Γ Λυκείου

4 ΓΛΧ

2013 - 2014

Μ.Ι.Παπαγρηγοράκης
Χανιά

[Μαθηματικά]

Θετικής – Τεχνολογικής Κατεύθυνσης
13.09

10 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ- ΟΡΙΣΜΟΣ

10.01 Αν $f(x)=\begin{cases} \alpha x+\beta & \text{αν } x\le 2 \\ \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & \text{αν } x>2 \end{cases}$ να βρείτε τα $\alpha,\beta\in R$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο 2

10.02 Αν $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{x-3}=-7$ και η f είναι συνεχής στο $x_0=3$ να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 3

10.03 Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $[0.+\infty)$ και ισχύει ότι $\eta\mu x\le f(x)\le x\sqrt{x}+\eta\mu x$, για $x\ge 0$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$

10.04 Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ παραγωγίσιμη στο 0 και στο 1 και ισχύει ότι $f(0)=f(1)$. Να αποδείξετε ότι η $g(x)=\begin{cases} f(2x) & \text{αν } x\le \frac{1}{2} \\ f(2x\text{-}1) & \text{αν } x>\frac{1}{2} \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\frac{1}{2}$ αν και μόνο αν $f'(0)=f'(1)$

10.05 Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ παραγωγίσιμη στο 1 για την οποία ισχύει ότι $f'(1)=2$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\left[f(1)-f\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\right]=2$

10.06 η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_o\in R$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{αν } x\le x_o \\ f'(x_o)(x\text{-}x_o)+f(x_o) & \text{αν } x>x_o \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_o

10.07 Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ παραγωγίσιμη στο 0 και ισχύει $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$ για κάθε $x,y\in R$, να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R.

10.08 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_o με $f(x_o)=3$, $f'(x_o)=2$. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{2f(x)\text{-}6}{x\text{-}x_o}$

10.09 Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$, παραγωγίσιμη στο 0. Να αποδείξετε ότι

A) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}=(\alpha-\beta)f'(0)$, $\alpha,\beta\in R^*$

B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^2(3x)-f^2(2x)}{x}=2f(0)f'(0)$

10.10 Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα Δ με $f(x)>0$ στο Δ και παραγωγίσιμη στο $x_0\ne 0$ να δείξετε ότι:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(x_0)}}{x^2-x_0^2}=\frac{f'(x_0)}{4x_0\sqrt{f(x_0)}}$$

10.11 Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο R και παραγωγίσιμη στο $x\in R$, να δείξετε ότι

A) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x-h)-f(x)}{h}=-f'(x)$

B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=2f'(x)$

10.12 Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ με σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$, ώστε να ισχύει $f(x+y)=ef(x)f(y)$ για κάθε $x,y\in R$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο με τετμημένη μηδέν και ισχύει ότι $f'(0)=e$, να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R και να βρείτε τον τύπο της.

10.13 Έστω συνάρτηση $f:R\to R$ παραγωγίσιμη στο 1 και ισχύει $f(xy)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in R^*$, να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R^*.

10.14 Έστω $f:R\to R$ παραγωγίσιμη στο $x_o=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}=3$. Να αποδείξετε ότι $f'(0)=3$

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ-ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

10.15 Βρείτε τις παράγώγους των συναρτήσεων

Α) $f(x)=\dfrac{e^x}{1+\sqrt{x}}$ Β) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$

Γ) $g(x)=\sqrt{x}\text{ημ}x+\dfrac{\ln x}{x-1}$ Δ) $f(x)=\dfrac{\ln x}{e^x}$

Ε). $g(x)=\dfrac{\text{ημ}x-\text{συν}x}{1+\text{εφ}x}$ Στ) $g(x)=\dfrac{\ln x}{x+2}$

Ζ) $f(x)=\dfrac{2+\text{ημ}x}{1-\text{ημ}x}$ Η) $f(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}$

Θ) $h(x)=\dfrac{2x+1}{e^x}$ Ι) $f(x)=\dfrac{1-\text{ημ}x}{1+\text{συν}x}$

10.16 Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα P με $P(x)=\left[P'(x)\right]^2$ για κάθε $x\in R$.

10.17 Να αποδείξετε ότι:

Α) Αν $f(x)=x^2\ln x$ τότε $2xf(x)-xf'(x)+x^2=0$

Β) Αν $y=\dfrac{x}{e^x}$ τότε $x\dfrac{dy}{dx}+(x-1)y=0$

10.18 Θεωρούμε μια συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $f(x+y)=e^xf(y)+e^yf(x)+xy+\alpha$ για κάθε $x,y\in R$. Να αποδείξετε ότι:

Α) $f(0)=-\alpha$

Β) η C_f περνά από την αρχή των αξόνων.

Γ) Αν είναι παραγωγίσιμη στο R τότε ισχύει ότι $f'(x_o)=f(x_o)+f'(0)e^{x_o}+x_o$, $x_o\in R$.

Δ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 τότε είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x_o)=f(x_o)+f'(0)e^{x_o}+x_o$ για κάθε $x_o\in R$

10.19 Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R, με $g(e)=1$ και $g'(e)=2$. Αν $f(x)=x^2g(x)+\dfrac{x^2}{\ln x}$ να βρείτε τον $f'(e)$

10.20 Να αποδείξετε ότι

Α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ Β) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^5-2^5}{x-2}=80$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

10.21 Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

$f(x)=\text{ημ}^2x-\text{συν}^2 3x$,

$f(x)=\text{εφ}^2(4x^3+1)$

$f(x)=\ln^3(x^2+3x)+\ln 3$

$f(x)=\text{συν}\sqrt{\ln^3(2x)}+\sqrt{2}$

$f(x)=\text{ημ}(2^x+3^x)+\text{ημ}t$, $t\in R$

$f(x)=(x^2+3)^4(x^3-5)^3+y^2$, $y\in R$

10.22 Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

Α) $f(x)=\begin{cases} x^2\text{ημ}\dfrac{1}{x} & \text{αν } x\neq 0 \\ 0 & \text{αν } x=0 \end{cases}$

Β) $f(x)=x^2+|x-3|+2$

Γ) $f(x)=x^{e^x}$ με $x>0$

Δ) $f(x)=2^{\text{εφ}x}$

10.23 Δίνεται η $f(x)=e^x+x^3+x$, $x\in R$.

Α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}

Β) Αν η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $D_{f^{-1}}$, να δείξετε ότι $\left(f^{-1}\right)'(1)=\dfrac{1}{2}$.

