτω. Οι έννοιες σημείο και κύκλος είναι αρχικές έννοιες.
Α.1 Τρία διαφορετικά μεταξύ τους σημεία βρίσκονται σε έναν και μόνο έναν κύκλο .
Α.2 Αν P είναι ένα σημείο πάνω σε έναν κύκλο A και Q είναι ένα σημείο που δεν ανήκει στον κύκλο A τότε υπάρχει μοναδικός κύκλος που διέρχεται από τα P και Q ο οποίος έχει κοινό σημείο με τον κύκλο A μόνο το σημείο P. (εφαπτόμενος του A)
Α.3 Σε κάθε κύκλο υπάρχουν τουλάχιστον τρία διαφορετικά μεταξύ τους σημεία.
Α.4 Υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο και ένας κύκλος που δεν προσπίπτουν
Το αντίστροφο επίπεδο θα καλείται *περιττό* όταν ικανοποιεί το πιο κάτω αξίωμα
Α.5 Υπάρχουν τέσσερις εφαπτόμενοι ανά δύο κύκλοι και τέτοιοι ώστε τα έξι σημεία επαφής είναι μεταξύ τους διαφορετικά. Κανείς άλλος κύκλος που διέρχεται από ένα εξ αυτών των σημείων δεν μπορεί να είναι εφαπτόμενος με τρεις από τους τέσσερις αυτούς κύκλους.
Α.6 Μεγάλο θεώρημα Miquel

Θεώρημα Πτολεμαίου

Μια πολύ απλή εφαρμογή της γεωμετρίας της αντιστροφής είναι και το θεώρημα του Πτολεμαίου:
Αν A,B,C,D είναι τέσσερα σημεία σε ένα επίπεδο τότε AB·CD+AD·BC>AC·BD εκτός από την περίπτωση που τα A,B,C,D βρίσκονται με την διάταξη [A-B-C-D] σε κύκλο ή ευθεία οπότε δεν ισχύει η ανισότητα αλλά ισότητα.





Πρόβλημα Fermat

Αυτό το θεώρημα αποδεικνύεται αρκεί να θυμηθούμε το πώς επιδρά η αντιστροφή στο μήκος ενός ευθυγράμμου τμήματος.
Αν υποθέσουμε ότι τα σημεία P,Q αντιστρέφονται στα σημεία R´ και Q´ (με κέντρο αντιστροφής το σημείο O) τότε τα τρίγωνα OPQ και OP´Q´ είναι όμοια τρίγωνα διότι $OP \cdot OP' = r^2$ και $OQ \cdot OQ' = r^2$ (με r=ακτίνα κύκλου αντιστροφής). άρα $\frac{OP}{OQ} = \frac{OQ'}{OP'}$ και η γωνία O είναι κοινή.

Άρα $\frac{P'Q'}{PQ} = \frac{OP'}{OQ} = \frac{OP \cdot OP'}{OP \cdot OQ} = \frac{r^2}{OP \cdot OQ}$ άρα $P'Q' = \frac{r^2 \cdot PQ}{OP \cdot OQ}$

Έστω τώρα ότι δίνονται τέσσερα σημεία A,B,C,D. Αντιστρέφουμε θεωρώντας ως κέντρο του κύκλου αντιστροφής το A και ας υποθέσουμε ότι B´,C´,D´ είναι τα αντίστροφα σημεία των B,C,D. Τότε B´C´+ C´D´> B´D´ εκτός και αν το C´ βρίσκεται στην ευθεία B´D´ μεταξύ των B´,D´. Σε αυτήν την περίπτωση ισχύει B´C´+ C´D´= B´D´

Αν B΄C΄+ C΄D΄> B΄D΄ τότε η ανισότητα γίνεται $\frac{BC}{AB\cdot AC}+\frac{CD}{AC\cdot AD}>\frac{BD}{AB\cdot AD}$

ή ισοδύναμα

$AB\cdot CD+BC\cdot AD>AC\cdot BD$

Αυτό όμως δεν ισχύει στην περίπτωση που το C΄ βρίσκεται μεταξύ των B΄,D΄ οπότε και ισχύει η ισότητα $AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$

Αν το C΄ βρίσκεται μεταξύ των B΄,D΄ τότε τα A,B,C,D βρίσκονται πάνω σε κύκλο ή σε μια ευθεία γραμμή.

Πρόβλημα Fermat

Δίνονται τα σημεία A,B,C που είναι τρία τυχαία σημεία πάνω στο επίπεδο. Να βρεθεί ένα σημείο P ώστε το άθροισμα PA+PB+PC να γίνεται ελάχιστο.

Θεωρούμε το τρίγωνο ABC. Ας υποθέσουμε ότι οι ∠B και ∠C είναι οι οξείες γωνίες του τριγώνου ABC. Στο ημιεπίπεδο το οποίο είναι αντικείμενο του ημιεπιπέδου (AB,A) παίρνουμε το ισόπλευρο τρίγωνο BCD. Τότε από το θεώρημα του Πτολεμαίου θα έχουμε: $BP\cdot CD+PC\cdot DB>PD\cdot BC$. Επειδή CD=DB=BC θα έχουμε ότι $PB+PC>PD$ και έτσι $PA+PB+PC>PA+PD$ (εκτός της περίπτωσης που το P βρίσκεται στον κύκλο BCD και μάλιστα με την διάταξη BPCD). Αν το P δεν βρίσκεται πάνω στην AD θα έχουμε: $PA+PD>AD$.

Έτσι αν εξαιρέσουμε την περίπτωση που το P≡P΄ (P΄ είναι η άλλη τομή του AD με τον κύκλο BCD) θα έχουμε $PA+PB+PC>AD$.

Αν όμως είναι P≡P΄ τότε από το θεώρημα του Πτολεμαίου θα έχουμε ότι $BP'\cdot CD+P'C\cdot DB=P'D\cdot BC$ αφού τα σημεία B,P΄,C,D (με αυτήν την διάταξη) βρίσκονται σε κύκλο.

Σε αυτήν την περίπτωση θα έχουμε:

$BP'+P'C=P'D$ αφού CD=DB=BC

Οπότε:

$P'A+P'B+P'C=P'A+P'D=AD$

Άρα θα έχουμε: $P'A+P'B+P'C<PA+PB+PC$. Το σημείο που ψάχνουμε λοιπόν είναι το P΄

Αν η γωνία A=120° τότε το A≡P΄ οπότε το A είναι το ζητούμενο σημείο. Αν A>120° τότε το P΄ είναι εξωτερικό της AD οπότε πάλι το A είναι το ζητούμενο σημείο.

Γεωμετρία του διαβήτη

Στο βιβλίο Ι των Στοιχείων του Ευκλείδη υπάρχουν τέσσερα αιτήματα τα οποία κατοχυρώνουν την δυνατότητα γεωμετρικών κατασκευών. Τα αιτήματα 1 και 2 εξασφαλίζουν την δυνατότητα κατασκευής ευθειών. Το αίτημα 3 εξασφαλίζει την δυνατότητα κατασκευής κύκλου με οποιοδήποτε κέντρο και οποιαδήποτε ακτίνα. Το αίτημα 5 εξασφαλίζει την ύπαρξη σημείων τομής ευθειών που δεν είναι παράλληλες.

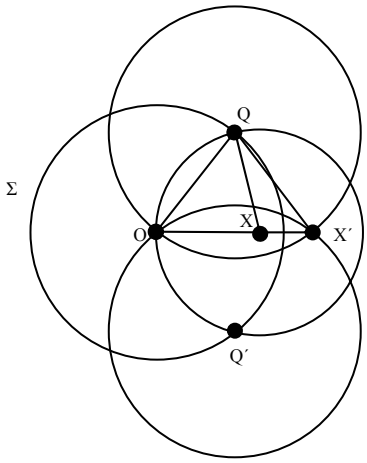
Παρόλο που ο Ευκλείδης δεν δίνει αιτήματα ύπαρξης σημείων τομής για δύο κύκλους, όπως επίσης για έναν κύκλο και μια ευθεία, τέτοιες σιωπηλές παραδοχές ύπαρξης σημείων τομής χρησιμοποιούνται. Για παράδειγμα στην πρόταση 1 του βιβλίου Ι υπάρχει η παραδοχή σημείων τομής δύο κύκλων χωρίς η ύπαρξη τέτοιων τομών να εξασφαλίζεται από κάποιο αίτημα. Επίσης η ύπαρξη σημείου τομής δεν μπορεί να αποδειχθεί από τα ήδη υπάρχοντα αιτήματα στην πρόταση 2 του βιβλίου Ι όπου η τομή μιας ευθείας και ενός κύκλου γίνεται αποδεκτή.

Οι υπόλοιπες γεωμετρικές κατασκευές της ευκλείδειας γεωμετρίας βασίζονται στα αιτήματα που έχουν δοθεί. Τέτοιες κατασκευές έχουμε στην πρόταση Ι.9 (διχοτόμος γωνίας) πρόταση Ι.10 (διχοτόμηση ευθύγραμμου τμήματος) Ι.11,Ι.12 (κατασκευές κάθετων ευθυγράμμων τμημάτων), Ι.22 (κατασκευές τριγώνων με πλευρές δεδομένα ευθύγραμμα τμήματα) Ι.31 (κατασκευή παράλληλων ευθειών).

Ο κανόνας χρησιμοποιείται στην Ευκλείδεια Γεωμετρία για να συνδέσει δύο σημεία με μια ευθεία, ενώ ο διαβήτης δεν μπορεί να κάνει κάτι τέτοιο. Ο κανόνας και ο διαβήτης χρησιμοποιούνται πρωτίστως για να προσδιορίσουμε συγκεκριμένα σημεία.
Ο διαβήτης για τον οποίο μιλάμε την Ευκλείδεια γεωμετρία δεν είναι ένας φυσικός διαβήτης. Είναι ένας νοητός διαβήτης και προκύπτει άμεσα από το αίτημα 3 των Στοιχείων. Ο διαβήτης αυτός δεν μπορεί να κάνει όλα όσα μπορούν οι φυσικοί διαβήτες. Για παράδειγμα δεν μπορεί να μεταφέρει αποστάσεις πράγμα που μπορεί να κάνει ο φυσικός διαβήτης. Παρόλα αυτά ο νοητός διαβήτης μπορεί σε συνδυασμό με την πρόταση[12] Ι.3 των Στοιχείων να μεταφέρει αποστάσεις. Το ίδιο ισχύει και για τον κανόνα. Στην γεωμετρία λοιπόν του Ευκλείδη, κανόνας και διαβήτης είναι νοητοί και προκύπτουν από τα αιτήματα.
Θα δείξουμε πιο κάτω ότι στις γεωμετρικές κατασκευές της Ευκλείδειας γεωμετρίας μπορούμε να παραλείψουμε την χρήση του κανόνα και να δουλέψουμε αποκλειστικά με την χρήση του διαβήτη.
Τα θεμελιώδη προβλήματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας είναι :

1. Να βρούμε τις τομές δύο κύκλων των οποίων δίνονται το κέντρο και η ακτίνα. (το πρόβλημα αυτό το συμβολίζουμε με CC)
2. Να βρεθούν οι τομές μιας ευθείας, η οποία γνωρίζουμε ότι διέρχεται από δύο σημεία, με έναν κύκλο του οποίου δίνεται το κέντρο και η ακτίνα. (το συμβολίζουμε με LC)
3. Να βρεθεί η τομή δύο ευθειών που καθεμία διέρχεται από δύο δεδομένα σημεία. (το συμβολίζουμε με LL)

Η πρώτη από τις τρεις κατασκευές μπορεί να γίνει με τον διαβήτη αποκλειστικά αρκεί να χαράξουμε τους δύο κύκλους οπότε δεν θα συζητηθεί περαιτέρω η περίπτωση αυτή.
Τα προβλήματα 2 και 3 ανάγονται στο πρόβλημα 1 με την βοήθεια της γεωμετρικής αντιστροφής.
Για να δείξουμε ότι όλες οι γεωμετρικές κατασκευές είναι εφικτές μόνο με την χρήση του διαβήτη είναι απαραίτητο να δείξουμε :
Α) Πως μπορούμε να βρούμε το αντίστροφο ενός σημείου με την αντιστροφή ως προς έναν κύκλο με δεδομένο κέντρο και ακτίνα και Β) Πώς να βρούμε το κέντρο ενός κύκλου ο οποίος διέρχεται από τρία δεδομένα σημεία.
Ας δώσουμε την κατασκευή του πρώτου από τα δύο αυτά προβλήματα:
Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σημείο Χ και θέλουμε να βρούμε το αντίστροφο του ως προς έναν κύκλο Σ με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα R . Θεωρούμε ότι $XO > \frac{R}{2}$
Έστω ότι ο κύκλος με κέντρο το Χ και ακτίνα ΧΟ τέμνει τον κύκλο Σ στα σημεία Q΄και Q και ας υποθέσουμε ότι Ο και Χ΄ είναι οι τομές των δύο κύκλων με κέντρα τα Q και Q΄ και ακτίνες QO και Q΄O αντίστοιχα. Τότε το σημείο Χ΄ είναι το αντίστροφο του Χ ως προς τον κύκλο Σ.



[12] αν δοθούν δυο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ μπορούμε να πάρουμε πάνω στο μεγαλύτερο τμήμα ΑΒ ένα τμήμα ΑΕ ίσο με το μικρότερο ΓΔ

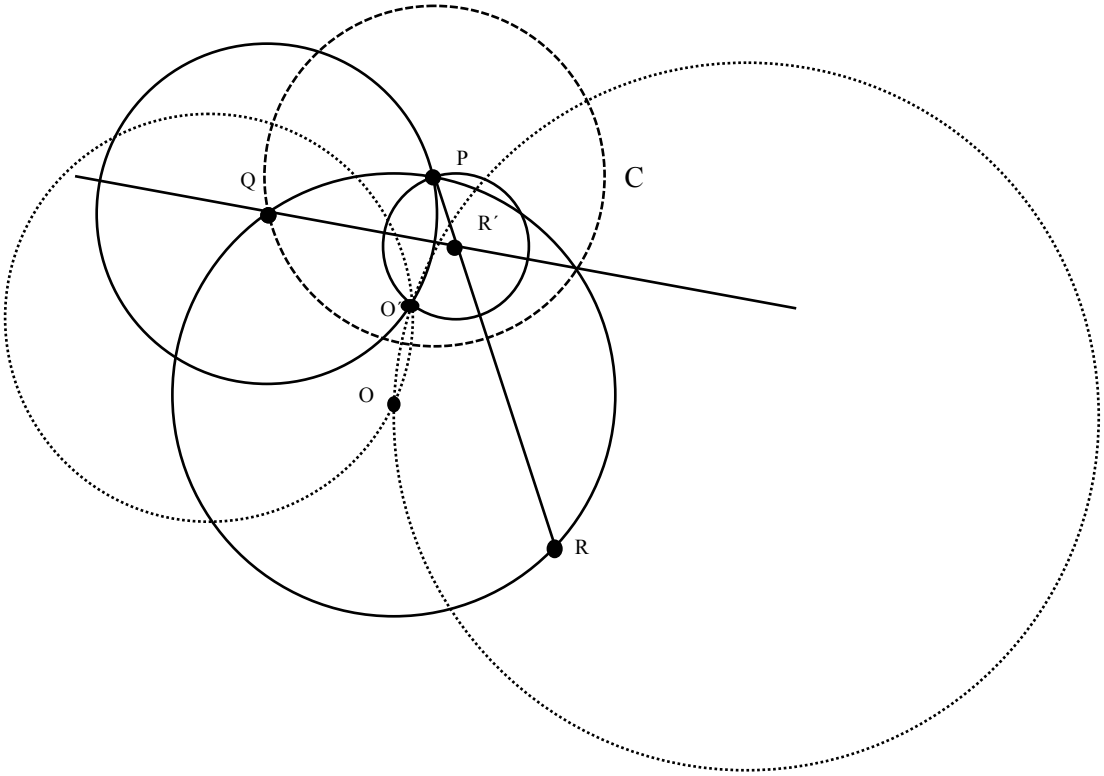
Γιατί όμως να συμβαίνει κάτι τέτοιο;

Τα τρίγωνα QOX και QOX΄ είναι ισοσκελή τρίγωνα με ίση την γωνία O της βάσης .
Είναι λοιπόν όμοια τρίγωνα οπότε $\frac{OX}{OQ}=\frac{OQ}{OX'}$ άρα $OX \cdot OX'=OQ^2$
Αυτή η κατασκευή βρίσκεται στην βάση της όλης συζήτησης μας πάνω στην γεωμετρία του διαβήτη.
Θα δείξουμε ότι οι κατασκευές 2 και 3 είναι εφικτές με την χρήση του διαβήτη και μόνο. Η δυνατότητα αυτή γίνεται πράξη μέσω δύο άλλων κατασκευών στις οποίες θα δώσουμε τα ονόματα PC και CR
PC: κατασκευή του αντιστρόφου σημείου του σημείου P ως προς τον κύκλο C.
CR: κατασκευή του κέντρου ενός κύκλου που διέρχεται από τρία σημεία.
Η κατασκευή PC έγινε πιο πάνω. Θα δεχθούμε προσωρινά ότι και η κατασκευή CR έχει γίνει.
Θα δώσουμε τις κατασκευές 2 και 3 με την χρήση αποκλειστικά του διαβήτη μέσω συγκεκριμένων βημάτων ενώ καθοριστική είναι η βοήθεια των κατασκευών CC, PC, CR.
Βήμα 1: Επιλέγουμε έναν τυχαίο κύκλο έτσι ώστε το σχήμα μας να βρίσκεται έξω από αυτόν τον κύκλο. Κανένα σημείο του σχήματος δεν βρίσκεται μέσα στον κύκλο αυτό. Τον κύκλο αυτόν θα τον ονομάσουμε περιβάλλοντα κύκλο.
Θα χρησιμοποιήσουμε την κατασκευή PC για να αντιστρέψουμε μέσα στον περιβάλλοντα κύκλο όλα εκείνα τα σημεία του αρχικού σχήματος που έχουμε αποφασίσει ότι είναι στρατηγικής σημασίας. Τα αντίστροφα σημεία των σημείων στρατηγικής σημασίας του αρχικού σχήματος θα βρίσκονται όλα μέσα στον περιβάλλοντα κύκλο. Αυτή η αντιστροφή μετατρέπει όλα τα δεδομένα που έχουμε από τους κύκλους και τις ευθείες του αρχικού σχήματος σε δεδομένα για κύκλους και μόνο στο σχήμα που έχει προκύψει από την αντιστροφή.
Βήμα 2: Θα χρειαστούμε τα κέντρα των κύκλων στο αντίστροφο σχήμα για να μπορέσουμε να χαράξουμε τους αντίστοιχους κύκλους. Η κατασκευή CR μπορεί να μας δώσει έναν τρόπο για να κατασκευάσουμε αυτούς τους κύκλους, αρκεί να έχουμε διαθέσιμα τρία σημεία πάνω σε κάθε κύκλο. Αυτά τα σημεία μπορούμε να τα αποκτήσουμε αρκεί να αντιστρέψουμε αρκετά σημεία από τους αρχικούς κύκλους και ευθείες.
Βήμα 3: Κάθε τομή του αρχικού σχήματος είτε αυτό είναι σημείο τομής δύο κύκλων είτε είναι σημείο τομής ενός κύκλου και μιας ευθείας είτε σημείο τομής δύο ευθειών αντιστοιχεί σε μια τομή δύο κύκλων στο σχήμα που προκύπτει με την αντιστροφή. Χρησιμοποιούμε τώρα την κατασκευή CC για να βρούμε τα σημεία τομής των κύκλων του σχήματος που έχει προκύπτει με την αντιστροφή.
Βήμα 4: Χρησιμοποιούμε τώρα την κατασκευή PC για να μεταφέρουμε τις τομές του αντίστροφου σχήματος πίσω στο αρχικό σχήμα.
Ερχόμαστε τώρα στην κατασκευή που δεχθήκαμε πιο πάνω ως γνωστή δηλαδή την εύρεση (κατασκευή) του κέντρου ενός κύκλου ο οποίος διέρχεται από τρία γνωστά σημεία.(κατασκευή CR).
Είναι αναγκαίο να δώσουμε την κατασκευή του κέντρου ενός κύκλου του οποίου γνωρίζουμε τρία σημεία διότι οι κατασκευές κύκλων βασίζονται στην γνώση των κέντρων των κύκλων αυτών. Πρέπει να επισημάνουμε ότι όταν αντιστρέφουμε έναν κύκλο C μέσω της αντιστροφής I_D (αντιστροφή ως προς τον κύκλο D) τότε η εικόνα του C είναι ένας άλλος κύκλος E του οποίου το κέντρο δεν είναι το αντίστροφο του κέντρου του κύκλου C μέσω της αντιστροφής I_D. Το κέντρο του κύκλου E μπορούμε να το προσδιορίσουμε με την βοήθεια τριών σημείων του E. Τα τρία σημεία του κύκλου E μπορούμε να τα βρούμε παίρνοντας τρία σημεία του κύκλου C και βρίσκοντας τα αντίστροφά τους σημεία μέσω της I_D. Άρα αυτό που μας λείπει είναι η κατασκευή του κέντρου ενός κύκλου του οποίου γνωρίζουμε τρία σημεία.

Ας υποθέσουμε ότι P,Q,R είναι τρία σημεία. Θα προσδιορίσουμε το κέντρο O του κύκλου που διέρχεται από αυτά τα τρία σημεία αντιστρέφοντας ως προς τον κύκλο C με κέντρο το σημείο P και ακτίνα PQ. Ας συμβολίσουμε την αντιστροφή αυτή με I_C.

Πρώτα θα αντιστρέψουμε το σημείο R ως προς την I_C και θα πάρουμε το σημείο $R' = I_C(R)$. Μετά χαράσσουμε δύο κύκλους. Ο ένας έχει κέντρο το Q και ακτίνα το QP και ο άλλος με κέντρο R΄ και ακτίνα R΄P.

Έκτός από το σημείο P οι κύκλοι (Q,QP) και (R΄,R΄P) τέμνονται και στο σημείο O΄. Προφανώς αυτό το σημείο είναι το συμμετρικό του σημείου P ως προς την ευθεία QR΄. Τέλος αντιστρέφουμε το O΄ μέσω της αντιστροφής ως προς τον κύκλο C και περνούμε το O. Τα σημείο O είναι το κέντρο του κύκλου (P,Q,R).



Θα δείξουμε ότι το σημείο O είναι το κέντρο του κύκλου (P,Q,R).

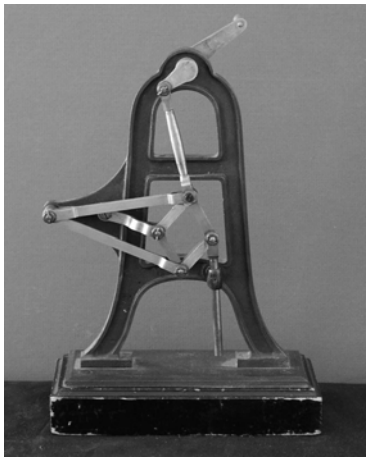
Όταν αντιστρέφουμε τον κύκλο (P,Q,R) ως προς τον κύκλο C (αντιστροφή I_C) παίρνουμε την ευθεία QR΄ επειδή το σημείο P απεικονίζεται στο σημείο στο άπειρο (αφού είναι το κέντρο του κύκλου αντιστροφής).Το σημείο Q μένει σταθερό αφού βρίσκεται πάνω στον κύκλο αντιστροφής. Το σημείο R απεικονίζεται στο σημείο R΄. Συμβολικά μπορούμε να γράψουμε: $QR' = I_C(PQR)$

Για να δείξουμε ότι το O είναι το κέντρο του κύκλου (P,Q,R) χρειάζεται να δείξουμε ότι $O = I_{PQR}(\infty)$ όπου I_{PQR} είναι η αντιστροφή ως προς τον κύκλο (P,Q,R).

$I_{PQR}(\infty) = I_{I_C(QR')}\left(I_C(P)\right) = I_C\left(I_{QR'}(P)\right) = I_C(O') = O$, πράγμα που προκύπτει άμεσα από την αρχή της συμμετρίας.

Peaucellier Linkage

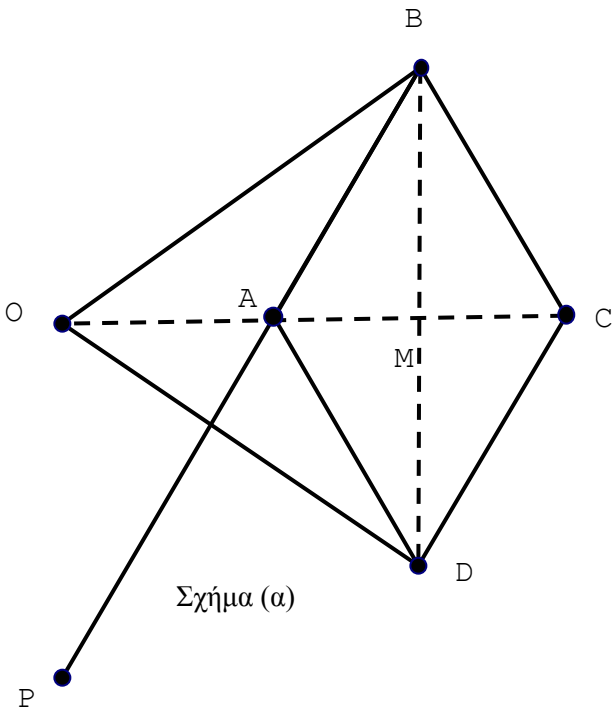
Από το δέκατο τρίτο αιώνα, όπως δείχνουν και ανάλογα σχεδιάσματα της εποχής, υπήρχαν διάφοροι μηχανισμοί οι οποίοι μετέτρεπαν την κυκλική κίνηση σε ευθύγραμμη. Το 1588 ο Agostino Rammelli εξέδωσε το βιβλίο του με θέμα τις μηχανές και στο οποίο αναφέρεται εκτενώς στην χρήση συνδεσμολογιών αυτού του είδους. Βέβαια υπάρχει μεγάλη διαφορά ανάμεσα στις συνδεσμολογίες του Rammelli και αυτές του James Watt (1736-1819) ο οποίος ήταν από τους πρωτοπόρους στις ανακαλύψεις που βελτίωναν τις ατμομηχανές. Πήρε αρκετά χρόνια στον Watt να σχεδιάσει μια συνδεσμολογία ευθύγραμμης κίνησης η οποία μετέτρεπε την ευθύγραμμη κίνηση σε κυκλική. Η λύση που έδωσε ο Watt δεν ικανοποιούσε όμως τους μαθηματικούς και αυτό διότι δεν ήταν μια συνδεσμολογία ακριβούς ευθύγραμμης κίνησης αλλά αντίθετα ακολουθούσε μια κατά προσέγγιση ευθύγραμμη κίνηση. Το 1853 ο Γάλλος μαθηματικός Pierre Frederic Sarrus από το πανεπιστήμιο του Strassbourg επινόησε μια συσκευή που έμοιαζε με ακορντεόν και η οποία διέγραφε πραγματικά μια ευθύγραμμη κίνηση αλλά δεν ήταν μια λύση του προβλήματος στο επίπεδο.



Η εμφάνιση το 1864 της συνδεσμολογίας απόλυτα ευθύγραμμης κίνησης η ποία δόθηκε από τον Peaucellier πέρασε σχεδόν απαρατήρητη.

Ο Charles Nicolas Peaucellier ήταν αξιωματικός του Γαλλικού στρατού και ανακοίνωσε τον αντιστροφέα του το 1864 με την μορφή ερώτησης και χωρίς να εξηγήσει την λύση σε ένα γράμμα στο Nuvelles Annales.

Για δέκα περίπου χρόνια πριν την τελική λύση του Peaucellier ο φημισμένος Ρώσος μαθηματικός P.L.Chebyshev ασχολήθηκε με το πρόβλημα με μεγάλο πάθος αλλά δεν κατάφερε να δώσει παρά μόνο προσεγγίσεις της ευθύγραμμης κίνησης.



Σχήμα (α)

Το 1871 ο Lipmann I. Lipkin (1851-1875) ο οποίος ήταν μαθητής του Chebyshev αλλά πέθανε πριν ολοκληρώσει την διδακτορική διατριβή του ανακάλυψε ανεξάρτητα από τον Peaucellier την ίδια συνδεσμολογία ευθειοποίησης και παρουσίασε ένα μηχανικό μοντέλο στην παγκόσμια έκθεση της Βιέννης το 1873. Μετά από αυτό ο Peaucellier δημοσίευσε λεπτομέρειες για την ανακάλυψή του. Το 1874 ο James Joseph Sylvester δημοσίευσε μια διατριβή με τίτλο "Recent Discoveries in Mechanical Conversion of Motion" σκοπός της οποίας ήταν να κάνει γνωστή την ανακάλυψη των Peaucellier- Lipkin στον αγγλόφωνο κόσμο[1]. Μετά από αυτή την σύντομη

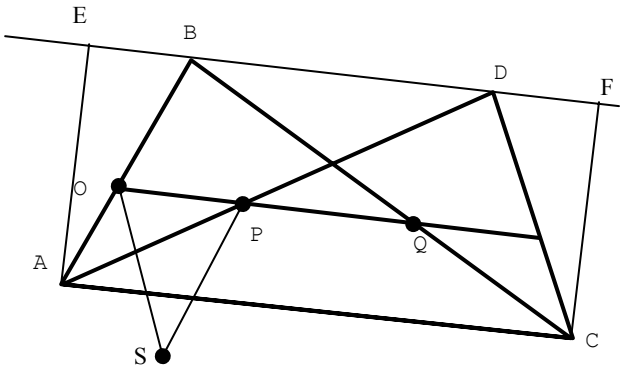
[1] Αναφορές: 1. Kempe, A.B. How to draw a straight line London: Macmillan and Co. 1877
2. Fergusson, Eugene S. Kinematics of mechanisms from the time of Watt, United States National Museum Bulletin 228, Smithsonian Institute, Washington D.C., 1962,pp185-230
Και οι δύο αναφορές βρίσκονται online στο Internet.

ιστορική αναδρομή σχετικά με την ευθειοποίηση μιας κυκλικής κίνησης θα περάσουμε στο μαθηματικό μέρος της περιγραφής του αντιστροφέα του Peaucellier:
Εφτά ευθύγραμμα τμήματα είναι συνδεδεμένα μέσω κινούμενων συνδέσμων στα σημεία O,P,A,B,C,D (σχήμα (α)). Οι διακεκομμένες γραμμές δεν είναι μέρος της συνδεσμολογίας. Τα ευθύγραμμα τμήματα AB, BC,CD,AD είναι μεταξύ τους ίσα όπως επίσης μεταξύ τους ίσα είναι και τα τμήματα OB,OD. Το σχήμα ABCD είναι πάντοτε ένας ρόμβος ενώ τα τμήματα OB και OD διατηρούν τις κορυφές A,C ευθυγραμμισμένες με την O. Αυτό είναι εύκολο να το δούμε αρκεί να παρατηρήσουμε πως : α) Τα τρίγωνα BAC και ADC είναι ίσα αφού το BADC είναι ρόμβος β) τα τρίγωνα OAB και OAD είναι ίσα αφού i) OA=OA ii) OD=OB και iii) AB=AD οπότε θα έχουμε:

$$\angle OAB=\angle DAO=\angle x \text{ και } \angle BAC=\angle CAD=\angle y$$
$$\angle OAB+\angle BAC+\angle CAD+\angle DAO=360^0$$
$$2\angle x+2\angle y=360^0 \text{ οπότε } \angle x+\angle y=180^0$$

Ας υποθέσουμε ότι M είναι το μέσο του τμήματος AC.
Τότε $OA\cdot OC=(OM-MA)(OM+MC)=(OM-MA)(OM+MA)=$
$=OM^2-MA^2=OM^2+MB^2-MB^2-MA^2=OB^2-AB^2$.
Το OB^2-AB^2 είναι σταθερό αφού τα τμήματα OB και AB είναι σταθερά.
Αυτό σημαίνει ότι τα σημεία A,C είναι πάντα αντίστροφα μεταξύ τους ως προς κέντρο το O και δύναμη το OB^2-AB^2. Άρα τα σημεία A,C διατρέχουν δύο γραμμές που είναι αντίστροφες μεταξύ τους. Αν AP=OP τότε το A κινείται σε κύκλο με κέντρο το P ο οποίος διέρχεται από το κέντρο O του κύκλου αντιστροφής. Ας δούμε πως δουλεύει αυτή η κατασκευή: Κρατώντας σταθερό το σημείο O και το σημείο P και κινώντας το σημείο A, το οποίο έχει σταθερή απόσταση από το P ίση με OP, τότε αυτό θα κινείται πάντα πάνω στον κύκλο (P,PO). Δηλαδή διαγράφει τον κύκλο (P,PO) ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής (που είναι το σημείο O). Το αντίστροφο σημείο του A (που είναι το C) θα διαγράφει υποχρεωτικά ευθεία.

Αντιστροφέας του Hart



Παρόμοια συνδεσμολογία με την συνδεσμολογία του Peaucellier είναι και η συνδεσμολογία του Hart η οποία χρησιμοποιεί λιγότερα ευθύγραμμα τμήματα.
Η συσκευή αποτελείται από τέσσερα ευθύγραμμα τμήματα AB,BC,CD,AD τέτοια ώστε AB=CD και BC=AD και τα AD, BC τέμνονται. Τα σημεία O, P, Q βρίσκονται πάνω στις AB,AD,BC αντίστοιχα και ικανοποιούν την σχέση

(1): $\frac{AO}{AB}=\frac{AP}{AD}=\frac{CQ}{BC}=\mu$ για $0<\mu<1$ (1)

Παρατηρώντας το τρίγωνο ABD και μέσω της (1) συμπεραίνουμε ότι $OP \parallel BD$ ενώ παρατηρώντας το τρίγωνο ABC έχουμε ότι $OQ \parallel AC$. Επειδή τα τρίγωνα ABC και ADC είναι ίσα θα έχουμε ότι το ABDC είναι ισοσκελές τραπέζιο οπότε $BD \parallel AC$ και έτσι τα σημεία O, P, Q είναι συνευθειακά και ανήκουν σε μια ευθεία παράλληλη και προς την AC και προς την BD.
Σχεδιάζουμε τις AE και CF κάθετες προς την BD (οπότε και στην AC).
$AC\cdot BD=EF\cdot BD=(ED+EB)\cdot(ED-EB)=ED^2-EB^2$
Από το Πυθαγόρειο θεώρημα θα έχουμε:

$ED^2+AE^2=AD^2$ και $EB^2+AE^2=AB^2$

$AC\cdot BD = ED^2-EB^2 = AD^2-AB^2$

επιπλέον

$\frac{OP}{BD}=\frac{AO}{AB}=\mu, \frac{OQ}{AC}=\frac{OB}{AB}=1-\mu$

οπότε συνδυάζοντας τα προηγούμενα θα έχουμε :

$\frac{OP}{BD}\cdot\frac{OQ}{AC}=(1-\mu)\mu$ οπότε $OP\cdot OQ=(1-\mu)\mu BD\cdot AC=(1-\mu)\mu\left(AD^2-AB^2\right)$

$OP\cdot OQ=(1-\mu)\mu\left(AD^2-AB^2\right)$ και έτσι το $OP\cdot OQ$ είναι σταθερό άρα τα P,Q είναι αντίστροφα σημεία ως προς την αντιστροφή με κέντρο το O. Αυτό σημαίνει ότι αν το O είναι σταθερό και το P διαγράφει μια καμπύλη τότε το Q θα διαγράφει την αντίστροφη της καμπύλη. Αν ένα επιπλέον ευθύγραμμο τμήμα SP προστεθεί ώστε SP=SO και το S είναι σταθερό τότε το P θα διαγράφει κύκλο ο οποίος θα διέρχεται από το κέντρο O της αντιστροφής. Οπότε το αντίστροφό του σημείο Q θα διαγράφει ευθύγραμμο τμήμα.

Μια ειδική περίπτωση του προβλήματος του Απολλώνιου (θεώρημα Descartes)

Μια ειδική περίπτωση του προβλήματος του Απολλώνιου είναι και το πρόβλημα της εύρεσης κύκλου ο οποίος εφάπτεται σε τρεις εφαπτόμενους μεταξύ τους κύκλους.
Υπάρχουν δύο λύσεις: ένας μικρός κύκλος ο οποίος είναι εγγεγραμμένος στους τρεις εφαπτόμενους μεταξύ τους κύκλους και με τους οποίους εφάπτεται εξωτερικά και ένας μεγαλύτερος ο οποίος είναι εφαπτόμενος εσωτερικά με τους τρεις άλλους κύκλους.
Ο Frederick Soddy έδωσε τον τύπο ο οποίος συνδέει τις ακτίνες των τεσσάρων αυτών κύκλων: $2\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2\right)=\left(a_1+a_2+a_3+a_4\right)^2$ όπου a_i είναι η καμπυλότητα του κύκλου $C_i, i=1,2,3,4$.
Ο τύπος ήταν γνωστός στον Descartes και στον Viete (Boyer, C. B. and Merzbach, U. C. A History of Mathematics, 2nd ed. New York: Wiley, 1991). Ο Frederick Soddy έκανε μια επέκταση του τύπου αυτού στις σφαίρες: σε ένα n-διάστατο χώρο όπου n+2 αμοιβαία εφαπτόμενες n-σφαίρες μπορούν πάντοτε να βρεθούν και η σχέση που συνδέει τις ακτίνες τους είναι $n\left(\sum_{i=1}^{n+2}a_i^2\right)=\left(\sum_{i=1}^{n+2}a_i\right)^2$

Πρόβλημα:

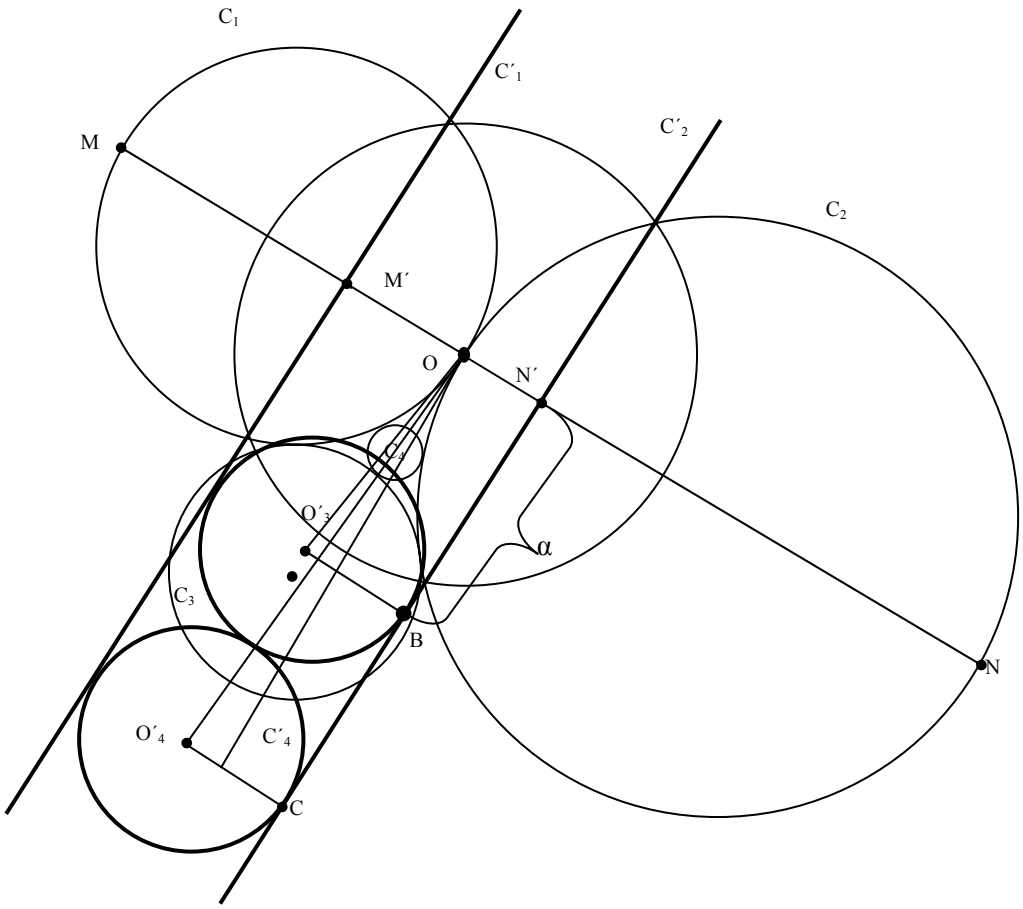
Να αποδειχθεί ο τύπος $2\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2\right)=\left(a_1+a_2+a_3+a_4\right)^2$ όπου a_i είναι η καμπυλότητα του κύκλου $C_i, i=1,2,3,4$.