10.24 Α) Αν $f(x)=c(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ με $c,\alpha,\beta,\gamma\in R$ και $x\neq\alpha,\beta,\gamma$ τότε να αποδείξετε ότι:

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{x-\alpha}+\dfrac{1}{x-\beta}+\dfrac{1}{x-\gamma}$

Β) Να βρεθεί η f' αν $f(x)=\dfrac{(x^2+5)^3(1+x^4)^2}{\sqrt{1+x^2}}$

10.25 Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και ισχύει: $f^3(x)+x^2f(x)=2x^2\text{ημ}x$, για κάθε $x\in R$ να βρεθεί η παράγωγος της f στο $x_0=0$.

10.26 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και για κάθε $x \in R$ ισχύει $f(2x+3) = x^2 + 3x + 5$ να βρεθεί το $f'(3)$

10.27 Οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο R και για κάθε $x,y \in R$ ισχύει ότι $f(x+y)-g(x+y) = f(x)-g(x)$. Να δειχτεί ότι $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in R$

10.28 Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R. Να αποδειχτεί ότι

A) Αν η f είναι άρτια τότε η f' είναι περιττή

B) Αν η f είναι περιττή τότε η f' είναι άρτια

10.29 Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο 0 τέτοια ώστε για κάθε $x \in R$ να ισχύει $f(f(x)) = f(x) + 2x$. Να αποδείξετε ότι $f'(0) = -1$ ή $f'(0) = 2$

10.30 Οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο R και για κάθε $x \in R$ ισχύει ότι $g(x) = e^{f(x^2)}$, με $f'(1) \neq 0$, να αποδειχτεί ότι $g'(1) = 2g(1)f'(1)$

10.31 Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία είναι $f(x+y) = f(x)f(y)$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x,y \in R$. Αν ισχύει ότι $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-1}{x} = \ell \in R$ να αποδειχτεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R

10.32 Δίνεται ότι οι συναρτήσεις f,h είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο $[0,2]$ και ισχύει $2f^2(x) - h^3(x) = -9$ για κάθε $x \in [0,2]$. Αν $f(1) = 3$ και $f'(1) = -2$, να βρεθεί το $h'(1)$

10.33 Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \eta\mu \frac{2}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Να εξετάστε αν η $f'(x)$ είναι συνεχής στο $x_o = 0$

10.34 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$.

A) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $y = |f(x)|$ είναι παραγωγίσιμη στο R.

B) Αν ισχύει ότι $f(-2) = -5$ και $f'(-2) = 4$ να αποδείξετε ότι $|f(-2)|' = -4$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

10.35 Έστω μια συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R. Να αποδείξετε ότι:

A) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f'(x+2h) - f'(x)}{h} = 2f''(x)$, $x \in R$

B) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f'(x-h) - f'(x)}{h} = -f''(x)$, $x \in R$

Γ) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{4f'(x+2h) + 6f'(x-h) - 10f'(x)}{h} = 2f''(x)$ για κάθε $x \in R$

10.36 Να αποδειχτεί ότι:

A) Αν $y = \ln(e^{2x}+1) - x$ τότε $y'' = (1-y')(1+y')$

B) Αν $y = \eta\mu(\ln x) + \sigma\upsilon\nu(\ln x)$ τότε $x^2 y'' + xy' + y = 0$

10.37 Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και για κάθε $x \in R$ ισχύει $f(x^2) = xf(x)$, να αποδείξετε ότι $f''(1) = 0$.

10.38 Να αποδείξετε ότι:

A) Αν $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, τότε $f^{(\nu)}(x) = \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\nu\pi}{2}\right)$

B) Αν $f(x) = xe^x$ τότε $f^{(\nu)}(x) = e^x(x+\nu)$

10.39 Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα $P(x)$ για τα οποία ισχύει ότι $P(x) = [P'(x)]^2$

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

10.40 Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_o = 1$ και ισχύει $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-x^2}{x-1} = 7$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1,f(1))$ είναι κάθετη στην ευθεία $x+9y+5=0$

10.41 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3$. Να βρείτε τις εφαπτόμενες της C_f που διέρχονται από το $M(-2,-8)$

10.42 Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι: $x\ln x \le f(x) \le x^2 - x$ για κάθε $x\in\Delta$. Να αποδείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 1$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(1,f(1))$.

10.43 Αν $f:(0,+\infty)\to R$ με $f(x)=\frac{1}{x}$ και $\alpha>0$, να αποδειχτεί ότι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν οι ημιάξονες Ox, Oy και η εφαπτομένη της καμπύλης στο $x_o=\alpha$ είναι ανεξάρτητο του α.

10.44 Να βρεθούν οι εφαπτόμενες των C_f, C_g όταν $f(x)=x^2+2$ και $g(x)=-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{2}$ που τέμνονται στον $y'y$ και είναι κάθετες μεταξύ τους.

10.45 Αν $f(x)=\begin{cases}\alpha x^2+2\alpha x+\beta+\alpha & x\ge 2\\ \frac{\gamma}{x+1} & x<2\end{cases}$, να βρεθούν τα $\alpha,\beta,\gamma\in R$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A(2,f(2))$ να είναι παράλληλη προς την $2x+y-1=0$

10.46 Αν $f(x)=\alpha\ln x+\beta x^2+3$, να βρείτε τα $\alpha,\beta\in R$ ώστε η ευθεία ε: $2x-y+4=0$ να είναι εφαπτόμενη της C_f στο σημείο της $A(1,f(1))$.

10.47 Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει ότι $f(2+x)-f(2-x)=-2x$, $\forall x\in R$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο $(2,f(2))$ είναι κάθετη στην $y=x$.

10.48 Αν $f(x)=4-x^2$ και $g(x)=-x^2+8x-20$. Να βρείτε τις κοινές εφαπτόμένες των C_f και C_g.

10.49 Για ποια τιμή του $\alpha\neq 0$ η εφαπτόμενη της $f(x)=x^2-3x$ στο $(1,f(1))$ είναι εφαπτόμενη της $g(x)=\frac{\alpha}{x}$

10.50 Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ και $g(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\sin x$ έχουν κοινή εφαπτομένη σε κάθε κοινό τους σημείο.

10.51 Θεωρούμε την συνάρτηση f που έχει συνεχή πρώτη παράγωγο στο R με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$. Αν η C_g της g με $g(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$ τέμνει τον άξονα $x'x$, να αποδειχτεί ότι η εφαπτομένη στο σημείο τομής, σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45^o

10.52 Να βρείτε τον $\alpha\in R$ ώστε η συνάρτηση f με $f(x)=\alpha^x$, να έχει εφαπτομένη την $y=x$.

10.53 Μία συνάρτηση $f:R\to R$ έχει την ιδιότητα: $f(x-2)\le x^2-3x+2\le f(x-3)+2x-4$, $\forall x\in R$.
Έστω μεταβλητή ευθεία η οποία διέρχεται από το $M\left(-\frac{1}{2},0\right)$ και τέμνει τη C_f σε δύο διαφορετικά σημεία A και B.
Να βρείτε τον τύπο της f και να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της C_f στα A και B τέμνονται κάθετα.