Λύση:
Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τους τέσσερις κύκλους C_1, C_2, C_3, C_4.
Ας υποθέσουμε ότι οι κύκλοι C_1 ,C_2 εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο O.
Θα εφαρμόσουμε αντιστροφή με κέντρο αντιστροφής το σημείο O και δύναμη αντιστροφής το $4r_1r_2$ όπου r_1, r_2 είναι οι ακτίνες των κύκλων C_1 ,C_2.
Οι κύκλοι C_1 ,C_2 θα μετασχηματιστούν σε δύο παράλληλες ευθείες C'_1 ,C'_2 για τις οποίες ισχύει ότι η C'_1 που είναι η εικόνα του κύκλου C_1 απέχει απόσταση OM' από το κέντρο της αντιστροφής O την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε:

$$OM'\cdot OM = 4r_1r_2 \Rightarrow OM'\cdot 2r_1 = 4r_1r_2 \Rightarrow OM' = 2r_2$$

Ομοίως η εικόνα του κύκλου C_2 απέχει απόσταση ON' από το κέντρο της αντιστροφής Ο:

$$ON' \cdot ON = 4r_1r_2 \Rightarrow ON' \cdot 2r_2 = 4r_1r_2 \Rightarrow ON' = 2r_1$$



Η απόσταση λοιπόν των δύο παραλλήλων ευθειών C´$_1$,C´$_2$ είναι $2r_1 + 2r_2$

Η αντιστροφή του κύκλου C_3 είναι ο κύκλος C´$_3$ και η αντιστροφή του κύκλου C_4 είναι ο κύκλος C´$_4$. Οι δύο αυτοί κύκλοι είναι εφαπτόμενοι στις δύο ευθείες C´$_1$,C´$_2$ αλλά και μεταξύ τους και αυτό συμβαίνει διότι οι C_3 και C_4 είναι εφαπτόμενοι μεταξύ τους αλλά και στους C_1,C_2. Η ακτίνα των δύο κύκλων C´$_3$ και C´$_4$ όπως πολύ εύκολα μπορούμε να δούμε είναι $r_1 + r_2$

Ας θεωρήσουμε τώρα το κάθετο τμήμα ΟΝ´ από το σημείο Ο προς την C´$_2$, το κάθετο τμήμα O´$_3$B από το O´$_3$ προς την C´$_2$ και το κάθετο τμήμα O´$_4$C από το O´$_4$ προς την C´$_2$.

BC= $2\left(r_1 + r_2\right)$. Έστω επίσης NB = a . Για έναν κύκλο C, με C(O) θα συμβολίζουμε την δύναμη του σημείου Ο ως προς τον κύκλο C.

Όπως έχουμε αποδείξει σε άλλα σημεία της εργασίας μας αν αντιστρέψουμε ένα κύκλο C με κέντρο αντιστροφής το σημείο Ο το οποίο δεν βρίσκεται πάνω στον κύκλο C και δύναμη αντιστροφής $\wp$, τότε η εικόνα του κύκλου C θα μπορούσε να ληφθεί αν αντί για αντιστροφή εφαρμόζαμε ομοιοθεσία με κέντρο το σημείο Ο και λόγο ομοιοθεσίας τον λόγο $\frac{\wp}{\mathrm{C(O)}}$.

Έστω τώρα ο κύκλος C_3. Ο κύκλος αυτός έχει ακτίνα r_3 και εικόνα τον κύκλο C´$_3$ του οποίου η ακτίνα είναι η r_3'

Εφαρμόζουμε τα όσα είπαμε πιο πάνω για την αντιστροφή ως ομοιοθεσία και έχουμε:

$$\frac{r_3}{r_3'}=\frac{\wp}{C_3'(O)}\Rightarrow r_3=\frac{\wp}{C_3'(O)}r_3'=\frac{4r_1r_2}{C_3'(O)}\left(r_1+r_2\right)$$

$$C_3'(O)=\left(OO_3'\right)^2-\left(r_1+r_2\right)^2=\left(r_1-r_2\right)^2+a^2-\left(r_1+r_2\right)^2=$$

$$a^2-4r_1r_2$$

$$r_3=\frac{4r_1r_2}{C_3'(O)}\left(r_1+r_2\right)\Rightarrow r_3=\frac{4r_1r_2}{a^2-4r_1r_2}\left(r_1+r_2\right)\Rightarrow a^2-4r_1r_2=\frac{4r_1r_2}{r_3}\left(r_1+r_2\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2=\frac{4r_1r_2}{r_3}\left(r_1+r_2\right)+4r_1r_2=4r_1r_2\left(\frac{\left(r_1+r_2\right)}{r_3}+1\right)=4r_1r_2\left(\frac{r_1+r_2+r_3}{r_3}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}C_4'(O)=\left(OO_4'\right)^2-r_4'^2=\left(OO_4'\right)^2-\left(r_1+r_2\right)^2\\ \left(OO_4'\right)^2=\left[a+2\left(r_1+r_2\right)\right]^2+\left(r_2-r_1\right)^2\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_4'(O)=\left[a+2\left(r_1+r_2\right)\right]^2+\left(r_2-r_1\right)^2-\left(r_1+r_2\right)^2$$

$$\frac{r_4}{r_4'}=\frac{\wp}{C_4'(O)}\Rightarrow r_4=\frac{\wp}{C_4'(O)}r_4'\Rightarrow r_4=\frac{4r_1r_2}{C_4'(O)}\left(r_1+r_2\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_4C_4'(O)=4r_1r_2\left(r_1+r_2\right)\Rightarrow\frac{1}{r_4}=\frac{C_4'(O)}{4r_1r_2\left(r_1+r_2\right)}\Rightarrow a_4=\frac{C_4'(O)}{4r_1r_2\left(r_1+r_2\right)}$$

$$a^2=4r_1r_2\left(\frac{r_1+r_2+r_3}{r_3}\right)\Rightarrow a=2\sqrt{r_1r_2\left(\frac{r_1+r_2+r_3}{r_3}\right)}$$

$$C_4'(O)=\left[a+2\left(r_1+r_2\right)\right]^2+\left(r_2-r_1\right)^2-\left(r_1+r_2\right)^2=$$

$$a^2+4a\left(r_1+r_2\right)+4\left(r_1+r_2\right)^2+\left(r_2-r_1\right)^2-\left(r_1+r_2\right)^2\Rightarrow$$

$$\overset{a=2\sqrt{r_1r_2\left(\frac{r_1+r_2+r_3}{r_3}\right)}}{\Rightarrow}C_4'(O)=4r_1r_2\left(\frac{r_1+r_2+r_3}{r_3}\right)+8\left(r_1+r_2\right)\sqrt{r_1r_2\left(\frac{r_1+r_2+r_3}{r_3}\right)}+$$

$$+4\left(r_1+r_2\right)^2-4r_1r_2$$

$$a_4=\frac{C_4'(O)}{4r_1r_2\left(r_1+r_2\right)}\Rightarrow a_4=\frac{4r_1r_2\left(\frac{r_1+r_2+r_3}{r_3}\right)+8\left(r_1+r_2\right)\sqrt{r_1r_2\left(\frac{r_1+r_2+r_3}{r_3}\right)}+4\left(r_1+r_2\right)^2-4r_1r_2}{4r_1r_2\left(r_1+r_2\right)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_4=\frac{4r_1r_2\left(\frac{r_1+r_2+r_3}{r_3}\right)}{4r_1r_2\left(r_1+r_2\right)}+\frac{8\left(r_1+r_2\right)\sqrt{r_1r_2\left(\frac{r_1+r_2+r_3}{r_3}\right)}}{4r_1r_2\left(r_1+r_2\right)}+\frac{4\left(r_1+r_2\right)^2-4r_1r_2}{4r_1r_2\left(r_1+r_2\right)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_4 = \frac{r_1+r_2+r_3}{r_3\left(r_1+r_2\right)} + 2\sqrt{r_1r_2\frac{r_1+r_2+r_3}{r_3r_1^2r_2^2}} + \frac{r_1+r_2}{r_1r_2} - \frac{1}{r_1+r_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_4 = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + 2\sqrt{r_1r_2\frac{r_1+r_2+r_3}{r_3r_1^2r_2^2}}$$

παίρνουμε τώρα τον τύπο του Descartes: $2\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2\right) = \left(a_1+a_2+a_3+a_4\right)^2$ και θεωρούμε την δευτεροβάθμια εξίσωση με άγνωστο το a_4 οπότε θα πρέπει να φτάσουμε στον τύπο για το a_4 που έχουμε φτάσει και πιο πριν.

$$2\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2\right) = \left(a_1+a_2+a_3+a_4\right)^2 \Rightarrow$$

$$2\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right) + 2a_4^2 = \left(a_1+a_2+a_3\right)^2 + 2\left(a_1+a_2+a_3\right)a_4 + a_4^2$$

$$a_4^2 - 2\left(a_1+a_2+a_3\right)a_4 + 2\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right) - \left(a_1+a_2+a_3\right)^2 = 0$$

$$D = \left(-2\left(a_1+a_2+a_3\right)\right)^2 - 4\left(2\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right) - \left(a_1+a_2+a_3\right)^2\right) =$$

$$= 8\left(a_1+a_2+a_3\right)^2 - 8\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right) = 16\left(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3\right)$$

άρα

$$a_4 = \frac{2\left(a_1+a_2+a_3\right) \pm \sqrt{16\left(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3\right)}}{2} =$$

$$= \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \pm 2\sqrt{\frac{1}{r_1r_2} + \frac{1}{r_2r_3} + \frac{1}{r_1r_3}} \Rightarrow a_4 = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \pm 2\sqrt{\frac{r_1+r_2+r_3}{r_3r_1\,r_2}}$$

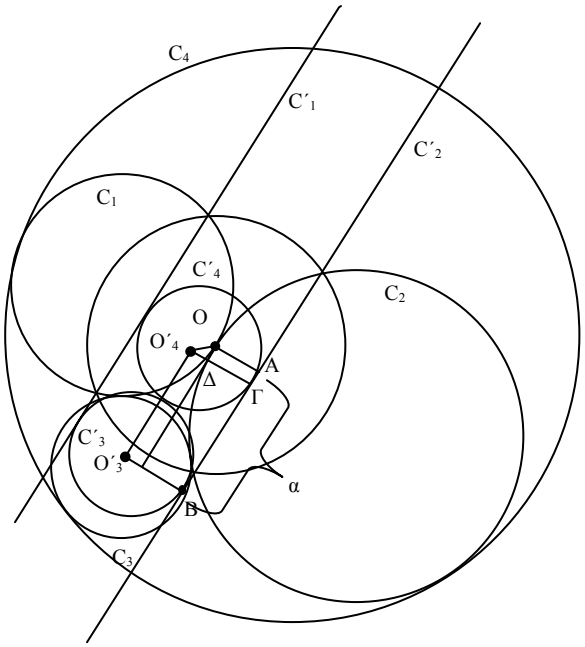
Έτσι η ισότητα επαληθεύεται.

Το $a_4 = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \pm 2\sqrt{\frac{r_1+r_2+r_3}{r_3r_1\,r_2}}$ στο οποίο καταλήξαμε από την επίλυση έχει δύο τιμές για το a_4:

$$a_4 = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + 2\sqrt{\frac{r_1+r_2+r_3}{r_3r_1\,r_2}}$$

$$a_4 = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - 2\sqrt{\frac{r_1+r_2+r_3}{r_3r_1\,r_2}}$$

Ο δεύτερος τύπος αντιστοιχεί στον μεγάλο κύκλο C_4 στον οποίο αναφερθήκαμε στην αρχή. Ας δούμε το αντίστοιχο σχήμα και τους υπολογισμούς:



$$\left(OO_4'\right)^2=\left(\Delta O_4'\right)^2+\left(\Delta \mathrm{O}\right)^2=\left[a-2\left(r_1+r_2\right)\right]^2+\left(r_2-r_1\right)^2$$

$$C_4'(O)=\left(OO_4'\right)^2-r_4'^2=\left(OO_4'\right)^2-\left(r_1+r_2\right)^2$$

$$\left(OO_4'\right)^2=\left[a-2\left(r_1+r_2\right)\right]^2+\left(r_2-r_1\right)^2$$

$$\left.\begin{array}{l} C_4'(O)=\left[a-2\left(r_1+r_2\right)\right]^2+\left(r_2-r_1\right)^2-\left(r_1+r_2\right)^2 \\ a=2\sqrt{r_1r_2\dfrac{r_1+r_2+r_3}{r_3}} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_4'(O)=4r_1r_2\left(\frac{r_1+r_2+r_3}{r_3}\right)-8\left(r_1+r_2\right)\sqrt{r_1r_2\left(\frac{r_1+r_2+r_3}{r_3}\right)}+4\left(r_1+r_2\right)^2-4r_1r_2$$

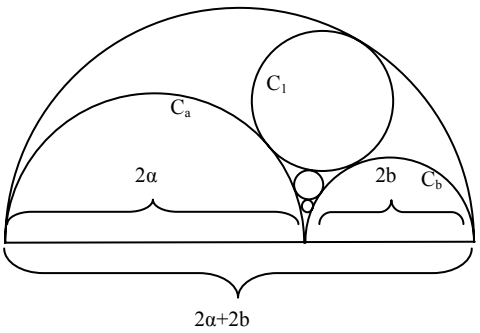
$$a_4=\frac{C_4'(O)}{4r_1r_2\left(r_1+r_2\right)}\Rightarrow a_4=\frac{4r_1r_2\left(\dfrac{r_1+r_2+r_3}{r_3}\right)-8\left(r_1+r_2\right)\sqrt{r_1r_2\left(\dfrac{r_1+r_2+r_3}{r_3}\right)}+4\left(r_1+r_2\right)^2-4r_1r_2}{4r_1r_2\left(r_1+r_2\right)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_4=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}-2\sqrt{r_1r_2\frac{r_1+r_2+r_3}{r_3r_1^2r_2^2}}$$

Τα θεώρημα του Descartes μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδείξουμε τον τύπο που δίνει την ακτίνα της τρίτης αλυσίδας (όπως την έχουμε σχεδιάσει στο πιο κάτω σχήμα) του Πάππου για την άρβηλο.

Να δειχθεί ότι ο n-οστός της αλυσίδας του Πάππου την οποία έχουμε σχεδιάσει έχει ακτίνα που δίνεται από τον τύπο $r_n=\dfrac{(a+b)ab}{n^2(a+b)^2-ab}$.

Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Descartes και μαθηματική επαγωγή.



Γνωρίζουμε ότι ο εγγεγραμμένος κύκλος της αρβήλου C_1 έχει ακτίνα $r_1 = \dfrac{(a+b)ab}{a^2+b^2+ab}$ που μπορεί να γραφεί ως $r_1 = \dfrac{(a+b)ab}{1^2(a+b)^2-ab}$ άρα ο τύπος ισχύει για n=1.

Έστω ότι ο τύπος ισχύει για n. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για n+1.
Θα θεωρήσουμε τους κύκλους C_α και C_b και τους C_n και C_{n+1}.

Η εφαρμογή του θεωρήματος του Descartes δίνει:

$$2\left(a_n^2+a_{n+1}^2+a_\alpha^2+a_b^2\right)=\left(a_n+a_{n+1}+a_\alpha+a_b\right)^2$$
$$2\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2\right)=\left(a_1+a_2+a_3+a_4\right)^2 \Rightarrow$$
$$2\left(a_\alpha^2+a_b^2+a_n^2\right)+2a_{n+1}^2=\left(a_a+a_b+a_n\right)^2+2\left(a_a+a_b+a_n\right)a_{n+1}+a_{n+1}^2$$
$$a_{n+1}^2-2\left(a_a+a_b+a_n\right)a_{n+1}+2\left(a_\alpha^2+a_b^2+a_n^2\right)-\left(a_a+a_b+a_n\right)^2=0$$

και λύνοντας την δευτεροβάθμια παίρνουμε:

$$a_{n+1}=\left(a_a+a_b+a_n\right)\pm 2\sqrt{\left(a_aa_b+a_ba_n+a_aa_n\right)}$$
$$a_a=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{n^2(a+b)^2-ab}{(a+b)ab}+2\sqrt{\left(\frac{1}{a}\frac{1}{b}+\frac{1}{b}\frac{n^2(a+b)^2-ab}{(a+b)ab}+\frac{1}{a}\frac{n^2(a+b)^2-ab}{(a+b)ab}\right)}=$$
$$=\frac{\left(n^2+1\right)(a+b)^2-ab}{(a+b)ab}+2\sqrt{\frac{n^2(a+b)^2}{a^2b^2}}=\frac{\left(n^2+1\right)(a+b)^2-ab}{(a+b)ab}+\frac{2n(a+b)}{ab}=$$
$$=\frac{\left(n^2+1\right)(a+b)^2-ab+n(a+b)^2}{(a+b)ab}=\frac{\left(n+1\right)^2(a+b)^2-ab}{(a+b)ab}$$

οπότε προκύπτει το ζητούμενο άμεσα.

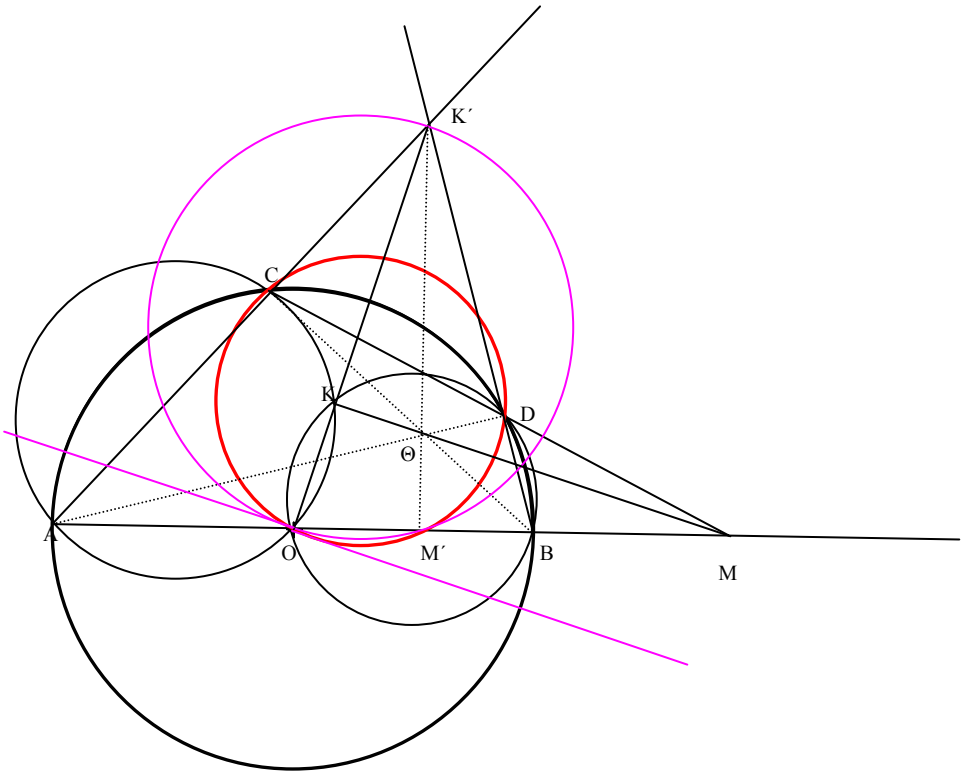
Διεθνείς μαθηματικοί διαγωνισμοί –Μαθηματικές ολυμπιάδες – εφαρμογή της Γεωμετρικής Αντιστροφής στην λύση προβλημάτων της Λυκειακής Γεωμετρίας

Πρόβλημα (Πρόταση Ρωσίας 1995)

Έστω AB ένα ευθύγραμμο τμήμα. Κατασκευάζουμε το ημικύκλιο με διάμετρο την AB και κέντρο το σημείο O. Μια ευθεία τέμνει το ημικύκλιο αυτό στα σημεία C, D και το ευθύγραμμο τμήμα AB στο σημείο M. Ας υποθέσουμε ότι είναι MD<MC και MB<MA. Έστω K το δεύτερο σημείο στο οποίο τέμνονται οι κύκλοι (O, A, C) και (O, B, D). Δείξτε ότι $\angle MKO=90^o$.

Λύση:

Θεωρούμε την αντιστροφή με κέντρο το σημείο O και ακτίνα την OA. Η ευθεία AB μένει σταθερή ως ευθεία που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής. Οι κύκλοι (O, A, C) και (O, B, D) μετασχηματίζονται στις ευθείες AC και BD οι οποίες τέμνονται στο σημείο K΄ που είναι σημείο αντίστροφο του σημείου K. Η ευθεία CD μετασχηματίζεται στην περιφέρεια η οποία περνάει από τα σημεία C,D,O και τέμνει την ευθεία AB στο M΄ το οποίο είναι το αντίστροφο του M. Εφόσον η AD είναι κάθετη με την BK΄ ($\angle ADB$ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο) και η BC επίσης κάθετη με την AK΄ ($\angle ACB$ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο) και επιπλέον το O είναι το μέσο του AB έπεται ότι η περιφέρεια CDO είναι ο κύκλος των εννέα σημείων του τριγώνου AK΄B οπότε η K΄M΄ είναι αναγκαστικά κάθετη στην AB (ο κύκλος των εννέα σημείων τέμνει την κάθε πλευρά στο μέσο της και στο ίχνος του αντίστοιχου ύψους του τριγώνου). Οπότε, αφού η KM έχει αντίστροφη την περιφέρεια (OK΄M΄) (διότι η KM είναι ευθεία οπότε η αντιστροφή της διέρχεται από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής δηλαδή το O, το δε M΄ είναι το αντίστροφο του M και το K΄ είναι το αντίστροφο του K) και η $\angle K'M'O=90^o$ άρα η KΌ είναι διάμετρος του κύκλου OK΄M΄ οπότε η KΌ είναι η κάθετη στην εφαπτόμενη του κύκλου (OK΄M΄) στο σημείο O.

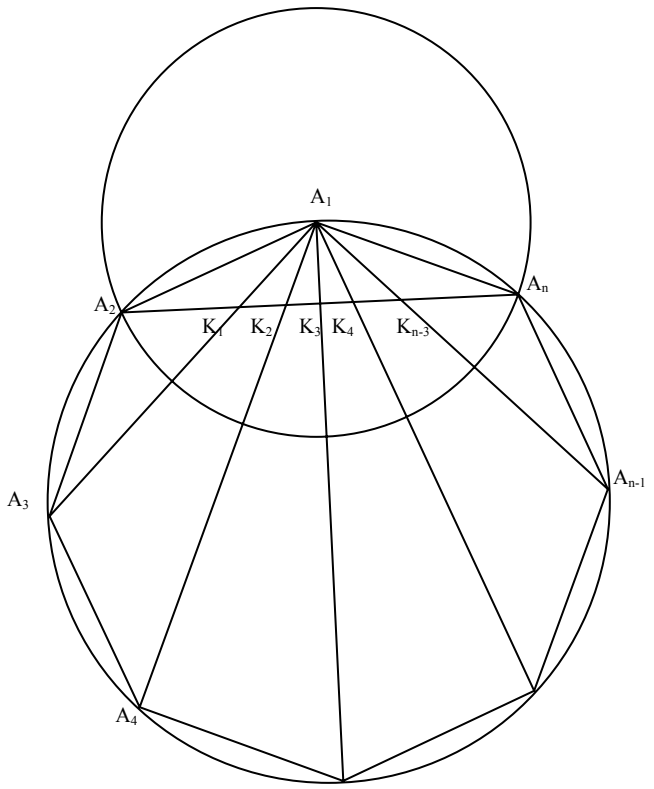


Όμως η γωνία που σχηματίζει η εφαπτόμενη στο Ο και η ΟΚ΄ είναι η γωνία της ΟΚ και του κύκλου (Ο,Κ΄,Μ΄). Άρα και οι εικόνες τους σχηματίζουν μεταξύ τους ίση γωνία. Αυτό που πρέπει τώρα να κάνουμε είναι να διευκρινίσουμε ποιες είναι οι εικόνες τους. Έχουμε λοιπόν: Η εικόνα της μεν ΟΚ είναι η ίδια η ΟΚ διότι αυτή η ευθεία διέρχεται από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής, του δε κύκλου (Ο,Μ΄,Κ΄) είναι η ευθεία ΜΚ διότι ο κύκλος (Ο,Μ΄,Κ΄) είναι κύκλος που διέρχεται από το κέντρο Ο του κύκλου αντιστροφής άρα η εικόνα του είναι ευθεία ενώ έχουμε ότι το Μ΄ έχει εικόνα το Μ και το Κ΄ έχει εικόνα το Κ.

Πρόβλημα (Πρόταση Ισπανίας 2005)

Έστω το $A_1A_2A_3,...,A_n$ είναι ένα κανονικό n-γωνο με μήκος πλευρών 1. Οι ν-3 διαγώνιοι που φέρνουμε από την κορυφή A_1 τέμνουν την A_2A_n στα σημεία $K_1,K_2,...K_{n-3}$. Να δείξετε ότι $K_tK_{t+1} = A_1A_{t+2} \cdot A_1A_{t+3},, t = 1,2,...n-3$.

Λύση:



Εφαρμόζουμε αντιστροφή με κύκλο αντιστροφής τον κύκλο με κέντρο το σημείο A_1 και ακτίνα 1 οπότε ο κύκλος αντιστροφής θα περάσει από τις κορυφές A_2,A_n. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του πολυγώνου διέρχεται από το σημείο A_1 οπότε η εικόνα του είναι η ευθεία που διέρχεται από τα A_2, A_n (και αυτό διότι τα A_2, A_n ανήκουν στον κύκλο αντιστροφής οπότε είναι εικόνες του εαυτού τους).

Οι ευθείες K_tA_{t+2} $t = 1,2,...n-3$ διέρχονται από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής άρα οι εικόνες τους είναι οι ίδιες οι ευθείες. Επειδή η εικόνα του περιγεγραμμένου κύκλου είναι η ευθεία A_2A_n και η εικόνα κάθε σημείου βρίσκεται στην ημιευθεία που διέρχεται από το σημείο αυτό και από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής, τότε θα έχουμε ότι το σημείο K_t είναι εικόνα του σημείου A_{t+2} για κάθε $t = 1,2,...n-3$.

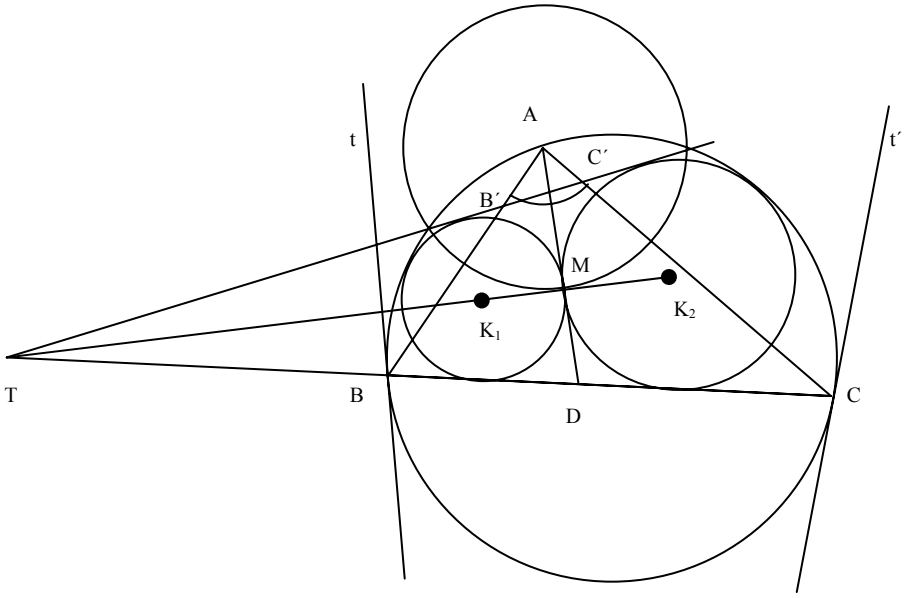
Αν Π, Π΄ είναι αντίστροφα μεταξύ τους σημεία και Ρ, Ρ΄ είναι πάλι δύο σημεία αντίστροφα μεταξύ τους τότε γνωρίζουμε ότι ισχύει η σχέση $\Pi'P' = \dfrac{\rho^2 \cdot \Pi P}{O\Pi \cdot OP}$ όπου ρ είναι η ακτίνα του κύκλου αντιστροφής και ο είναι το κέντρο του κύκλου αντιστροφής.

Από τον τύπο αυτό θα έχουμε για το συγκεκριμένο πρόβλημα:

$$A_{t+2}A_{t+3} = \frac{1^2 \mathrm{K}_t\mathrm{K}_{t+1}}{A_1\mathrm{K}_t \cdot A_1\mathrm{K}_{t+1}} \Rightarrow 1 = \frac{\mathrm{K}_t\mathrm{K}_{t+1}}{A_1A_{t+2} \cdot A_1A_{t+3}}$$

Πρόβλημα (Πρόταση Ρουμανίας. 1997)

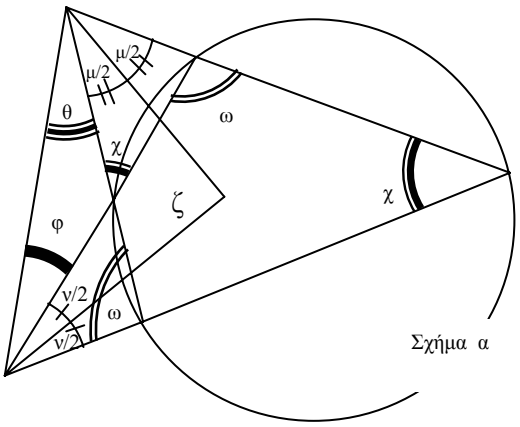
Έστω ότι το ABC είναι ένα τρίγωνο και το σημείο D είναι σημείο της πλευράς BC. Δύο κύκλοι(K_1) και (K_2) εφάπτονται εξωτερικά στην AD στο M. Οι κύκλοι αυτοί εφάπτονται στον περιγγεγραμένο κύκλο του τριγώνου ABC. Επίσης εφάπτονται ο ένας στο τμήμα BD και ο άλλος στο DC. Να αποδειχθεί ότι η AD διχοτομεί την γωνία A.



Λύση:

Έστω ότι το τμήμα K_1K_2 είναι η διάκεντρος των κύκλων (K_1) και (K_2). Η διάκεντρος αυτή τέμνει την BC στο σημείο T . Θεωρούμε την αντιστροφή ως προς τον κύκλο με κέντρο A και ακτίνα την AM. Οι κύκλοι (K_1) και (K_2) είναι ορθογώνιοι ως προς τον κύκλο αντιστροφής, άρα μένουν αναλλοίωτοι ως προς την αντιστροφή αυτή. Ο κύκλος (A,B,C) μετασχηματίζεται σε ευθεία (αφού διέρχεται από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής). Η ευθεία αυτή εφάπτεται στους κύκλους (K_1) και (K_2) (αφού ο κύκλος ABC εφάπτεται στους κύκλους (K_1) και (K_2)) και πιο συγκεκριμένα είναι η TB΄C΄ (B΄ και C΄ είναι οι τομές των AB και AC με την TB΄C΄). Η ευθεία TB΄C΄ είναι αντίστροφη της περιφέρειας (A,B,C), η ευθεία AB είναι αντίστροφη της AB και η AC της AC (οι AB και AC είναι δηλαδή εικόνες του εαυτού τους), οπότε το B έχει εικόνα το B΄ και το C το C΄, άρα AB·AB΄=AC·AC΄ και κατά συνέπεια το τετράπλευρο BB΄C΄C είναι εγγράψιμμο. [Διαφορετική απόδειξη: Η γωνία που σχηματίζουν η εικόνα του κύκλου ABC (δηλαδή η ευθεία TB΄C΄) με την εικόνα της ευθείας AB (που είναι η AB) είναι η γωνία ∠AB΄C΄. Η γωνία που σχηματίζουν ο κύκλος (A,B,C) με την ευθεία AB είναι η ∠tBA (διότι η Bt είναι η εφαπτομένη του κύκλου ABC στο σημείο B). Επειδή η αντιστροφή διατηρεί τις γωνίες θα έχουμε ότι ∠AB΄C΄=∠tBA. Όμως ∠tBA=ACB (γωνία υπό χορδής και εφαπτομένης και αντίστοιχη εγγεγραμμένη γωνία) άρα ∠AB΄C΄=∠ACB οπότε το BB΄CC΄ είναι εγγράψιμμο]. Επειδή το BB΄C΄C είναι εγγράψιμμο θα ισχύει ότι οι διχοτόμοι των γωνιών ∠A και ∠B΄TB είναι μεταξύ τους κάθετες (το γιατί οι διχοτόμοι δύο

απέναντι γωνιών εγγράψιμμου τετραπλεύρου είναι κάθετες δικαιολογείται από το αμέσως επόμενο σχήμα α).

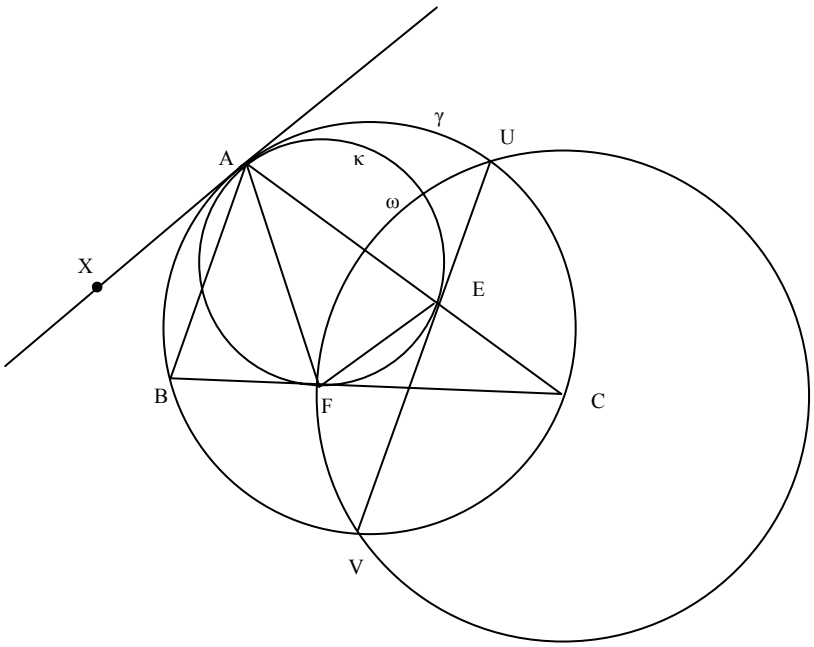


Σχήμα α

Από το σχήμα α θα έχουμε:
$\angle\varphi+\angle\nu+\angle\chi+\angle\theta+\angle\mu=180^o$,$\angle\chi=\angle\varphi+\theta$ άρα $\angle\nu/2+\angle\varphi+\angle\theta+\angle\mu/2=90^o$ οπότε $\angle\zeta=90^o$
Επειδή $AM\perp TM$, άρα η AM είναι διχοτόμος της γωνίας $\angle A$.

Πρόβλημα (Praxis der mathematic, prob. 546)

Δίνεται ένα τρίγωνο ABC στο οποίο είναι περιγεγραμμένος ο κύκλος γ και έστω ότι κ είναι ο κύκλος που εφάπτεται με τον κύκλο γ στο σημείο A και με την πλευρά BC στο σημείο F. Αν E είναι το άλλο σημείο στο οποίο ο κύκλος κ τέμνει την πλευρά AC τότε να αποδειχθεί: ότι η ευθεία AF διχοτομεί την γωνία $\angle CAB$ και ότι αν U, V είναι δύο σημεία στον κύκλο γ έτσι ώστε CV=CU=CF τότε η UV εφάπτεται στον κύκλο κ στο σημείο E.



Λύση:

α) $\angle BAF=\angle XAF-\angle XAB=\angle AEF-\angle ACB=\angle AEF-\angle ECF=\angle EFC=\angle FAE=\angle FAC$
β) θεωρούμε την αντιστροφή ως προς τον κύκλο ω του οποίου το κέντρο είναι το σημείο C και η ακτίνα του είναι η CF. Οι κύκλοι ω και κ είναι ορθογώνιοι μεταξύ τους διότι ο κύκλος

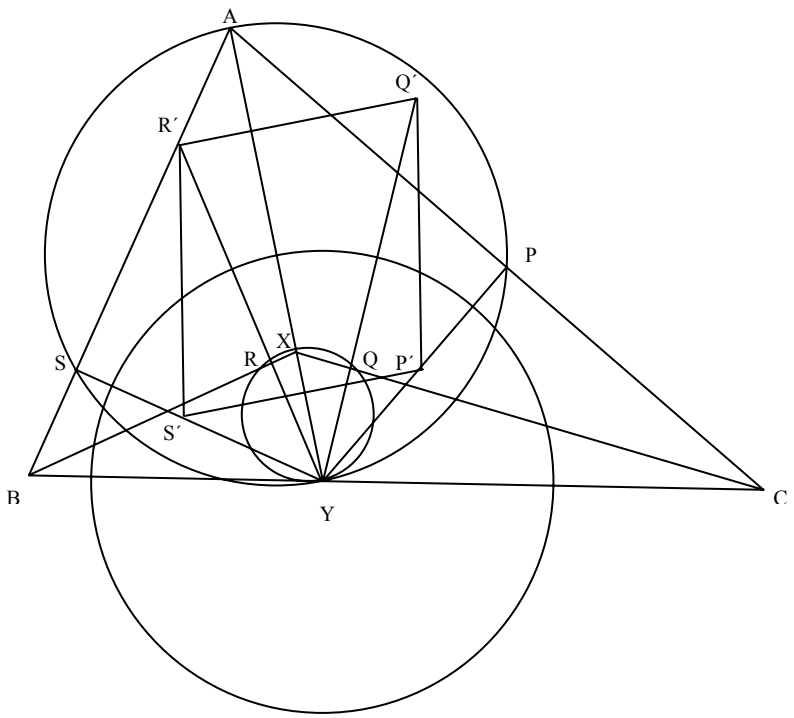
κ είναι εφαπτόμενος στην διάμετρο του κύκλου ω στο σημείο F. Άρα ο κύκλος κ μένει σταθερός κατά την αντιστροφή . Ο κύκλος γ περνάει από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής άρα κατά την αντιστροφή αντιστρέφεται σε ευθεία. Η ευθεία αυτή διέρχεται από τα σημεία τομής U, V του κύκλου γ με τον κύκλο αντιστροφής ω. Η περιφέρεια γ εφάπτεται με την περιφέρεια κ στο σημείο A οπότε το αντίστροφο του A θα είναι το σημείο επαφής των εικόνων των κύκλων γ και κ. Η εικόνες των κύκλων κ και γ είναι ο κύκλος κ και η ευθεία VU. Το σημείο E είναι το σημείο τομής του κύκλου κ με την πλευρά AC. Το σημείο E είναι η εικόνα του σημείου A διότι βρίσκεται πάνω στην ημιευθεία CA. Το A είναι το σημείο επαφής των κύκλων κ, γ. Άρα η εικόνα του A (δηλαδή το E) είναι το σημείο επαφής των εικόνων τον κύκλων κ,γ. Άρα η ευθεία UV (εικόνα του γ) εφάπτεται στον κύκλο κ (εικόνα του κ) στο σημείο E (εικόνα του A).

Πρόβλημα (Πρόταση του Ιράν 2004)

Έστω ένα τρίγωνο ABC. Έστω ένα σημείο X στο εσωτερικό του τριγώνου ABC και Y το σημείο τομής των AX και BC. Φέρνουμε τις κάθετες YP, YQ, YR, YS προς τις ευθείες CA, CX, BX, BA αντίστοιχα. Να διατυπωθούν οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε το PQRS να είναι εγγράψιμμο τετράπλευρο.

Λύση:

Θεωρούμε την αντιστροφή με κέντρο το Y και τυχαία ακτίνα.
Παρατηρούμε ότι ο κύκλος με διάμετρο BY διέρχεται από τα σημεία R και S (αυτό συμβαίνει διότι οι γωνίες $\angle BSY$ και $\angle BRY$ είναι ορθές και ξέρουμε ότι τα σημεία που βλέπουν ένα τμήμα υπό ορθή γωνία ανήκουν στον κύκλο με διάμετρο αυτό το τμήμα). Ο κύκλος με διάμετρο την BY αντιστρέφεται στην ευθεία R΄S΄ κάθετη στην BC (διότι η ευθεία που είναι η εικόνα ενός κύκλου K που διέρχεται από το κέντρο O του κύκλου αντιστροφής είναι κάθετη στην διάμετρο του κύκλου K που διέρχεται από το κέντρο O). Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι ο κύκλος που έχει διάμετρο την YC διέρχεται από τα σημεία P,Q . Ο κύκλος αυτός μετασχηματίζεται στην ευθεία P΄Q΄που είναι κάθετη στην BC. Επίσης οι κύκλοι YRQ και YPS αντιστρέφονται στις ευθείες που είναι κάθετες στην AY. Το σχήμα P΄Q΄R΄S΄ είναι λοιπόν παραλληλόγραμμο.



Το σημείο R είναι το σημείο τομής των κύκλων BRY και RYX . Οι αντιστροφές των κύκλων αυτών είναι οι ευθείες S΄R΄ και R΄Q΄ οι οποίες τέμνονται στο σημείο R΄. Άρα το σημείο R΄ είναι το αντίστροφο σημείο του σημείου R. Με όμοιο τρόπο έχουμε ότι το Q έχει αντίστροφο το σημείο Q΄ ενώ το αντίστροφο του S είναι το S΄και του P είναι το P΄. Το τετράπλευρο PQRS είναι εγγράψιμμο τότε και μόνο τότε όταν τα σημεία P,Q,R,S είναι ομοκυκλικά Τα σημεία P,Q,R,S είναι ομοκυκλικά τότε και μόνο τότε όταν και σημεία P΄,Q΄,R΄,S΄ είναι ομοκυκλικά (αφού ο κύκλος PQRS έχει αντίστροφο τον κύκλο P΄Q΄R΄S΄- διότι τα P, P΄ είναι αντίστροφα, το Q έχει αντίστροφο το Q΄, το S το S΄ και το P έχει το P΄). Τα P΄,Q΄,R΄,S΄ είναι ομοκυκλικά τότε και μόνο τότε όταν το παραλληλόγραμμο P΄Q΄R΄S΄ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Αυτό συμβαίνει τότε και μόνο τότε όταν οι AX και BC είναι μεταξύ τους κάθετες.

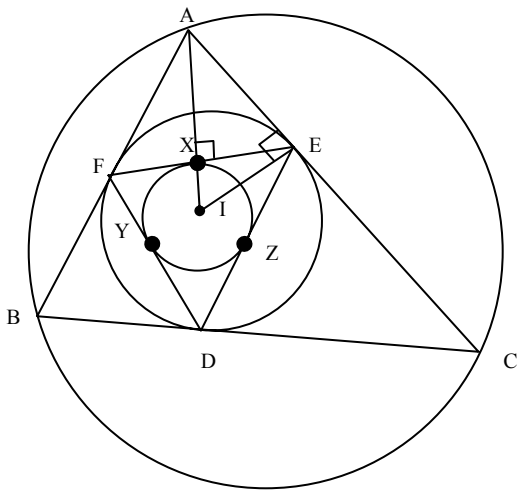
Πρόβλημα

Έστω ότι ABC είναι ένα τρίγωνο και τα D,E,F είναι τα σημεία επαφής, του εγγεγραμμένου στο τρίγωνο κύκλου, με τις πλευρές BC,CA,AB αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι η αντιστροφή ως προς τον εγγεγραμμένο κύκλο, μετασχηματίζει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο τρίγωνο ABC, στο κύκλο των εννέα σημείων του τριγώνου DEF.

Λύση:

Έστω ότι I είναι το κέντρο και R είναι η ακτίνα του κύκλου που είναι εγγεγραμμένος στο τρίγωνο ABC. Ας θεωρήσουμε την αντιστροφή ως προς αυτόν τον κύκλο. Έστω X, Y, Z είναι τα μέσα των πλευρών DE, EF, FD του τριγώνου DEF. Επειδή τα σημεία F, E είναι τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων ευθειών από το σημείο A προς τον εγγεγραμμένο κύκλο στο τρίγωνο ABC θα έχουμε ότι τα σημεία E,F είναι συμμετρικά ως προς την διχοτόμο AI της γωνίας A. Το τρίγωνο λοιπόν AEF είναι ισοσκελές και έτσι η κάθετη από το A προς την πλευρά EF διέρχεται από το σημείο X και από το σημείο I. Η γωνία $\angle IXE=90^o$. Η γωνία $\angle IEA=90^o$ διότι η AE είναι εφαπτομένη στον κύκλο (E,F,D). Προφανώς τα τρίγωνα IEA και IXE είναι όμοια μεταξύ τους, οπότε θα έχουμε $\frac{IX}{IE}=\frac{IE}{IA} \Rightarrow IX \cdot IA = IE^2 = r^2$

Τα σημεία A και X είναι λοιπόν αντίστροφα. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι τα B,Y είναι αντίστροφα όπως επίσης και τα C,Z. Το συμπέρασμα είναι πλέον προφανές.



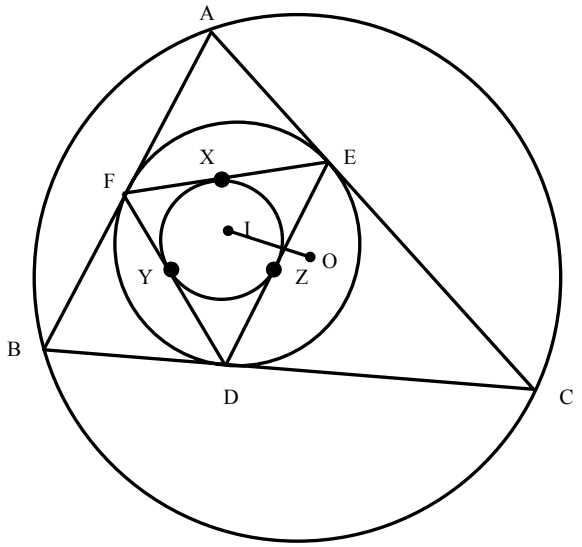
Πρόβλημα: (Euler)

Έστω R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου σε ένα τρίγωνο ABC και r η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου στο ABC. Το σημείο O είναι το περίκεντρο και I είναι το έγκεντρο. Να αποδείξετε ότι $OI^2=R^2-2Rr$

Λύση:

Θεωρούμε την αντιστροφή με κέντρο το I και ακτίνα r. Μέσω αυτής ο εγγεγραμμένος κύκλος μένει σταθερός αφού είναι ο κύκλος αντιστροφής. Ο περιγεγραμμένος κύκλος όπως δείξαμε στο προηγούμενο πρόβλημα μετασχηματίζεται στον κύκλο των εννέα σημείων του τριγώνου DEF όπου τα D,E,F είναι τα σημεία επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου με τις πλευρές του τριγώνου ABC. Η ακτίνα[2] του κύκλου των εννέα σημείων του τριγώνου DEF είναι $\frac{r}{2}$. Η αντιστροφή όμως ενός κύκλου C ως προς ένα κύκλο με κέντρο P και ακτίνα ρ είναι ισοδύναμη με μια ομοιοθεσία που έχει κέντρο το κέντρο της αντιστροφής και λόγο το λόγο του τετραγώνου της ακτίνας του κύκλου αντιστροφής προς την δύναμη του κέντρου αντιστροφής O ως προς τον κύκλο που θέλουμε να αντιστρέψουμε (δηλαδή τον κύκλο C).

Άρα στην περίπτωση του προβλήματός μας θα έχουμε: $\frac{\frac{r}{2}}{R}=\frac{r^2}{R^2-OI^2}$ οπότε έχουμε το ζητούμενο.



Πρόβλημα:(Μαθηματικός διαγωνισμός Μεσογείου 2005)

Έστω κ και κ΄ δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο το σημείο O και ακτίνες ρ και ρ΄ αντίστοιχα. Θα υποθέσουμε ότι ρ<ρ΄. Μια ημιευθεία Οχ τέμνει τον κύκλο κ σε ένα σημείο A. Η αντικείμενη ημιευθεία τέμνει τον κύκλο κ΄ στο σημείο B. Μια τρίτη ημιευθεία Ot διαφορετική από τις δύο προηγούμενες τέμνει τον κύκλο κ στο σημείο E και τον κύκλο κ΄ στο F.

Να αποδειχθεί ότι οι ακόλουθοι κύκλοι

1. Ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία O,A,E
2. Ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία O,B,F

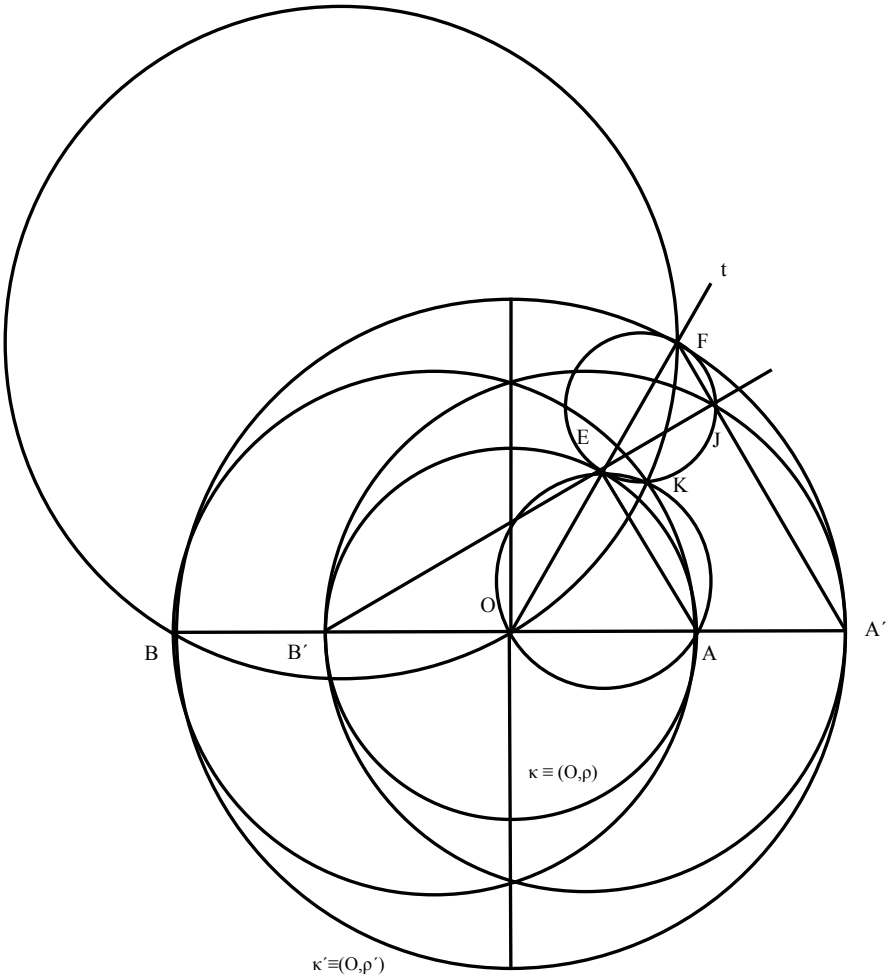
[2] Η απόδειξη της πρότασης αυτής μπορεί να βρεθεί σε μεταγενέστερο σημείο της εργασίας και συγκεκριμένα στο σημείο που αναφέρουμε την ευθεία του Euler σελίδα 391.

3. Ο κύκλος που έχει διάμετρο την EF
4. Ο κύκλος που έχει διάμετρο την AB

διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Λύση:

Θα θεωρήσουμε την αντιστροφή ως προς τον κύκλο με κέντρο O και ακτίνα $\sqrt{\rho\rho'}$. Η αντιστροφή αυτή μετασχηματίζει (απεικονίζει) τον έναν κύκλο στον άλλο.
Το σημείο E έχει αντίστροφο το σημείο F. Το σημείο B έχει αντίστροφό του το B΄ και το A έχει το A΄. Οι κύκλοι OAE και OBF διέρχονται από το κέντρο αντιστροφής οπότε μετασχηματίζονται σε ευθείες. Ο κύκλος OAE μετασχηματίζεται στην ευθεία A΄F και ο κύκλος OBF μετασχηματίζεται στην B΄E περιφέρεια διαμέτρου EF.

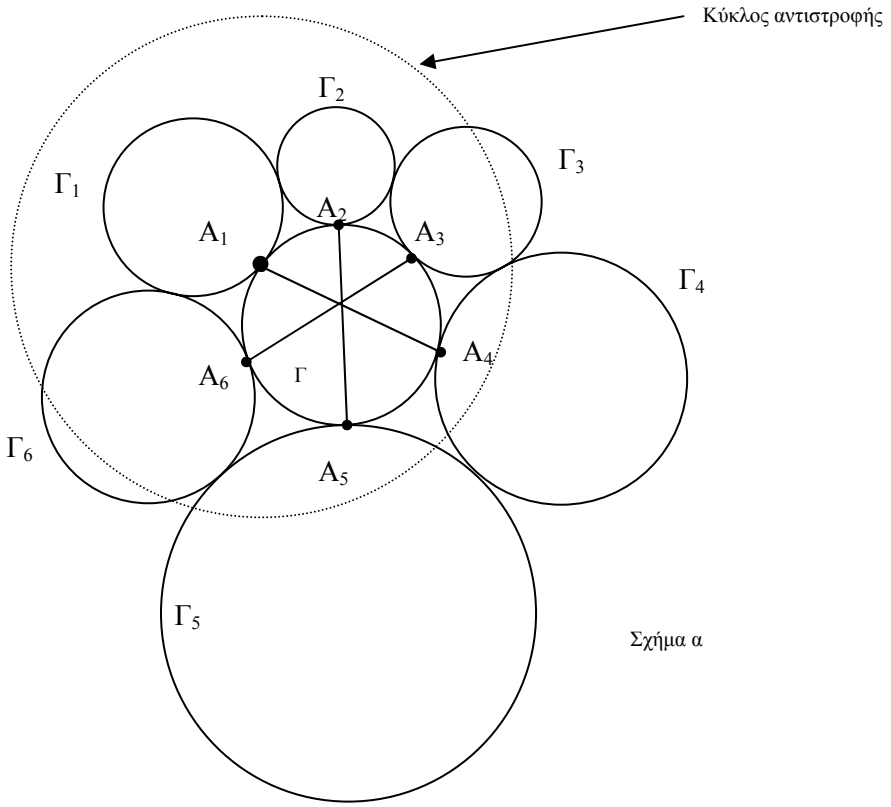


Ο κύκλος διαμέτρου EF θα παραμείνει σταθερός. Αυτό συμπεραίνεται ως εξής: ο κύκλος διαμέτρου EF εφάπτεται στους κύκλους (O,ρ) και (O,ρ΄) στα σημεία E,F που όμως είναι αντίστροφα το ένα του άλλου. Οι κύκλοι O,ρ) και (O,ρ΄) είναι αντίστροφοι μεταξύ τους άρα μετά την αντιστροφή θα αλλάξουν απλώς θέση. Ο κύκλος λοιπόν διαμέτρου EF θα έχει εικόνα που εφάπτεται στους ίδιους κύκλους και στα ίδια σημεία (E και F) όπως και πριν την αντιστροφή. Άρα μετά την αντιστροφή θα είναι ένας κύκλος διαμέτρου EF, δηλαδή ο ίδιος κύκλος. Ο κύκλος διαμέτρου AB θα μετασχηματιστεί στον κύκλο διαμέτρου A΄B΄.
Τα τρίγωνα OEA και OFA΄ είναι ισοσκελή και έχουν κοινή την γωνία ∠O άρα είναι όμοια μεταξύ τους. Οπότε η A΄F είναι παράλληλη με την EA. Η γωνία ∠B΄EA=1 ορθή ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο. Άρα και η γωνία ∠EJA΄=1 ορθή (ως εντός εκτός και

επί τα αυτά με την ∠ΒΈΕΑ). Είναι λοιπόν ∠ΕJΑ΄=1 ορθή οπότε το J βρίσκεται πάνω στην περιφέρεια με διάμετρο την ΒΆ΄. Είναι επίσης ∠ΕJF=1 ορθή άρα το J βρίσκεται πάνω στην περιφέρεια με διάμετρο την ΕF.
Έστω Κ το αντίστροφο σημείο του J. Το σημείο J είναι κοινό σημείο των κύκλων διαμέτρου ΕF , ΒΆ΄ καθώς και των ευθειών Β΄Ε και Α΄F, άρα το αντίστροφο σημείο του J, δηλαδή το Κ, θα είναι κοινό σημείο των εικόνων των κύκλων με διαμέτρους ΕF και ΒΆ΄ και των ευθειών ΕΑ και Α΄F. Η εικόνα του κύκλου διαμέτρου ΕF είναι ο ίδιος κύκλος (ο κύκλος διαμέτρου ΑF). Η εικόνα του κύκλου διαμέτρου Β΄Α΄ είναι ο κύκλος διαμέτρου ΑΒ. Η εικόνα της ευθείας Α΄F είναι ο κύκλος ΟΑΕ και η εικόνα της ευθείας ΕΑ είναι ο κύκλος ΒΑF. Οι τέσσερις αυτές εικόνες διέρχονται από το Κ.

Πρόβλημα (θεώρημα των επτά περιφερειών)

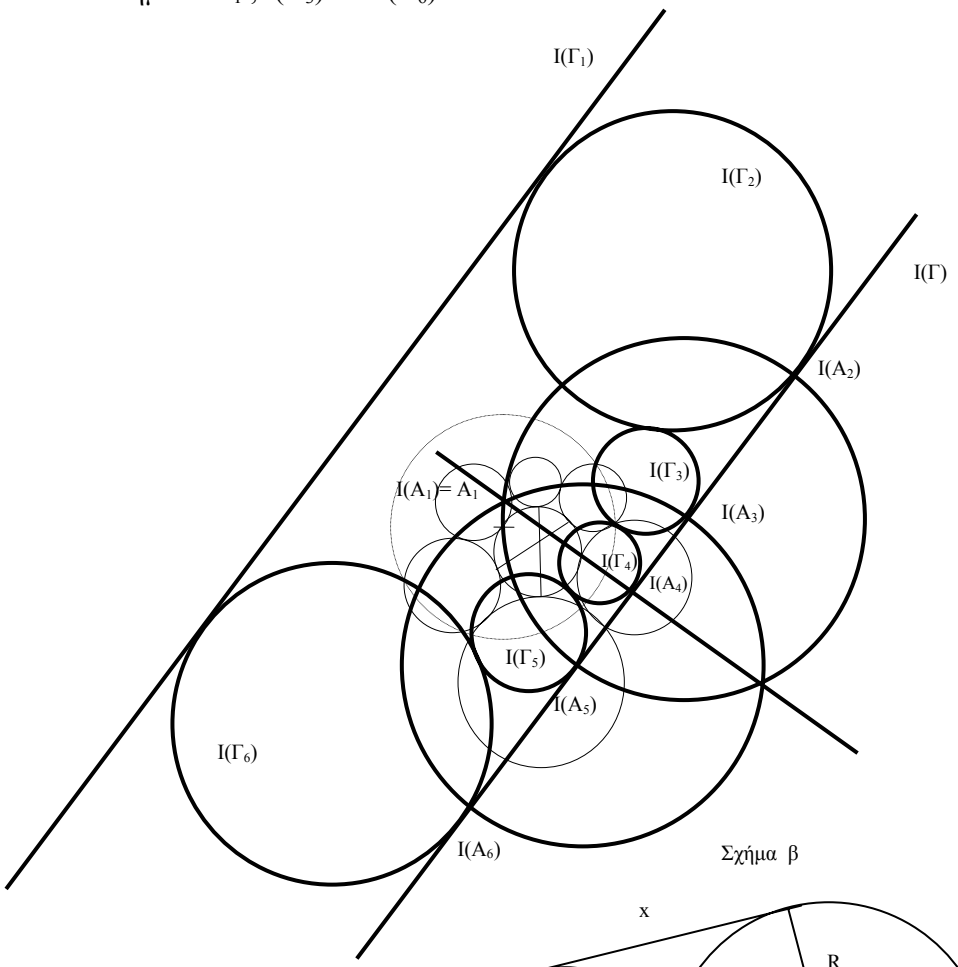
Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τους κύκλους $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3,\Gamma_4,\Gamma_5,\Gamma_6$ οι οποίοι εφάπτονται σε έναν κύκλο Γ στα σημεία A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6 αντίστοιχα. Οι κύκλοι $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3,\Gamma_4,\Gamma_5,\Gamma_6$ εφάπτονται μεταξύ τους ο Γ_1 με τον Γ_2 , ο Γ_2 με τον Γ_3 , ο Γ_3 με τον Γ_4 , ο Γ_4 με τον Γ_5, ο Γ_5 με τον Γ_6 και ο Γ_6 με τον Γ_1. Να αποδειχθεί ότι οι A_1A_4 , A_2A_5 και A_3A_6 συντρέχουν.



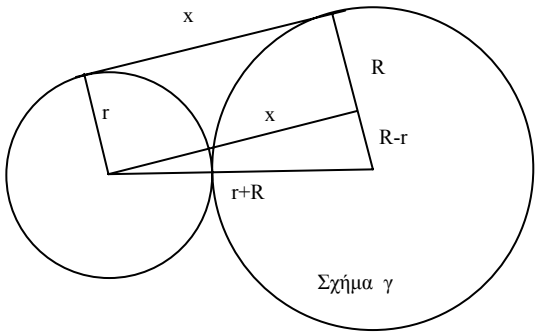
Σχήμα α

Εφαρμόζουμε αντιστροφή με κέντρο το σημείο A_1 και τυχαία ακτίνα.
Οι κύκλοι Γ_1 και Γ που διέρχονται από το A_1 μετασχηματίζονται σε ευθείες μ, ν παράλληλες μεταξύ τους διότι οι κύκλοι Γ_1 και Γ εφάπτονται στο κέντρο του κύκλου αντιστροφής το οποίο απεικονίζεται στο σημείο στο άπειρο, οπότε οι αντιστροφές τους, που όπως είπαμε είναι δύο ευθείες, δεν θα έχουν άλλο κοινό σημείο παρά μόνο το σημείο στο άπειρο και έτσι θα είναι δύο ευθείες παράλληλες. Οι κύκλοι Γ_2 και Γ_6 που εφάπτονται στους Γ_1 και Γ θα μετασχηματιστούν σε δύο κύκλους $I(\Gamma_2)$ και $I(\Gamma_6)$ που είναι εφαπτόμενοι στις δύο ευθείες μ, ν. Οι ευθείες είναι παράλληλες άρα οι κύκλοι $I(\Gamma_2)$ και $I(\Gamma_6)$ θα είναι ίσης ακτίνας.
Η ευθεία A_1A_4 διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής άρα παραμένει σταθερή.

Η ευθεία A_2A_5 μετασχηματίζεται σε έναν κύκλο που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής, επίσης από το σημείο $I(A_2)$ που είναι η εικόνα του A_2 καθώς και από το σημείο που είναι η εικόνα του A_5 δηλαδή από το $I(A_5)$.
Η ευθεία A_3A_6 μετασχηματίζεται σε έναν κύκλο που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής, από το σημείο που είναι η εικόνα του A_3, δηλαδή από το $I(A_3)$ και από το σημείο που είναι η εικόνα του A_6, δηλαδή από το $I(A_6)$. Για να συντρέχουν οι A_1A_4 , A_2A_5 και A_3A_6 θα πρέπει να αποδείξουμε ότι οι εικόνες τους έχουν και άλλο κοινό σημείο πέρα από το A_1. Η ευθεία A_1A_4 παραμένει σταθερή με την αντιστροφή, άρα η ευθεία $A_1I(A_4)$ (όπου το $I(A_4)$ είναι η εικόνα του A_4) ταυτίζεται με την A_1A_4. Το $I(A_4)$ είναι το σημείο επαφής του κύκλου $I(\Gamma_4)$ με την εικόνα $I(\Gamma)$ του κύκλου Γ. Θα αποδείξουμε ότι η ευθεία $A_1I(A_4)$ είναι ο ριζικός άξονας των περιφερειών που διέρχονται από τα: A_1 , $I(A_2)$ και $I(A_5)$ και από τα σημεία: A_1 , $I(A_3)$ και $I(A_6)$.



Σχήμα β



Σχήμα γ

Χωρίς να μπούμε σε λεπτομέρειες της απόδειξης (η οποία είναι πολύ εύκολη) και παρατηρώντας το σχήμα γ μπορούμε να δούμε (με χρήση του πυθαγόρειου θεωρήματος) ότι το μήκος του κοινού εφαπτόμενου τμήματος x, δύο εφαπτόμενων κύκλων, δίνεται από τον τύπο: $x = 2\sqrt{rR}$

r_2, r_6 με $r_2 = r_6$ οι ακτίνες των κύκλων $I(\Gamma_2), I(\Gamma_6)$

r_3, r_4, r_5 οι ακτίνες των κύκλων $I(\Gamma_3), I(\Gamma_4), I(\Gamma_5)$

$$I(A_4)I(A_2)\cdot I(A_4)I(A_5) = -\left(2\sqrt{r_3r_4} + 2\sqrt{r_2r_3}\right)\cdot 2\sqrt{r_4r_5} = -4\sqrt{r_2r_3r_4r_5} - 4\sqrt{r_3r_5}$$

$$I(A_4)I(A_3)\cdot I(A_4)I(A_6) = -\left(2\sqrt{r_5r_4} + 2\sqrt{r_5r_6}\right)\cdot 2\sqrt{r_4r_3} = -4\sqrt{r_2r_3r_4r_5} - 4\sqrt{r_3r_5}$$

όμως $r_2 = r_6$ άρα $I(A_4)I(A_2)\cdot I(A_4)I(A_5) = I(A_4)I(A_3)\cdot I(A_4)I(A_6)$ οπότε η ευθεία A_1A_4 είναι ριζικός άξονας των κύκλων που διέρχονται από τα: A_1 , $I(A_2)$ και $I(A_5)$ και από τα σημεία: A_1 , $I(A_3)$ και $I(A_6)$. Οι κύκλοι αυτοί τέμνονται (αφού το σημείο $I(A_4)$ είναι μεταξύ των $I(A_3), I(A_5)$) οπότε ο ριζικός τους άξονας διέρχεται και από το δεύτερο κοινό σημείο τους έστω το M. Η ευθεία A_1A_4 λοιπόν και οι κύκλοι (A_1 , $I(A_2)$ $I(A_5)$) και (A_1, $I(A_3)$ $I(A_6)$), που είναι εικόνες των ευθειών A_2A_5 και A_3A_6 αντίστοιχα, έχουν δύο κοινά σημεία άρα οι A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6 έχουν δύο κοινά σημεία: την εικόνα του A_1 που είναι το σημείο στο άπειρο και την εικόνα του M. Άρα συντρέχουν.

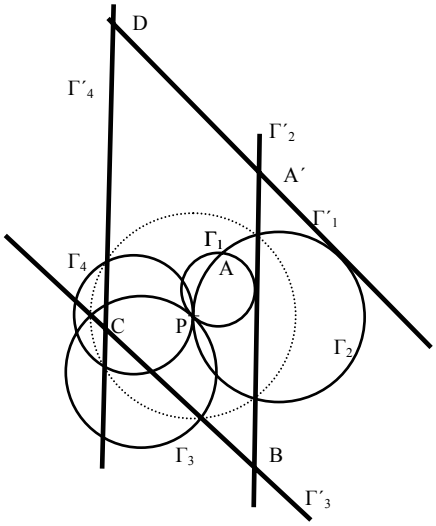
Πρόβλημα (προτάθηκε το 2003)

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ τέσσερις διαφορετικούς κύκλους και τέτοιους ώστε οι Γ_1, Γ_3 να είναι εξωτερικά εφαπτόμενοι στο σημείο P και οι Γ_2, Γ_4 είναι εξωτερικά εφαπτόμενοι στο ίδιο σημείο P. Ας υποθέσουμε ότι οι κύκλοι Γ_1, Γ_2 τέμνονται στο A, οι Γ_2, Γ_3 τέμνονται στο B, οι Γ_3, Γ_4 τέμνονται στο C και οι Γ_1, Γ_4 τέμνονται στο D.

Να αποδειχθεί ότι $\dfrac{AB\cdot BC}{AD\cdot DC} = \dfrac{PB^2}{PD^2}$

Λύση:

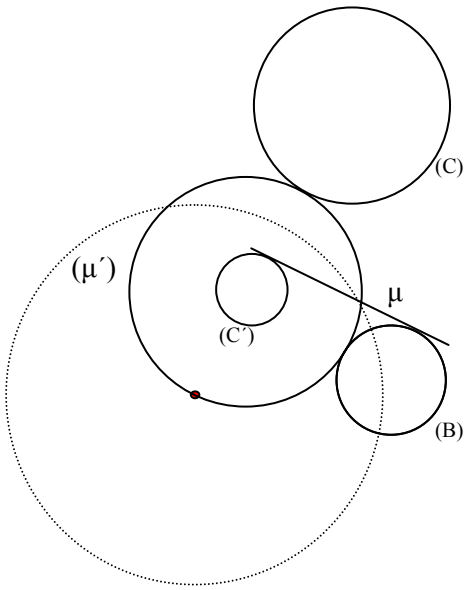
Εφαρμόζουμε αντιστροφή με κέντρο το σημείο P και ακτίνα r. Οι κύκλοι $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ μετασχηματίζονται στις ευθείες $\Gamma'_1, \Gamma'_2, \Gamma'_3, \Gamma'_4$ με $\Gamma'_1 \parallel \Gamma'_3$ και $\Gamma'_2 \parallel \Gamma'_4$ (οι ευθείες είναι παράλληλες διότι είναι εικόνες εφαπτόμενων κύκλων στο P όποτε αφού οι εφαπτόμενοι κύκλοι έχουν ένα κοινό σημείο (το P) οι εικόνες τους θα έχουν ένα κοινό σημείο (την εικόνα του P) που είναι το σημείο στο άπειρο (αφού το P είναι το κέντρο αντιστροφής) άρα οι ευθείες εικόνες έχουν κοινό σημείο το σημείο στο άπειρο όποτε είναι παράλληλες). Αφού είναι λοιπόν $\Gamma'_1 \parallel \Gamma'_3, \Gamma'_2 \parallel \Gamma'_4$ το $A'B'C'D'$ είναι παραλληλόγραμμο.



Ισχύει ότι $AB=\frac{r^2}{PA'\cdot PB'}A'B'$ επίσης $PB=\frac{r^2}{PB'}$ κ.λ.π.

Οπότε θα έχουμε: $\frac{AB\cdot BC}{AD\cdot DC}=\frac{PB^2}{PD^2}\Leftrightarrow\frac{PD'^2}{PB'^2}\frac{A'B'\cdot B'C'}{A'D'\cdot D'C'}=\frac{PD'^2}{PB'^2}$ η οποία ισχύει αφού $A'B'=D'C',B'C'=A'D'$

Πρόβλημα (Βασικό πρόβλημα για την λύση του προβλήματος του Απολλώνιου):



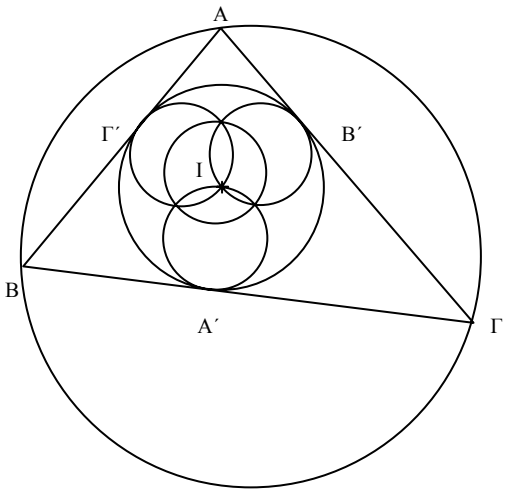
Δεδομένου ενός σημείου και δύο περιφερειών να χαραχθεί περιφέρεια που να διέρχεται από το σημείο και να εφάπτεται στις περιφέρειες.

Λύση:

Έστω Α το σημείο και (Β), (C) οι περιφέρειες. Θεωρούμε την αντιστροφή με κέντρο το Α και ακτίνα τέτοια ώστε ο κύκλος που θα χαραχθεί (κύκλος αντιστροφής) να είναι ορθογώνιος στον κύκλο (Β). Ο κύκλος Β είναι σταθερός μέσω της αντιστροφής. Βρίσκουμε την αντιστροφή (C΄) του κύκλου (C) και την εφαπτόμενη ευθεία μ προς τους κύκλους (C΄) και (Β). Η αντιστροφή της ευθείας αυτής είναι ο ζητούμενος κύκλος.
Πως θα κάνουμε την αντιστροφή αυτή; Θα αντιστρέψουμε τα σημεία επαφής της ευθείας μ με τους δύο κύκλους (C΄) και (Β). Ο κύκλος που διέρχεται από τα αντίστροφα σημεία των σημείων επαφής της ευθείας μ με τους δύο κύκλους (C΄) και (Β) όπως επίσης και από το σημείο Α είναι ο ζητούμενος.

Πρόβλημα:

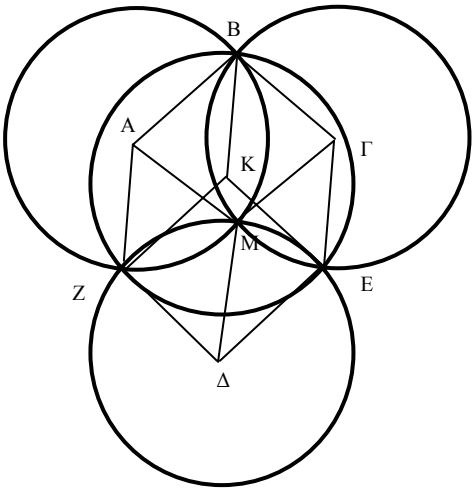
Οι εικόνες των πλευρών ενός τριγώνου μέσω της αντιστροφής ως προς τον εγγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου είναι τρεις κύκλοι οι οποίοι έχουν ίση ακτίνα και οι οποίοι διέρχονται από το έγκεντρο. Ο κύκλος που διέρχεται από το δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων αυτών είναι η εικόνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.



Λύση:

Για ένα δεδομένο τρίγωνο ΑΒΓ η αντιστροφή του ως προς τον εγγραμμένο κύκλο μετασχηματίζει τις πλευρές του σε κύκλους που διέρχονται από το κέντρο Ι του κύκλου αντιστροφής (αφού κάθε ευθεία κατά την αντιστροφή της μετασχηματίζεται σε κύκλο που διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής).
Είναι εφαπτόμενοι με τον κύκλο αντιστροφής στα ίδια σημεία που ο εγγεγραμμένος κύκλος εφάπτεται στις

πλευρές του τριγώνου διότι τα σημεία του κύκλου αντιστροφής παραμένουν σταθερά κατά την αντιστροφή. Τα δεύτερα σημεία τομής των κύκλων αυτών μεταξύ τους αντιστοιχούν τις εικόνες των κορυφών του τριγώνου. Ο περιγεγραμμένος κύκλος διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου άρα η εικόνα του διέρχεται από τις εικόνες των κορυφών του τριγώνου οπότε είναι ο κύκλος που διέρχεται από τα δεύτερα σημεία τομής των εικόνων των πλευρών.
Οι διάμετροι των εικόνων των πλευρών είναι οι ΙΑ΄,ΙΒ΄,ΙΓ΄. Το έγκεντρο ισαπέχει από τις πλευρές του τριγώνου (ως σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών του τριγώνου). Άρα ΙΑ΄=ΙΒ΄=ΙΓ΄ .Οπότε οι εικόνες των πλευρών έχουν την ίδια ακτίνα.

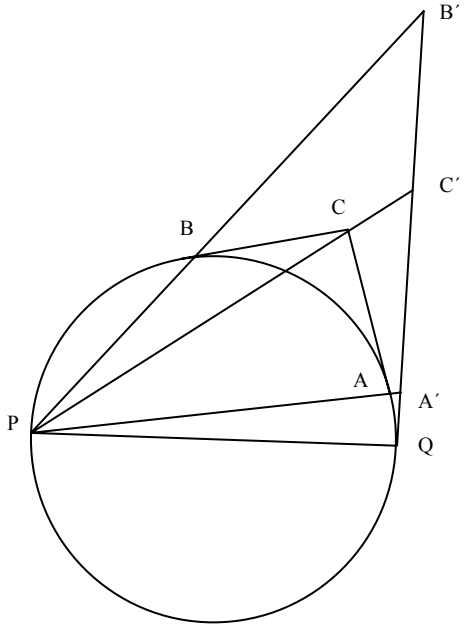


Ο κύκλος πού διέρχεται από το δεύτερο κοινό σημείο τριών ίσων κύκλων οι οποίοι διέρχονται από ένα κοινό σημείο Μ είναι ίσης ακτίνας με τους υπόλοιπους. Η απόδειξη γίνεται λίγο έμμεσα: Έχουμε ότι το ΑΒΓΜ είναι ρόμβος όπως επίσης και οι ΑΜΔΖ ,ΜΓΕΔ διότι είναι τετράπλευρα με όλες τις πλευρές τους ίσες. Οι ΑΖ και ΓΕ είναι παράλληλες και ίσες αφού είναι παράλληλες και ίσες με την ΜΔ. Κατασκευάζουμε το ρόμβο ΑΒΚΖ. Κατασκευάζουμε το τετράπλευρο ΒΚΕΓ το οποίο είναι και αυτό ρόμβος διότι οι ΒΚ και ΓΕ είναι παράλληλες και ίσες μεταξύ τους (αφού οι ΑΖ και ΓΕ είναι παράλληλες και ίσες μεταξύ τους). Το τετράπλευρο ΚΖΔΕ είναι προφανώς ρόμβος. Οπότε το σημείο Κ ισαπέχει από τα Β,Ε.Ζ και η απόσταση του από αυτά τα σημεία είναι ίση με την ακτίνα των κύκλων αυτών. Οπότε έχουμε το ζητούμενο.

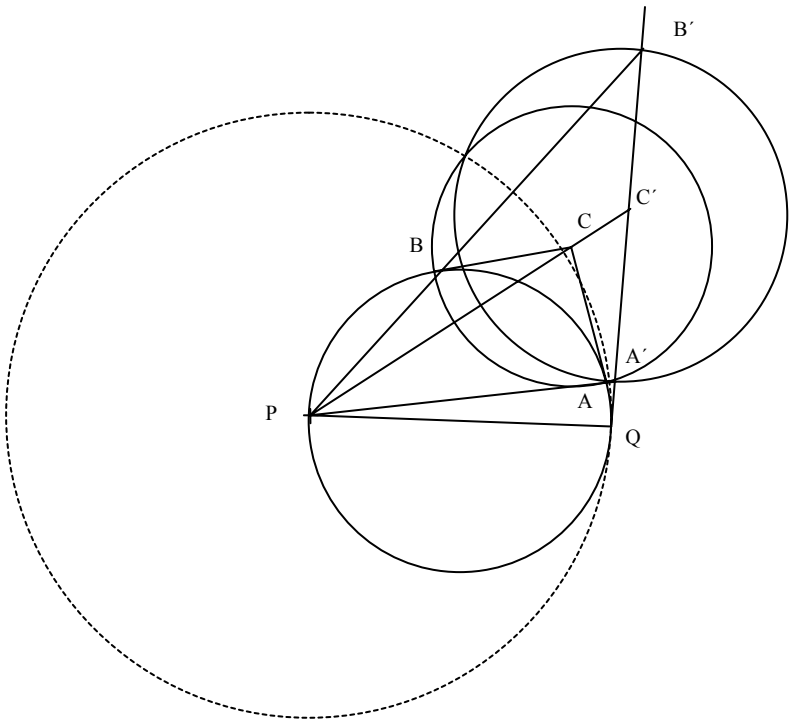
Πρόβλημα 1557 (math. Magazine 1998)

Ας υποθέσουμε ότι PQ είναι η διάμετρος ενός κύκλου και A, B δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία πάνω στον κύκλο αυτό και στο ίδιο ημικύκλιο με διάμετρο την PQ. Ας υποθέσουμε ότι CB και CA είναι οι εφαπτόμενες στον κύκλο από το σημείο C. Ας υποθέσουμε ότι η εφαπτόμενη στον κύκλο διαμέτρου PQ στο σημείο του Q τέμνει τις PB και PA στα σημεία B΄ και A΄ αντίστοιχα και την PC στο C΄. Να αποδειχθεί ότι το C΄ είναι το μέσο του A΄B΄.