10.54 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\alpha\cdot\ln x$, $x>0$, όπου $\alpha\in R$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο σημείο της $M(1,f(1))$ και αποδείξετε ότι διέρχεται από σταθερό σημείο P για κάθε $\alpha\in R$.

10.55 Αν η ευθεία $y-2x=0$ είναι η εφαπτομένη του διαγράμματος της $y=f(x)$, στο σημείο της με $x_o=-1$, να βρεθεί η εφαπτομένη (ε_1) του C_g της g με $g(x)=f\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ στο σημείο με $x_1=1$

10.56 * Αν $f(x)=\dfrac{1}{x}$ και $g(x)=e^{-x}$, να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη.

10.57 Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των $g(x)=e^x$ και $f(x)=2x^2$, έχουν κοινή εφαπτομένη

10.58 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4-4x^2-3x$. Να βρεθεί ευθεία που να είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε δύο διαφορετικά σημεία της.

10.59 ** Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R, και ισχύει $f(\ln x)=x\ln x-x$, $x>0$

Α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της παραγώγου, $C_{f'}$, διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη 0.

Γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου το οποίο σχηματίζεται από την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με $x_o=1$ και τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

10.60 ** Έστω η $f(x)=\dfrac{\ln(\alpha x)}{x}$ με $\alpha,x>0$

Α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(x_o,f(x_o))$.

Β) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω εφαπτόμενες στο σημείο $(x_o,f(x_o))$, καθώς μεταβάλλεται το α, διέρχονται από το ίδιο σημείο.

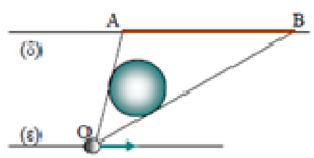
10.61 Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$, με $f(x^2)+f(x)=3\cdot\ln x+4$

Α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της γραφικής παράστασης της f στο $(1,f(1))$

Β) Να υπολογίσετε την τιμή του ορίου $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\cdot f(x)-2}{x^2-1}$.

Η ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΩΣ ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

10.62 Το κινητό O κινείται με σταθερή ταχύτητα $2m/\sec$ κατά μήκος της ευθείας (ε).
Κυκλικό εμπόδιο έχει το κέντρο του στην μεσοπαράλληλη των ευθειών (ε),(δ), έχει διάμετρο 2m ίση με το μισό της απόστασης των (ε),(δ) και δημιουργεί την «σκιά» AB. Να βρεθεί ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής του μήκους AB την στιγμή κατά την οποία το τρίγωνο OAB γίνεται ορθογώνιο για πρώτη φορά
(Άσκηση από www.mathematica.gr)



10.63 Σημείο Μ ξεκινά από το $O(0,0)$ και κινείται πάνω στην καμπύλη $y=\sqrt{x}$, ώστε η γωνία $x\hat{O}M$ να ελαττώνεται με ρυθμό $\theta'(t)=-\dfrac{\pi}{14}\text{rad}/\sec$.

Α) Να αποδείξετε ότι η τετμημένη $x(t)$ του σημείου Μ δίνεται από τη σχέση: $x(t)=\sigma\varphi^2\theta(t)$ και η απόσταση $s(t)$ του σημείου Μ από την αρχή των αξόνων ισούται με $s(t)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\theta(t)}{\eta\mu^2\theta(t)}$

Β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης OM, τη στιγμή t_o που είναι $x\hat{O}M=\dfrac{\pi}{6}$

11 Θ ROLLE

11.01 Αν $f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha x+\beta & x<0 \\ 3+(\gamma-\alpha)x & x\geq 0 \end{cases}$ να βρεθούν οι $\alpha,\beta,\gamma\in R$ ώστε να εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[-1,1]$ και να βρεθεί $\xi\in(-1,1)$ ώστε $f'(\xi)=0$.

11.02 θεωρούμε μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής και μη μηδενική στο $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(x_o)=f(x_o)\varepsilon\varphi x_o$.

11.03 Δίνεται ότι η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, $\alpha>0$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $\frac{f(\alpha)}{\alpha}=\frac{f(\beta)}{\beta}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $\xi f'(\xi)=f(\xi)$

11.04 Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β). Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $3\xi^2\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta^3-\alpha^3}=f'(\xi)$

11.05 Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R με $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$ και $\frac{f(2000)}{f(1999)}=e$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=f(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1999,2000)$.

11.06 Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=e^x+2x$ και $g(x)=e^{-x}-x^3$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο που βρίσκεται στον $y'y$.

11.07 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^5+3x-\alpha=0$ έχει μοναδική ρίζα στο R

11.08 Να δειχθεί ότι η εξίσωση $2013x^{2012}-2012(\lambda+1)x^{2011}+\lambda=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$ για κάθε $\lambda\in R$

11.09 Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύουν ότι είναι συνεχής στο $[1,e]$, παραγωγίσιμη στο $(1,e)$ και $f(e)-f(1)=1$. Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση $xf'(x)=1$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(1,e)$.

11.10 Δίνονται οι $\alpha,\beta,\gamma\in R$. Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση $\alpha\sigma\upsilon\nu x+\beta\sigma\upsilon\nu 2x+\gamma\sigma\upsilon\nu 3x=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,\pi)$.

11.11 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0$ με $\beta^2<\alpha\gamma$, $\alpha\neq 0$ έχει μοναδική ρίζα στο R

11.12 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^8=7x+6$ δεν έχει περισσότερες από δύο διαφορετικές ρίζες στο R

11.13 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ έχει μέχρι τρείς ρίζες στο R

11.14 Να λύσετε τις εξισώσεις:
A) $\ln\left(1+xe^x\right)=x$ B) $2^x+5^x=2+5x$

11.15 Να δείξετε ότι μεταξύ δύο ριζών της εξίσωσης $e^x\eta\mu x=1$ υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $e^x\sigma\upsilon\nu x=-1$

11.01 A) Να δείξετε ότι η $f(x)=x^3+\lambda x^3-3x+1$ για κάθε $x\in R$ με $\lambda\in R$ δεν είναι 1 – 1.
B) Να δείξετε ότι εφαρμόζεται το θ. Rolle για τη συνάρτηση $g(x)=e^{f(x)}+x^2+\lambda x-3$

…

11.02 Η απόσταση δύο πόλεων που συνδέονται με ευθεία σιδηροδρομική γραμμή είναι $51\ km$. Μια αμαξοστοιχία διανύει τη μεταξύ τους απόσταση σε 0,6 ώρες. Να αποδειχτεί ότι για κάποια χρονική στιγμή η αμαξοστοιχία έχει ταχύτητα $85\ km/h$.