Λύση:

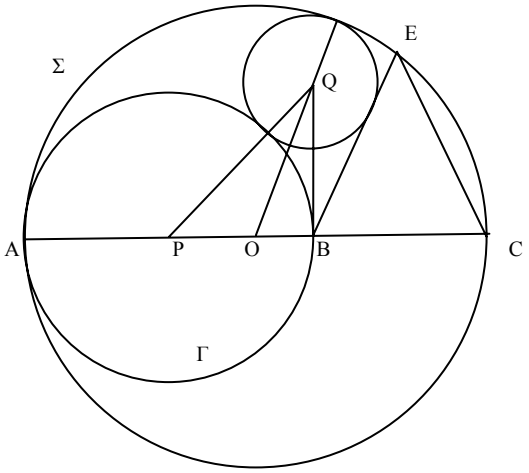


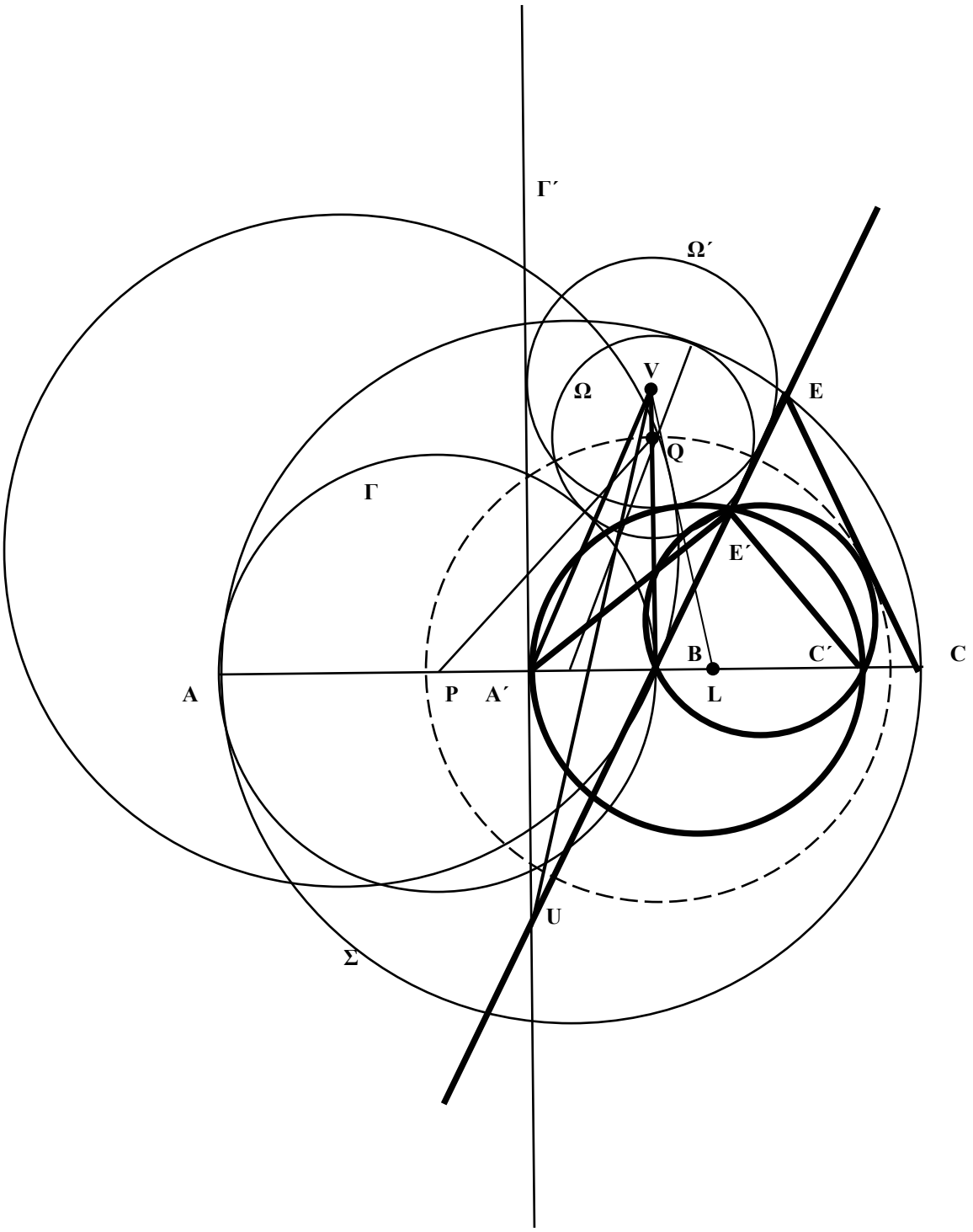
Κάνουμε αντιστροφή ως προς κύκλο με κέντρο το P και ακτίνα PQ. Το σημείο Q παραμένει σταθερό. Ο κύκλος διαμέτρου PQ μετατρέπεται στην εφαπτόμενη του ευθεία L στο σημείο Q. Ο κύκλος με κέντρο το C και ακτίνα την AC είναι ορθογώνιος ως προς τον κύκλο με διάμετρο την PQ και θα μετασχηματιστεί σε ένα κύκλο που είναι ορθογώνιος προς την εφαπτομένη L. Μέσω της αντιστροφής ως προς τον κύκλο (P,PQ) τα σημεία A και A΄ είναι μεταξύ τους αντίστροφα. Το ίδιο συμβαίνει και για τα σημεία B,B΄. Ο μοναδικός κύκλος που διέρχεται από τα σημεία A΄,B΄ και είναι ορθογώνιος προς την εφαπτομένη L (L είναι η εφαπτομένη του κύκλου με διάμετρο PQ στο σημείο του Q) είναι ο κύκλος (A΄B΄) που έχει κέντρο το μέσο του τμήματος A΄B΄. Δύο αντίστροφοι κύκλοι έχουν κέντρα τα οποία ανήκουν στην ίδια ημιευθεία με αρχή το κέντρο της αντιστροφής. Η ημιευθεία PC διέρχεται λοιπόν από το κέντρο του κύκλου (A΄B΄). Οπότε A΄C΄=B΄C΄.



Δίνεται ένας κύκλος Σ με κέντρο το σημείο O και διάμετρο AC και ένα σημείο B πάνω στην AC. Σχηματίστε τον κύκλο Γ με κέντρο το P και διάμετρο την AB και ένα ισοσκελές τρίγωνο BCE με το σημείο E πάνω στον κύκλο Σ. Ο κύκλος Ω με κέντρο το Q είναι εγγεγραμμένος στο καμπυλόγραμμο τρίγωνο που δημιουργείται από τους κύκλους Σ και Γ και την ευθεία BE. Να αποδειχθεί ότι το QB είναι κάθετο στο AC.

Λύση:





Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το να δείξουμε ότι ο κύκλος με κέντρο Q πάνω στην κάθετη από το B που είναι εφαπτόμενος στο BE καθώς επίσης και στον κύκλο Γ θα είναι εφαπτόμενος επίσης στον κύκλο Σ. Θα συμβολίσουμε αυτόν τον κύκλο με το γράμμα Ω. Θα χρησιμοποιήσουμε αντιστροφή ως προς τον κύκλο με κέντρο το B και με τυχαία ακτίνα.
Πρώτα απ΄ όλα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι το τρίγωνο C΄BE΄ (το C΄ είναι αντίστροφο του C και το E΄ είναι το αντίστροφο E) θα είναι όμοιο με το τρίγωνο EBC οπότε είναι ισοσκελές. Αυτό συμβαίνει διότι BC·BC΄=$\wp^2$ =BE·BE΄ (η $\wp$ είναι η ακτίνα κύκλου αντιστροφής) οπότε $\frac{BC'}{C'E'}=\frac{CE}{BE}$ και ∠E΄BC΄=EBC (κοινή). Έτσι λοιπόν το τρίγωνο BCE είναι ισοσκελές με CE=EB. Ο κύκλος Σ΄ (αντίστροφος του Σ) θα είναι ο κύκλος με διάμετρο την A΄C΄ και η

εικόνα του κύκλου Γ θα είναι η ευθεία Γ΄ εφαπτόμενη στον κύκλο Σ΄ στο Α΄. Ας υποθέσουμε ότι U είναι το σημείο τομής της Γ΄ με την ΒΕ΄. Τότε $\angle A'UE'=90^o-\angle UBA'=90^o-\angle E'BC'=90^o-C'E'B=\angle UE'A'$ οπότε το τρίγωνο UΕ΄Α΄ θα είναι ισοσκελές.
Ας υποθέσουμε ότι V είναι το κέντρο του κύκλου Ω΄ (Ω΄ είναι ο αντίστροφος κύκλος του Ω). Επειδή ο κύκλος Ω΄ είναι εφαπτόμενος και στην Γ΄ και στην ΒΕ΄ το V κείται στην διχοτόμο της $\angle A'UB$. Δύο αντίστροφοι μεταξύ τους κύκλοι έχουν τα κέντρα τους συγγραμμικά με το κέντρο του κύκλου αντιστροφής. Άρα τα σημεία V,Q,B είναι συγγραμμικά όποτε το VB είναι κάθετο με το AC. Έτσι οι γωνίες $\angle VUB=\angle A'UV$ (VU διχοτόμος) και οι γωνίες $\angle A'UV=$ $=\angle BVU$ (εντός εναλλάξ αφού BV είναι παράλληλη με την Α΄U ως κάθετες στην ίδια ευθεία). Άρα το τρίγωνο BVU είναι ισοσκελές. Ας υποθέσουμε ότι L είναι το κέντρο του κύκλου Σ΄ (Σ΄ είναι ο κύκλος με διάμετρο την Α΄C΄) και ας θέσουμε την ακτίνα του κύκλου αυτού R. Επίσης ας υποθέσουμε ότι η ακτίνα του Ω΄ είναι r.
Τότε από το πυθαγόρειο θεώρημα θα έχουμε:

$$LV^2=LB^2+BV^2=(R-A'B)^2+BU^2=(R-r)^2+r^2+A'E'^2=$$

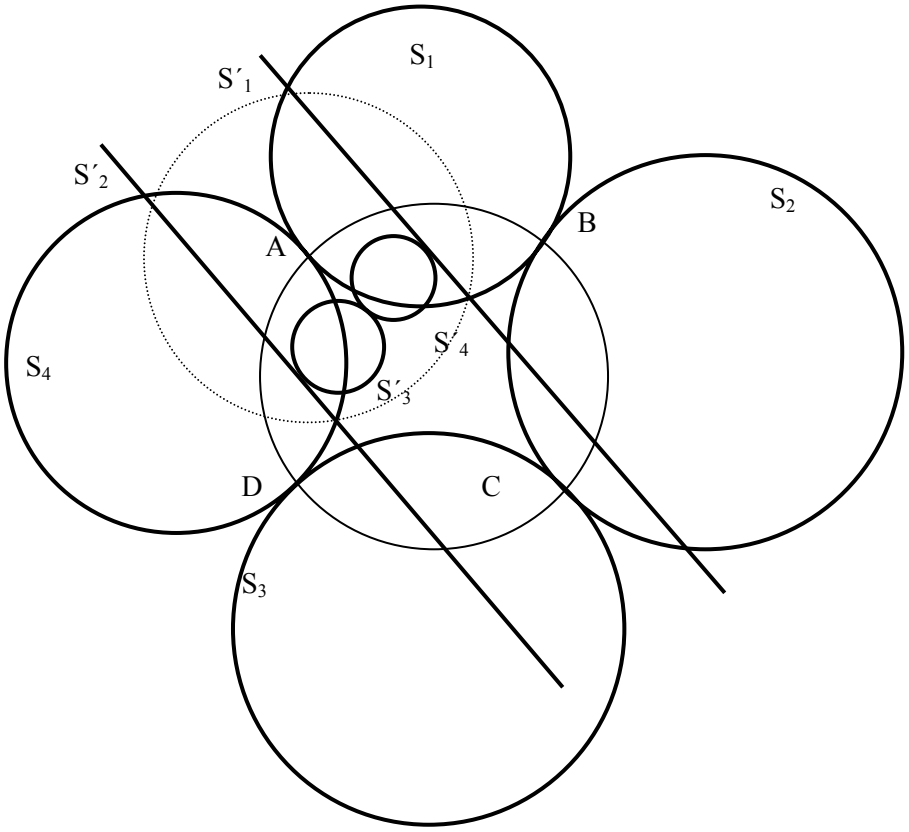
$$=(R-r)^2+r^2+A'C'^2-E'C'^2=(R-r)^2+r^2+4R^2-BC'^2=(R-r)^2+r^2+4R^2-(2R-r)^2=$$

$$=R^2+r^2+2Rr=(R+r)^2$$

οπότε ο κύκλος Ω΄ είναι εφαπτόμενος στον Σ΄ άρα και ο κύκλος Ω είναι εφαπτόμενος στον Σ.

Πρόβλημα των τεσσάρων εφαπτόμενων κύκλων.

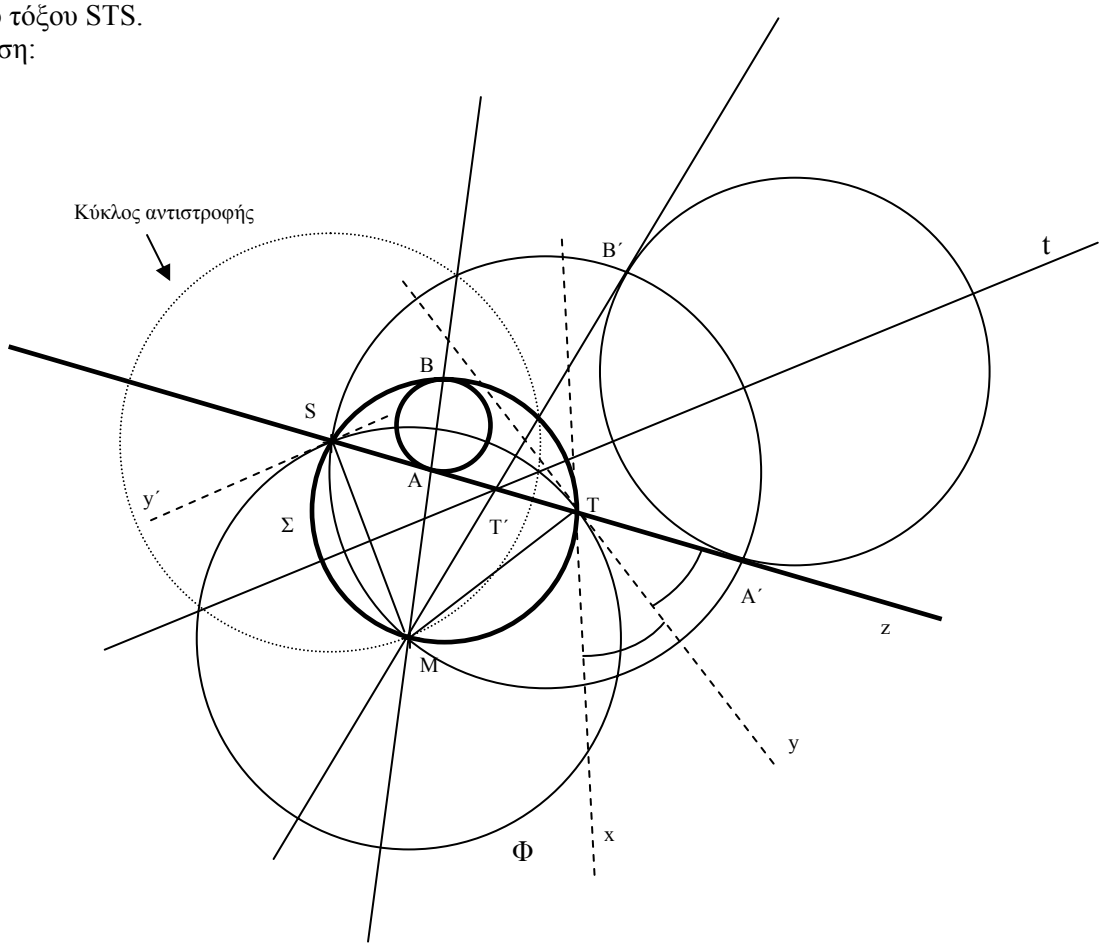
Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τέσσερις κύκλους S_1,S_2,S_3,S_4 που ο καθένας εφάπτεται κυκλικά στους γειτονικούς του κατά τέτοιον τρόπο ώστε: ο S_1 εφάπτεται στον S_2 και στον S_4, ο S_2 εφάπτεται στον S_3 και ο S_3 εφάπτεται στον S_4. Να αποδείξετε ότι τα σημεία επαφής είναι ομοκυκλικά.



Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια αλυσίδα από τέσσερις κύκλους που ο καθένας εφάπτεται σε δύο από τους γείτονες κύκλους του. Αντιστρέφουμε με κέντρο του κύκλου αντιστροφής ένα από τα τέσσερα σημεία επαφής. Οι δύο κύκλοι οι οποίοι εφάπτονται στο σημείο αυτό (κεντρο αντιστροφής) μετασχηματίζονται σε δύο παράλληλες ευθείες. Οι άλλοι δύο κύκλοι απεικονίζονται σε δύο κύκλους που εφάπτονται μεταξύ τους όπως επίσης και στις δύο παράλληλες ευθείες.
Δύο ευθείες παράλληλες είναι ομοιόθετες με οποιοδήποτε σημείο ως κέντρο ομοιοθεσίας αρκεί αυτό το σημείο να μην είναι πάνω στις ευθείες αυτές.
Δύο εφαπτόμενοι κύκλοι είναι ομοιόθετοι με κέντρο ομοιοθεσίας το σημείο επαφής τους. Αυτό σημαίνει ότι το όλο σύστημα είναι ομοιόθετο ως προς το σημείο (κέντρο ομοιοθεσίας) επαφής των δύο εφαπτόμενων κύκλων. Απαραίτητα τα δύο σημεία επαφής των δύο ευθειών με τους δύο κύκλους είναι ομοιόθετα μεταξύ τους. Ως ομοιόθετα θα πρέπει να είναι συγγραμμικά με το κέντρο ομοιοθεσίας. Η ευθεία των τριών αυτών σημείων με την αντιστροφή μετασχηματίζεται σε κύκλο που διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής. Τα τρία αυτά συγγραμμικά σημεία είναι οι εικόνες των σημείων επαφής των αρχικών τριών κύκλων μέσω της αντιστροφής η οποία έχει κέντρο το τέταρτο σημείο επαφής. Άρα τα τρία αρχικά σημεία επαφής βρίσκονται σε κύκλο ο οποίος διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής (που είναι το τέταρτο σημείο επαφής). Δηλαδή τα τέσσερα σημεία επαφής είναι ομοκυκλικά.

Πρόβλημα:

Έστω ο κύκλος Σ με κέντρο Ο και η ευθεία γραμμή ST που αποκόπτει από τον κύκλο Σ το κυκλικό τμήμα STS . Κύκλοι εγγράφονται στο τμήμα και για κάθε τέτοιο κύκλο τα σημεία επαφής Α, Β συνδέονται με την αντίστοιχη ευθεία γραμμή. Να αποδειχθεί ότι όλες αυτές οι ευθείες γραμμές συντρέχουν στο μέσο Μ του τόξου ST το οποίο είναι το αντικείμενο τόξο του τόξου STS.
Λύση:



Θα πάρουμε αντιστροφή με κέντρο το σημείο S και ακτίνα SM.

Τότε η ευθεία ST παραμένει σταθερή (διότι είναι ευθεία που διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής). Ο κύκλος Σ γίνεται μια ευθεία γραμμή (διότι είναι κύκλος που διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής). Η ευθεία αυτή (εικόνα του κύκλου Σ) θα τέμνει την ST στο σημείο Τ΄ το οποίο είναι η εικόνα του Τ (διότι το Τ είναι κοινό σημείο της ευθείας TS και του κύκλου Σ). Η εικόνα του κύκλου Σ θα διέρχεται από το σημείο Μ (διότι το σημείο Μ είναι σημείο του κύκλου Σ αλλά είναι και σημείο του κύκλου αντιστροφής οπότε η εικόνα του θα είναι ο εαυτός του, δηλαδή πάλι το σημείο Μ). Επειδή η αντιστροφή διατηρεί τις γωνίες άρα τα σημεία επαφής Α και Β θα γίνονται πάλι σημεία επαφής και συγκεκριμένα τα σημεία Α΄ και Β΄ του σχήματός μας. Οι κύκλοι που εγγράφονται στο κυκλικό τμήμα απεικονίζονται σε κύκλους που εφάπτονται στις Τ΄Β΄ και Τ΄Α΄. Η Α΄Β΄ είναι κάθετη στην διχοτόμο της γωνίας ∠Α΄Τ΄Β΄ αφού το τρίγωνο Β΄Τ΄Α΄ είναι ισοσκελές. Κάθε κύκλος που διέρχεται από τα Α΄,Β΄ είναι κάθετος ως προς την διχοτόμο της γωνίας ∠Α΄Τ΄Β΄ αφού η διχοτόμος αυτή διέρχεται από το κέντρο του ως κάθετη ευθεία στο μέσο της χορδής του Α΄Β΄ . Θα δείξουμε ότι η διχοτόμος είναι η εικόνα μέσω της αντιστροφής (S,SM) του κύκλου με κέντρο Μ και ακτίνα MS=MT. Η εικόνα της διχοτόμου είναι ένας κύκλος, ας τον ονομάσουμε Φ, που διέρχεται από τα S και T, διότι το Τ είναι το αντίστροφο σημείο του Τ΄ ως προς την αντιστροφή (S,SM), ενώ το S είναι το κέντρο του κύκλου αντιστροφής από όπου και περνάει υποχρεωτικά ο κύκλος Φ ως εικόνα ευθείας. Η εφαπτομένη του κύκλου Φ στο σημείο Τ διχοτομεί την γωνία που σχηματίζεται από την ST και την εφαπτόμενη Tx του κύκλου Σ στο σημείο Τ (αυτό συμβαίνει διότι: Η εικόνα του κύκλου Σ είναι η Τ΄Β΄ και της ST η ίδια η ST οι οποίες διχοτομούνται από την Τ΄t, η οποία έχει εικόνα τον Φ. Οι γωνίες διατηρούνται κατά την αντιστροφή. Έχουμε λοιπόν ότι ∠Β΄Τ΄t=∠Α΄Τ΄t άρα και οι γωνίες που σχηματίζονται από τις εικόνες των Τ΄Β΄, Τ΄t και τις εικόνες των Τ΄t, ΤΆ΄ θα είναι επίσης ίσες. Οπότε ∠zTy=∠yTx).

Το Μ είναι το μέσο του ST άρα ∠STM=∠MTx (η μια είναι εγγεγραμμένη και η άλλη υπό χορδής και εφαπτομένης με ίσα αντίστοιχα τόξα $\overset{\frown}{SM},\overset{\frown}{MT}$). Οι TM και Ty είναι διχοτόμοι δύο παραπληρωματικών γωνιών, άρα είναι μεταξύ τους κάθετες.

Οι κύκλοι Φ και Σ τέμνονται στα σημεία Τ και S. Λόγω συμμετρίας, αφού το Μ είναι το μέσο του τόξου SMT, θα έχουμε ότι και η SM είναι κάθετη στην εφαπτομένη Sy΄ του κύκλου Φ στο σημείο του S. Τελικά ο κύκλος Φ έχει κέντρο το σημείο Μ. Αυτό συμβαίνει διότι οι MT και MS είναι κάθετες στις εφαπτόμενες αυτού του κύκλου στα σημεία Τ και S αντίστοιχα οπότε οι ακτίνες του κύκλου Φ προς τα σημεία S,T είναι πάνω στις ευθείες SM,TM. Άρα το σημείο τομής των ευθειών αυτών (δηλαδή το σημείο Μ) είναι το κέντρο του κύκλου Φ. Επειδή η SM είναι κάθετη στον κύκλο (M,SM) οι εικόνες τους μέσω της αντιστροφής θα είναι επίσης κάθετες, δηλαδή SM⊥T΄t. Το τρίγωνο ST΄M είναι ισοσκελές καθότι η Τ΄t είναι διχοτόμος και ύψος, οπότε η Τ΄t είναι και μεσοκάθετος του SM, άρα ο κύκλος που διέρχεται από τα Α΄,Β΄,S θα πρέπει υποχρεωτικά να περάσει και από το Μ, αφού η Τ΄t διέρχεται από το κέντρο του κύκλου αυτού. Όμως ένας τέτοιος κύκλος έχει εικόνα μια ευθεία γραμμή που διέρχεται από τις εικόνες των Α΄,Β΄ που είναι τα Α,Β και από την εικόνα του Μ που είναι το ίδιο το Μ.

Άλλη απόδειξη:

Θα εφαρμόσουμε αντιστροφή ως προς τον κύκλο με κέντρο το σημείο Μ και ακτίνα MS=MT. Τότε η ευθεία γραμμή ST θα απεικονιστεί σε έναν κύκλο που διέρχεται από το κέντρο της αντιστροφής Μ. Τα σημεία S,T είναι σταθερά ως προς την αντιστροφή αυτή αφού ανήκουν στον κύκλο της αντιστροφής, οπότε η ευθεία ST θα απεικονιστεί σε ένα κύκλο που διέρχεται από τα S,T, M που δεν είναι άλλος από τον κύκλο Σ. Μια ευθεία που διέρχεται από το σημείο Μ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ST και το τόξο ST στα σημεία Α, Β. Ο κύκλος Σ και η ευθεία ST είναι αντίστροφα σχήματα άρα το σημείο Α είναι αντίστροφο του Β και το Β του Α. Κάθε κύκλος που διέρχεται από αυτά τα δύο σημεία είναι ορθογώνιος ως προς τον κύκλο αντιστροφής οπότε απεικονίζεται στον εαυτό του. Οπότε αν ένας τέτοιος κύκλος είναι εφαπτόμενος στο ευθύγραμμο τμήμα ST σε ένα σημείο Α τότε η εικόνα του θα πρέπει να είναι εφαπτόμενη, με σημείο επαφής με το τόξο ST (που είναι η εικόνα του τμήματος ST), το

αντίστροφο σημείο του Α (δηλαδή το σημείο εκείνο που η ΜΑ τέμνει το τόξο ST). Η εικόνα όμως ενός τέτοιου κύκλου είναι ο εαυτός του, άρα τα σημεία επαφής και το σημείο Μ είναι συνευθειακά.

Πρόβλημα :

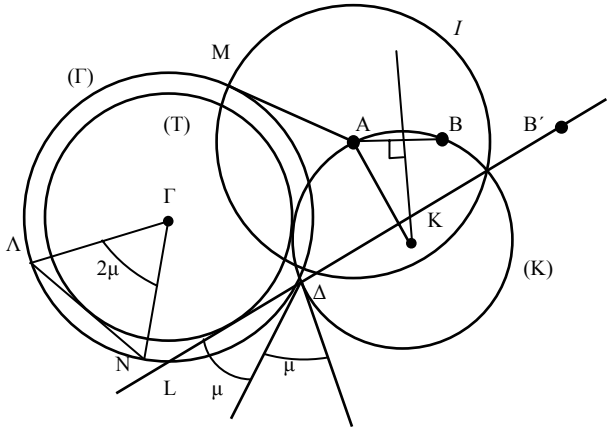
(απαραίτητο λήμμα για την διαπραγμάτευση κάποιων προβλημάτων που ακολουθούν)

Να βρεθεί το αντίστροφο του κέντρου ενός κύκλου (Ψ) με την αντιστροφή ως προς έναν κύκλο (Ο).

Λύση:

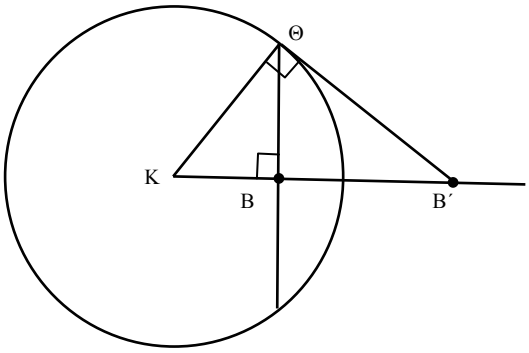
(στο συγκεκριμένο πρόβλημα ένας κύκλος και το κέντρο του συμβολίζονται με το ίδιο γράμμα)
Έχουμε αναφέρει και σε άλλα σημεία αυτής της εργασίας ότι όταν αντιστρέφουμε έναν κύκλο (Ψ) ως προς ένα κύκλο (Ο) κέντρου Ο, τότε το κέντρο Ψ του κύκλου (Ψ) *δεν* έχει ως αντίστροφο του σημείο, το κέντρο Φ του αντίστροφου κύκλου (Φ) του κύκλου (Ψ). Για να βρούμε το σημείο το οποίο είναι το αντίστροφο του κέντρου Ψ θα πρέπει να παρατηρήσουμε αρχικά ότι όλες οι ευθείες που διέρχονται από το Ψ τέμνουν τον κύκλο (Ψ) ορθογώνια. Αυτές οι ευθείες αντιστρέφονται σε κύκλους οι οποίοι διέρχονται από το κέντρο Ο του κύκλου αντιστροφής και από το σημείο Ψ΄ το οποίο είναι το αντίστροφο σημείο του κέντρου Ψ του κύκλου (Ψ). Γνωρίζουμε ότι αν δύο ή περισσότεροι κύκλοι διέρχονται από δύο σημεία Α,Β και κόβουν ένα συγκεκριμένο κύκλο (Ω) ορθογώνια τότε τα σημεία Α,Β είναι αντίστροφα μεταξύ τους σημεία ως προς κύκλο αντιστροφής τον κύκλο (Ω). Άρα τα σημεία Ο και Ψ΄ είναι αντίστροφα μεταξύ τους σημεία ως προς κύκλο αντιστροφής τον κύκλο (Ψ΄) (που είναι ο αντίστροφος του κύκλου Ψ ως προς την αντιστροφή (Ο)). Έτσι θα έχουμε ότι:
Το αντίστροφο σημείο Ψ΄ του κέντρου Ψ ενός κύκλου (Ψ) ως προς την αντίστροφή (Ο) είναι το αντίστροφο του κέντρου της αντιστροφής Ο με την αντιστροφή όμως ως προς τον κύκλο (Ψ΄) ο οποίος είναι ο αντίστροφος του κύκλου (Ψ) με την αντιστροφή (Ο).
Με άλλα λόγια : Έστω ότι έχω ένα κύκλο (Ψ) και θέλω να τον αντιστρέψω με κύκλο αντιστροφής τον κύκλο (Ο).
Ο κύκλος (Ψ) αντιστρέφεται στον κύκλο (Ψ΄). Το κέντρο Ψ του (Ψ) δεν αντιστρέφεται στο κέντρο Φ του (Ψ΄).
•Αν θέλουμε να βρούμε το αντίστροφο Ψ΄ του κέντρου Ψ τότε:
•Παίρνουμε ως κύκλο αντιστροφής τον κύκλο (Ψ΄) (αντίστροφος του (Ψ) ως προς τον κύκλο (Ο))
•Αντιστρέφουμε το κέντρο Ο (κέντρο της πρώτης αντιστροφής) ως προς κύκλο αντιστροφής τον (Ψ΄)
•Έστω ότι το σημείο Ψ΄ είναι το αντίστροφο του Ο με κύκλο αντιστροφής τον (Ψ΄).
•Το Ψ΄ είναι το αντίστροφο του κέντρου Ψ του κύκλου (Ψ) με την αντιστροφή ως προς τον κύκλο (Ο).
Η περίπτωση που (Ψ΄) είναι μια ευθεία είναι σημαντικό να αναλυθεί:
Οι ευθείες (Λ) που διέρχονται από το κέντρο Ψ του κύκλου (Ψ) κόβουν τον κύκλο (Ψ) ορθογώνια και ως εκ τούτου αντιστρέφονται σε κύκλους (Λ΄) που κόβουν την ευθεία (Ψ΄) ορθογώνια οπότε η (Ψ΄) πρέπει να είναι διάμετρος όλων αυτών των κύκλων (Λ΄). Άρα το Ο και το Ψ΄ πρέπει να είναι συμμετρικά ως προς την (Ψ΄).

Να κατασκευαστεί (γεωμετρικά) περιφέρεια η οποία διέρχεται από δύο σημεία Α και Β και η οποία τέμνει μια δοσμένη περιφέρεια (Γ) κατά δοθείσα γωνία μ.



Λύση:

Έστω ότι το πρόβλημα έχει λυθεί και ας υποθέσουμε ότι ο κύκλος που ψάχνουμε είναι ο (Κ). Ας υποθέσουμε ότι ο δοσμένος κύκλος είναι ο (Γ).
Η γωνία που σχηματίζουν οι κύκλοι (Κ) και (Γ) είναι η γωνία $\angle\mu$ που σχηματίζεται από τις εφαπτόμενες των δύο κύκλων στο σημείο τομής τους Δ.
Θεωρούμε την αντιστροφή με κέντρο το σημείο Α και ακτίνα το εφαπτόμενο τμήμα ΑΜ από το Α προς τον κύκλο (Γ). Διαλέγουμε ακτίνα την ΑΜ διότι σε τέτοια περίπτωση ο κύκλος (Γ) είναι ορθογώνιος προς τον κύκλο αντιστροφής οπότε κατά την αντιστροφή μένει αναλλοίωτος. Ο κύκλος (Κ) που ψάχνουμε αφού διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής θα μετασχηματίζεται σε ευθεία L κατά την αντιστροφή αυτή. Η ευθεία αυτή θα διέρχεται από το σημείο Β΄ το οποίο είναι το αντίστροφο του σημείου Β ως προς την εν λόγω αντιστροφή.



Το αντίστροφο του Β είναι εύκολο να βρεθεί:
Αν το Β είναι εξωτερικό του κύκλου αντιστροφής για να βρούμε το αντίστροφο του θα χαράξουμε τον κύκλο (ΚΒ) που έχει διάμετρο την ΚΒ. Από το σημείο τομής Θ των κύκλων (Α,ΑΜ) και (ΚΒ) θα φέρουμε την κάθετη προς την ΚΒ. Το σημείο τομής Β΄ είναι το αντίστροφο του Β αφού από τα όμοια τρίγωνα που σχηματίζονται προκύπτει η σχέση $KB\cdot KB'=K\Theta^2$. Αν το σημείο Β είναι εσωτερικό του κύκλου αντιστροφής τότε για να βρούμε το αντίστροφό του σημείο θα φέρουμε την κάθετη από το Β προς την ΚΒ που τέμνει τον κύκλο αντιστροφής στο σημείο Θ. Από το σημείο Θ φέρνουμε την κάθετη προς την ακτίνα ΚΘ. Η κάθετη αυτή τέμνει την ΚΒ στο σημείο Β΄ οπότε έχουμε το αντίστροφο του σημείου Β αφού πάλι από τα όμοια τρίγωνα που σχηματίζονται βρίσκουμε την σχέση $KB\cdot KB'=K\Theta^2$.
Ένας άλλος τρόπος να βρούμε το αντίστροφο ενός σημείου Β είναι να φέρουμε δύο ορθογώνιους[3] κύκλους προς τον κύκλο αντιστροφής οι οποίοι να διέρχονται από το Β. Το δεύτερο κοινό σημείο Β΄ των δύο αυτών ορθογώνιων κύκλων είναι το αντίστροφο του Β.
Η ευθεία λοιπόν που είναι η αντίστροφη του κύκλου (Κ) θα σχηματίζει γωνία με τον αναλλοίωτο κύκλο (Γ) η οποία θα ισούται με την γωνία $\angle\mu$ (αφού η γωνία των κύκλων (Γ) και (Κ) θα ισούται με την γωνία των εικόνων τους).
Η ευθεία L αποκόπτει τόξο μ από τον κύκλο (Γ). Η ευθεία L θα διέρχεται από το Β΄ (αντίστροφο του Β) και θα εφάπτεται προς τον κύκλο (Τ) που είναι ομόκεντρος με τον κύκλο (Γ) και εφαπτόμενος σε μια τυχαία χορδή ΛΝ του (Γ) η οποία του αποκόπτει τόξο μ (του (Γ)). Ο αντίστροφος κύκλος της ευθείας L είναι ο κύκλος (Κ) που ψάχνουμε. Ο κύκλος αυτός

[3] Η κατασκευή των εν λόγω ορθογωνίων κύκλων έχει γίνει σε άλλα σημεία της παρούσας εργασίας.

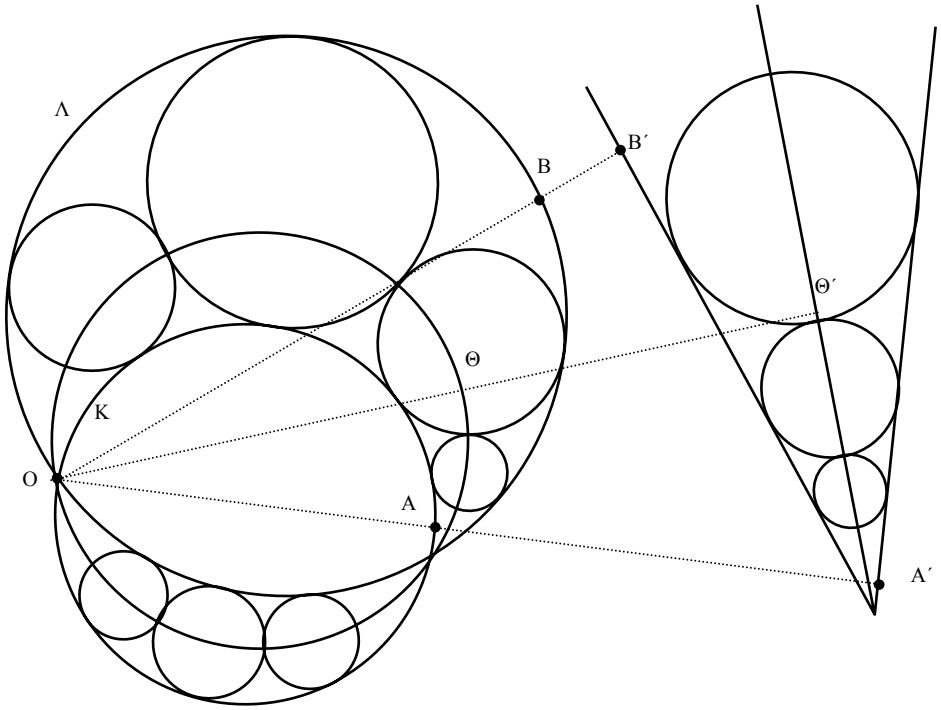
διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής Α και το κέντρο του βρίσκεται στην κάθετη που διέρχεται από το Α προς την ευθεία L. Επίσης το κέντρο του κύκλου (Κ) θα βρίσκεται στην μεσοκάθετη του τμήματος ΑΒ. Από το Β΄ μπορούμε να φέρουμε δύο εφαπτόμενες προς τον κύκλο (Τ). Άρα έχουμε δύο λύσεις στο πρόβλημα.

Πρόβλημα

Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων επαφής των περιφερειών των εφαπτόμενων ανά δύο μεταξύ τους, που είναι επίσης εφαπτόμενες σε δύο άλλες δεδομένες περιφέρειες;

Λύση:

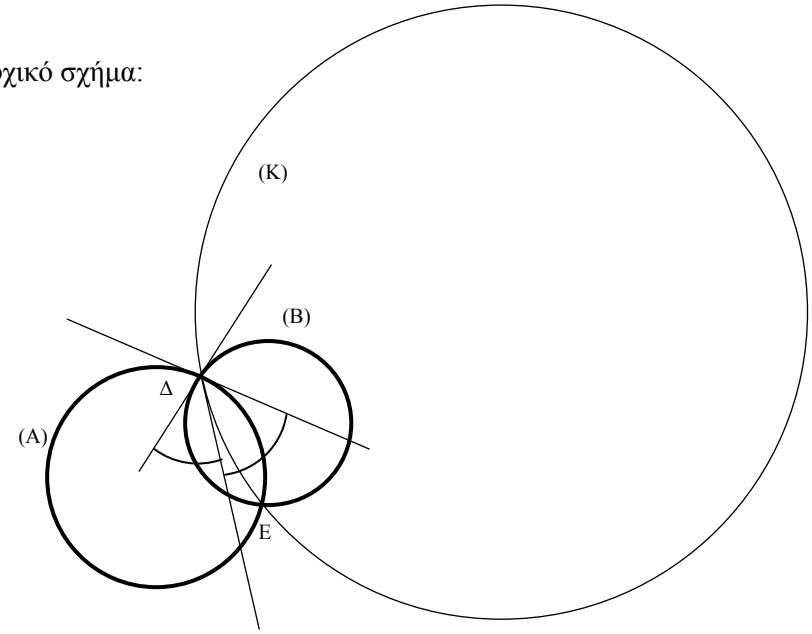
Θεωρούμε περιφέρειες που εφάπτονται μεταξύ τους ανά δύο όπως επίσης και σε δύο κύκλους (Κ) και (Λ). Οι κύκλοι (Κ) και (Λ) τέμνονται σε ένα σημείο Ο.
Αντιστρέφουμε με κέντρο Ο τυχαίο και τυχαία δύναμη R^2.
Μέσω της αντιστροφής αυτής οι δύο κύκλοι (Κ) και (Λ) μετασχηματίζονται σε δύο ευθείες που τέμνονται στο σημείο Α΄. Οι κύκλοι που εφάπτονται στους κύκλους (Κ) και (Λ) όπως και μεταξύ τους θα μετασχηματιστούν σε κύκλους που εφάπτονται στις πλευρές της γωνίας Α΄ αλλά και μεταξύ τους.



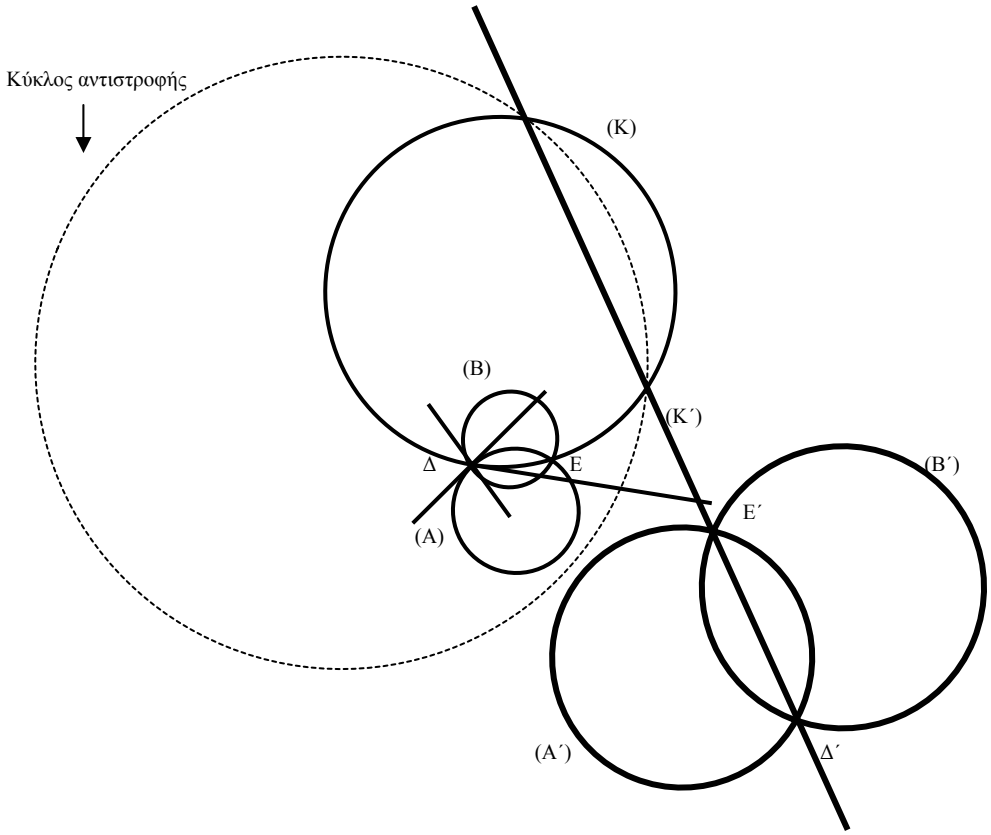
Οι πλευρές της γωνίας είναι οι κάθετες στις διαμέτρους ΟΑ και ΟΒ των κύκλων (Κ) και (Λ) οι οποίες διέρχονται από το κέντρο αντιστροφής Ο και σε αποστάσεις ΟΑ΄ και ΟΒ΄ από το κέντρο αντιστροφής που δίνονται από τις ισότητες: $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = R^2$.
Η διχοτόμος της γωνίας Α΄ διέρχεται από τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων κύκλων στις πλευρές της γωνίας Α΄. Άρα η αντιστροφή αυτής της διχοτόμου θα είναι ένας κύκλος ο οποίος θα διέρχεται (αφού οι γωνίες διατηρούνται κατά την αντιστροφή) από τα σημεία επαφής των αρχικών εφαπτόμενων μεταξύ τους κύκλων.
Αυτός είναι ο γεωμετρικός τόπος που ψάχνουμε. Τον γεωμετρικό αυτόν τόπο μπορούμε να τον κατασκευάσουμε ως εξής: φέρνουμε την κάθετη ΟΘ΄ από το κέντρο αντιστροφής προς την διχοτόμο της γωνίας Α. Βρίσκουμε το τμήμα ΟΘ το οποίο ικανοποιεί την σχέση $O\Theta \cdot O\Theta' = R^2$ (πρόβλημα $4^{ης}$ αναλόγου).
Το τμήμα ΟΘ είναι η διάμετρος του κύκλου που είναι ο γεωμετρικός τόπος μας.

Δύο τεμνόμενοι κύκλοι (Α) και (Β) μετασχηματίζονται σε δύο ίσους κύκλους αν εκλεγεί ως κέντρο αντιστροφής ένα τυχαίο σημείο ενός εκ των κύκλων που διχοτομούν την γωνία των (Α) και (Β).

Αρχικό σχήμα:



Σχήμα όπως προκύπτει από την αντιστροφή:



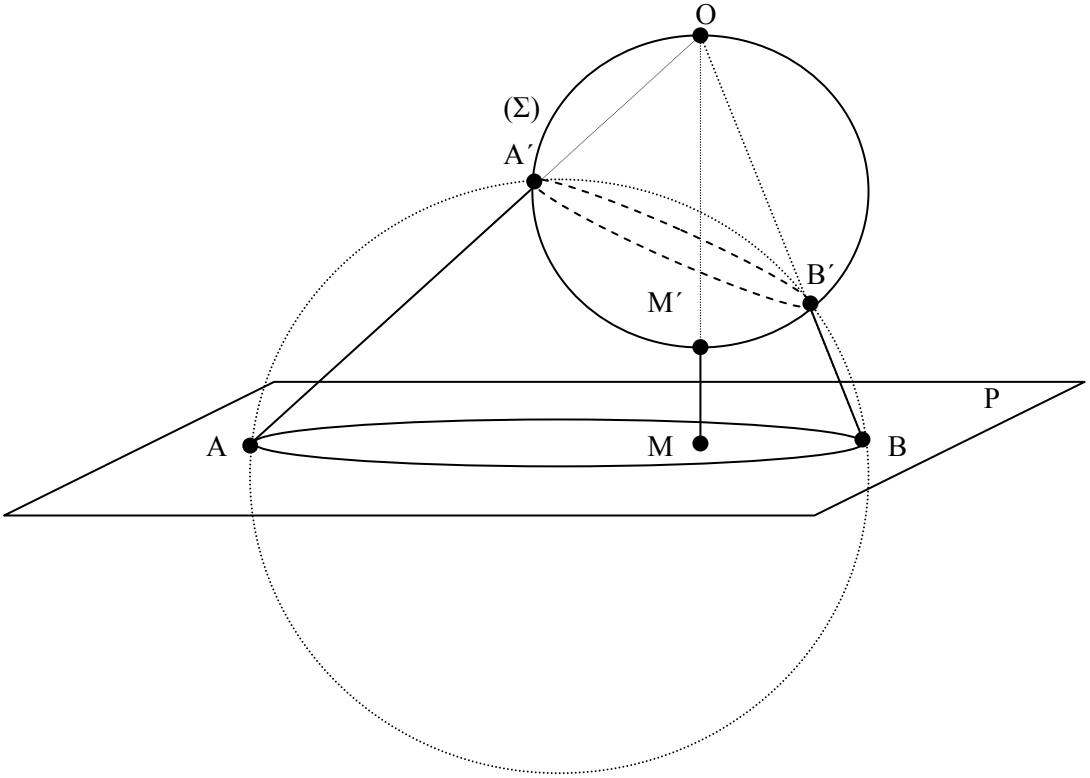
Λύση:

Έστω ότι οι κύκλοι (Α) και (Β) τέμνονται στα σημεία Δ, Ε.
Έστω ότι ο κύκλος που διχοτομεί την γωνία των (Α) και (Β) είναι ο κύκλος (Κ).

Δύο κύκλοι τεμνόμενοι σχηματίζουν ένα σύστημα το οποίο είναι συμμετρικό ως προς την ευθεία που είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους. Ο κύκλος (Κ) θα πρέπει υποχρεωτικά λόγω συμμετρίας να περνάει και από τα δύο σημεία τομής των κύκλων (Α) και (Β).
Ο κύκλος (Κ) διέρχεται από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής οπότε θα μετασχηματίζεται σε ευθεία η οποία θα διέρχεται από τα αντίστροφα σημεία Δ΄, Ε΄ των σημείων τομής Δ, Ε.
Τα σημεία αυτά είναι τα σημεία τομής των αντίστροφων κύκλων, των κύκλων (Α) και (Β). Άρα η αντιστροφή του κύκλου (Κ) είναι ο ριζικός άξονας των αντιστροφών των κύκλων (Α) και (Β). Θα συμβολίσουμε την αντιστροφή του κύκλου (Κ) με το σύμβολο (L) και τις αντιστροφές των κύκλων (Α) και (Β) με τα σύμβολα (Α΄) και (Β΄).
Επειδή η αντιστροφή διατηρεί τις γωνίες θα έχουμε ότι η ευθεία (L) σχηματίζει ίσες γωνίες με τους κύκλους (Α΄) και (Β΄). Δύο κύκλοι όμως που τέμνονται και σχηματίζουν ίσες γωνίες με την κοινή χορδή τους είναι ίσοι (συμμετρικοί ως προς την κοινή χορδή τους).

Πρόβλημα:

Το αντίστροφο σχήμα περιφέρειας ως προς κέντρο το οποίο δεν ανήκει στο επίπεδο της περιφέρειας είναι περιφέρεια.



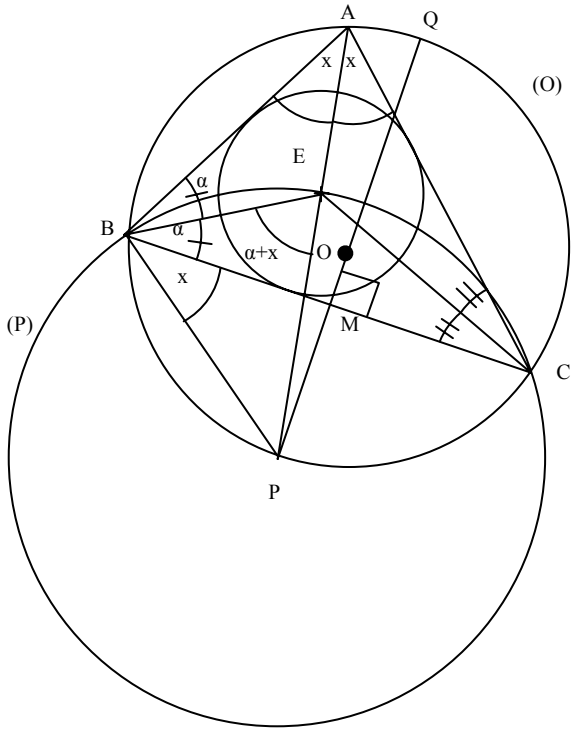
Λύση:

Έστω (ΑΒ) η περιφέρεια και (Ρ) το επίπεδο της.
Ο είναι το κέντρο αντιστροφής και δεν ανήκει στο επίπεδο Ρ.
Φέρνουμε την κάθετη ΟΜ από το σημείο Ο στο επίπεδο Ρ.
Έστω επίσης ότι το Μ΄ είναι το αντίστροφο σημείο του σημείου Μ.
Επειδή η σφαίρα διαμέτρου ΟΜ΄ διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής και από το αντίστροφο σημείο Μ΄ του σημείου Μ άρα θα είναι το αντίστροφο σχήμα του επιπέδου Ρ.
Ας συμβολίσουμε αυτήν την σφαίρα ως (Σ). Αφού η περιφέρεια ΑΒ βρίσκεται πάνω στο Ρ άρα η αντιστροφή κάθε σημείου της περιφέρειας αυτής θα είναι σημείο που θα ανήκει άνω στην σφαίρα (Σ). Αφού ΟΑ·ΟΑ΄=ΟΒ·ΟΒ΄ θα υπάρχει κύκλος που θα περιέχει τα σημεία Α,Β,Α΄,Β΄. Έστω (Φ) η σφαίρα που έχει μέγιστο κύκλο αυτόν τον κύκλο. Η περιφέρεια (ΑΒ) ανήκει σε αυτήν την σφαίρα. Επειδή ισχύει ΟΔ·ΟΔ΄=ΟΑ·ΟΑ΄ (όπου Δ, Δ΄ είναι δύο αντίστροφα σημεία με Δ σημείο της περιφέρειας (ΑΒ)) θα έχουμε ότι το αντίστροφο σχήμα

του κύκλου διαμέτρου (ΑΒ) θα βρίσκεται πάνω στην σφαίρα[4] (Φ). Άρα το αντίστροφο σχήμα του κύκλου (ΑΒ) είναι η τομή της σφαίρας (Σ) με την σφαίρα (Φ) οπότε είναι κύκλος.

Πρόβλημα:

Στο τρίγωνο ΑΒC οι διχοτόμοι των γωνιών Β και C τέμνονται στο σημείο Ε. Το εμβαδόν του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου BCE είναι ίσο με q. Αν δίνεται ότι BC=d τότε να βρείτε το εμβαδόν του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ΑΒC.



Φέρνουμε την μεσοκάθετη προς την BC η οποία τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒC στα σημεία P και Q. Το σημείο P είναι το σημείο τομής της μεσοκαθέτου που βρίσκεται στο αντικείμενο ημιεπίπεδο του ημιεπιπέδου (A,BC) . Θα δείξουμε ότι το P είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου BEC.
Για να δείξουμε κάτι τέτοιο αρκεί να δείξουμε ότι PB=PE=PC.
Οι γωνίες ∠PAC=∠PBC διότι είναι εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο.
Επίσης ∠BEP=∠ABE+∠BAE=α+x (εξωτερική στο τρίγωνο BEA)
Άρα το τρίγωνο PBE έχει δύο γωνίες ίσες: ∠PBE=∠PEB οπότε PE=PB.
Ομοίως αποδεικνύεται ότι PE=PC.
Ας υποθέσουμε ότι οι ακτίνες των κύκλων (O) και (P) είναι R και ρ αντίστοιχα.
Ας πάρουμε την αντιστροφή ως προς τον κύκλο (P).
Ο κύκλος (O) κατά την αντιστροφή αυτήν μετασχηματίζεται στην ευθεία BC. Αυτό συμβαίνει διότι ο κύκλος (O) διέρχεται από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής και από τα σημεία B,C τα οποία είναι σημεία του κύκλου αντιστροφής άρα μένουν αναλλοίωτα κατά την εν λόγω αντιστροφή.
Έχουμε ότι OB=OC=R,PQ=2R,OP=ρ.

[4] Έστω το επίπεδο (A,A΄,Δ). το επίπεδο αυτό τέμνει την σφαίρα Φ κατά έναν κύκλο C. Φέρνω την ΟΔ η οποία ανήκει στο επίπεδο (A,A΄,Δ) και τέμνει τον C στο Δ΄. ισχύει ΟΑ·ΟΑ΄=ΟΔ·ΟΔ΄ άρα το σημείο Δ΄ είναι το αντίστροφο του Δ. Έχουμε λοιπόν ότι το Δ΄ ανήκει στην σφαίρα Φ.

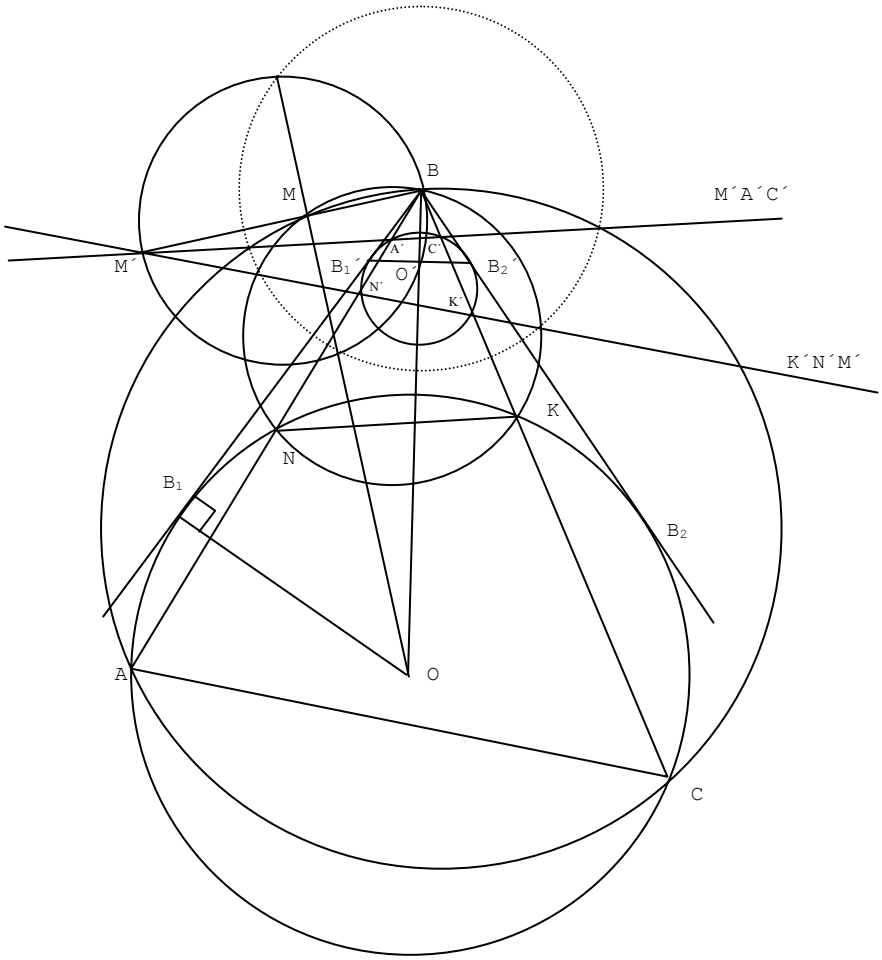
$$PM \cdot PQ=\rho^2 \Rightarrow PM=\frac{\rho^2}{PQ}=\frac{\rho^2}{2R}.$$

$$OM=OP-PM=R-\frac{\rho^2}{2R} \Rightarrow OM^2=\left(R-\frac{\rho^2}{2R}\right)^2=R^2-\rho^2+\frac{\rho^4}{4R^2}$$

$$\frac{d^2}{4}=BM^2=OB^2-OM^2=\rho^2-\frac{\rho^4}{4R^2}.$$ Οπότε: $R^2=\frac{\rho^4}{4\rho^2-d^2} \Rightarrow \pi R^2=\pi\frac{\rho^4}{4\rho^2-d^2}=\frac{(\pi\rho^2)^2}{4\pi\rho^2-\pi d^2}$

πρόβλημα (Διεθνής Ολυμπιάδα μαθηματικών 1985)

Ένας κύκλος με κέντρο το σημείο Ο διέρχεται από τα σημεία Α και C και τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑC του τριγώνου ΑBC στα σημεία Ν και Κ αντίστοιχα.
Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΑBC και ΚΒΝ τέμνονται σε δύο σημεία Β και Μ. Αποδείξτε ότι η γωνία $\angle OMB=90^o$



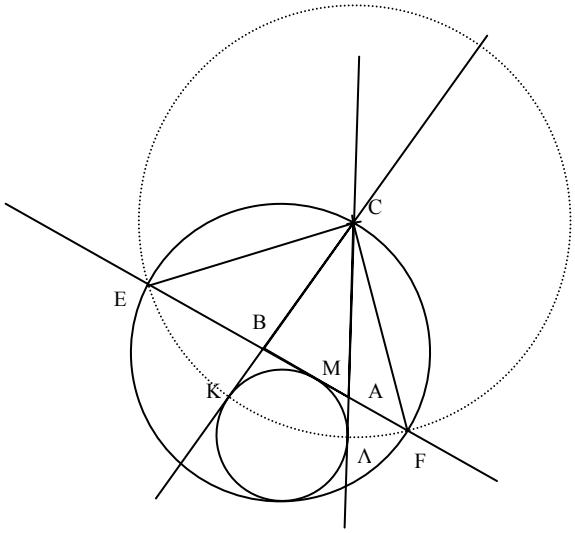
Λύση:

Αντιστρέφουμε με κέντρο το σημείο Β και ακτίνα τυχαία. Τα σημεία Α΄,C΄,M΄ τα οποία είναι τα αντίστροφα των Α,C,M αντίστοιχα μέσω της αντιστροφής αυτής είναι συνευθειακά και αυτό διότι τα σημεία Α,C,M ανήκουν σε κύκλο που διέρχεται από το κέντρο της αντιστροφής. Τα σημεία Κ΄,Ν΄,Μ΄ είναι τα αντίστροφα των σημείων Κ,Ν,Μ και είναι μεταξύ τους συνευθειακά διότι ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Κ,Ν,Μ διέρχεται επίσης από το κέντρο Β του κύκλου αντιστροφής. Θα προσπαθήσουμε τώρα να βρούμε το αντίστροφο σημείο του κέντρου Ο του κύκλου ACNK. Όπως ξέρουμε το κέντρο ενός κύκλου δεν απεικονίζεται στο κέντρο του αντίστροφου κύκλου του (δηλαδή η αντιστροφή δεν διατηρεί

τα κέντρα). Ας φέρουμε τις εφαπτόμενες BB_1 και BB_2 από το σημείο Β προς τον κύκλο ACNK. Τα σημεία B_1 και B_2 είναι τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων με τον κύκλο ACNK. Επειδή οι γωνίες $\angle BB_1O=90^o$ και $\angle BB_2O=90^o$ άρα τα σημεία B,B_1,O,B_2 είναι ομοκυκλικά σημεία. Οι ευθείες BB_1 και BB_2 είναι ευθείες που διέρχονται από το κέντρο Β του κύκλου αντιστροφής άρα οι εικόνες τους είναι οι ίδιες αυτές ευθείες. Το αντίστροφο λοιπόν του σημείου B_1 είναι ένα σημείο B'_1 το ποίο ανήκει στην ίδια την ευθεία BB_1. Ομοίως το αντίστροφο του σημείου B_2 είναι το σημείο B'_2 το οποίο ανήκει στην Β B_2. Η εικόνα του κύκλου (B,B_1,B_2) είναι ευθεία αφού ο κύκλος (B,B_1,B_2) διέρχεται από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής. Η ευθεία αυτή είναι η ευθεία B'_1 B'_2 και αυτό διότι τα B'_1,B'_2 είναι τα αντίστροφα σημεία των B_1,B_2. Τα σημεία B'_1,B'_2 είναι τα σημεία επαφής του κύκλου $A'C'N'K'$ με τις εφαπτόμενες ευθείες BB_1 και BB_2. Τα σημεία B_1,B_2 είναι τα σημεία επαφής του κύκλου ACNK με τις εφαπτόμενες ευθείες BB_1 και BB_2 άρα η ευθεία $B'_1B'_2$ καθώς και η ευθεία B_1B_2 είναι κάθετες στην ΒΟ. Η ΒΟ είναι ευθεία που διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής Β άρα μένει αναλλοίωτη με την αντιστροφή. Ας ονομάσουμε με το γράμμα Ο΄ το σημείο τομής της ΒΟ με την $B'_1B'_2$.Θα δείξουμε πως το σημείο Ο΄ είναι το αντίστροφο του Ο ως προς την αντιστροφή με κέντρο το Β. Τα τρίγωνα OBB_1 και BB'_1O' είναι όμοια άρα $BO'\cdot BO=BB_1\cdot BB'_1=P^2$ όπου P^2 είναι η δύναμη της αντιστροφής. Η εικόνα Μ΄ του σημείου Μ είναι η τομή των εικόνων των κύκλων ΜΑC και KNM. Η ευθεία ΜΟ απεικονίζεται σε κύκλο ο οποίος διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής Β. Ο κύκλος αυτός θα διέρχεται από τα σημεία Μ΄ και Ο΄. Το σημείο Μ΄ ανήκει[5] στην πολική ευθεία του σημείου Β ως προς τον κύκλο AC΄K΄N΄. Η πολική του σημείου Β ως προς αυτόν τον κύκλο είναι η ευθεία $B'_1B'_2$ (αυτό συμβαίνει διότι[6] το Β είναι το αντίστροφο σημείο του σημείου Ο΄ με κύκλο αντιστροφής τον κύκλο AC΄K΄N΄ ο οποίος είναι ο αντίστροφος του κύκλου ACKN ως προς την αρχική αντιστροφή (αυτήν με κέντρο το Β)). Έτσι έχουμε ότι η γωνία $\angle M'O'B=90^o$. Άρα η Μ΄Β είναι διάμετρος του κύκλου Μ΄C΄B οπότε η ευθεία ΟΜ είναι κάθετη στην διάμετρο Μ΄Β οπότε έχουμε το ζητούμενο.

Πρόβλημα:

Ας υποθέσουμε ότι p είναι η ημιπερίμετρος ενός τρίγωνου ABC. Τα σημεία E και F λαμβάνονται πάνω στην ευθεία AB έτσι ώστε CE=CF=p. Αποδείξτε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου EFC είναι εφαπτόμενος στον παρεγγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ABC ο οποίος αντιστοιχεί στην πλευρά AB.



[5] Ισχύει η εξής πρόταση: αν A΄C΄K΄N΄ είναι ένα εγγεγραμμένο τετράπλευρο τότε αν Β και Μ΄ είναι τα σημεία τομής των απέναντι πλευρών και Θ το σημείο τομής των διαγωνίων τότε η πολική ευθεία του σημείου Β είναι η ευθεία Μ΄Θ. Η απόδειξη είναι εύκολη αλλά μακροσκελής οπότε παραλείπεται..

[6] για την διευκόλυνσή του στην κατανόηση ο αναγνώστης θα πρέπει να θυμηθεί το πρόβλημα της εύρεσης του κέντρου Ψ΄ του αντίστροφου κύκλου (Ψ΄) ενός κύκλου Ψ ως προς την αντιστροφή (Ο) - σελίδα 374.

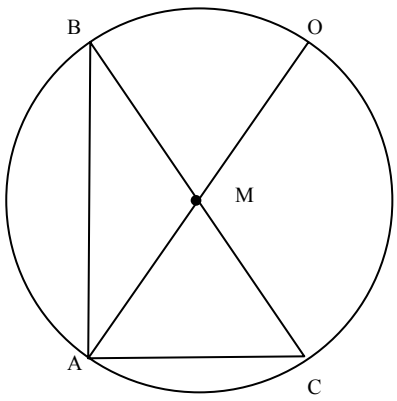
Λύση:

Η λύση αυτού του προβλήματος προκύπτει θεωρώντας την αντιστροφή ως προς τον κύκλο με κέντρο το σημείο C και ακτίνα p.
Κατά την αντιστροφή αυτή επειδή έχουμε CE=CF=p (p ακτίνα του κύκλου αντιστροφής) άρα τα σημεία E και F ανήκουν στον κύκλο αντιστροφής οπότε θα μείνουν αναλλοίωτα κατά την αντιστροφή.
Η αντιστροφή ενός κύκλου που διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής C είναι ευθεία. Επειδή τα σημεία E,F του κύκλου (E,C,F) απεικονίζονται στον εαυτό τους άρα η εικόνα του κύκλου (E,C,F) είναι η ευθεία AB.
Θα αποδείξουμε μια σχέση που ισχύει για όλους τους παρεγγεγραμμένους κύκλους: Το εφαπτόμενο τμήμα CK έχει μήκος ίσο με την ημιπερίμετρο του τριγώνου ABC.
(Για την απόδειξη δεν θα χρειαστεί να κατασκευάσουμε άλλο σχήμα).
CK=CΛ, CK=CB+BK=CB+BM, CΛ=CA+AΛ=CA+AM
Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε: CK+CΛ=CB+BM+CA+AM=CB+BA+CA=2p
CK=CΛ=x, 2x=CB+BM+CA+AM=CB+BA+CA=2p $\Rightarrow$ CK=CΛ=x=p
Οι CK και CΛ είναι λοιπόν (όπου K ,Λ είναι τα σημεία επαφής του παρεγγεγραμμένου κύκλου με τις πλευρές CB και CA) ακτίνες του κύκλου αντιστροφής και ταυτόχρονα εφαπτόμενες στον παρεγγεγραμμένο κύκλο άρα ο παρεγγεγραμμένος κύκλος είναι ορθογώνιος με τον κύκλο αντιστροφής. Ο παρεγγεγραμμένος κύκλος λοιπόν είναι αναλλοίωτος κατά την αντιστροφή. Η γωνίες διατηρούνται κατά την αντιστροφή άρα και οι σχέσεις επαφής. Αφού ο παρεγγεγραμμένος κύκλος που είναι εικόνα του εαυτού του με την αντιστροφή (C,p) είναι εφαπτόμενος στην AB, η οποία είναι εικόνα με την αντιστροφή (C,p) του κύκλου (C,E,F) άρα και ο κύκλος (C,E,F) εφάπτεται με τον παρεγγεγραμμένο κύκλο.

Πρόβλημα (πυθαγόρειο θεώρημα):
Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα τρίγωνο ABC με $\angle A=90^o$. Να αποδειχθεί ότι $AB^2+AC^2=BC^2$

Λύση:

Θα θεωρήσουμε την διάμετρο AO του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC.
Θα πάρουμε ως κέντρο αντιστροφής το σημείο O.
Το σχήμα ACOB είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο άρα AC=BO, AB=OC, BC=OA
Θα πάρουμε για δύναμη αντιστροφής το BC^2.
Ας αρχίσουμε τώρα να αντιστρέφουμε:
Ο περιγεγραμμένος κύκλος μετασχηματίζεται σε μια ευθεία που είναι κάθετη στην AO στο σημείο A.
Αυτό συμβαίνει διότι ο περιγεγραμμένος κύκλος διέρχεται από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής άρα γίνεται ευθεία, την οποία θα συμβολίζουμε με το γράμμα Λ.



Το σημείο Α ανήκει στον κύκλο της αντιστροφής αφού ΒC=OA άρα κατά την αντιστροφή μένει σταθερό. Η ευθεία στην οποία αντιστρέφεται ένας κύκλος που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής είναι κάθετη στην διάμετρο του κύκλου της οποίας το ένα άκρο είναι το κέντρο αντιστροφής. Δηλαδή στην δική μας περίπτωση η εικόνα Λ του κύκλου (A,B,C) είναι η ευθεία που είναι κάθετη στην διάμετρο OA αυτού του κύκλου στο σημείο Α (αφού το α είναι εικόνα του εαυτού του) οπότε η Λ είναι η εφαπτόμενη στον κύκλο (A,B,C) στο σημείο του Α.
Ας υποθέσουμε ότι Α΄,Β΄ είναι τα αντίστροφα σημεία των σημείων Α,Β. Τότε το τμήμα Α΄Β΄ έχει μήκος που δίνεται από τον τύπο:

$$A'B'=\frac{BC^2\cdot AB}{OB\cdot OA}=\frac{BC^2\cdot AB}{BC\cdot AC}=\frac{BC\cdot AB}{AC}$$

Ομοίως θα έχουμε ότι

$$A'C'=\frac{BC^2\cdot AC}{OC\cdot OA}=\frac{BC^2\cdot AC}{BC\cdot AB}=\frac{BC\cdot AC}{AB}$$

$$B'C'=\frac{BC^2\cdot BC}{OC\cdot OB}=\frac{BC^3}{AC\cdot AB}$$

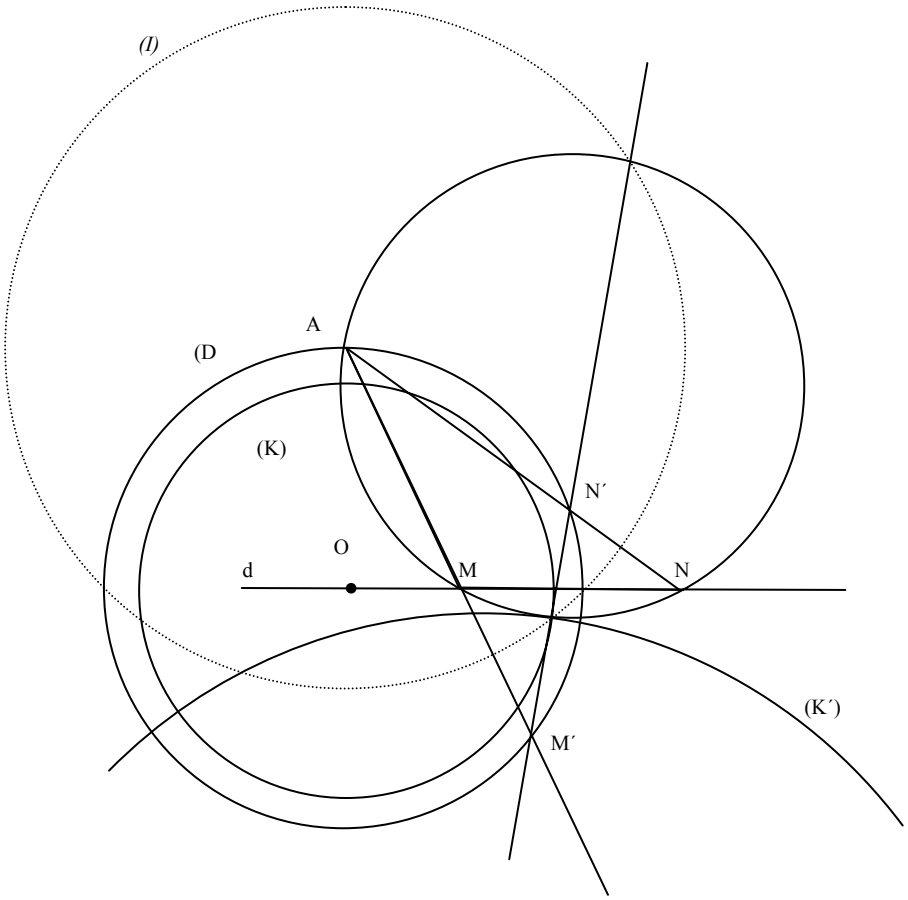
Τα σημεία Α,Β,C βρίσκονται πάνω στον κύκλο (A,B,C) οπότε οι εικόνες τους βρίσκονται πάνω στην εικόνα του κύκλου (A,B,C). Όμως ο κύκλος αυτός απεικονίζεται σε ευθεία άρα τα Α΄,Β΄,C΄είναι σημεία συνευθειακά. Το σημείο Β΄ βρίσκεται στην ημιευθεία OB. Το σημείο Β βρίσκεται στο ημιεπίπεδο Π_1=(OA,B) οπότε και η ημιευθεία OB βρίσκεται στο ημιεπίπεδο Π_1. Το σημείο Β΄ βρίσκεται πάνω στην εικόνα Λ του κύκλου (A,B,C) όμως βρίσκεται και στην ημιευθεία OB οπότε είναι το σημείο τομής της ευθείας Λ με την ημιευθεία OB. Αφού η ημιευθεία ανήκει στο ημιεπίπεδο Π_1 άρα και το Β΄ είναι σημείο του ημιεπιπέδου Π_1. Το τμήμα BC κόβεται στο εσωτερικό του σημείο M από την AO άρα τα B,C βρίσκονται σε αντικείμενα ημιεπίπεδα ως προς την ευθεία OA. Αφού το B ανήκει στο Π_1 το C ανήκει στο Π_2. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι και η εικόνα του C το σημείο δηλαδή C΄ ανήκει στο ημιεπίπεδο Π_2. Αφού το Β΄ είναι σημείο του Π_1 και το C΄ είναι σημείο του Π_2 άρα το Α ως σημείο του συνόρου OA θα είναι εσωτερικό του τμήματος Β΄C΄.
Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε: Α΄Β΄+Α΄C΄=Β΄C΄.
Οπότε θα έχουμε: $\frac{BC\cdot AB}{AC}+\frac{BC\cdot AC}{AB}=\frac{BC^3}{AC\cdot AB}$ και πολλαπλασιάζοντας με $\frac{AC\cdot AB}{BC}$ και τα δύο μέλη της θα έχουμε $AB^2+AC^2=BC^2$

Πρόβλημα:

Έστω Α είναι ένα σταθερό σημείο του επίπέδου και d είναι επίσης μια σταθερή ευθεία του επιπέδου. Το σημείο Α δεν ανήκει στην ευθεία d. Δύο σημεία M,N ανήκουν στην ευθεία d και μεταβάλλονται έτσι ώστε η γωνία ∠NAM να είναι σταθερή. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία M, N, A είναι πάντοτε εφαπτόμενος σε ένα σταθερό κύκλο.

Λύση:

Ας θεωρήσουμε αντιστροφή *(I)* με κέντρο το σημείο Α.



Η εικόνα της ευθείας d είναι ο κύκλος (D) με κέντρο το σημείο Ο. Ο κύκλος αυτός διέρχεται από το κέντρο της αντιστροφής Α. Η ευθεία ΑΜ έχει εικόνα την ίδια την ευθεία ΑΜ είναι ευθεία που διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής. Το ίδιο συμβαίνει και για την ευθεία ΑΝ. Το σημείο Ν΄ το οποίο είναι το αντίστροφο του σημείου Ν ανήκει και στην ευθεία ΑΝ (αφού η εικόνα αυτής της ευθείας είναι ο εαυτός της). Το σημείο Ν΄ ανήκει επίσης και στον κύκλο (Ο) αφού το Ν είναι σημείο της ευθείας d και η εικόνα της d είναι ο κύκλος (Ο). Το ίδιο συμβαίνει και για το σημείο Μ΄ (το οποίο είναι η εικόνα του σημείου Μ). Αφού η γωνία ∠ΝΑΜ είναι σταθερή το ίδιο θα συμβαίνει και για την γωνία ∠Ν΄ΑΜ΄. Η γωνία ∠Ν΄ΑΜ΄ είναι μια γωνία εγγεγραμμένη στον κύκλο (Ο). Αφού ∠Ν΄ΑΜ΄ είναι σταθερή άρα και το μήκος του αντιστοίχου τόξου της οπότε και το μήκος της αντίστοιχης χορδής Μ΄Ν΄.
Η κάθετη από το κέντρο Ο προς μια τέτοια χορδή είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα το οποίο έχει σταθερό μήκος άρα ο κύκλος (Κ) πού έχει κέντρο το Ο και ακτίνα αυτό το σταθερό μήκος είναι εφαπτόμενος προς την ευθεία Μ΄Ν΄. Αν αντιστρέψουμε τον κύκλο (Κ) θα πάρουμε έναν κύκλο (Κ΄) ο οποίος είναι εφαπτόμενος προς την εικόνα της ευθείας Μ΄Ν΄. Η ευθεία αυτή (η Μ΄Ν΄) έχει αντίστροφο τον κύκλο (Α,Ν,Μ). Ο κύκλος (Ο) είναι σταθερός άρα και τα μήκη των χορδών Ν΄Μ΄ οπότε και ο κύκλος (Κ) είναι σταθερός και κατά συνέπεια και η εικόνα του (Κ΄). Ο κύκλος (Κ) εφάπτεται προς την Μ΄Ν΄ άρα η εικόνα του (Κ΄) εφάπτεται στην εικόνα του Μ΄Ν΄ που είναι ο κύκλος (Α,Ν,Μ).

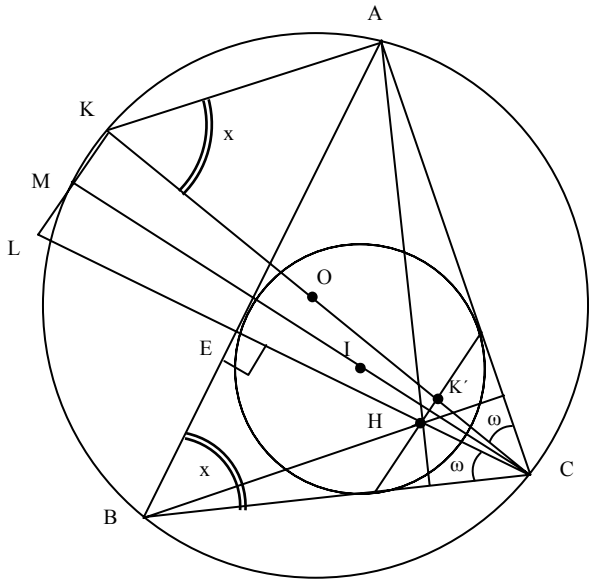
Πρόβλημα:

Έστω ότι έχουμε ένα τρίγωνο ΑΒC. Ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου αυτού εφάπτεται στις πλευρές ΒC,CΑ στα σημεία Q και R αντίστοιχα. Το ορθόκεντρο Η του τριγώνου ΑΒC βρίσκεται πάνω στο QR. Έστω Ι και Ο είναι το έκκεντρο και το περίκεντρο του ΑΒC και Ν είναι το κοινό σημείο του ΑΒ και του παρεγγεγραμμένου κύκλου C στην πλευρά ΑΒ. Έστω I_α ,I_b, I_c είναι τα κέντρα των παρεγγεγραμμένων κύκλων του τριγώνου ΑΒC.
Το I_α , είναι το κέντρο του παρεγγεγραμμένου κύκλου που εφάπτεται στην πλευρά ΒC, το I_b είναι το κέντρο του παρεγγεγραμμένου κύκλου που εφάπτεται στην πλευρά ΑC και το I_c είναι το κέντρο του παρεγγεγραμμένου κύκλου που εφάπτεται στην πλευρά ΑΒ.