11.03 Αν f συνεχής στο $[1,5]$ με $f(1)=-2$ και $|f'(x)|<2$, $\forall x\in(1,5)$ να δείξετε ότι $-10<f(5)<6$

11.04 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[1,4]$ και για κάθε $x\in R$ ισχύει $f(4x)=4f(x)$ και $f\left(\frac{25}{100}\right)=1$ να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(1,4)$ ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+f'(\xi_3)=12$

11.05 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log x$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,20)$ ώστε $\xi=\frac{19\cdot \log e}{1+\log 2}$.

11.06 Να αποδείξετε τις ανισότητες:

Α) $xe^{\frac{1}{x+1}}<x+1<xe^{\frac{1}{x}}$ για κάθε $x>0$.

Β) $2-\frac{e}{\pi}<\ln\pi<\frac{\pi}{e}$

11.07 Να αποδείξετε τις ανισότητες:

Α) $\frac{x}{x+1}\prec\ln(x+1)\prec x$ αν $x>0$

Β) $x\le e^{x-1}\le 1+(x-1)e$ αν $x\in(1,2)$

….-….

11.08 Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και υπάρχουν τρία συνευθειακά σημεία της C_f, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in R$ με $f''(\xi)=0$.

11.09 Η συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο R. Αν οι αριθμοί $f(2),f(4),f(6)$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(2,6)$ ώστε $f''(x_o)=0$.

11.10 Έστω $f:R\to R$ τρεις φορές παραγωγίσιμη. Υποθέτουμε ότι $f(1)=f(0)=f'(0)=f''(0)=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x\in(0,1)$ ώστε $f'''(x)=0$.

11.11 Έστω f παραγωγίσιμη στο R της οποίας η παράγωγος είναι γνησίως φθίνουσα στο R. Να αποδείξετε ότι: $f(1999)+f(2002)<f(2000)+f(2001)$.

11.12 Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(\ln\alpha)=f(\ln\beta)$. Αν ισχύει $\ln\alpha<\ln\gamma<\ln\beta$, με $\alpha,\beta,\gamma>0$ και $\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\beta}{\gamma}=e^2$, να δειχτεί ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in R$ με $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$

11.13 Έστω συνάρτηση f, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Να αποδειχτεί ότι υπάρχει $x_o\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f'(x_o)=f(x_o)f''(x_o)$.

11.14 Έστω $f(x)=\alpha^2x^6+\beta x^4+x^2+\gamma+\delta$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R^*$ με $3\beta^2<5\alpha^2$. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τρία διαφορετικά συνευθειακά σημεία που να ανήκουν στη γραφική παράσταση της.

11.15 Έστω η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο R με $f(-1)=-1$, $f(1)=1$. Να αποδειχτεί ότι υπάρχουν

Α) $-1<\xi_1<\xi_2<1$ ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=2$

Β) $-1<\kappa_1<\kappa_2<1$ ώστε $\frac{1}{f'(\kappa_1)}+\frac{1}{f'(\kappa_2)}=2$

11.16 Η συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$, είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β), με $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Να αποδείξετε ότι:

Α) αν υπάρχει $x_o\in(\alpha,\beta)$ με $f(x_o)>0$, τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f''(\xi)<0$,

Β) αν υπάρχει $x_o\in(\alpha,\beta)$ με $f(x_o)<0$, τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f''(\xi)>0$.

11.17 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\alpha]$ με $\alpha>1$ και ισχύει $f(0)=0$ και $f(x^2)=2f(x),\ \forall x\in[0,\alpha]$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(0,\alpha)$ ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=\dfrac{f(\alpha)}{2\left(\sqrt{\alpha}-1\right)}$.

11.18 Αν για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle, τότε να αποδείξετε ότι:

Α) υπάρχουν αριθμοί $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ με $\xi_1<\xi_2$ και $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$.

Β) υπάρχουν $\kappa_1,\kappa_2\in(\alpha,\beta)$ με $\kappa_1<\kappa_2$ ώστε $3f'(\kappa_1)+2f'(\kappa_2)=0$

Γ) ότι η εξίσωση $f'(x)=f(x)-f(\alpha)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α,β).

11.19 Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(2)=0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $M(\xi,f(\xi))$, να τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $P(2\xi,0)$

11.20 Έστω η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha)=2\beta$, $f(\beta)=2\alpha$

Α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β).

Β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=4$.

11.21 Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$, με $f(\beta)<0$ και $f(\alpha)=f'(\alpha)=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$, ώστε $f''(\xi)<0$.

11.22 Η συνάρτηση $f:[1,4]\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν $f(1)=2$ και $f(4)=8$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

11.23 Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύουν οι προυποθέσεις του θ Rolle στο διάστημα $[2,20]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν

Α) $x_1,\ x_2,\ x_3$ με $2<x_1<x_2<x_3<20$ ώστε $f'(x_1)+f'(x_2)+f'(x_3)=0$

Β) $\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3$ με $2<\xi_1<\xi_2<\xi_3<20$ ώστε $2f'(\xi_1)+3f'(\xi_2)+4f'(\xi_3)=0$

11.24 Αν $\frac{\alpha}{4}+\frac{\beta}{3}+\frac{\gamma}{2}+\delta=0$, να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ μηδενίζεται για ένα τουλάχιστον σημείο του διαστήματος $(0,1)$

11.25 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3+2\lambda x-\lambda-1=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

11.26 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha\cdot\ln^3x+\beta\cdot\ln^2x+\gamma\cdot\ln x+\delta=0$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ ώστε $3(2\alpha+\gamma+\delta)+4\beta=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,e^2)$.

11.27 Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $f(x)>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ και $f(20)=e\cdot f(19)$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=f(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(19,20)$.

11.28 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)\ln(2x)$. Να αποδείξετε ότι:

Α) Υπάρχει $\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(2x)^x=e^{2-2x}$ έχει ρίζα στο $\left(\frac{1}{2},1\right)$

11.29 Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν $f(x)\ge\dfrac{f(0)+f(10)}{2}$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o\in(0,10)$ τέτοιο ώστε $f'(x_o)=0$

ΣΤΑΘΕΡΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

11.30 Δίνεται συνάρτηση $f:R\to R$, ώστε: $f'''(x)+2f'(x)=f''(x)+2f(x)$, για κάθε $x\in R$ και $f(0)=f'(0)=f''(0)=1$. Να αποδείξετε ότι :

Α) Οι συναρτήσεις $h(x)=f(x)e^{-x}$ και $g(x)=\left[f''(x)-f'(x)\right]^2+2\left[f'(x)-f(x)\right]^2$ είναι σταθερές συναρτήσεις

Β) Να βρεθεί ο τύπος της f.