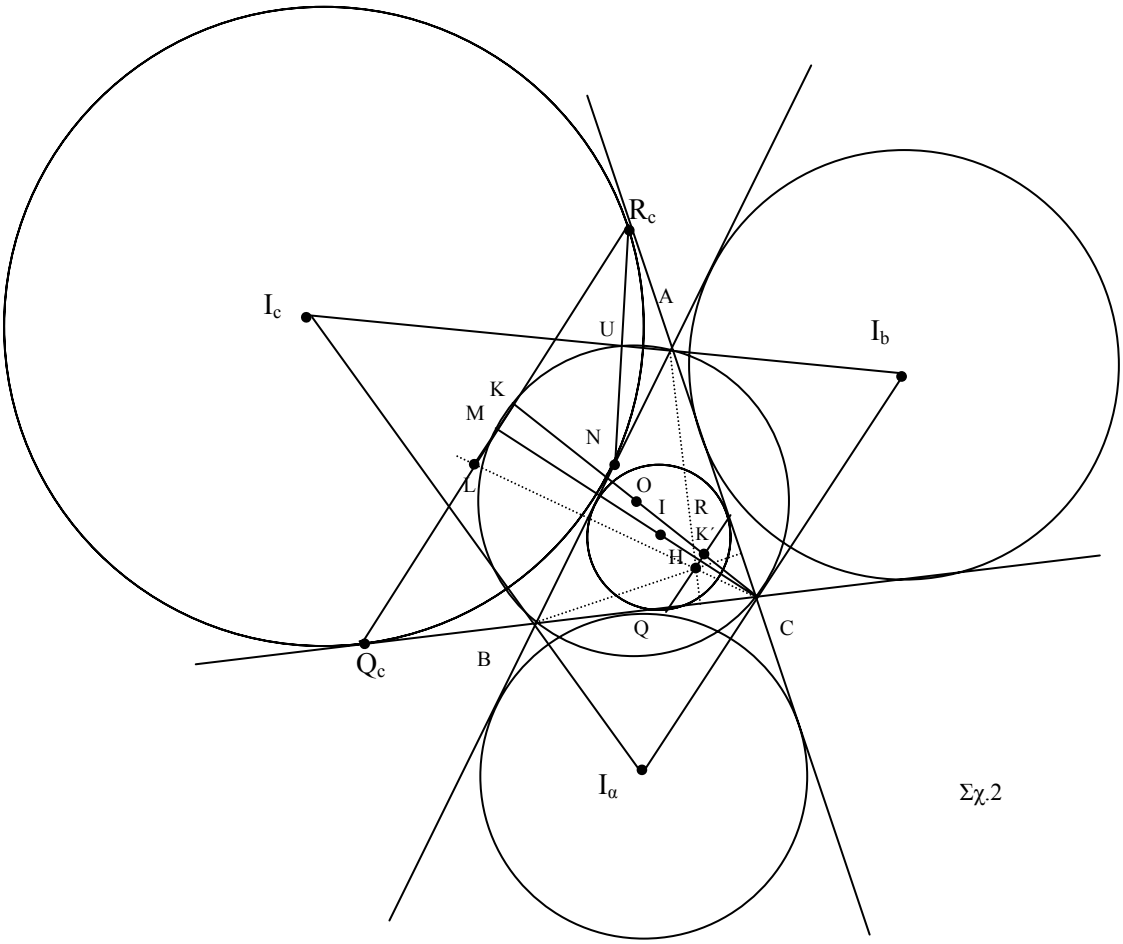
Έστω Q_c,R_c είναι τα σημεία επαφής του παρεγγεγραμμένου κύκλου C με τις ευθείες των πλευρών CB και AC. Να αποδειχθεί ότι ο κύκλος των εννέα σημείων του τριγώνου Q_c,R_cN καθώς και ο κύκλος των εννέα σημείων του τριγώνου $I_\alpha I_b$I ταυτίζονται με τον περιγεγραμμένο κύκλο O του τριγώνου ABC.
Επίσης να αποδειχθεί ότι τα σημεία I,O,N είναι συγγραμμικά.

Λύση:

Ο παρεγγεγραμμένος κύκλος (I_c) εφάπτεται στις BC ,CA, AB στα σημεία Q_c, R_c και N αντίστοιχα. Τα εφαπτόμενα τμήματα CR και CQ από την κορυφή C προς τον εγγεγραμμένο κύκλο (I) είναι μεταξύ τους ίσα άρα το τρίγωνο CQR είναι ισοσκελές. Η CI είναι διχοτόμος (αφού το I είναι το έγκεντρο του τριγώνου ABC) οπότε η CI είναι κάθετη προς την QR (ως διχοτόμος προς την βάση ισοσκελούς τριγώνου). Η Q_cR_c είναι κάθετη προς την CI για παρόμοιους λόγους (αφού το τρίγωνο CQ_cR_c είναι ισοσκελές και CQ_c και CR_c είναι εφαπτόμενα τμήματα προς τον κύκλο I_c από το σημείο C ενώ η CI είναι διχοτόμος της γωνίας ∠C). Οι CI και CO τέμνουν ξανά τον περιγεγραμμένο κύκλο στα σημεία M,K αντίστοιχα.
Η CK είναι διάμετρος του κύκλου (O) οπότε η γωνία $\angle KMC=90^o$ (εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο) οπότε KM⊥CM. Το σημείο K΄ είναι το σημείο τομής της CK με την QR. Το CH ύψος τέμνει την KM στο σημείο L (το σχήμα 1 που είναι μεγέθυνση του σχήματος 2 δίνει πιο καθαρά την κατάσταση). Οι γωνίες ∠AKC =∠ABC ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο. Οι γωνίες $\angle KAC=\angle BEC=90^o$ και αυτό διότι για την ∠KAC έχουμε ότι είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο ενώ για την ∠BEC έχουμε ότι το CE είναι ύψος του τριγώνου ABC. Οπότε και οι γωνίες ∠BCE και ∠KCA είναι μεταξύ τους ίσες. Οι γωνίες ∠ICA=∠ICB αφού η CI είναι διχοτόμος οπότε και οι γωνίες ∠LCM=∠MCK (ως διαφορές ίσων γωνιών). Το τρίγωνο λοιπόν KCM είναι ισοσκελές αφού το CM είναι ύψος (διότι $\angle KMC=90^o$) και διχοτόμος (αφού ∠LCM=∠MCK). Οπότε το M είναι το μέσο της KL. OI κύκλοι (I_c) και (I) είναι ομοιόθετοι ως προς το σημείο C (αφού οι CR_cκαι CQ_c είναι κοινές τους εφαπτόμενες.). Οι χορδές R_cQ_c και QR των κύκλων αυτών είναι παράλληλες οπότε είναι ομοιόθετα τμήματα ως προς το C.



Σχ.1



Σχ.2

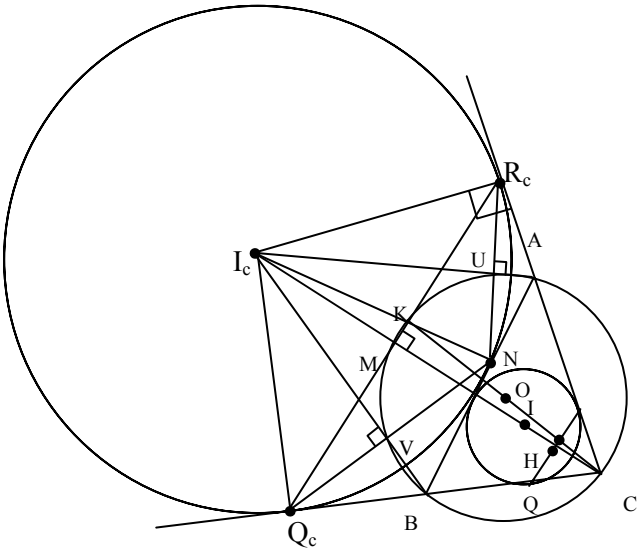
Τα τμήματα HK΄ και LK είναι κάθετα στην CI (αυτό διότι για το μεν HK΄ έχουμε ότι ανήκει στο QR το οποίο είναι κάθετο στην CI και για το δε KL έχουμε ότι $\angle KMC=90^o$ οπότε η KL είναι κάθετη στην IC). Οπότε HK΄ και LK είναι μεταξύ τους παράλληλα άρα ομοιόθετα ως προς το σημείο C. Τα R_cQ_c και QR είναι ομοιόθετα τμήματα ως προς το C και το HK΄ ανήκει στο QR άρα και το ομοιόθετο LK του HK΄ θα ανήκει στο R_cQ_c. Το MC είναι κάθετο προς το τμήμα R_cQ_c που είναι βάση του ισοσκελούς τριγώνου C R_cQ_c άρα το M είναι μέσο του R_cQ_c.

Αντιστρέφουμε τώρα ως προς τον κύκλου (I_c).

Προεκτείνουμε την CI (είναι CI≡CM). Η CI θα περάσει από το σημείο I_c διότι είναι διχοτόμος της $\angle R_cCQ_c$ άρα κάθε σημείο που ισαπέχει από της πλευρές της ανήκει σε αυτήν. Τα σημεία R_c και Q_c είναι τα σημεία επαφής του κύκλου (I_c) με τις (εφαπτόμενες σε αυτόν τον κύκλο) πλευρές της γωνίας $\angle R_cCQ_c$. Είναι $I_c R_c = I_c Q_c$ (ως ακτίνες) άρα το I_c ανήκει στην CI. Από την ομοιότητα των τριγώνων $I_c R_cM$ και $I_c R_cC$ (ορθογώνια με κοινή γωνία την $\angle I_c$) θα έχουμε $(I_c R_c)^2= I_cM\cdot I_cC$ άρα τα σημεία M,C είναι αντίστροφα ως προς τον κύκλο (I_c).

Προχωρούμε για να βρούμε το αντίστροφο σημείου του σημείου A (σχήμα 3). Οι AR_c και AN είναι οι εφαπτόμενες του κύκλου (I_c) από το σημείο A οπότε η AI_c είναι η διχοτόμος της γωνίας $\angle A$, η R_cN είναι κάθετη στην AI_c και το U είναι το μέσο του τμήματος R_cN. Τα ορθογώνια τρίγωνα $I_c R_cA$ και $I_c R_cU$ είναι όμοια (ορθογώνια με γωνία $\angle R_cI_cU$ κοινή) οπότε $(I_c R_c)^2 = I_c A\cdot I_cU$ άρα τα A,U είναι αντίστροφα ως προς τον κύκλο (I_c). Αν σκεφτούμε με ανάλογο τρόπο έχουμε ότι: οι BQ_c και BN είναι οι εφαπτόμενες του κύκλου (I_c) από το σημείο B οπότε η BI_c είναι η διχοτόμος της γωνίας $\angle B$, η Q_cN είναι κάθετη στην BI_c και το V είναι το μέσο του τμήματος Q_cN. Τα ορθογώνια τρίγωνα $I_c Q_cB$ και $I_c Q_cV$ είναι όμοια (ορθογώνια με γωνία $\angle Q_cI_cV$ κοινή) οπότε $(I_c Q_c)^2 = I_c B\cdot I_cV$ άρα τα B,V είναι αντίστροφα ως προς τον κύκλο (I_c).

Ο περιγεγραμμένος κύκλος (Ο) αντιστρέφεται λοιπόν σον κύκλο που διέρχεται από τα μέσα M,V,U των R_cQ_c , NQ_c , R_cQ_c . Ο κύκλος που διέρχεται από τα μέσα των πλευρών R_cQ_c , NQ_c , R_cQ_c του τριγώνου R_cQ_cN είναι ως γνωστόν ο κύκλος των εννέα σημείων του τριγώνου αυτού.



Σχ.3

Όταν αντιστρέφουμε ως προς έναν κύκλο (I_c) έναν άλλο κύκλο (Ο) τότε, αν ο κύκλος (Ο) έχει κοινά σημεία με τον κύκλο αντιστροφής (I_c) η εικόνα του (Ο΄), του κύκλου (Ο), θα διέρχεται και αυτή από τα κοινά σημεία των κύκλων (I_c) και (Ο) (αφού τα σημεία του κύκλου αντιστροφής αντιστρέφονται στον εαυτό τους). Από την άλλη μεριά αν ο κύκλος (Ο) είναι εσωτερικός του κύκλου αντιστροφής τότε ο αντίστροφος κύκλος (Ο΄) θα είναι εξωτερικός και αν ο (Ο) είναι εξωτερικός τότε ο (Ο΄) θα είναι εσωτερικός. Άρα αν ένας κύκλος και η εικόνα του έχουν κοινά σημεία αυτά θα βρίσκονται υποχρεωτικά πάνω στον κύκλο αντιστροφής (φυσικά αυτό συμβαίνει όταν κύκλος και εικόνα έχουν και μη κοινά σημεία, γιατί δεν πρέπει να ξεχνάμε την περίπτωση του κύκλου που είναι ορθογώνιος με τον κύκλο της αντιστροφής, οπότε ταυτίζεται με την εικόνα του).

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα έχουμε ότι το σημείο M ανήκει πάνω στον κύκλο (Ο) αλλά και πάνω στην εικόνα του που είναι ο κύκλος (M,U,V). Το σημείο M όμως δεν είναι σημείο του κύκλου αντιστροφής άρα ο κύκλος (Ο) και ο κύκλος (M,V,U) ταυτίζονται.

Αν γυρίσουμε λίγο στο σχήμα 2 παρατηρούμε ότι IC και CI_b,CI_α είναι η εσωτερική και οι εξωτερικές διχοτόμοι της γωνίας $\angle C$. Οπότε οι CI_b και CI_α είναι αντικείμενες ημιευθείες και η IC είναι κάθετη σε αυτές. Η CI διέρχεται από το I_c άρα το I_cC είναι ύψος του τριγώνου $I_cI_bI_\alpha$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι και $I_\alpha A$,I_bB είναι ύψη του τριγώνου $I_cI_bI_\alpha$. Άρα ο κύκλος (A,B,C) είναι ο κύκλος των εννέα σημείων του τριγώνου $I_cI_bI_\alpha$.

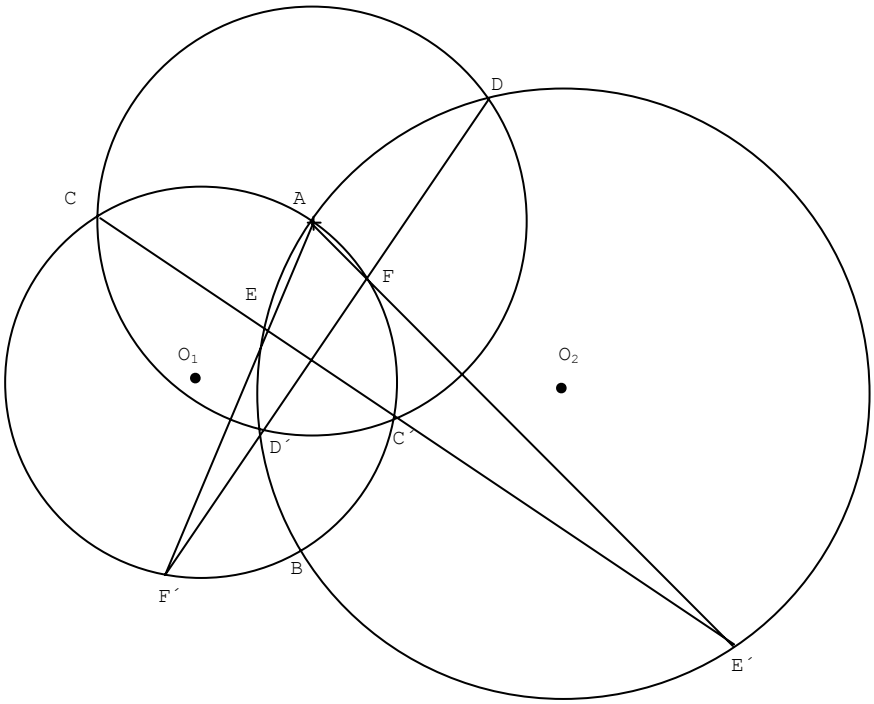
Η I_cI_b είναι η μεσοκάθετος του R_cN. Επίσης η II_α είναι κάθετη προς την I_cI_b (εσωτερική και εξωτερική διχοτόμος της γωνίας $\angle A$). Οι R_cN και II_α είναι μεταξύ τους παράλληλες ως κάθετες στην ίδια ευθεία. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι και η Q_cN είναι παράλληλη με την II_α.

Τα δύο αυτά τρίγωνα R_cQ_cN και II_bI_α έχουν τον ίδιο κύκλο εννέα σημείων άρα είναι μεταξύ τους ίσα διότι το καθένα από αυτά τα δύο είναι όμοιο με λόγο ½ με το τρίγωνο που συνδέει τα μέσα των πλευρών του: Τα μέσα των πλευρών των δύο αυτών τριγώνων R_cQ_cN και II_bI_α βρίσκονται στον ίδιο κύκλο (τον κοινό κύκλο των εννέα σημείων των R_cQ_cN και II_bI_α). Αφού τα δύο αυτά τρίγωνα είναι όμοια άρα και τα τρίγωνα που έχουν κορυφές τα μέσα των πλευρών των δύο αυτών τριγώνων (των R_cQ_cN και II_bI_α) είναι μεταξύ τους όμοια, και έτσι έχουν και αυτά τις γωνίες τους μία προς μια ίσες. Επειδή όμως είναι και τρίγωνα που έχουν τις κορυφές τους πάνω στον ίδιο κύκλο άρα οι πλευρές τους είναι μια προς μια ίσες (ανά δύο) αφού είναι χορδές που αντιστοιχούν σε τόξα ίσων εγγεγραμμένων γωνιών του

περιγεγραμμένου κύκλου. Αφού τα τρίγωνα R_cQ_cN και II_bI_α είναι όμοια με αυτά τα δύο τρίγωνα με λόγο 1/2 άρα και αυτά είναι μεταξύ τους ίσα (άρα και ομοιόθετα με λόγο 1). Τα μέσα των παραλλήλων πλευρών τους είναι ομοιόθετα μεταξύ τους σημεία άρα και ο κύκλος που ορίζεται από τα μέσα των πλευρών του ενός από τα τρίγωνα R_cQ_cN και II_bI_α είναι ομοιόθετος με το κύκλο που ορίζουν τα μέσα των πλευρών του άλλου τριγώνου με κέντρο ομοιοθεσίας ίδιο με το κέντρο των R_cQ_cN και II_bI_α. Οι δύο κύκλοι είναι ταυτόσημοι (είναι ο κοινός κύκλος των 9 σημείων των τριγώνων R_cQ_cN και II_bI_α. Όμως δύο ομόκεντροι κύκλοι είναι πάντα ομοιόθετοι με μοναδικό κέντρο ομοιοθεσίας το κέντρο τους. Άρα το κέντρο του κύκλου των εννέα σημείων είναι κέντρο ομοιοθεσίας των τριγώνων R_cQ_cN και II_bI_α. Άρα το κέντρο Ο του κύκλου των εννέα σημείων βρίσκεται πάνω στο τμήμα IN (I,N είναι ομοιόθετα σημεία των R_cQ_cN και II_bI_α). Επειδή ο λόγος ομοιοθεσίας των R_cQ_cN και II_bI_α είναι 1 άρα το Ο είναι και μέσο του IN.

Πρόβλημα:

Δίνονται δύο κύκλοι (O_1) και (O_2) που τέμνονται στα σημεία Α και Β. Με κέντρο το σημείο Α γράφουμε ένα κύκλο (Α) ο οποίος τέμνει το κύκλο (O_1) στα σημεία C, C΄ και τον κύκλο (O_2) στα σημεία D, D΄. Οι ευθείες CC΄ και DD΄ τέμνουν αντιστοίχως του κύκλους (O_1) και (O_2) στα ζεύγη σημείων E,E΄ και F,F΄ (Τα E,F βρίσκονται κοντά στο Α). Αποδείξτε ότι οι ευθείες EF΄, E΄F διέρχονται από το σημείο Α.



Λύση:

Ας αντιστρέψουμε με κύκλο αντιστροφής τον κύκλο (Α). Η περιφέρεια O_1 μετασχηματίζεται στην ευθεία CC΄ και η περιφέρεια O_2 μετασχηματίζεται στην ευθεία DD΄ και αντίστροφα. Τότε όμως η αντιστροφή αυτή στέλνει τα σημεία τομής E,E΄ της περιφέρειας O_2 και της ευθείας CC΄ στα σημεία τομής της ευθείας DD΄και της περιφέρειας O_1. Ας το δούμε λίγο πιο αναλυτικά: Έστω E είναι το σημείο τομής της περιφέρειας O_2 με την ευθεία CC΄ και ας υποθέσουμε ότι είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου αντιστροφής (Α) άρα το αντίστροφό του σημείο θα είναι σημείο τομής των εικόνων των O_2 και CC΄. Όμως η εικόνα της περιφέρειας O_2 είναι η ευθεία DD΄ ενώ η εικόνα της ευθείας CC΄ είναι ο κύκλος O_1. Οι τομές των DD΄ και O_1 είναι τα σημεία F και F΄. Αφού το F΄είναι εξωτερικό του κύκλου αντιστροφής άρα αυτό το σημείο θα είναι τελικά η εικόνα του E (αφού αν ένα σημείο είναι εξωτερικό του

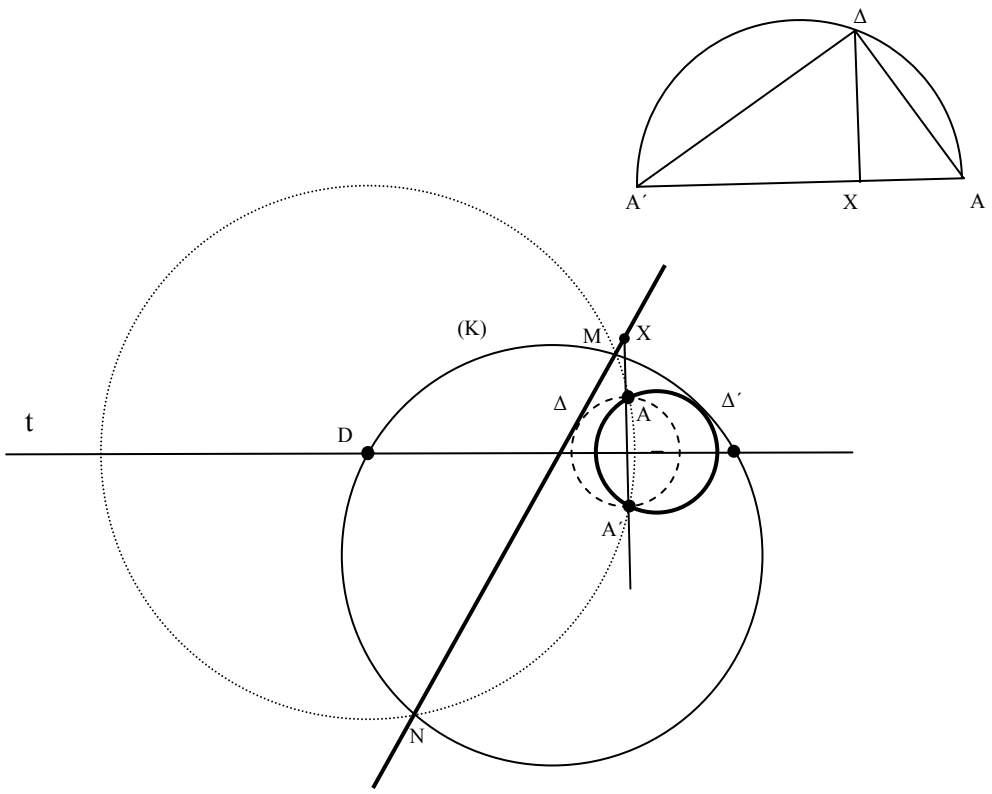
κύκλου αντιστροφής το αντίστροφό του θα είναι εσωτερικό και αντίστροφα). Όμως δυο αντίστροφα μεταξύ τους σημεία ανήκουν πάντα σε μια ημιευθεία με αρχή το κέντρο του κύκλου αντιστροφής. Άρα έχουμε το ζητούμενο. Ομοίως προκύπτει ότι και τα σημεία F,E΄ ορίζουν ευθεία που διέρχεται από το κέντρο Α του κύκλου αντιστροφής

Πρόβλημα:

Δίνεται ένας κύκλος (Κ), ένα σημείο Α εσωτερικό του κύκλου και μια ευθεία t, που τέμνει τον κύκλο και η οποία δεν διέρχεται από το Α. Να βρεθεί ο κύκλος του οποίου το κέντρο ανήκει στην ευθεία t, διέρχεται από το σημείο Α και εφάπτεται στον κύκλο (Κ).

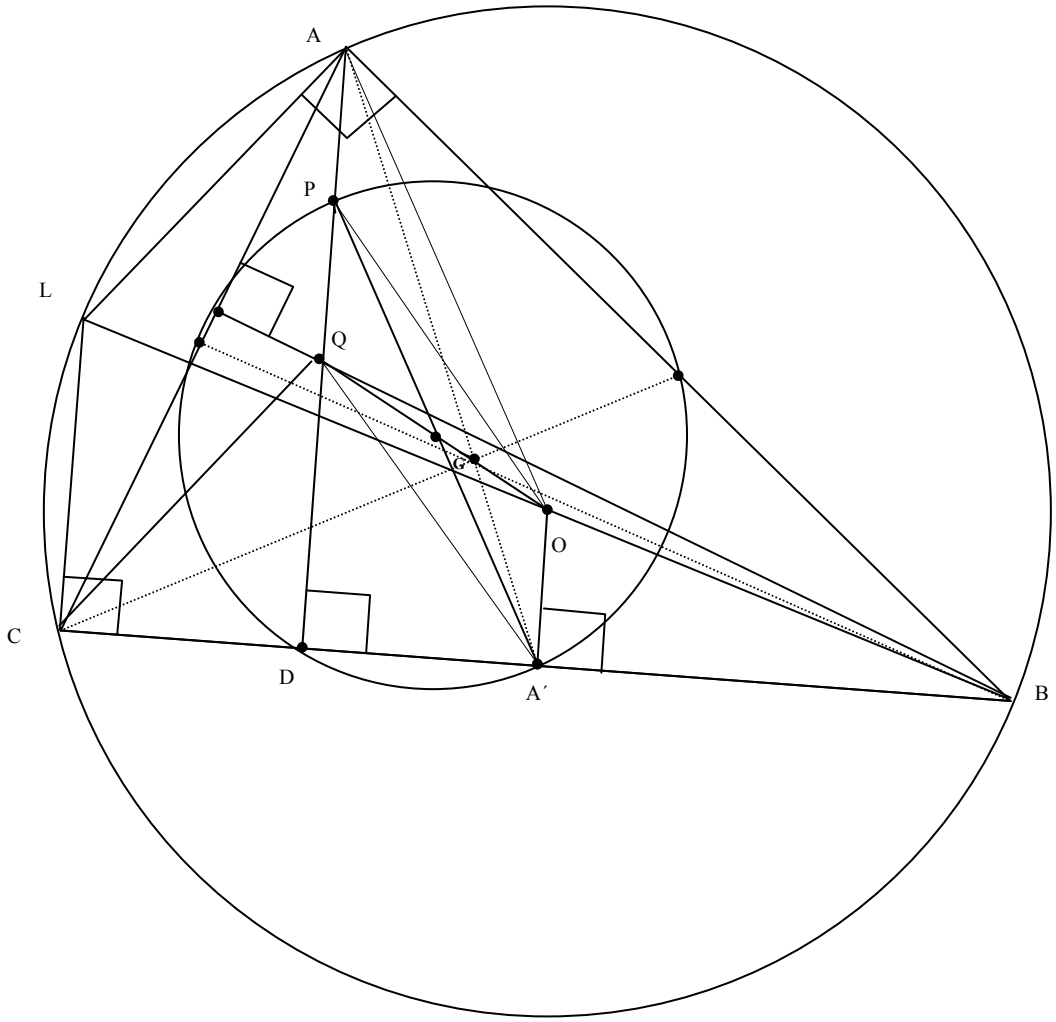
Λύση:

Η ανάκλαση του σημείου Α ως προς την ευθεία t είναι το σημείο Α΄. Θεωρούμε το σημείο D που είναι το σημείο τομής της ευθείας t με τον κύκλο (Κ). Γράφουμε τον κύκλο με κέντρο το σημείο D και ακτίνα το τμήμα DA. Αντιστρέφουμε με κύκλο αντιστροφής τον κύκλο (D,DA). Ο κύκλος (Κ) αντιστρέφεται στην ευθεία ΜΝ που διέρχεται από τα κοινά σημεία των κύκλων (D,DA) και (Κ). Θα κατασκευάσουμε τον κύκλο που εφάπτεται στην ευθεία ΜΝ και διέρχεται από τα σημεία Α,Α΄. Η κατασκευή αυτή είναι εύκολο να γίνει: Ας υποθέσουμε ότι ο κύκλος αυτός κατασκευάστηκε και είναι ο (Δ,Α,Α΄) οποίος εφάπτεται στην ευθεία ΜΝ στο σημείο Δ. Φέρνουμε την ευθεία ΑΑ΄ η οποία τέμνει την ΜΝ στο σημείο Χ. Γνωρίζουμε ότι $ΧΔ^2$=ΧΑ·ΧΑ΄ (δύναμη σημείου ως προς κύκλο). Για να βρούμε λοιπόν την θέση του σημείου Δ κατασκευάζουμε τον γεωμετρικό μέσο των τμημάτων ΑΧ και Ά΄Χ. [Θεωρούμε το τμήμα ΑΧ+ΧΑ΄=ΑΑ΄ και με διάμετρο αυτό το τμήμα κατασκευάζουμε ημικύκλιο $\overset{\frown}{AA'}$. Από το σημείο Χ φέρνουμε την κάθετη η οποία τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο Δ το ΧΔ είναι ο γεωμετρικός μέσος των ΧΑ,ΧΑ΄. Αυτό προκύπτει πολύ εύκολα από την ομοιότητα των τριγώνων ΔΧΑ΄ και ΧΔΑ.]



Αφού βρούμε τον κύκλο (Δ,Α,Α΄) τον αντιστρέφουμε με κύκλο αντιστροφής τον κύκλο (D,DA) οπότε ο κύκλος που προκύπτει είναι ο ζητούμενος κύκλος ο οποίος εφάπτεται στον

κύκλο (K) διέρχεται από το σημείο A και το σημείο A΄ και έτσι το κέντρο του βρίσκεται στην μεσοκάθετο του A A΄ που είναι η ευθεία t .



Πριν διατυπώσουμε το επόμενο πρόβλημα θα αναφερθούμε στην ευθεία του Euler (Euler line).
Η ευθεία αυτή είναι μια ευθεία που υπάρχει για κάθε τρίγωνο το οποίο δεν είναι ισόπλευρο και έχει πολύ σημαντικές ιδιότητες.
Η ευθεία του Euler διέρχεται από το ορθόκεντρο, το περίκεντρο, το βαρύκεντρο και το κέντρο του κύκλου των 9 σημείων του τριγώνου.
Θα προχωρήσουμε στην απόδειξη των όσων διατυπώσαμε για την ευθεία του Euler, διότι η ευθεία αυτή εμφανίζεται πολύ συχνά σε ασκήσεις που λύνονται με την βοήθεια της αντιστροφής.
Ας θεωρήσουμε ότι Q είναι το σημείο που το ύψος AD συναντάει την OG η οποία συνδέει το περίκεντρο με το βαρύκεντρο του τριγώνου ABC.
Τα τρίγωνα AQG και OGA΄ είναι όμοια άρα

$$\frac{GQ}{OG}=\frac{AG}{GA'}=\frac{2}{1}\Rightarrow GQ=2OG .$$

Αν πάρουμε τώρα και τα άλλα ύψη και επαναλαμβάνοντας την διαδικασία βρίσκουμε ένα σημείο Q΄ και ένα σημείο Q΄΄ τέτοια ώστε $GQ'=2OG$ και $GQ''=2OG$ με τα G,O,Q,Q΄,Q΄΄

συνευθειακά οπότε δύο τουλάχιστον από τα Q,Q΄,Q΄΄ ταυτίζονται. Έστω λοιπόν ότι Q≡Q΄ οπότε το Q είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου.

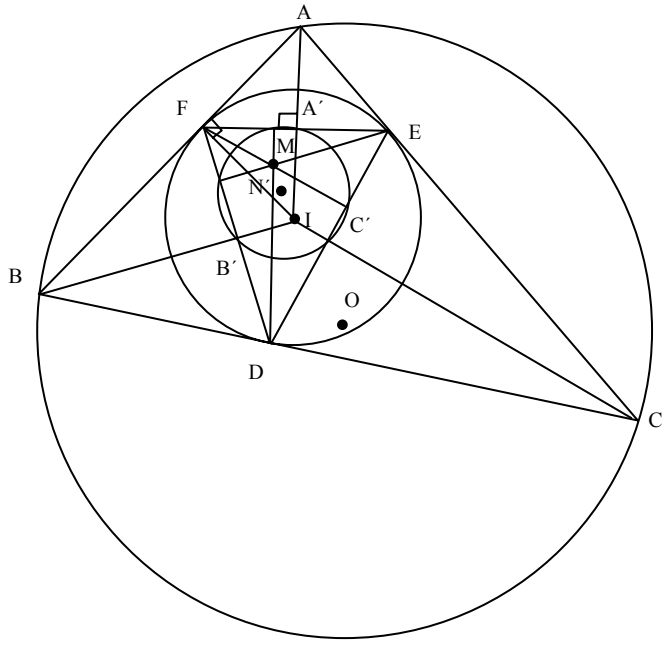
Η LOB είναι διάμετρος. Επίσης ισχύει ότι $OA' \parallel CL$, $OA'=\frac{1}{2}CL$, $CQ\perp AB$ (ύψος) και $LA\perp AB$ ($\angle LAB$ εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο) άρα το LCQA είναι παραλληλόγραμμο, οπότε LC=AQ, άρα AQ=2OA΄, οπότε OA΄=OP=PQ οπότε και το APA΄O είναι παραλληλόγραμμο καθώς επίσης και το PQA΄O. Από το παραλληλόγραμμο APA΄O έχουμε ότι η διάμετρος PA΄ (είναι διάμετρος αφού $\angle PDA'=90^0$) του κύκλου του Euler είναι ίση με την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου και από το παραλληλόγραμμο PQA΄O προκύπτει ότι η διάμετρος PA΄ και η QO (όπου Q ορθόκεντρο και O περίκεντρο) διχοτομούνται.

Πρόβλημα:

Ας υποθέσουμε ότι I είναι το έγκεντρο ενός τριγώνου ABC το οποίο δεν είναι ισόπλευρο και D,E,F είναι τα σημεία επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου με τις πλευρές BC,CA,AB αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι το ορθόκεντρο του τριγώνου DEF βρίσκεται πάνω στην ευθεία OI όπου O είναι το περίκεντρο του τριγώνου ABC.

Λύση:

Θα αποδείξουμε ότι η ευθεία του Euler του τριγώνου DEF διέρχεται από το O.
Θα χρησιμοποιήσουμε αντιστροφή ως προς τον κύκλο (I) (εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ABC).
Το A΄ είναι μέσο του τμήματος FE διότι το AFE είναι ισοσκελές (AF=AE ως εφαπτόμενα τμήματα) και η AA΄ είναι διχοτόμος της γωνίας A οπότε είναι και διάμεσος .
Το αντίστροφο σημείο του σημείου A είναι το σημείο τομής A΄ των AI και EF.
Αυτό συμβαίνει διότι το τρίγωνο AFI είναι ορθογώνιο (με $AF\perp FI$), οπότε (από την ομοιότητα των τριγώνων FIA΄ και FIA) θα ισχύει ότι $FI^2=IA'\cdot IA$.
Το ίδιο γίνεται και με το αντίστροφο του B που είναι το B΄ (σημείο τομής των BI και DF).
Το αντίστροφο του C είναι το μέσο C΄ του DE.



Παρατηρούμε λοιπόν ότι ο αντίστροφος κύκλος του κύκλου ABC με την αντιστροφή ως προς τον κύκλο (I) είναι ο κύκλος που διέρχεται από τα μέσα Α΄,Β΄,C΄των πλευρών του τριγώνου EFD. Ο κύκλος όμως που διέρχεται από τα μέσα των πλευρών του τριγώνου EFD είναι ο κύκλος των εννέα σημείων του τριγώνου EFD. Επειδή οι κύκλοι (A,B,C) και (Α΄,Β΄,C΄) είναι μεταξύ τους αντίστροφοι άρα θα είναι ομοιόθετοι με κέντρο ομοιοθεσίας το κέντρο της αντιστροφής οπότε τα κέντρα N΄ και O των κύκλων (A,B,C) και (Α΄,Β΄,C΄) καθώς και το κέντρο I του κύκλου αντιστροφής (I) είναι συγγραμμικά. Η ευθεία του Euler ενός τριγώνου διέρχεται από το ορθόκεντρο το περίκεντρο το βαρύκεντρο και το κέντρο του κύκλου των 9 σημείων του τριγώνου. Οπότε για το τρίγωνο EFD έχουμε ότι η αντίστοιχη ευθεία του Euler διέρχεται από το ορθόκεντρο του M, από το περίκεντρο του I και από το N΄ που είναι το κέντρο του κύκλου των εννέα σημείων του τριγώνου. Η ευθεία λοιπόν του Euler είναι η IN΄. Η ευθεία αυτή περιέχει και το M και το O οπότε αποδείξαμε το ζητούμενο.

Πρόβλημα:

Να αποδειχθεί ότι ο απολλώνιος κύκλος που εφάπτεται εσωτερικά στους τρεις παρεγγεγραμμένους κύκλους ενός τριγώνου ABC έχει ακτίνα $\frac{r^2+s^2}{4r}$ όπου r είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC και s είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου.

Λύση:

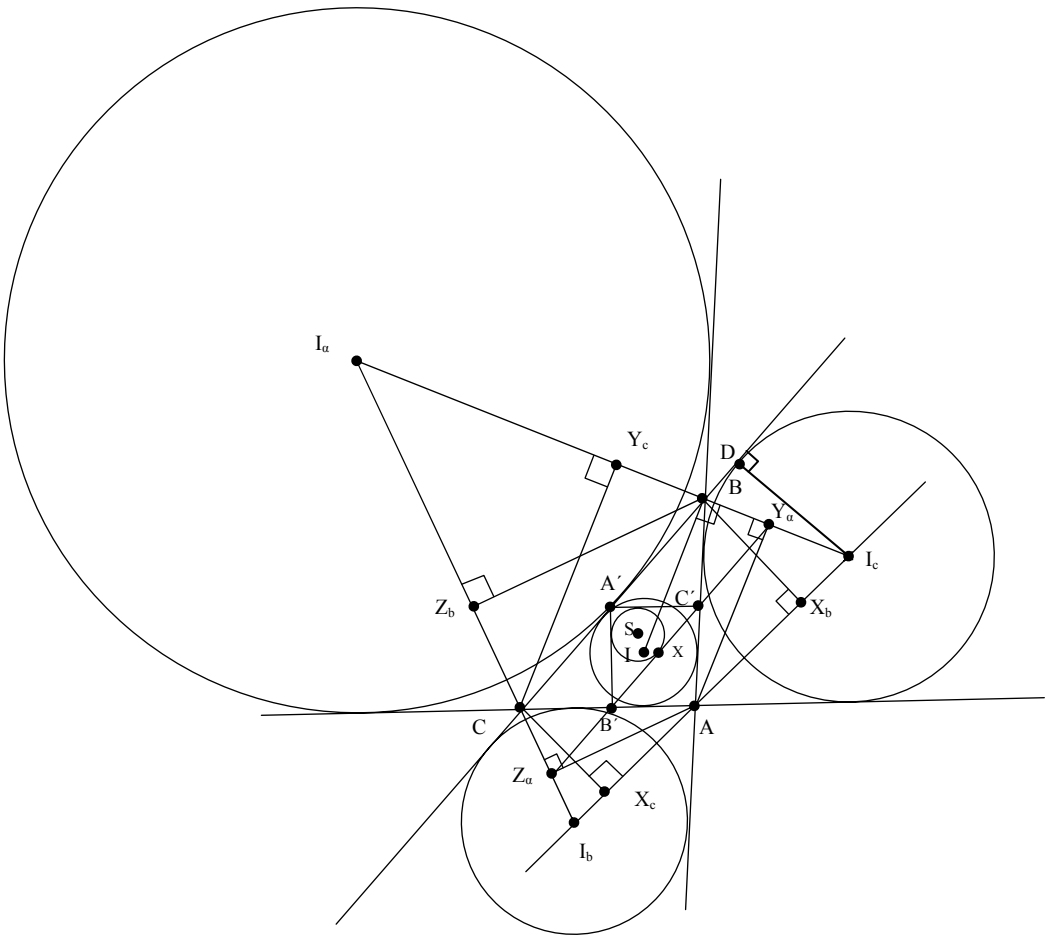
Το πρόβλημα είναι μια εφαρμογή της γεωμετρίας του τριγώνου αρκετά δύσκολη γι΄ αυτό και θα κάνουμε μια μακροσκελή και λεπτομερή παρουσίαση.
Ας πάρουμε τα πράγματα από την αρχή:
Ο κύκλος των εννέα σημείων ενός τριγώνου ABC είναι όπως πολύ εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου που έχει κορυφές τα μέσα Α΄, Β΄,C΄ των πλευρών BC , AC , AB αντίστοιχα του τριγώνου ABC.
Το κέντρο N του κύκλου των εννέα σημείων του τριγώνου ABC είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου Α΄Β΄C΄. Η ακτίνα του κύκλου των 9 σημείων του τριγώνου ABC είναι R/2 όπου R είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC. Όπως έχουμε αποδείξει σε άλλο μέρος της εργασίας μας (θεώρημα Feuerbach) ο κύκλος των εννέα σημείων εφάπτεται στους τρεις παρεγγεγραμμένους κύκλους του τριγώνου ABC εξωτερικά.
Το σημείο Spieker S του τριγώνου ABC είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου Α΄Β΄C΄ (όπου Α΄,Β΄,C΄ είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ABC).
Ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου Α΄Β΄C΄ λέγεται *πρώτος κύκλος του Spieker* . Ας υποθέσουμε ότι r είναι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC και s είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου ABC τότε ο κύκλος που έχει κέντρο το σημείο Spieker S και ακτίνα $\frac{1}{2}\sqrt{r^2+s^2}$ θα λέγεται *δεύτερος κύκλος Spieker*.

Θα αποδείξουμε το εξής λήμμα:

Ο δεύτερος κύκλος Spieker ενός τριγώνου ABC είναι ορθογώνιος στους τρεις παρεγγεγραμμένους κύκλους του τριγώνου ABC.

Απόδειξη:

Έστω I_α, I_b, I_c είναι τα τρία κέντρα των παρεγγεγραμμένων κύκλων του τριγώνου ABC. Οι $I_\alpha I_b$,$I_b I_c$,$I_\alpha I_c$ διέρχονται από τις κορυφές C, A, B αντίστοιχα και είναι οι εξωτερικές διχοτόμοι των γωνιών ∠CAB, ∠ABC, ∠BCA.



Ας υποθέσουμε ότι X_b, X_c, Y_c,Y_α, Z_α, Z_b είναι οι ορθογώνιες προβολές των σημείων B,C,C,A,A,B στις ευθείες I_bI_c,I_bI_c,$I_\alpha I_c$,$I_\alpha I_c$,$I_\alpha I_b$,$I_\alpha I_b$ αντίστοιχα.
Αυτές οι έξι ορθογώνιες προβολές έχουν πολλές ιδιότητες. Για παράδειγμα με μια μικρή επεξεργασία που βασίζεται σε γωνίες κάποιος μπορεί να δείξει ότι τα σημεία X_b,Y_α βρίσκονται πάνω στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία επαφής των ευθειών CA και CB με τον κύκλο (I_c) ενώ τα σημεία Y_α, Z_α βρίσκονται πάνω στην ευθεία B΄C΄ η οποία διέρχεται από τα μέσα B΄ και C΄ των τμημάτων CA και CB. Ενώ η πρώτη από τις ιδιότητες δεν θα χρησιμοποιηθεί η δεύτερη θα φανεί χρήσιμη στην συνέχεια οπότε θα δώσουμε μια απόδειξη:
Έχουμε ότι $BY_\alpha \perp BI$ διότι είναι εξωτερική και εσωτερική διχοτόμος της γωνίας B αντίστοιχα.
Επίσης $C'B' \parallel CB$ διότι C΄ και B΄ είναι τα μέσα των πλευρών AB και AC.
Το τρίγωνο $BC'Y_\alpha$ είναι ισοσκελές διότι η διάμεσος προς την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ABY_α είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας οπότε $\angle BC'Y_\alpha = 2\angle BAY_\alpha$ ($\angle BC'Y_\alpha$ εξωτερική γωνία στο ισοσκελές τρίγωνο $BC'Y_\alpha$). Οπότε $\angle BC'Y_\alpha = 2\angle BAY_\alpha = 2(90^o - \angle ABY_\alpha) = 2(90^o - (90^o - \angle \frac{ABC}{2}) = \angle ABC = \angle AC'B'$ και έτσι το σημείο Y_α βρίσκεται πάνω στην B΄C΄. Ομοίως δείχνουμε ότι το σημείο Z_α βρίσκεται πάνω στην B΄C΄.
Θα αποδείξουμε ότι τα σημεία X_b, X_c, Y_c,Y_α, Z_α, Z_b βρίσκονται πάνω στον ίδιο κύκλο και πιο συγκεκριμένα στον δεύτερο κύκλο του Spieker του τριγώνου ABC.
$C'Y_\alpha = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}c$ (διάμεσος =μισό της υποτείνουσας). Ας υποθέσουμε ότι X είναι το σημείο που ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου A΄B΄C΄ εφάπτεται στην πλευρά B΄C΄. Ας θυμηθούμε ότι το κέντρο S του κύκλου αυτού είναι το σημείο Spieker του τριγώνου ABC. Το τρίγωνο SXY_α είναι ορθογώνιο με κάθετη την $SX = \frac{r}{2}$ (Η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου

του τριγώνου ΑΒΓ είναι r, ενώ το τρίγωνο ΑΒΓ είναι όμοιο με το τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄ με λόγο ομοιότητας 1/2 διότι τα Α΄,Β΄,Γ΄ είναι τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓ, οπότε η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου Α΄Β΄C΄ είναι $\frac{r}{2}$) ενώ για την άλλη κάθετη έχουμε ότι

$Y_\alpha X=C'X+C'Y_\alpha=\frac{1}{2}(s-c)+\frac{1}{2}c=\frac{1}{2}s$

($C'X=\frac{1}{2}(s-c)$ διότι το αντίστοιχο τμήμα στο τρίγωνο ABC είναι s-c και τα τρίγωνα ABC , Α΄Β΄C΄ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{2}$).

Από το πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει ότι :

$SY_\alpha^2=SX^2+Y_\alpha X^2=\left(\frac{1}{2}r\right)^2+\left(\frac{1}{2}s\right)^2=\frac{1}{4}\left(r^2+s^2\right)$.

Παρομοίως δουλεύοντας προκύπτει ότι $SY_c^2, SZ_\alpha^2, SZ_b^2, SX_b^2, SX_c^2=\frac{1}{4}\left(r^2+s^2\right)$ οπότε τα X_b, X_c, Y_c,Y_α, Z_α, Z_b βρίσκονται πάνω στον ίδιο κύκλο και πιο συγκεκριμένα στον κύκλο που έχει κέντρο το S και ακτίνα $\frac{1}{2}\sqrt{r^2+s^2}$ δηλαδή στον δεύτερο κύκλο του Spieker του τριγώνου ABC.

Θα δείξουμε τώρα ότι αυτός ο δεύτερος κύκλος Spieker είναι ορθογώνιος προς τους τρεις παρεγγεγραμμένους κύκλους του τριγώνου ABC.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι D είναι το ίχνος του κάθετου τμήματος από το I_c, κέντρο του παρεγγεγραμμένου κύκλου (I_c), προς την πλευρά BC. Θα έχουμε λοιπόν:

$$\angle I_cCX_c=\angle I_cCA+\angle ACX_c=\angle I_cCA+(90^o-\angle CAX_c)=\frac{C}{2}+(90^o-(90^o-\angle\frac{A}{2}))=\angle\frac{C}{2}+\angle\frac{A}{2}=$$

$$=90^o-\angle\frac{B}{2}=\angle I_cBD$$

$\angle I_cX_cC=90^o=\angle I_cDB$ οπότε τα τρίγωνα I_cX_cC και I_cDB είναι όμοια και έτσι παίρνουμε:

$\frac{I_cX_c}{I_cD}=\frac{I_cC}{I_cB}$ (1)

από την άλλη μεριά έχουμε:

$\angle AI_cB=180^o-\angle I_cAB-\angle I_cBA=180^o-(90^o-\angle\frac{A}{2})-(90^o\angle\frac{B}{2})=\angle\frac{A+B}{2}=90^o-\angle\frac{C}{2}$

οπότε

$\angle I_cCD=\angle\frac{C}{2}=90^o-(90^o-\angle\frac{C}{2})=90^o-\angle AI_cB=90^o-\angle X_bI_cB=\angle I_cBX_b$

Επίσης είναι φανερό ότι $\angle I_cDC=90^o=\angle I_cX_bB$ οπότε τα τρίγωνα I_cDC και I_cX_bB είναι όμοια και κατά συνέπεια: $\frac{I_cD}{I_cX_b}=\frac{I_cC}{I_cB}$ (2).

Συνδυάζοντας τις (1) και (2) έχουμε: $\frac{I_cX_c}{I_cD}=\frac{I_cD}{I_cX_b}$ ή ισοδύναμα: $I_cD^2=I_cX_c\cdot I_cX_b$

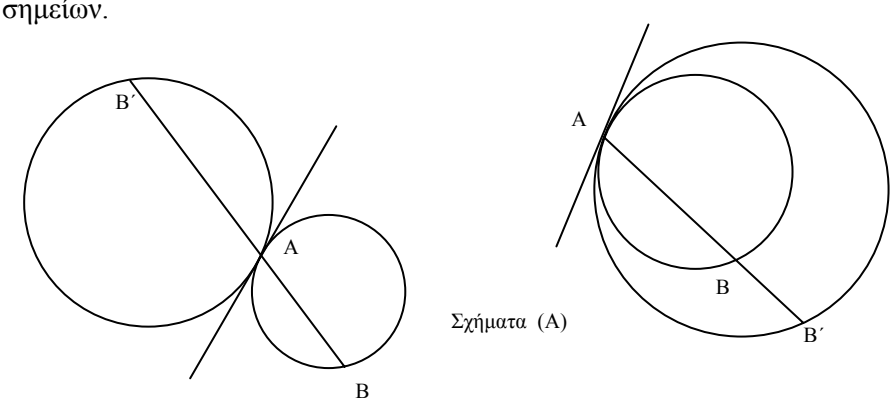
Η I_cD είναι η ακτίνα του παρεγγεγραμμένου κύκλου (I_c) του τριγώνου ABC.

Έχουμε λοιπόν ότι τα δύο σημεία X_c, X_b είναι αντίστροφα ως προς τον παρεγγεγραμμένο κύκλο (I_c) του τριγώνου ABC και ως εκ τούτου ο δεύτερος κύκλος Spieker του τριγώνου ABC (που διέρχεται από τα δύο αυτά σημεία) είναι ορθογώνιος με τον παρεγγεγραμμένο κύκλο (I_c). Ομοίως σκεπτόμενοι βρίσκουμε ότι ο δεύτερος κύκλος Spieker του τριγώνου

ABC είναι ορθογώνιος με τον παρεγγεγραμμένο κύκλο (I_a) και τον παρεγγεγραμμένο κύκλο (I_b). Το προηγούμενο λήμμα θα μπορούσε να ξαναδιατυπωθεί ως εξής:
Το σημείο Spieker S ενός τριγώνου ABC είναι το ριζικό κέντρο των τριών παρεγγεγραμμένων κύκλων του τριγώνου ABC και η δύναμή του ως προς τους τρεις παρεγγεγραμμένους κύκλους είναι $\frac{1}{2}\sqrt{r^2+s^2}$ όπου r είναι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου και s είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου ABC.

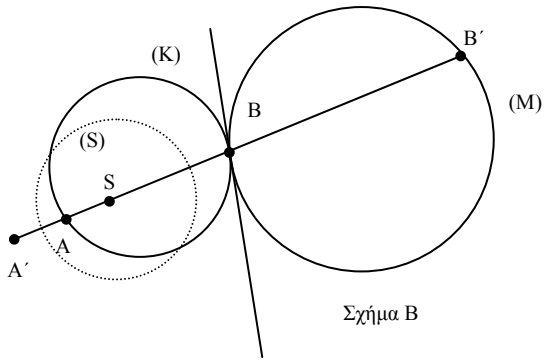
Ας έρθουμε τώρα στην απόδειξη που μας ενδιαφέρει:

Θα αντιστρέψουμε με κύκλο αντιστροφής τον δεύτερο κύκλο του Spieker. Αφού όπως αποδείξαμε προηγουμένως ο δεύτερος κύκλος του Spieker είναι ορθογώνιος με τους τρεις παρεγγεγραμμένους κύκλους αυτή η αντιστροφή θα αφήνει τους κύκλους αυτούς σταθερούς.
Από την άλλη μεριά ξέρουμε (Feuerbach theorem) ότι ο κύκλος των εννέα σημείων του τριγώνου ABC εφάπτεται στους τρεις παρεγγεγραμμένους κύκλους εξωτερικά. Η αντιστροφή λοιπόν του κύκλου των εννέα σημείων ως προς τον δεύτερο κύκλο Spieker θα είναι ένας κύκλος που θα εφάπτεται εσωτερικά με τους τρεις παρεγγεγραμμένους κύκλου και αυτό διότι το κέντρο του κύκλου της αντιστροφής είναι εσωτερικό του κύκλου των εννέα σημείων (δηλαδή του κύκλου που αντιστρέφουμε). Πράγματι αυτό μπορούμε να το δούμε πιο αναλυτικά ως εξής:
Το σημείο Spieker (κέντρο του κύκλου αντιστροφής) είναι το έγκεντρο του τριγώνου A΄B΄C΄ όπου A΄,B΄,C΄ είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ABC. Ο κύκλος των εννέα σημείων του τριγώνου ABC διέρχεται από τα σημεία A΄,B΄,C΄οπότε ο κύκλος αυτός θα είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου A΄B΄C΄. Το έγκεντρο του κύκλου A΄B΄C΄ είναι εσωτερικό σημείο στο τρίγωνο A΄B΄C΄ οπότε είναι εσωτερικό σημείο και του κύκλου των εννέα σημείων.



Σχήματα (A)

Αν δύο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά τότε ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την εφαπτόμενη ευθεία λ στο σημείο επαφής τους οπότε οποιαδήποτε ημιευθεία φέρουμε με αρχή το σημείο επαφής A που δεν περιέχεται στην ευθεία λ και η οποία ανήκει στο ημιεπίπεδο που περιέχει τους δύο κύκλους θα τέμνει τους κύκλους αυτούς σε δύο σημεία B και B΄ τα οποία είναι προς το ίδιο μέρος του A. Αντίθετα αν οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά τότε η κοινή εφαπτόμενη λ στο σημείο επαφής A των δύο κύκλων αφήνει τους δύο κύκλους σε διαφορετικά ημιεπίπεδα. Κάθε ευθεία που διέρχεται από το A και είναι διαφορετική από την λ θα τέμνει τους δύο κύκλους σε δύο σημεία B και B΄ με το σημείο A να είναι μεταξύ αυτών.
Έχουμε λοιπόν μια αντιστροφή και δύο κύκλους που αντιστρέφουμε οι οποίοι εφάπτονται μεταξύ τους και ο ένας μένει αναλλοίωτος κατά την αντιστροφή αυτή.
Ο κύκλος που μένει αναλλοίωτος είναι παρεγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ABC και ο άλλος είναι ο κύκλος των εννέα σημείων που όπως είπαμε περιέχει το κέντρο S του κύκλου αντιστροφής.



Σχήμα Β

Ας δούμε πάλι ένα σχήμα (σχήμα Β): Ο κύκλος (Κ) είναι ο κύκλος των εννέα σημείων. Ο κύκλος κέντρου (S) είναι ο κύκλος αντιστροφής και ο κύκλος (Μ) είναι ο αναλλοίωτος παρεγγεγραμμένος κύκλος.
Φέρνουμε την SB ημιευθεία την οποία αν προεκτείνουμε θα κόψει τον κύκλο (Μ) σε ένα δεύτερο σημείο Β΄. Το σημείο Β΄ είναι το αντίστροφο του Β διότι ο κύκλος (Μ) μένει αναλλοίωτος οπότε το αντίστροφο του σημείου Β πρέπει να βρίσκεται υποχρεωτικά πάνω στον κύκλο (Μ) και ταυτόχρονα στην ημιευθεία SB. Αφού το S είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (Κ) άρα προεκτείνοντας την BS ημιευθεία, αυτή θα κόψει τον κύκλο (Κ) σε ένα σημείο Α τέτοιο ώστε το σημείο S να είναι εσωτερικό του τμήματος AB. Το αντίστροφο σημείο Α΄ του σημείου Α είναι ένα σημείο που ανήκει την ημιευθεία SA. Ο αντίστροφος κύκλος του κύκλου (Κ) θα περάσει από το Α΄ και το Β΄ και θα εφάπτεται στον κύκλο (Μ) στο σημείο Β΄. Όμως τα σημεία Β και Α΄ βρίσκονται προς το ίδιο μέρος του Β΄ άρα με βάση τα όσα αναπτύξαμε με την βοήθεια των σχημάτων (Α) ο αντίστροφος κύκλος του κύκλου των εννέα σημείων εφάπτεται στον παρεγγεγραμμένο κύκλο εσωτερικά. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι η εικόνα του κύκλου των εννέα σημείων εφάπτεται εσωτερικά σε όλους του παρεγγεγραμμένους κύκλους. Όμως ο κύκλος που εφάπτεται εσωτερικά στους τρεις παρεγγεγραμμένους κύκλους ενός τριγώνου είναι ο απολλώνιος κύκλος του τριγώνου οπότε η εικόνα του κύκλου των εννέα σημείων ως προς κύκλο αντιστροφής τον δεύτερο κύκλο Spieker είναι ο απολλώνιος κύκλος του τριγώνου.
Όπως ξέρουμε η αντιστροφή ως προς ένα κύκλο κέντρου Μ και ακτίνας k απεικονίζει έναν κύκλο με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα r σε ένα κύκλο με ακτίνα $\frac{k^2 r}{\left|MO^2 - r^2\right|}$. (αυτό προκύπτει εύκολα από το ότι ένας κύκλος (O,r) όταν αντιστρέφεται σε έναν άλλο κύκλο (N,ρ) με κύκλο αντιστροφής τον (M,k), τότε οι δύο αντίστροφοι κύκλοι είναι ομοιόθετοι με λόγο ομοιοθεσίας το λόγο της δύναμης της αντιστροφής k^2 προς την δύναμη του κέντρου αντιστροφής ως προς τον κύκλο (O,r). Δηλαδή: $\frac{\rho}{r} = \frac{k^2}{\left|MO^2 - r^2\right|}$ όπου ρ,r είναι οι ακτίνες του κύκλου και του αντίστροφου κύκλου του). Στην περίπτωσή μας ο δεύτερος κύκλος Spieker έχει ακτίνα $\frac{1}{2}\sqrt{r^2+s^2}$ και κέντρο S ενώ ο κύκλος των εννέα σημείων έχει ακτίνα $\frac{R}{2}$ (όπου R είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου το τριγώνου ABC. Σημείωση: η απόδειξη έχει γίνει σε προηγούμενη άσκηση) και κέντρο N. Έχουμε λοιπόν ότι ο Απολλώνιος κύκλος έχει ακτίνα: $\frac{\frac{1}{2}\left(r^2+s^2\right)\frac{R}{2}}{\left|SN^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2\right|}$

Ας θυμηθούμε τώρα τον τύπο του Euler (έχει αποδειχθεί σε προηγούμενη άσκηση):
$IO^2 = R^2 - 2Rr$. I είναι το έγκεντρο και O είναι το περίκεντρο του τριγώνου ABC.

Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο αυτόν στο τρίγωνο Α΄Β΄C΄ του οποίου το περίκεντρο είναι το κέντρο N του κύκλου του Euler (του οποίου η ακτίνα είναι $\frac{R}{2}$). Το τρίγωνο Α΄Β΄C΄ έχει εγγεγραμμένο κύκλο του οποίου η ακτίνα είναι $\frac{r}{2}$ (το Α΄Β΄C΄ είναι όμοιο με το ABC με λόγο ομοιότητας 1/2). Παίρνουμε λοιπόν $SN^2=\left(\frac{R}{2}\right)^2-2\frac{R}{2}\frac{r}{2}$. Ο συνδυασμός τώρα των τύπων $\frac{\frac{1}{2}\left(r^2+s^2\right)\frac{R}{2}}{\left|SN^2-\left(\frac{R}{2}\right)^2\right|}$ και $SN^2=\left(\frac{R}{2}\right)^2-2\frac{R}{2}\frac{r}{2}$ δίνει : ακτίνα απολλώνιου κύκλου$=\frac{r^2+s^2}{4r}$

Πρόβλημα (Ι.Μ.Ο 2006):

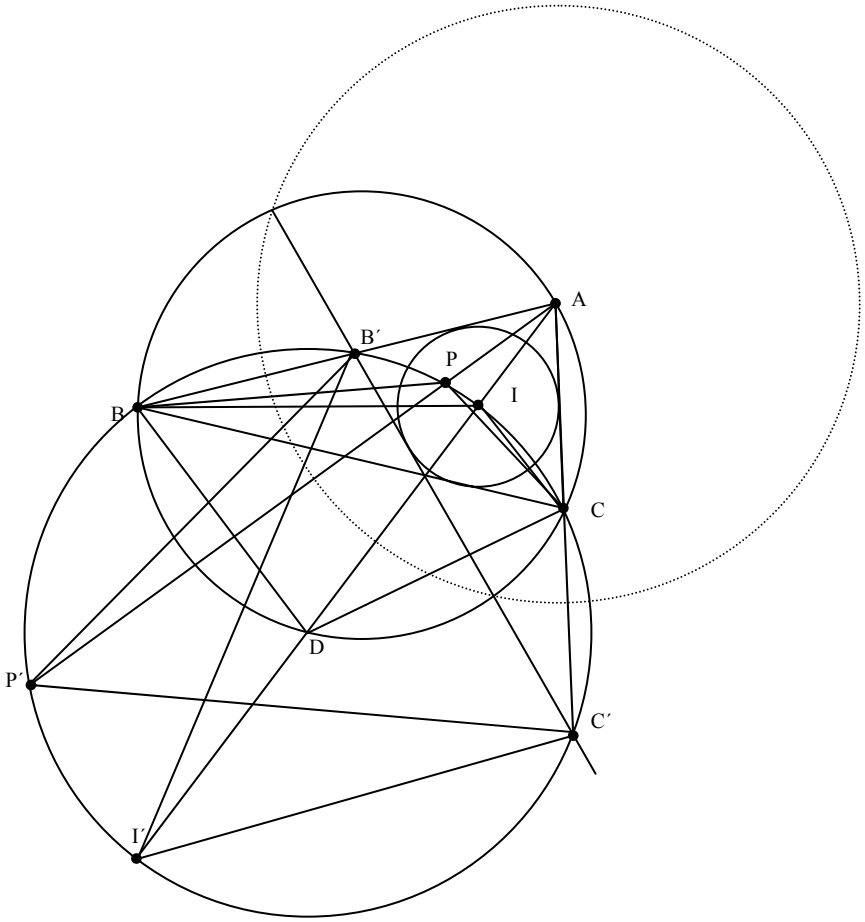
Ας υποθέσουμε ότι ABC είναι ένα τρίγωνο με έγκεντρο το σημείο I. Ένα σημείο P στο εσωτερικό του τριγώνου ικανοποιεί την σχέση ∠PBA+∠PCA=∠PBC+∠PCB.
Να δειχθεί ότι AP≥AI και ότι η ισότητα ισχύει μόνο όταν P=I

Λύση:

Ας θεωρήσουμε αντιστροφή με κέντρο αντιστροφής το σημείο A και ως ακτίνα αντιστροφής ας επιλέγουμε την δύναμη του σημείου A ως προς τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου BIC.
Τα σημεία B,C,P,I αντιστρέφονται στα B΄,C΄,P΄,I΄ αντίστοιχα.
Θα έχουμε:
∠PBC+∠PCB =∠PBA+∠PCA οπότε ∠ABC-∠ABP+∠ACB-∠ACP=∠PBA+∠PCA
και έτσι ∠ABC +∠ACB =∠PBA+∠ABP +∠PCA+∠ACP=2(∠PBA+∠PCA) (α)
Είναι AP·AP΄=AB·AB΄ (B΄ είναι αντίστροφο του B και P΄ είναι αντίστροφο του P) οπότε τα τρίγωνα APB και AB΄P΄ είναι όμοια και ως εκ τούτου ∠PBA=∠B΄P΄A. Ομοίως σκεφτόμενοι καταλήγουμε και στην ισότητα: ∠PCA=∠C΄P΄A
Μετά από την αντιστροφή για τις γωνίες[7] ισχύει: ∠AC΄B΄+AB΄C΄=2(∠B΄P΄A+∠C΄P΄A) (β)
Έχουμε επίσης ότι ∠B΄P΄A+∠C΄P΄A=∠B΄P΄C΄ (γ) οπότε από τις ισότητες (α) (β) και (γ) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ∠B+∠C=∠B΄+∠C΄=2(∠B΄P΄C΄). Επίσης ισχύει ότι AB΄·AB=AI·AI΄ οπότε τα τρίγωνα ABI και AI΄B΄ είναι όμοια και κατά συνέπεια ∠ABI=∠AI΄B΄=$\angle\frac{B}{2}$. Επίσης AC·AC΄=AI·AI΄ οπότε τα τρίγωνα ACI και AC΄I΄ είναι όμοια και έτσι ∠AI΄C΄=∠ACI=$\angle\frac{C}{2}$. Έχουμε λοιπόν: 2(∠B΄I΄C΄)=∠B+∠C=∠B΄+∠C΄ και έτσι ισχύει η ισότητα: ∠B΄P΄C΄= ∠B΄I΄C΄ οπότε το τετράπλευρο B΄P΄I΄C΄ είναι εγγράψιμμο και κατά συνέπεια τα σημεία B΄,P΄,I΄,C΄ είναι ομοκυκλικά. Η εικόνα λοιπόν του (B,I,C) είναι ο κύκλος (B΄,I΄,C΄) ο οποίος είναι ο κύκλος (B΄,P΄,I΄,C΄). Το σημείο P΄ που ανήκει στον κύκλο (B΄,P΄,I΄,C΄) είναι η εικόνα του σημείου P. Το P πρέπει υποχρεωτικά να ανήκει στον κύκλο (B,I,C) αφού ο κύκλος (B,I,C) είναι το σύνολο των σημείων εικόνων, των σημείων του κύκλου (B΄,P΄,I΄,C΄). Αυτός ο συλλογισμός δείχνει ότι ο γεωμετρικός τόπος του P είναι ο

[7] Αφού ισχύει AB·AB΄=AC·AC΄ άρα τα τρίγωνα AB΄C΄ και ABC είναι όμοια οπότε ∠AC΄B΄=∠ABC AB΄C΄ =∠ACB.

κύκλος (B,I,C). Φέρνουμε τον κύκλο (B,P,I,C). Ο κύκλος αυτός είναι στην ουσία ο (B΄,I΄,C΄). Αυτό συμβαίνει διότι η αντιστροφή γίνεται ως προς κέντρο A (που είναι εξωτερικό σημείο του (B,I,C)) και με δύναμη αντιστροφής την δύναμη $\wp$ του A ως προς τον κύκλο (B,I,C). Αυτό έχει σαν συνέπεια κάθε σημείο B του κύκλου (B,I,C) να απεικονίζεται στο σημείο B΄ που η AB ξανατέμνει τον κύκλο (B,I,C) αφού τότε AB ·AB΄= $\wp$ (ορισμός δύναμης σημείου ως προς κύκλο) και τα B ,B΄ βρίσκονται στην ίδια ημιευθεία με αρχή το A . Για τον ίδιο λόγο και η AI επειδή τέμνει τον κύκλο (B,I,C) στο σημείο I θα τον τέμνει και στο σημείο I΄ το οποίο είναι το αντίστροφο του I.

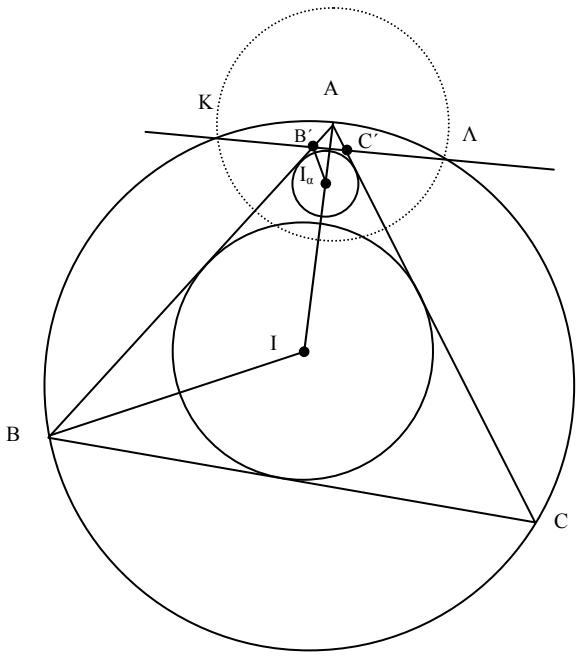


Θα αποδείξουμε ότι η II΄ είναι διάμετρος του κύκλου BIC. Πρώτα απ΄ όλα θα παρατηρήσουμε ότι το κέντρο D του κύκλου (B,I,C) είναι το δεύτερο σημείο τομής της AI με τον κύκλο (A,B,C). Αυτό συμβαίνει διότι $\angle BAD=\angle DAC=\angle\frac{A}{2}$ οπότε BD=CD. Επίσης BD=BI διότι $\angle IBD=\angle DBC+\angle IBC=\angle\frac{A}{2}+\angle\frac{B}{2}=\angle BID$. Έτσι η AI διέρχεται από το I΄ και από το κέντρο D του (B,I,C) οπότε η II΄ είναι διάμετρος του κύκλου BIC. Αυτό σημαίνει ότι το I είναι το κοντινότερο σημείο στο A οπότε AI<AP. Αν I≡P τότε AI=AP.

Πρόβλημα:

Ας υποθέσουμε ότι το ABC είναι ένα τρίγωνο και I είναι το έγκεντρό του. Αν κάνουμε αντιστροφή με κέντρο το σημείο A και αυθαίρετη ακτίνα τότε το σημείο I αντιστρέφεται στο σημείο I_α που είναι το κέντρο του παρεγγεγραμμένου κύκλου που εφάπτεται στην πλευρά

Β΄C΄ του τριγώνου ΑΒ΄C΄ (Β΄ και C΄ είναι τα αντίστροφα των Β και C΄ ως προς την εν λόγω αντιστροφή).



Λύση:

Αντιστρέφουμε με κέντρο το σημείο Α και ακτίνα οποιαδήποτε οπότε ο κύκλος (Α, Β, C) που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής αντιστρέφεται σε ευθεία η οποία διέρχεται από τα σημεία τομής Κ, Λ του κύκλου αντιστροφής και του κύκλου (Α,Β,C). Το αντίστροφο σημείο του σημείου Β είναι το σημείο τομής της ευθείας ΚΛ και της ευθείας ΑΒ και αυτό συμβαίνει διότι το σημείο Β είναι το σημείο τομής του κύκλου (Α, Β, C) και της ευθείας ΑΒ οπότε το αντίστροφο σημείο του θα είναι το σημείο Β΄ το οποίο είναι το σημείο τομής της εικόνας της ευθείας ΑΒ και της εικόνας του κύκλου (Α, Β, C). Η εικόνα όμως της ευθείας ΑΒ είναι η ίδια η ΑΒ διότι διέρχεται από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής και του κύκλου (Α,Β,C) είναι η ΚΛ. Παρομοίως συμπεραίνουμε ότι το σημείο τομής C΄ της ΑC και της ΚΛ είναι το αντίστροφο του σημείου C. Αφού Β,Β΄ είναι αντίστροφα άρα θα έχουμε $AB\cdot AB'=R^2$ (R είναι η ακτίνα του κύκλου αντιστροφής) ομοίως $AC\cdot AC'=R^2$ οπότε $AB\cdot AB'= AC\cdot AC'$. Τα τρίγωνα λοιπόν ΑΒ΄C΄και ΑΒC είναι μεταξύ τους όμοια (αφού $\frac{AB'}{AC}=\frac{AC'}{AB}$ και γωνία $\angle A$ είναι κοινή).

Από την ομοιότητα αυτή προκύπτει ότι $\angle B'=\angle C$ και $\angle B=\angle C'$. Τα τρίγωνα πάλι $AB'I_\alpha$ και AIB είναι μεταξύ τους όμοια αφού $\angle BIA=\angle AB'I_\alpha$ ($\angle BIA =180^o-\frac{B}{2}-\frac{A}{2}=$ $\angle C+\angle\frac{A}{2}+\angle\frac{B}{2}$ και στο τρίγωνο ΑΒ΄C΄ η $B'I_\alpha$ είναι εξωτερική διχοτόμος οπότε $\angle C'B'I_\alpha=\angle\frac{B'_{\varepsilon\xi}}{2}=\angle\frac{A+C'}{2}=\angle\frac{A+B}{2}$ άρα $\angle AB'I_\alpha=\angle\frac{A+B}{2}+\angle AB'C=\angle\frac{A+B}{2}+\angle C$).

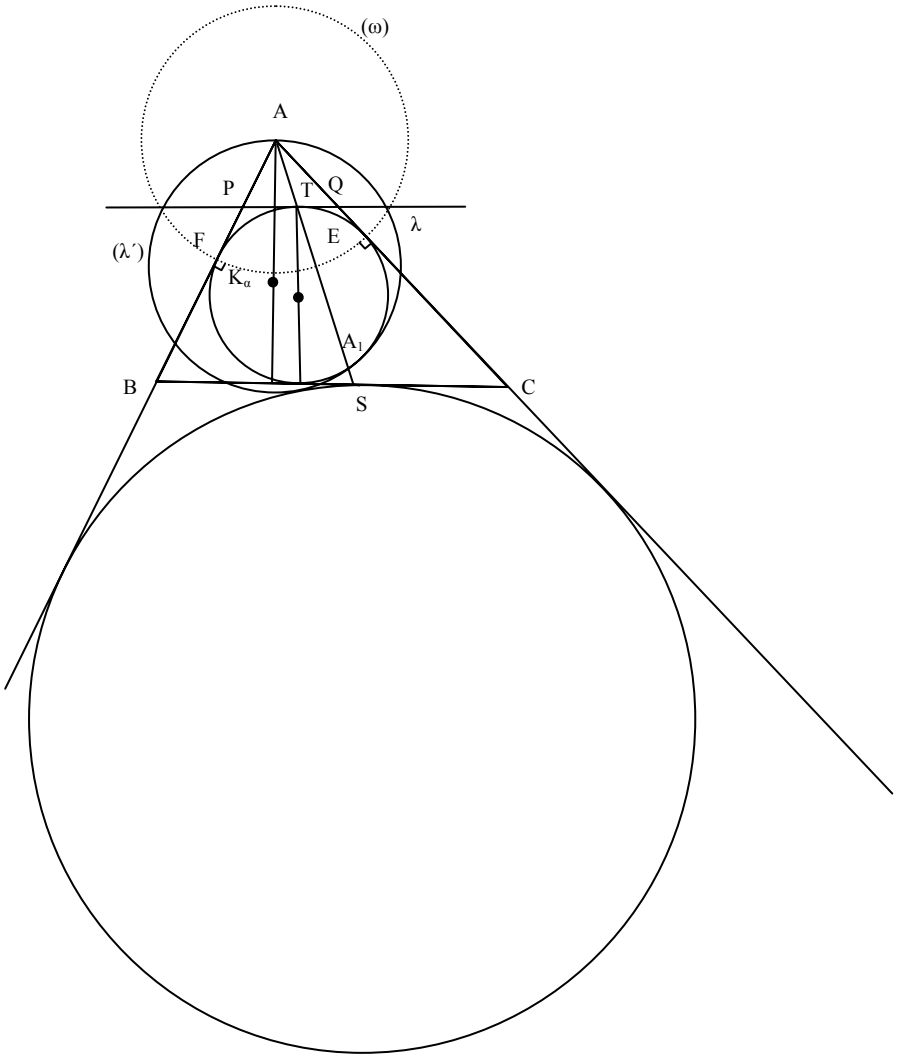
Λόγω ομοιότητας των τριγώνων $AB'I_\alpha$ και AIB προκύπτει ότι $\frac{AI_\alpha}{AB'}=\frac{AB}{AI}$ οπότε $AI_\alpha\cdot AI=AB'\cdot AB=R^2$ και έτσι τα σημεία I και I_α είναι μεταξύ τους αντίστροφα.

Πρόβλημα (Vietnam TST 2007):

Έστω ΑΒC είναι ένα κυρτογώνιο τρίγωνο με εγγεγραμμένο κύκλο τον κύκλο (I). Έστω (K_α) είναι ένας κύκλος ο οποίος διέρχεται από την κορυφή Α του τριγώνου ΑΒC. Το κέντρο του κύκλου αυτού είναι το K_α και ισχύει ότι $AK_\alpha\perp BC$. Ο κύκλος (K_α) εφάπτεται εσωτερικά στον κύκλο (I) στο σημείο A_1. Με όμοιο τρόπο ορίζουμε τα σημεία B_1 και C_1. Να αποδείξετε ότι τα AA_1,BB_1,CC_1 συντρέχουν.

Λύση:

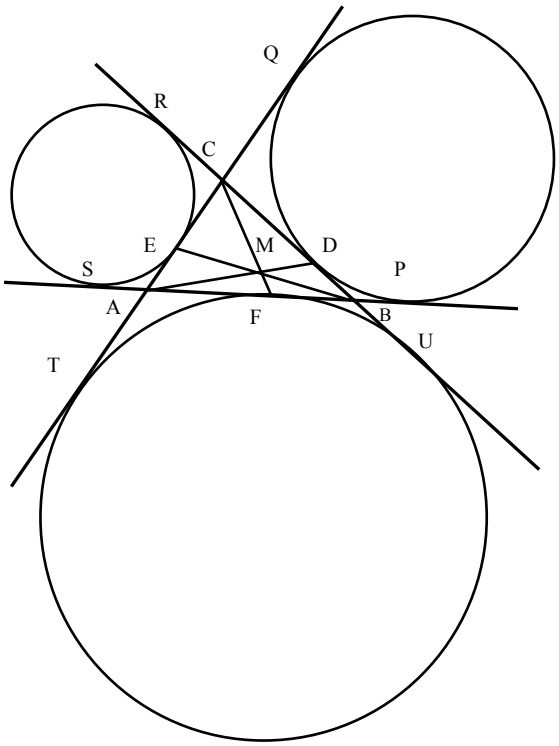
Ας υποθέσουμε ότι ο εγγεγραμμένος κύκλος (I) εφάπτεται στις πλευρές BC, AC και AB στα σημεία D,E,F αντίστοιχα.
Ας υποθέσουμε ότι ω είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο A και ακτίνα AF=AE. Με λ συμβολίζουμε την ευθεία που είναι εφαπτόμενη στον εγγεγραμμένο κύκλο (I) και η οποία είναι παράλληλη στην πλευρά BC και έστω ότι η λ τέμνει τις AB, AC στα σημεία P,Q αντίστοιχα. Ο κύκλος ω είναι ορθογώνιος με τον κύκλο (I) διότι η ακτίνα του AE είναι εφαπτόμενη στον κύκλο (I). Άρα κατά την αντιστροφή ως προς τον ω ο κύκλος (I) μένει αναλλοίωτος.
Επειδή η λ είναι ευθεία άρα η εικόνα της μέσω της αντιστροφής ως προς τον κύκλο (ω) θα είναι ο κύκλος λ΄ ο οποίος διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής A.
Ο κύκλος λ΄ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες: Η ευθεία μ που διέρχεται από το κέντρο του λ΄ και από το σημείο A είναι κάθετη στην ευθεία λ (αυτό συμβαίνει διότι: αν φέρουμε την κάθετη ευθεία μ από το κέντρο A προς την ευθεία λ, η ευθεία αυτή κατά την αντιστροφή μένει αναλλοίωτη αφού διέρχεται από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής. Η μ σχηματίζει ορθή γωνία με την λ οπότε και η εικόνα αυτής θα πρέπει να σχηματίζει ορθή γωνία με την εικόνα της λ. Όμως η εικόνα της λ είναι ο κύκλος λ΄ ο οποίος θα πρέπει να σχηματίζει ορθή γωνία με την μ.).