11.31 Θεωρούμε συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει ότι: $\left|f(x)-f(y)\right|+\text{συν}(x-y)\le 1$ για κάθε $x,y\in R$. Να αποδειχτεί ότι η f είναι σταθερή

11.32 Να βρείτε την f αν $f'(1-2x)=7-12x$, $x\in R$ και $f(1)=2$

11.33 Να βρείτε την f αν $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$, $x\in R^*$ και $f(-1)=f(1)=2$

11.34 Να αποδειχτεί ότι:

Α) αν $f''(x)=f(x)$ για κάθε $x\in R$ και $f(0)=f'(0)=1$ τότε $f(x)=e^x$, $x\in R$,

Β) αν $\delta''(x)=\delta(x)+5x$ για κάθε $x\in R$, $\delta(0)=1$ και $\delta'(0)=-4$, τότε $\delta(x)=e^x-5x$, $x\in R$.

11.35 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f με $f(0)=2$, αν ισχύει $\left(f(x)-e^x\right)\left(f'(x)-e^x\right)=0$, $\forall x\in R$

11.36 Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο R παραγωγίσιμη στο R^* με $f(0)=0$, της οποίας όλες οι εφαπτόμενες διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Να βρείτε εκείνη τη συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $(2,1)$ και $(-2,1)$

11.37 Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R. Να δείξετε ότι ισχύει $f'(x)=(2x+1)f(x)$, $\forall x\in R$ αν και μόνο αν υπάρχει $c\in R$ ώστε $f(x)=ce^{x^2+x}$

11.38 Να βρείτε την f, αν για κάθε $x\in R$ ισχύει $f'(x)-f(x)=\text{ημ}x+\text{συν}x$ και $f(0)=1$.

11.39 Αν η $f:(0,\pi)\to R$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ και $f''(x)=-f(x)$ για κάθε $x\in(0,\pi)$ να αποδείξετε ότι $f(x)=\alpha\,\text{ημ}x$, $\alpha\in R$.

11.40 Να βρεθεί η συνάρτηση $f:R\to R$ αν ισχύει: $(x-2)f'(x)=2x^2-5x+2$, $x\in R$ και $f(3)=7$

11.41 Να βρεθεί συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ παραγωγίσιμη, αν ισχύει ότι $f'(x)=f(x)\cdot\ln\left[f(x)\right]$ για κάθε $x>0$ και $f'(1)=0$

11.42 Να βρεθεί, αν υπάρχει, συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο R^* και για κάθε $x\in R^*$ ισχύει $f(x)=xf'(x)$, $f(1)=1$ και $f(-1)=2$.

11.43 Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης που διέρχεται από το $M(0,-3)$ και σε κάθε σημείο της με τετμημένη x_o έχει εφαπτομένη με $\lambda_{\varepsilon\varphi}=\dfrac{4x_o}{4x_0^2+1}$

11.44 Να βρεθεί παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, αν ισχύει ότι $f'(1)=0$ και $f'(x)=f(x)\cdot\ln\left[f(x)\right]$ για κάθε $x>0$

11.45 Αν η $f:(0,\pi)\to R$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ και $f''(x)=-f(x)$ για κάθε $x\in(0,\pi)$, να αποδείξετε ότι $f(x)=\alpha\,\text{ημ}x$, $\alpha\in R$.

11.46 Να βρεθεί συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με $f(x)>0$, $x\in R$ της οποίας η γραφική παράσταση σε κάθε σημείο $M(x,f(x))$ έχει εφαπτομένη με κλίση $4x\sqrt{f(x)}$, $x\in R$ και ισχύει $f(1)=9$

11.47 Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f αν είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, η C_f διέρχεται από το $O(0,0)$ η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $O(0,0)$ είναι παράλληλη στην ευθεία $-2x+y+3=0$ και ισχύει $\left(x^2+1\right)\cdot f''(x)+4x\cdot f'(x)+2f(x)=0,\ x\in R$

11.48 Έστω οι συναρτήσεις f και g δυο φορές παραγωγισιμες στο R με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$ Αν δέχονται κοινή εφαπτόμενη σε κοινό σημείο τους και ισχύει $f''(x)g(x)=f(x)g''(x)$ για κάθε $x\in R$, να δείξετε ότι $f(x)=g(x)$

11.49 Α) Έστω συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει $f''(x)+f(x)=0$, $x\in R$ και $f(0)=f'(0)=0$. Να αποδείξετε ότι η f είναι η μηδενική συνάρτηση.
Β) Έστω συνάρτηση $g:R\to R$ με $g''(x)+g(x)=0$ για κάθε $x\in R$ και $g(0)=0$, $g'(0)=1$. Να αποδείξετε ότι η $g(x)=ημx$.

11.50 Έστω η περιττή και παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(-α,α)\to R$ για την οποία ισχύει ότι $|f'(x)|\leq f(x)$ για κάθε $x\in(-α,α)$. Να αποδείξετε ότι $f''(0)=0$

11.51 Να βρείτε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο R, αν η εφαπτομένη στη γραφική της παράσταση σε κάθε σημείο $(x,f(x))$ να έχει κλίση $2xe^{-x}-f(x)$ και το $A\left(1,\frac{2}{e}\right)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της f

11.52 Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$ για την οποία υποθέτουμε ότι $f(2x-f(x))=x$ για κάθε $x\in R$ και επιπλέον υπάρχει $α$ με $f(α)=α$. Να δείξετε ότι $f(x)=x$ για κάθε $x\in R$

11.53 Δίνεται η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο R ώστε να ισχύει $[f'(x)+f(x)]e^{2x}=f(x)-f'(x)$ για κάθε $x\in R$ και $f(0)=1$. Να βρείτε τον τύπο της f.

11.54 * Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ με $f(xy)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,\ y\in(0,+\infty)$ και $f(e)=e$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$. Αποδείξτε ότι
Α) η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$
Β. $f(x)=e\ln x$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

11.55 * Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με $f(0)=0$ για την οποία ισχύει ότι $f'(x)\left(e^{f(x)}+1\right)=2x+\frac{2x}{x^2+1}$ για κάθε $x\in R$. Να βρεθεί ο τύπος της f.

11.56 Έστωι η συνάρτηση $f:R\to R$, ώστε να ισχύει ότι $f(1)=-1$, $f(2)=2$ και $f(x+y)=xy+y^2+f(x)$ για κάθε $x,y\in R$, . Να αποδειχτεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R και να βρεθεί ο τύπος της

11.57 Έστω συνάρτηση $f:R\to R$ και $ν\in N$. Αν $ν\geq 2$ και ισχύει $|f(x)-f(y)|\leq|x-y|^{ν}$, $\forall x,y\in R$ τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.