Επειδή η μ είναι κάθετη προς την λ θα είναι κάθετη και προς την BC. Η ευθεία λ εφάπτεται στον κύκλο (I) στο σημείο T. Ο κύκλος (I) και το σημείο A είναι σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς την ευθεία λ άρα αν προεκτείνουμε την AT αυτή θα κόψει τον κύκλο (I) σε ένα σημείο K έτσι ώστε το T να είναι εσωτερικό σημείο του AK. Αφού ο κύκλος (I) μένει αναλλοίωτος κατά την αντιστροφή άρα το K είναι το αντίστροφο σημείο του T. Η ευθεία λ εφάπτεται στον κύκλο (I) στο σημείο T οπότε η εικόνα της (που είναι ο κύκλος (λ΄) ο οποίος

διέρχεται από το Α) θα εφάπτεται με το κύκλο (Ι) στο Κ. Επειδή το σημείο Τ από το οποίο διέρχεται ο κύκλος (Ι) είναι εσωτερικό σημείο της χορδής ΑΚ του κύκλου (λ΄) άρα ο κύκλος αυτός θα εφάπτεται εσωτερικά με τον κύκλο (Ι). Από τις ιδιότητες αυτές του κύκλου (λ΄) συμπεραίνουμε ότι ταυτίζεται με τον κύκλο (K_α) (πράγματι υπάρχει μοναδικός κύκλος (λ΄) ο οποίος να έχει το κέντρο του πάνω στην κάθετη από το Α προς την ΒC να διέρχεται από το σημείο Α και να εφάπτεται στον κύκλο (Ι). Αυτό συμβαίνει διότι αν αντιστρέφουμε ένα τέτοιο κύκλο (λ΄) με κύκλο αντιστροφής τον κύκλο ω τότε η εικόνα του ρ θα είναι μια ευθεία που θα εφάπτεται στον κύκλο (Ι) η οποία όμως είναι κάθετη προς την διάμετρο του κύκλου (λ΄) η οποία διέρχεται από το Α. Η διάμετρος αυτή του κύκλου (λ΄) είναι η κάθετη προς την ΒC από το Α. Μόνο δύο τέτοιες ευθείες ρ υπάρχουν. Η μια είναι η ΒC και η άλλη η παράλληλη προς την ΒC εφαπτόμενη του (Ι). Θα αποκλείσουμε την ΒC. Πράγματι η ΒC αποκλείεται διότι είναι εξωτερική ευθεία του κύκλου αντιστροφής ω οπότε η εικόνα της είναι ένας κύκλος που διέρχεται από το Α και είναι εσωτερικός του ω. Ο κύκλος (λ΄) όμως δεν είναι εσωτερικός του ω αφού εφάπτεται εσωτερικά με τον (Ι) οπότε κάθε σημείο του (Ι) διαφορετικό από το σημείο επαφής τους είναι εσωτερικό του κύκλου (λ΄) άρα εσωτερικό του κύκλου (λ΄) είναι και το σημείο επαφής του (Ι) με την ευθεία ΒΔ η οποία είναι εξωτερική του ω). Αφού αποδείξαμε ότι υπάρχει μοναδικός κύκλος με τις ιδιότητες που προαναφέραμε άρα ο (λ΄) ταυτίζεται με τον (K_α) και το σημείο επαφής Κ του κύκλου (λ΄) με τον (Ι) είναι τελικά το A_1.Οπότε το αντίστροφο του σημείου Τ είναι το A_1. Ας υποθέσουμε τώρα ότι η ΑΤ τέμνει την ΒC στο σημείο S. Θεωρούμε την ομοιοθεσία που απεικονίζει το τρίγωνο APQ στο τρίγωνο ABC Η ομοιοθεσία αυτή απεικονίζει το σημείο Τ στο σημείο S και τον κύκλο (Ι) στον παρεγγεγραμμένο κύκλο (I_α).

Ας ορίσουμε τώρα το σημείο Nagel:



Το σημείο Nagel είναι το σημείο που συντρέχουν οι CF ,BE, AD όπου E,F,D είναι τα σημεία επαφής των παρεγγεγραμμένων κύκλων με τις πλευρές του τριγώνου.

Θα αποδείξουμε ότι πράγματι τα CF ,BE, AD συντρέχουν.

CT= CU

AT=AF

BU=BF(εφαπτόμενα τμήματα)

Οπότε: AC+AF=BC+BF

Αν a=BC, b=AC, c=AB είναι οι πλευρές του τριγώνου ABC τότε :

b+AF=a+BF=p

οπότε AF=p-b,BF=p-a

Με παρόμοιο τρόπο παίρνουμε:

AE=p-c

CE=p-a

CD=p-b

BD=p-c

(AE/CE)·(CD/BD)·(BF/AF)=

$$=\frac{p-c}{p-a}\frac{p-b}{p-c}\frac{p-a}{p-b}=1$$

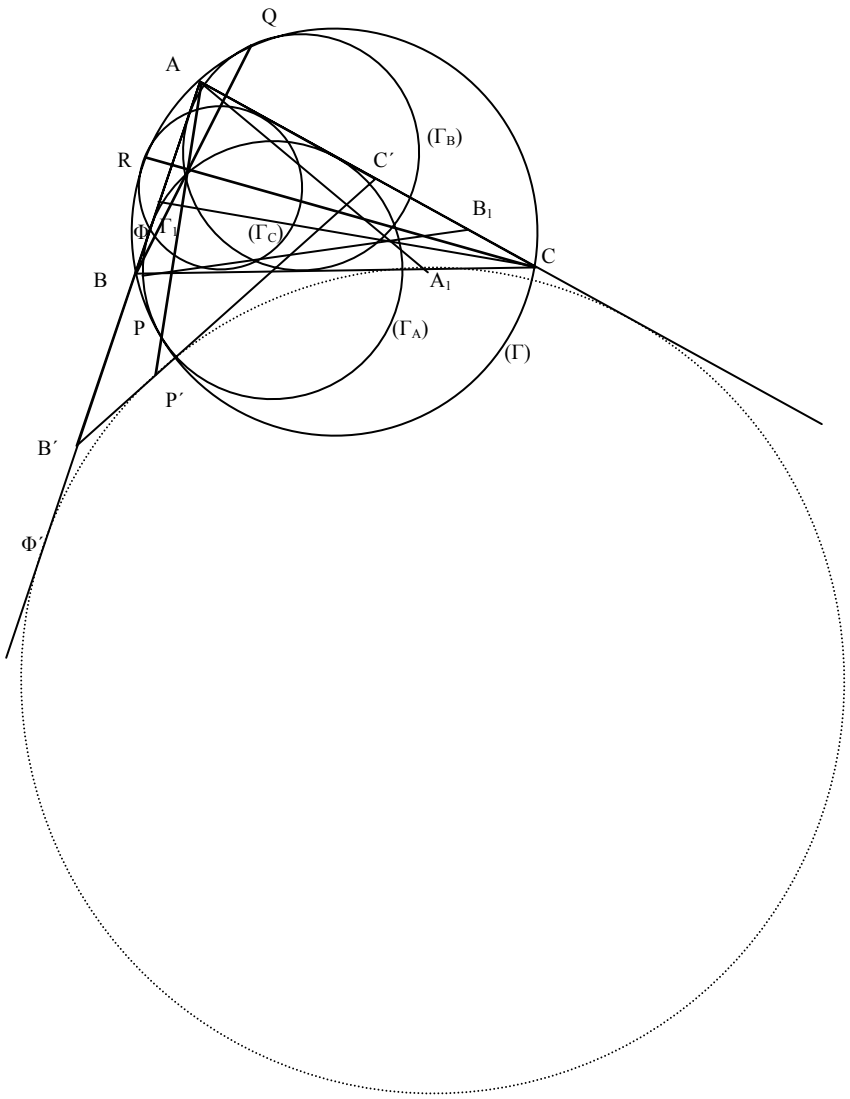
άρα από το θεώρημα του Ceva θα έχουμε ότι CF ,BE, AD συντρέχουν.

Ξαναγυρνώντας στο πρόβλημα που εξετάζουμε θα έχουμε ότι το σημείο Nagel βρίσκεται πάνω στην AA_1. Παρομοίως βρίσκουμε ότι βρίσκεται και πάνω στην BB_1 και στην CC_1.

Πρόβλημα (Japan I.M.O finals , problem 3)

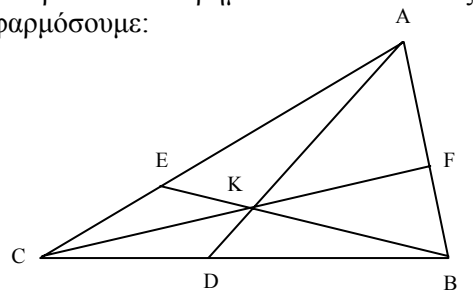
Ας υποθέσουμε ότι (Γ) είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒC. Ας συμβολίσουμε με ($Γ_A$) τον κύκλο που εφάπτεται στις πλευρές ΑΒ και ΑC και εσωτερικά στον κύκλο (Γ) στο σημείο P. Επίσης με ($Γ_B$) συμβολίζουμε τον κύκλο που εφάπτεται στις πλευρές ΑΒ και ΒC και εσωτερικά στον κύκλο (Γ) στο σημείο Q και με ($Γ_C$) τον κύκλο που εφάπτεται στις πλευρές ΑC και ΒC και εσωτερικά στον κύκλο (Γ) στο σημείο R. Να αποδείξετε ότι AP, BQ, CR είναι συγγραμμικά.

Λύση:



Ας θεωρήσουμε την αντιστροφή που έχει κέντρο το σημείο A και δύναμη αντιστροφής AB·AC. Ας δούμε πως αντιστρέφονται τα σημεία B και C. Το σημείο B βρίσκεται πάνω στην AB άρα το αντίστροφό του B΄ θα είναι πάνω στην AB. Επειδή AB·AB΄= AB·AC άρα AB΄= AC. Ομοίως το σημείο C΄ το οποίο είναι το αντίστροφο του C θα βρίσκεται πάνω στην AC και θα ισχύει για αυτό AC΄=AB. Αυτό μας δίνει το δικαίωμα να συμπεράνουμε ότι το τρίγωνο AB΄C΄ είναι συμμετρικό με το τρίγωνο ABC ως προς την διχοτόμο της γωνίας ∠A.

Ο κύκλος (Α,Β,C) αφού διέρχεται από το κέντρο της αντιστροφής μετασχηματίζεται σε ευθεία και πιο συγκεκριμένα στην ευθεία που διέρχεται από τα αντίστροφα των σημείων Β,C. Η ευθεία αυτή είναι η Β΄C΄. Ο αντίστροφος κύκλος του κύκλου (Γ_α) θα είναι ο παρεγγεγραμμένος του τριγώνου ΑΒ΄C΄ που εφάπτεται στην πλευρά Β΄C΄ τον οποίο θα συμβολίσουμε με (Λ) . Γιατί όμως είναι ο παρεγγεγραμμένος κύκλος και όχι κάποιος άλλος κύκλος που εφάπτεται στις Β΄C΄; Αφού ο κύκλος (Γ_α) είναι εσωτερικός της γωνίας ∠ΒΑC άρα το ίδιο θα συμβαίνει και για την εικόνα του. Επίσης το σημείο επαφής Φ με την ευθεία ΑΒ είναι εσωτερικό του τμήματος ΑΒ. Το αντίστροφο του Φ έστω ότι είναι το Φ΄. Έχουμε ΑΦ·ΑΦ΄=ΑΒ·ΑΒ΄. Επειδή ΑΦ<ΑΒ άρα ΑΦ΄>ΑΒ΄ οπότε το σημείο επαφής της εικόνας του (Γ_α) με την ΑΒ βρίσκεται στο αντικείμενο ημιεπίπεδο του Α ως προς την Β΄C΄. Άρα η εικόνα του (Γ_α) ανήκει στο αντικείμενο ημιεπίπεδο του Α ως προς την Β΄C΄ αφού εφάπτεται στην Β΄C΄ και διέρχεται από σημείο Φ΄ του ημιεπιπέδου της Β΄C΄ που δεν περιέχει το σημείο Α.
Η εικόνα του (Γ_α) εφάπτεται στην Β΄C΄ στο σημείο Ρ΄ το οποίο είναι η εικόνα του σημείου Ρ.
Έστω ο παρεγγεγραμμένος κύκλος (Μ) του τριγώνου ΑΒC ο οποίος ο εφάπτεται στην πλευρά ΒC του τριγώνου σε εσωτερικό της σημείο A_1.
Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι το σημείο A_1 είναι το συμμετρικό σημείο του Ρ΄ ως προς άξονα συμμετρίας την διχοτόμο της γωνίας Α.
Πράγματι κάτι τέτοιο μπορούμε να το διαπιστώσουμε εύκολα αρκεί να σκεφτούμε ότι:
Το τρίγωνο ΑΒ΄C΄ είναι η ανάκλαση του τριγώνου ΑΒC ως προς την διχοτόμο της γωνίας ∠ΒΑC αφού ΑΒ=ΑC΄ και ΑC=ΑΒ.
Η διχοτόμος της γωνίας ∠ΒΑC όπως ξέρουμε διέρχεται από το κέντρο του παρεγγεγραμμένου κύκλου (Μ) οπότε η διχοτόμος αυτή είναι άξονας συμμετρίας του κύκλου (Μ).
Αφού τα τρίγωνα ΑΒC και ΑΒC΄ είναι συμμετρικά ως προς την διχοτόμο της γωνίας ∠ΒΑC άρα ο παρεγγεγραμμένος κύκλος (Μ) του ΑΒC ο οποίος εφάπτεται στην πλευρά ΒC θα έχει συμμετρικό κύκλο ως προς την διχοτόμο της ∠ ΒΑC τον παρεγγεγραμμένο κύκλου του ΑΒ΄C΄ που θα εφάπτεται στην Β΄C΄ που είναι ο κύκλος (Λ). Όμως ο κύκλος (Μ) έχει άξονα συμμετρίας την διχοτόμο της γωνίας ∠ΒΑC οπότε ο συμμετρικός του κύκλος ως προς αυτή τον διχοτόμο είναι ο εαυτός του οπότε οι κύκλου (Μ) και (Λ) ταυτίζονται. Λόγω της συμμετρίας το σημείο A_1 που είναι το σημείο επαφής του παρεγγεγραμμένου κύκλου (Λ) με την ΒC θα έχει συμμετρικό του το Ρ΄ που είναι το σημείο τομής του κύκλου (Λ) με την πλευρά Β΄C΄. Άρα η ανάκλαση της ευθείας ΑΡ ως προς την διχοτόμο της γωνίας ∠ΒΑC είναι η ευθεία AA_1. Ομοίως αποδεικνύεται ότι η ΒQ ανακλάται στην BB_1 μέσω της διχοτόμου της γωνία ΑΒC και το CR έχει ανάκλαση ως προς την διχοτόμο της ΒCΑ το CC_1. Οι AA_1,BB_1,CC_1 συντρέχουν στο σημείο Nagel οπότε το ίδιο κάνουν και οι ΑΡ, ΒQ, CR. Το συμπέρασμα αυτό δεν είναι τόσο εύκολο να φανεί. Επειδή οι AA_1,BB_1,CC_1 είναι τρεις cevians (συντρέχουσες σε εσωτερικό σημείο του ΑΒC) για να φανεί ότι οι ΑΡ, ΒQ, CR συντρέχουν πρέπει να πάρουμε την τριγωνομετρική μορφή του θεωρήματος του Ceva και να την εφαρμόσουμε και για τις AA_1,BB_1,CC_1 όπως επίσης και για τις ΑΡ, ΒQ, CR.
Θα διατυπώσουμε πρώτα το θεώρημα του Ceva καθώς και την τριγωνομετρική του μορφή και μετά θα το εφαρμόσουμε:



$$\frac{AF}{FB}\frac{BD}{DC}\frac{CE}{EA}=1$$

Τριγωνομετρική μορφή:

$$\frac{\sin\angle ABE}{\sin\angle CBE}\frac{\sin\angle BCF}{\sin\angle ACF}\frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle BAD}=1$$

Πράγματι θα έχουμε:

Οι AA_1, BB_1, CC_1 συντρέχουν οπότε : $\frac{\sin\angle CBB_1}{\sin\angle B_1BA}\frac{\sin\angle BAA_1}{\sin\angle A_1AC}\frac{\sin\angle AC\Gamma_1}{\sin\angle \Gamma_1CB}=1$

Λόγω συμμετρίας θα έχουμε

$\angle A_1AC=\angle BAP, \angle BAA_1=\angle PAC, \angle CBB_1=\angle ABQ$

$\angle B_1BA=\angle QBC, \angle BC\Gamma_1=\angle ACR, \angle AC\Gamma_1=\angle RCB$

οπότε θα έχουμε με αντικατάσταση:

$$\frac{\sin\angle CBB_1}{\sin\angle B_1BA}\frac{\sin\angle BAA_1}{\sin\angle A_1AC}\frac{\sin\angle AC\Gamma_1}{\sin\angle \Gamma_1CB}=1 \Rightarrow$$

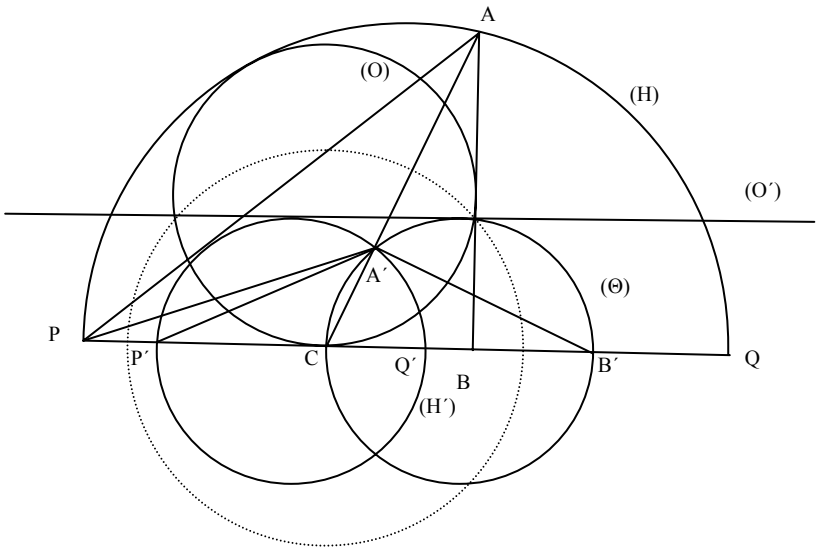
$$\frac{\sin\angle ABQ}{\sin\angle QBC}\frac{\sin\angle PAC}{\sin\angle BAP}\frac{\sin\angle RCB}{\sin\angle ACR}=1$$

άρα αποδείξαμε το ζητούμενο.

Πρόβλημα:

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα ημικύκλιο Η διαμέτρου PQ. Ο κύκλος Ο είναι εσωτερικά εφαπτόμενος στον Η όπως επίσης και στην PQ στο σημείο C. Ας υποθέσουμε ότι Α είναι ένα σημείο πάνω στο ημικύκλιο Η και το Β είναι ένα σημείο πάνω στην PQ τέτοιο ώστε το AB να είναι κάθετο στην PQ και επίσης εφαπτόμενο στο Ο. Να αποδειχθεί ότι το AC διχοτομεί την ∠PAB.

Λύση:



Θα χρησιμοποιήσουμε αντιστροφή με κέντρο το C και τυχαία ακτίνα .
Τότε ο κύκλος (O) θα απεικονιστεί σε μια ευθεία την (O΄) επειδή ο (O) διέρχεται από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής. Η ευθεία αυτή θα είναι παράλληλη προς την PQ και αυτό διότι ένας κύκλος που διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής απεικονίζεται σε ευθεία που

είναι κάθετη στην διάμετρο του κύκλου αυτού η οποία διέρχεται από το κέντρο της αντιστροφής. Η PQ είναι εφαπτόμενη στον κύκλο (O) στο κέντρο της αντιστροφής C δηλαδή κάθετη στην διάμετρο του (O) που διέρχεται από το C. Η ευθεία (O΄) είναι κάθετη στην διάμετρο του κύκλου (O) που διέρχεται από το C, οπότε είναι παράλληλη προς την PQ.
Ένας άλλος τρόπος, λίγο πιο σύντομος, για να αποδείξουμε την παραλληλία των (O΄) και PQ είναι ο εξής: Ο κύκλος (O) και η ευθεία PQ είναι εφαπτόμενοι μεταξύ τους άρα οι εικόνες τους θα είναι επίσης εφαπτόμενα μεταξύ τους σχήματα. Το μοναδικό τους κοινό σημείο είναι το κέντρο του κύκλου αντιστροφής άρα οι εικόνες τους που είναι ευθείες θα έχουν κοινό σημείο το σημείο ∞, οπότε είναι παράλληλες ευθείες.
Οι εικόνες των P και Q είναι δύο σημεία P΄,Q΄ που βρίσκονται πάνω στην ευθεία PQ αφού η RQ μένει αναλλοίωτη ως προς την αντιστροφή (C). Το ημικύκλιο (H) απεικονίζεται μέσω της αντιστροφής σε ένα ημικύκλιο (H΄) το οποίο θα έχει διάμετρο την P΄Q΄. Το ημικύκλιο αυτό θα εφάπτεται στην ευθεία (O΄) αφού το ημικύκλιο (H) εφάπτεται στον κύκλο (O). Το σημείο A΄ είναι το σημείο που τέμνονται η CA με το ημικύκλιο (H΄). Το σημείο A΄ είναι το αντίστροφο σημείο του σημείου A. Αυτό συμβαίνει διότι η CA μένει αναλλοίωτη αφού είναι ευθεία που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής. Το σημείο A είναι το κοινό σημείο της AC και του ημικυκλίου (H) άρα το αντίστροφο σημείο A΄ του σημείου A θα είναι το σημείο τομής των εικόνων τους, δηλαδή της ευθείας AC και του ημικυκλίου (H΄). Η ευθεία AB απεικονίζεται σε έναν κύκλο (Θ) που διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής και από την εικόνα του σημείου A, δηλαδή από το σημείο A΄. Το κέντρο του κύκλου που είναι η εικόνα της AB, θα ανήκει στην ευθεία CB (και αυτό διότι το κέντρο ενός κύκλου (Θ) που είναι εικόνα μιας ευθείας λ βρίσκεται πάνω στην κάθετο από το κέντρο αντιστροφής C προς την ευθεία λ). Η ευθεία AB εφάπτεται στον κύκλο (O) οπότε η εικόνα της που είναι ο κύκλος (Θ) θα εφάπτεται στην εικόνα (O΄) του κύκλου (O). Το B΄ είναι το δεύτερο σημείο τομής του κύκλου (Θ) με την PQ.
Έχουμε λοιπόν δύο κύκλους, τους (Θ) και (H΄), οι οποίοι είναι ίσοι μεταξύ τους αφού τα κέντρα τους βρίσκονται σε μία ευθεία η οποία είναι παράλληλη προς την κοινή τους εφαπτόμενη. Το κοινό σημείο της AB και του ημικυκλίου (H) είναι το A οπότε το κοινό σημείο των εικόνων τους είναι η εικόνα A΄ του A μέσω της εν λόγω αντιστροφής. Αφού οι κύκλοι (H΄) και (Θ) είναι ίσοι και τέμνονται στο σημείο A΄ άρα P΄A΄=A΄B΄ οπότε οι γωνίες ∠A΄P΄C=∠CB΄A΄. Επειδή CP΄·CP=CA·CA΄=δύναμη της αντιστροφής, θα έχουμε ότι το τετράπλευρο PAA΄P΄ είναι εγγράψιμμο οπότε ∠CP΄A΄=∠A΄AP (ως εξωτερική και απέναντι εσωτερική γωνία του τετραπλεύρου). {Αν το σημείο P ήταν εσωτερικό του τμήματος P΄C το τετράπλευρο P΄PA΄A θα ήταν πάλι εγγράψιμμο αλλά σε αυτήν την περίπτωση θα είχαμε ότι οι ∠CP΄A΄=∠A΄AP ως εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο}
Οι γωνίες ∠CAB=∠CB΄A΄ διότι τα τρίγωνα CAB και CB΄A΄ είναι ορθογώνια με ∠ACB κοινή γωνία. Άρα αποδείχθηκε το ζητούμενο.

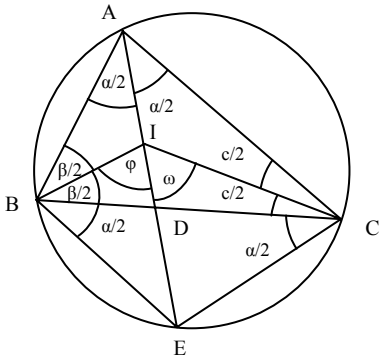
Πρόβλημα:

Ας υποθέσουμε ότι ABC είναι ένα τρίγωνο και ω είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου αυτού. Ας υποθέσουμε πως AD είναι η διχοτόμος της γωνίας ∠BAC θεωρώντας ότι το D είναι το σημείο τομής της διχοτόμου με την πλευρά BC. Θεωρούμε επίσης τον κύκλο K_1 ο οποίος εφάπτεται στον κύκλο ω στην BD και την AD. Επίσης θεωρούμε τον κύκλο K_2 ο οποίος εφάπτεται στον κύκλο ω στην CD και την AD. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι K_1 και K_2 είναι εφαπτόμενου στο σημείο I το οποίο είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC.

Λύση:

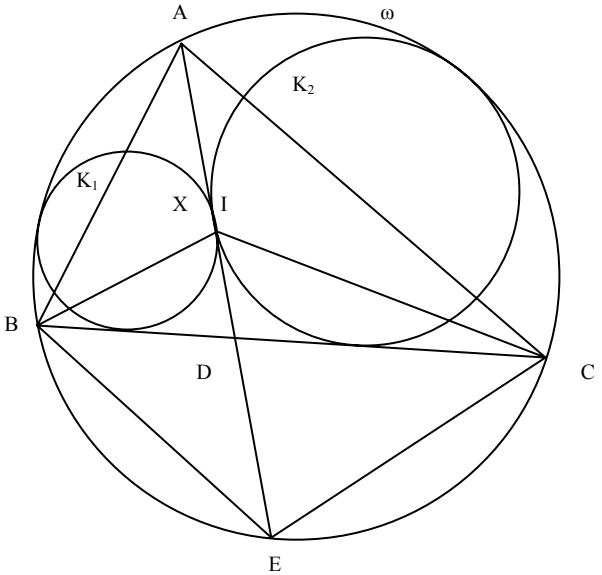
Πρώτα θα αποδείξουμε ότι EB=EI=EC. Η γωνία $\angle\varphi=\angle\frac{\alpha}{2}+\angle\frac{\beta}{2}$ επίσης $\angle IBE=\angle\frac{\alpha}{2}+\angle\frac{\beta}{2}$ άρα το τρίγωνο BIE είναι ισοσκελές οπότε BE=IE.

Η γωνία $\angle\omega=\angle\frac{\alpha}{2}+\angle\frac{c}{2}$ επίσης $\angle ICE=\angle\frac{\alpha}{2}+\angle\frac{c}{2}$ οπότε το τρίγωνο CIE είναι ισοσκελές και έτσι CE=IE.



Θα κάνουμε αντιστροφή με κέντρο το σημείο E και ακτίνα αντιστροφής την EB=EC=EI.
Ο κύκλος ω απεικονίζεται στην ευθεία BC. Πράγματι επειδή το B ανήκει στον κύκλο αντιστροφής τότε το B΄, που είναι το αντίστροφο σημείο του σημείου B, θα ταυτίζεται με το σημείο B. Ομοίως το σημείο C΄ που είναι το αντίστροφο του σημείου C θα ταυτίζεται με το C. Ο κύκλος ω περνάει από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής άρα απεικονίζεται σε ευθεία. Ο ω διέρχεται από τα B,C τα οποία είναι σταθερά σημεία με την αντιστροφή. Δηλαδή ξέρουμε δύο σημεία (τα B,C) της εικόνας του ω (η οποία είναι ευθεία) οπότε η εικόνα του είναι η ευθεία BC.

Η ευθεία AD είναι σταθερή διότι διέρχεται από το κέντρο της αντιστροφής.
Η εικόνα του κύκλου K_1 θα είναι ένας κύκλος K'_1 ο οποίος θα είναι εφαπτόμενος στην εικόνα του κύκλου ω (δηλαδή την ευθεία BC) θα εφάπτεται δε και στην εικόνα της ευθείας AD (που είναι η AD) όπως επίσης και στην εικόνα της ευθείας BC που είναι ο κύκλος ω. Το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι ο κύκλος K_1 μένει σταθερός κατά την αντιστροφή. Το ίδιο συμβαίνει και για τον κύκλο K_2 πράγμα που προκύπτει με ανάλογους συλλογισμούς.
Αφού ο κύκλος K_1 εφάπτεται με την AD, έστω στο σημείο X, τότε και οι εικόνες τους θα εφάπτονται στο σημείο X΄, που είναι η εικόνα του X μέσω της αντιστροφής.
Κατά την αντιστροφή ο κύκλος K_1 και η ευθεία AD μένουν αναλλοίωτα άρα η εικόνα X΄ του X είναι το X. Θα έχουμε λοιπόν $EX\cdot EX=EI^2 \Rightarrow EX=EI$ άρα $X\equiv I$. Ακριβώς τα ίδια θα επαναλάβουμε και για τον κύκλο K_2 για να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι οι κύκλοι K_1 και K_2 εφάπτονται με την AD στο ίδιο σημείο, το I, άρα εφάπτονται και μεταξύ τους στο I.



Βιβλιογραφία

Βιβλία

[1]. Aleksandrov, A.D., Kolmogorov, A. N.,& Lavrent'ev, M.A.(1999). *Mathematics Its content, Methods and meaning.* New York: Dover Publications, Inc.

[2]. Altshiller-Court, N.(2007). *College Geometry.* New York: Dover Publications, Inc.

[3]. Bakel'man, I.Y.(1974). *Inversions.*(S. Williams, & J. Teller, translation). Chicago: Chicago University Press.

[4]. Apostol, T.M. *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός, τόμος Ι.* Αθήνα: «ΑΤΛΑΝΤΙΣ –Μ. ΠΕΧΛΙΒΑΝΙΔΗΣ & ΣΙΑ» Α.Ε.

[5]. Apostol, T.M. *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός, Calculus, τόμος ΙΙ.* Αθήνα: «ΑΤΛΑΝΤΙΣ –Μ. ΠΕΧΛΙΒΑΝΙΔΗΣ & ΣΙΑ» Α.Ε.

[6]. Bankoff, L.(1994).The Marvelous Arbelos.In R.K. Guy, & R. E. Woodrow (Ed.). *The lighter side of mathematics*.(pp.247-253). The Mathematical Association of America.

[7]. Bankoff, L. (Sept., 1974). Are the Twin Circles of Archimedes Really Twin. *Mathematics Magazine*, *Vol. 47*, No. 4, 214-218.

[8]. Blair, D.(2000). *Inversion Theory and Conformal Mapping.* American Mathematical Society.

[9]. Brand, L.*Μαθηματική Ανάλυση (Advanced Calculus).*(Ανδρέου, Η., Δάσιος, Γ., Ζαφειροπούλου, Φ., Καδιανάκης ,Φ., Κόκκινος, Χ., Κυριάκη, Κ., μετάφραση). Αθήνα: Ε.Μ.Ε.

[10]. Brannan, D.A., Esplen, M.F.,& Gray, J.J.(1999).*Geometry.* Cambridge: Cambridge University Press.

[11]. Casey, J. (1888). *(A Sequel to the First Six Books of the Elements of Euclid).*London: Longmans, Green,& co.(reprints from the collection of the University of Michigan University Library- this Volume is produced from digital images created through the University of Michigan University Library's preservation reformatting program)

[12]. Caratheodory, C. (!998). *Conformal Representation*. New York: Dover Publications, Inc.

[13]. Churchill, R.,& Brown, J. (1998) *Μιγαδικές συναρτήσεις και εφαρμογές.*($2^η$ έκδ.). (Δ. Καραγιαννάκης, μετάφραση-επιμέλεια, Α. Λαυρέντζος, επιμέλεια $2^{ης}$ έκδοσης). Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

[14]. Clapham, C.,& Nicolson, J.(2005). *Concise Dictionary of Mathematics.* (5th Ed.). Great Britain: Oxford University Press.

[15]. Coolidge, J. L.(1963). *A history of geometrical methods.* New York: Dover Publications, Inc.

[16]. Coolidge, J. L.(2004). *A treatise on the circle and the sphere.* American Mathematical Society.

[17]. Courant, R.,& Robbins, H.(1996). *What is Mathematics?*.U.S.A: Oxford University Press.

[18]. Coxeter, H.S.M.,& Greitzer, S.L.(1967).*Geometry Revisited*. The Mathematical Association of America.

[19]. Coxeter, H.S.M.(1989). *Introduction to Geometry* (2nd Ed.).U.S.A: John Wiley & Sons, Inc.

[20]. Davis, D. (2001).*Η φύση και η δύναμη των Μαθηματικών.* Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.

[21]. Dixon, R.(1987). *Mathographics*. (2rd ed.). New York: Dover Publications, Inc.

[22]. Dodge, C.W.(2004). *Euclidean Geometry and Transformations*. New York: Dover Publications, Inc.

[23]. Dörrie, H.(1965).*100 Great Problems of Elementary Mathematics their History and Solution.*(Translated by David Antin).New York: Dover Publications, Inc.(Πρωτότυπη έκδοση 1958).

[24]. Ewald, E.(1971). *Geometry: An Introduction.* Belmont California: Wadsworth Publishing Company, Inc.

[25]. F.G.-M. (1952).Ασκήσεις Γεωμετρίας (Ιησουϊτών). (Δ. Γκιόκα, μετάφραση). Αθήναι:Εκδόσεις Α. Καραβία

[26]. Grattan-Guinness, I. *The Rainbow of Mathematics,* W. W. Norton & Co, 2000.

[27]. Hahn, L.-s. (1996). *Complex Numbers & Geometry.* The Mathematical Association of America.

[28]. Heath, T.L.(1981). *A History of Greek Mathematics.* New York: Dover Publications, Inc.

[29]. Heath, T.L.(2002). *The Works of Archimedes.* New York: Dover Publications, Inc.

[30]. Hilbert, D.,& Cohn-Vossen, S.(1990). *Geometry and Imagination*. New York: Chelsea Publishing Co.

[31]. Κισκύρας, Ν.(1973). *Θεωρήματα και προβλήματα Γεωμετρίας.* Αθήνα.

[32]. Κουτρουφιώτης, Δ.(2006). *Στοιχειώδης διαφορική γεωμετρία.* Αθήνα: Leader Books.

[33]. Lipschutz, M.M (Μάρτιος 1982). *Διαφορική Γεωμετρία.*(Πέτρος Δαμιανός Μποζώνης, επίβλεψη μετάφράσεως, Κουφογιώργος,Θ., Μπαϊκούσης Χ., μετάφραση). Αθήνα: ΕΣΠΙ.

[34]. Marchisotto, E. A., & Smith, J. T. (2007). *The Legacy of Mario Pieri in Geometry and Arithmetic*. Boston: Birkhäuser.

[35]. Marsden, J.E., Hoffman M.J. (1994).*Βασική Μιγαδική Ανάλυση* . Αθήνα: Συμμετρία.
[36]. Martin, G. E. (1975). *The Foundations of Geometry and the Non- Euclidean Plane.* New York: Springer-Verlag.
[37]. Martin, G. E. (1982). *Transformation Geometry An introduction to symmetry*. New York: Springer-Verlag.
[38]. Μερκουράκης, Σ.Κ., Χατζηφράτης, Τ.Ε. (2002).*Εισαγωγή στην Μιγαδική Ανάλυση*. Αθήνα: Συμμετρία.
[39]. Morley, F., & Morley, F.V.(1954) *Inversive Geometry.* New York; Chelsea publishing company.
[40]. Needham,T.(1999).*Visual Complex Analysis.*USA: Oxford University Press.
[41]. Ogilvy, C.S.(1990). *Excursions in Geometry.* New York: Dover Publications, Inc.
[42]. Pedoe, D.(1988). *Geometry A comprehensive Course.* New York: Dover Publications, Inc.
[43]. Pedoe, D.(1995). *Circles: a mathematical view.* The Mathematical Association of America.
[44]. Pettofrezzo, A.(1978). *Matrices and Transformations.* New York: Dover Publications, Inc.
[45]. Posamentier, A. S., & Salkind, C. T. (1996). *Challenging Problems in Geometry.* New York: Dover Publications, Inc.
[46]. Rademacher, H.,& Toeplitz, O.(1990).*The Enjoyment of Mathematics*, New York: Dover Publications.
[47]. Ratcliffe, J. (2006). *Foundations of Hyperbolic Manifolds.* U.S.A: Springer Science + Business Media, LLC.
[48]. Schwerdtfeger, H.(1979).*Geometry of Complex Numbers Circle geometry, Moebius Transformation, Non-Euclidean Geometry.* New York: Dover Publications, Inc.
[49]. Sved, M.(1991). *Journey into Geometries*. The Mathematical Association of America.
[50]. Σπανδάγου, Ε.(2001). *Η Μαθηματική συναγωγή του Πάππου του Αλεξανδρέως. Τόμος Α΄.* Αθήνα: Αίθρα.
[51]. Τζελέκης, Κ.Π. (2007). *Αγγλο-Ελληνικό Μαθηματικό Λεξικό.English-Greek Mathematical Dictionary.* Αθήνα:Πατάκης.
[52]. Yaglom, I. M.(1962). *Geometric transformations I*. New York: random house, inc.
[53]. Yaglom, I. M.(1973). *Geometric transformations III*. New York: random house, inc.
[54]. Yaglom, I. M.(1968). *Geometric transformations II*. New York: random house, inc.
[55]. Wells, D.(1991). *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry.* London: Penguin Books.
[56]. Wilker, J.B. Inversive Geometry. In C. Davis, B. Grünbaum,& F.A. Sherk. *The Geometric Vein* (pp. 379-442). New York: Springer-Verlag.
[57]. Φάκελος σημειώσεων του μαθήματος Ιστορία των νεότερων Μαθηματικών. Διδάσκων Δ. Λάππας

Άρθρα

[58]. Bergsten, C. *Magic circles in the arbelos*. (Department of Mathematics, Linköpings Universitet) [Retrieved on April.7,2007,at http://www.mai.liu.se/~chber/Geometri/Bergsten%20Circles.pdf
[59]. Boas, H. P. (March 2006). Reflections on the Arbelos. *American Mathematical Monthly, Vol. 113*, No. 3, 236–249.
[60]. Bottema, O. (2001). The Malfatti Problem. *Forum Geometricorum Vol.1,* 43–50.
[61]. Capitán F.J.G. *Inversión en Olimpiadas*. [Retrieved on April.7, 2007,at http://www.oei.es/oim/numero27/probinv.pdf
[62]. Coxeter, H.S.M.(June 1971). Inversive Geometry.[Electronic Version]. *Educational Studies in Mathematics. Vol. 3,* No3-4, 310-321.
[63]. Coxeter, H.S.M.(December 1966). Inversive distance. [Electronic Version].*Annali di Matematica Pura ed Applicata.* Vol.71, No 1, 73–83.
[64]. Danneels, E.,& Van Lamoen, F. Midcircles and the Arbelos. (2007). *Forum Geometricorum Vol. 7*, 53–65.
[65]. Dodge, C.W., Schoch, T., Woo, P.Y., & Yiu, P. (1999). Those ubiquitous Archimedean circles. *Mathematics Magazine*, *Vol. 72*, 202–213.
[66]. Donguk Kim, Deok-Soo Kim, & Kokichi Sugihara.(2006). Apollonius tenth problem via radius adjustment and Mobius transformations. [Electronic Version]. *Computer-Aided Design Vol. 38*, 14–21.
[67]. Gaba, M. G. (Jan., 1940).On a Generalization of the Arbelos. *American Mathematical Monthly*, *Vol. 47*, No. 1 19-24.

[68]. Gisch, D., & Ribando, J. M. (2004). Apollonius' Problem: A Study of Solutions and Their Connections. [Electronic Version]. *American journal of undergraduate research. Vol. 3,* No.1, 15-26.
[69]. Greenberg, M. J. (1997). *Euclidean and Non Euclidean Geometries Development and Histrory*. (3rd ed.). New York: W.H. Freeman and Company.
[70]. Klein, F. (July 1893). A comparative review of recent researches in Geometry.[Electronic Version]. (M. W. HASKELL, translation). *New York Math. Soc. 2,* 215-249.
[71]. Kunkel, P. (2007) *The tangency problem of Apollonius: three looks* [Electronic Version] BSHM *Bulletin Vol. 22,* 34–46.
[72]. Van Lamoen, F., & Weisstein, E. W. Pappus Chain. *From MathWorld – A Wolfram Web Resource*.
[Retrieved on April. 7, 2007, at http://mathworld.wolfram.com/PappusChain.html]
[73]. Patterson, B. C.(1933). The Origins of the Geometric Principle of Inversion. *Isis*, *Vol. 19*, No. 1, pp. 154-180.
[74]. Power, F. (2005). Some More Archimedean Circles in the Arbelos. *Forum Geometricorum*, *Vol. 5*,133–134.
[75]. Sakmar, I.A. Malfatti-Steiner Problem.(University of South Florida Department of Physics) [Retrieved on April.7, 2007,at http://mcc1.mccfl.edu/fl_maa/proceedings/2004/sakmar.pdf]
[76]. Schoch, T. *Arbelos: The Woo circles*. [Retrived on April. 7, 2007, at http://www.retas.de/thomas/arbelos/woo.html]
[77]. Weisstein, E. W.*Arbelos*. *From MathWorld - A Wolfram Web Resource*.
[Retrieved on April 7, 2007, at http://mathworld.wolfram.com/Arbelos.html]
[78]. Woo, P. Simple Construction for the Incircle of an Arbelos. (2001). *Forum Geometricorum*. *Vol. 1*, 133-136.
[79]. http://www.imo-official.org/ (επίσημη ιστοσελίδα των I.M.O).
[80]. http://olympiads.win.tue.nl/imo/#archives (ιστοσελίδα με πολύ πλούσιο υλικό πάνω σε θέματα Μαθηματικών Ολυμπιάδων).