11.58 Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο R με $f'(0)=2$ και ισχύει $f(y+x)=f(y)f(x)e^{2xy}$, για κάθε $x,y\in R$. Να αποδείξετε ότι:
Α) $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$ και $f(0)=1$
Β) η f είναι παραγωγίσιμη στο R, με $f'(x)=2f(x)(x+1)$, για κάθε $x\in R$
Γ) ο τύπος της f είναι $f(x)=e^{x^2+2x}$

11.59 Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$, παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1)=1$ για την οποία ισχύει $f(xy)=x^2f(y)+y^2f(x)$. για κάθε $x,y>0$.
Α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$ ισχύει $x^2f'(x)=2xf(x)+x^3$
Β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)=x^2\ln(x)$

12 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

12.01 Να μελετήσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων A) $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$

B) $f(x)=x+\sigma\upsilon\nu x,\quad x\in[0,2\pi)$

12.02 Να μελετήσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων A) $f(x)=\begin{cases} e^x-ex-1 & x\le 0\\ x^2\ln x & x>0\end{cases}$

B) $f(x)=\ln(1+x^2)-e^{-x}+1$

12.03 Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x^2|x-1|}$ στο $\left[0,\dfrac{2}{3}\right]$

12.04 Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\ln(x-1)+x^2+x-6=0$

12.05 Να λύσετε την εξίσωση $\ln(x+1)-\dfrac{2x}{x+2}+x=0$.

12.06 Να λύσετε την εξίσωση $e^{x+1}+2x-e=0$

12.07 Έστω $f:(0,+\infty)\to R$, παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει $f'(x)-\dfrac{f(x)}{x}=2\ln x,\ f(1)=2$. Να βρεθεί ο τύπος της f και η μονοτονία της

12.08 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln(x-1)}{\ln x},\ x\ge 2$

A) να μελετήσετε τη μονοτονία της f

B) να αποδείξετε ότι:

α) $\ln\left(e^{\pi}-1\right)\ln\left(e^{\pi}+1\right)<\pi^2$.

β) $\ln(x-1)\cdot\ln(x+1)<\ln^2 x,\ x>2$

12.09 Για κάθε $x\in[2+\infty)$ να αποδείξετε ότι $(x+1)\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{x+1}-x\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{x}>1$

12.10 Να αποδείξετε ότι $2-\dfrac{e}{2}<\ln 2<\dfrac{2}{e}$

12.11 Να αποδείξετε ότι $e^{\pi}>\pi^{e}$

12.12 Να αποδείξετε ότι $2\ln(\eta\mu x)<\eta\mu^2 x$ για κάθε $x\in(0,\pi)$

12.13 Εστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[0,3]$ με $f'(x)>0$ και $f(1)=-1$, $f(2)=1$. Αν $g(x)=\dfrac{f(x)}{1+f^2(x)},\ 0\le x\le 3$, να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και το σύνολο τιμών της g

12.14 Αν η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι παραγωγίσιμη με $f(0)=0$ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x},\ x>0$ είναι γνησίως φθίνουσα.

12.15 Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f με $f(x)=\ln\left(1+x^2-e^{-x}\right)$ είναι γνησίως αυξουσα

12.16 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία, ισχύουν $f(x)>0$ και $f^3(x)+\ln(f(x))+e^{f(x)}=x^3+x^2+2x-1$ για κάθε $x\in R$. Να λύσετε την εξίσωση $f(\ln x)=f\left(1-x^2\right)$

12.17 Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f\left(e^{-x}\right)=f(x+\alpha)$

12.18 Έστω συνάρτηση $f:R \to R$ για την οποία ισχύει ότι $f(1-x) = -f(1+x)$ για κάθε $x \in R$. Αν ισχύει ότι $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in R$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$

12.19 Οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο R με $f(0) = g(0)$ και για κάθε $x \in R$ να ισχύουν $f'(x)g(x) > f(x)g'(x)$ και $g(x) > 0$. Να αποδείξετε ότι: $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$ και $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in (-\infty,0]$.

12.20 *Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[0,+\infty)$ ώστε $[f(x)]^5 + 2[f(x)]^3 + 3f(x) =$
$= (x+1)\ln(x+1) - \frac{4}{5}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + 2004$. Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία της.

12.21 Αν $xg'(x) > \sigma\upsilon\nu x - g(x)$ για κάθε $x \in R$, να αποδείξετε ότι $g(x) \succ \frac{\eta\mu x}{x}$ για κάθε $x \neq 0$.

12.22 Έστω μια συνάρτηση $f:R \to R$ για την οποία ισχύει ότι $f'(x) > 2f(x)$ και $f(0) = 1$. Να αποδείξετε ότι $f(x) > e^{2x}$ για κάθε $x > 0$.

12.23 Αν η συνάρτηση $f:R \to R$ είναι παραγωγίσιμη με $f(0) = 0$ και $f'(x) + f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$, να αποδείξετε $xf(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$.

12.24 Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f, που είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και ισχύει ότι $f'(x) \leq f(1) - f(0)$ για κάθε $x \in (0,1)$

ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

12.25 Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα:

Α) $f(x) = x^2 \ln x$ Β) $f(x) = 2^{\sigma\upsilon\nu x}, 0 \leq x < 2\pi$

Γ) $f(x) = \frac{\ell nx}{x^2}$ Δ) $f(x) = \frac{e^x}{2x}$ Ε) $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$

12.26 Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα:

Α) $f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 1 \\ 7, & x = 1 \\ (x-2)^2, & x > 1 \end{cases}$

Β) $f(x) = \begin{cases} 1 - e^{x-1}, & x \geq 1 \\ \ln(1-x), & x \prec 1 \end{cases}$

12.27 Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα:

Α) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$

Β) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

12.28 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2(x+\alpha)^2(x-\beta)^2$ με $\alpha,\beta > 0$ έχει τρία τοπικά ελάχιστα και δύο τοπικά μέγιστα.

12.29 Να βρεθεί για ποιες τιμές του $\alpha \in R$, η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 + (\alpha-1)x^2 + 2x + 10$ είναι γνησίως αύξουσα στο R.

12.30 Να βρεθεί ο $\kappa \in R$ ώστε η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = xe^{2\kappa - x}$ να είναι το e.

12.31 Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha,\beta \in R$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \alpha\ln 2x + \frac{\beta}{x} + \alpha$ να έχει στη θέση $x_o = 1$ τοπικό ακρότατο με τιμή $2 + \ln 2$.

12.32 Α) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x^\nu}, \nu \in N^*$

Β) Να δείξετε ότι $e^x \geq \left(\frac{ex}{\nu}\right)^\nu$, $\forall x \in (0,+\infty)$

12.33 Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^x+x^2-x-1$

Α) Να αποδείξετε ότι η C_f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη σε ένα μόνο σημείο της.

Β) Να λύσετε την εξίσωση $e^x+x^2=x+1$.

Γ) Να αποδείξετε ότι $e^x-1\ge x(1-x)$, $\forall x\in R$

12.34 Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R, για την οποία ισχύουν: $f(0)=1$ και $e^{2x}f(x)-1\le 0$, για κάθε $x\in R$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0,1)$.

12.35 Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $(f(x))^2+x^2=1+2xf(x)$, $\forall x\in R$. Δείξτε ότι η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

12.36 Έστω η συνάρτηση $f(x)=x\ln^2 x$. Να βρείτε το σημείο της C_f όπου η f έχει τη μικρότερη κλίση.

12.37 Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in R$ αν η συνάρτηση $f(x)=x^3-(\lambda-1)x^2+(\lambda+5)x-2$ δεν έχει ακρότατα.

12.38 Έστω η συνάρτηση $f:(0,1)\to R$, η οποία είναι παραγωγίσιμη τρεις φορές με $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in(0,1)$. Αν υπάρχουν $x_1,x_2\in(0,1)$ με $x_1\ne x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1)=f(x_2)=0$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ με $f^{(3)}(\xi)=0$.

12.39 Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[\alpha,\beta]$. Αν υπάρχουν $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοιοι ώστε $f(\alpha),f(\beta)\in(f(x_1),f(x_2))$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ ώστε $f''(\xi)=0$.

12.40 Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[-\alpha,\alpha]$ που παρουσιάζει ακρότατο στο $\beta\in(-\alpha,\alpha)$ με την f' να είναι περιττή. Δείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(-\alpha,\alpha)$ ώστε $f''(\xi_1)+f''(\xi_2)=\dfrac{2\alpha f'(\alpha)}{\alpha^2-x_o^2}$

12.41 Μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και για κάθε $x\in R$ ισχύει: $f^2(3x+1)+4\le 4f(2x^2+x+1)$. Να αποδείξετε ότι:

Α Υπάρχει $\xi\in(1,4)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi)=0$

Β Η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται

Γ $f'(1)=f'(4)$

Δ Η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο R

12.42 Έστω οι συναρτήσεις $f,g:R\to R$ οι οποίες είναι παραγωγίσιμες και ισχύουν: $f(x)\ge x+1$ και $f(x)e^{g(x)}=e^x-x$ για κάθε $x\in R$. Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$, να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των C_f και C_g στο $x_o=0$ τέμνονται κάθετα

12.43 Έστω g,f παραγωγίσιμες συναρτήσεις για κάθε $x\in R$. Αν ισχύει $f(x)\le x^2+g(x)$ και $f(3)-g(3)=9$, να δείξετε ότι ισχύει $f'(3)-g'(3)=6$.

12.44 Αν ισχύει ότι $\ln x+\dfrac{\alpha}{x}\ge\alpha$, $\forall x>0$, να βρείτε το α

12.45 Αν $\alpha,\beta>0$ και ισχύει $\alpha^{\frac{\ln x}{x}}+\beta^{\frac{x-1}{x}}\le 2$ για κάθε $x>0$, να αποδείξετε ότι $\alpha\cdot\beta=1$.

12.46 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x-x^\alpha$, x>0, λ>0 με $f(x)\ge 0$, $\forall x>0$. Να δείξετε ότι $\alpha=e$ και ότι η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[e,+\infty)$.

12.47 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{e^x}+1-\lambda$, $\lambda\in R$

Α) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του λ για την οποία ισχύει $f(x)\le 0$ για κάθε $x\in R$.

Β) Αν $\lambda\ge 1+\dfrac{1}{e}$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=(1-\lambda)x-\dfrac{x+1}{e^x}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

12.48 Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$, δύο φορές παραγωγίσιμη με $f'(x)>f''(x)$, $x\in R$ που παρουσιάζει για $x_o=0$ τοπικό ακρότατο το $f(0)=0$ ναδείξετε ότι: Αν $x<0$ τότε $f(x)<f'(x)$, Αν $x>0$ τότε $f(x)>f'(x)$

12.49 Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $(x_0,f(x_0))$, όπου x_o η θέση του τοπικού ακροτάτου της $f(x)=x\ln x+\lambda x$, $\lambda\in R$ όταν το λ διατρέχει το R

12.50 Αν $f(x)=x^{\lambda}\cdot e^{2\lambda-x}$, $\lambda>0,\ x>0$, να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το μέγιστο της f παίρνει την ελάχιστη τιμή του.

12.51 Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{\lambda}-\ln(x)$, $\lambda>0$

A) Να βρείτε την μικρότερη τιμή του λ για την οποία ισχύει ότι $x^{\lambda}\ge\ln(x)$ για κάθε $x>0$

B) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το ελάχιστο της f παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

12.52 Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $2\ln x=\lambda x^2+1,\quad \lambda>0$

12.53 Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $8x^2\sqrt{x}-\alpha\sqrt{x}+1=0$ όταν το $\alpha\in R$

12.54 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3-\alpha x^2-4x+\alpha=0$ έχει τρεις ρίζες για κάθε $\alpha\in R$

12.55 Μία συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο R. Αν υπάρχει $\alpha\in R$ ώστε $f(\alpha)=f'(\alpha)=f''(\alpha)=0$ και $f'''(x)>0$ για κάθε x, τότε να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις $f''(x)=0$, $f'(x)=0$ και $f(x)=0$ έχουν μοναδική ρίζα.

12.56 Έστω $z=\ln x-2i\sqrt{x},\ \ x>0$. Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή του $|z-2|$ είναι το $\sqrt{8}$

12.57 Έστω η συνάρτηση $f(x)=|z|$, $x\in[0,1]$ όπου $z=(1-x)\sqrt{e^{2x}-1}+i(1-x)$, $x\in[0,1]$.

A) Να βρείτε το μιγαδικό του οποίου το μέτρο γίνεται μέγιστο.

B) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται, και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

Γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f και η ευθεία $y=x$, τέμνονται σε ένα ακριβώς σημείο.

12.58 Αν $(x^2-4x)f'(x)+f(x)=0$, $\forall x\in[0,4]$ να αποδείξετε ότι $f(x)=0$ για κάθε $x\in[0,4]$.

12.59 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln(1+x^2)-e^{-x}+1$ είναι γνησίως αύξουσα στο R

12.60 Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha>0$ η εξίσωση $2\alpha e^x=2+2x+x^2$ έχει μοναδική ρίζα στο R

12.61 Έστω συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f(0)=2$, $f'(0)=0$, και $f''(x)+x>0$ για κάθε $x\in R$, δείξτε ότι $f(x)\ge 2\left(1-\frac{x^3}{12}\right)$ για κάθε $x\in R$

12.62 Έστω f δυο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f(0)=f'(0)=0$ και $f''(x)<2x$ για κάθε $x\in R$. Δείξτε ότι $f(1)<\frac{1}{3}$

12.63 Να αποδείξετε ότι από το σημείο $A(1,1)$ άγονται ακριβώς δύο εφαπτόμενες προς τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=e^x$

12.64 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f^3(x)+f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $\forall x\in[0,\pi]$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,\pi)$

13 ΚΥΡΤΕΣ-ΚΟΙΛΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ

13.01 Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες καθώς και τα σημεία καμπής των γραφικών τους παραστάσεων.

Α) $h(x)=x^2+\dfrac{8}{x}$ Β) $g(x)=3x^5-5x^3$

Γ). $g(x)=1+2x^2+2x^2(\ln x-2)^2$ Δ) $f(x)=xe^{-x}$

13.02 Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της $f(x)=\ln\left(e^x-x\right)$, $x\in IR$ έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής

13.03 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\ln^2 x+2x\ln x+x^2-3$ είναι κυρτή

13.04 Αν είναι γνωστό ότι η συνάρτηση $f(x)=x^5+5\alpha x^4+10\beta x^3+x^2$, $x\in R$, $\alpha,\beta\in R$ έχει τρία σημεία καμπής, να αποδείξετε ότι $\alpha^2>\beta$.

13.05 Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύουν $f(x)<x$ και $f'(x)=\dfrac{x}{x-f(x)}$ για κάθε $x>0$. Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

13.06 Δίνεται ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha\sqrt{x}+\beta\ln x+\beta x$ με $\alpha,\beta\in R$, έχει σημείο καμπής το $A(1,3)$

Α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=4$ και $\beta=-1$:

Β) Να βρείτε τα διαστήματα που η C_f είναι κυρτή ή κοίλη.

Γ) Βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής της και να αποδείξετε ότι $4\sqrt{x}-\ln x\le x+3$, $\forall x\ge 1$.

13.07 Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ με την ιδιότητα $(x^2+x+1)f''(x)+xe^{f(x)}=0$ για κάθε $x\in R$. Να αποδειχθεί ότι η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

13.08 Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)\neq 0$, $\forall x\in R$ και g συνάρτηση ώστε να ισχύει $g(x)\cdot f'(x)=8f(x)$ για κάθε $x\in R$. Αν η C_f έχει σημείο καμπής το $A(2,f(2))$ να δείξετε ότι $g'(2)=8$

13.09 Να δείξετε ότι για κάθε $x\in IR$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=2x^4+4\alpha x^3+3\left(2\alpha^2-4\alpha+5\right)x^2+\alpha x+1$ με $\alpha\in R$, δεν έχει σημεία καμπής.

13.10 Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f(x)+e^{f(x)}=1+x-x^2-e^x$ για κάθε $x\in R$. Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση

Α) δεν έχει σημεία καμπής

Β) έχει ένα ακριβώς κρίσιμο σημείο.

13.11 Η συνάρτηση f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο και $xf''(x)-\eta\mu 2x=0$, $x\in R$. Να δείξετε ότι το $A(0,f(0))$ δεν μπορεί να είναι σημείο καμπής της C_f

13.12 Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f''\searrow$ στο R $f'(x)\neq 0$, $\forall x\in R$, $f'(1)>0$ και η συνάρτηση $g(x)=f(x)-f(2-x)$, $\forall x\in R$.

Α) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της g.

Β) Να βρείτε τα διαστήματα που η g είναι κυρτή ή κοίλη και τα σημεία καμπής της C_g

13.13 Έστω συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$ η οποία είναι κυρτή με $f(0)=0$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ είναι γνήσια αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

13.14 Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R. Να αποδείξετε ότι δεν είναι δυνατόν η f να έχει στο x_o τοπικό ακρότατο και σημείο καμπής.

13.15 Αν $f(x)=2e^{\lambda x}-x^2-\dfrac{2}{\lambda^2}$, $\lambda>0$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων καμπής της γραφικής παράστασης της f, για κάθε $\lambda\in(0,+\infty)$

13.16 Α) Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή σε διάστημα Δ. Να δείξετε ότι για κάθε $x_1,x_2\in\Delta$ ισχύει $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\le\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

(Jensen)

Β) Να αποδείξετε ότι: $e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}-1>\sqrt{\left(e^{\alpha}-1\right)\left(e^{\beta}-1\right)}$, $\forall\alpha\neq\beta\in R_+$

Γ) Να αποδείξετε ότι $\ln\dfrac{\alpha+\beta}{2}\ge\sqrt{\ln\alpha\cdot\ln\beta}$, $\forall\alpha,\beta\in A_f$

13.17 Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ που η γραφική της παράσταση στρέφει τα κοίλα άνω και περνά από την αρχή των αξόνων. Να αποδειχτεί ότι για κάθε $x\in R$ ισχύει $3f(x)\ge4f\left(\dfrac{3x}{4}\right)$

13.18 Έστω η συνάρτηση $f:(-\infty,0]\to R$, δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τη σχέση $f^2(x)=x^2-2x,\quad\forall x\le0$. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν παρουσιάζει σημείο καμπής

13.19 Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(x)=\dfrac{e^{x-1}}{e^{x-1}+1}$ για $x\in R$.

Α) Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

Β) Να δειχθεί ότι για κάθε $x>1$ ισχύει $f(\ln x)+f'(x-1)<f(x-1)+f'(\ln x)$

13.20 αν $x>0$, $y>0$, $\alpha>1$ και $x+y=1$, να αποδείξετε ότι ισχύει $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{\alpha}+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^{\alpha}\ge\dfrac{5^{\alpha}}{2^{\alpha-1}}$

ΚΑΝΟΝΕΣ DE L' HOSPITAL

13.21 Να βρεθούν τα παρακάτω όρια

Α) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)$ Β) $\lim\limits_{x\to1}\left[\ln x\cdot\ln(\ln x)\right]$

Γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right)$ Δ) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}$

13.22 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

Α) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x}{x\left(e^{x}-1\right)\eta\mu x}$ Β) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

Γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+2}}$ Δ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x}+2x+1}{4e^{-x}-x+3}$

13.23 Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\ln x}{1-x}, & 0\prec x\neq1\\ -1, & x=1\end{cases}$ και ότι $f'(1)=-0{,}5$.

13.24 Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\eta\mu x}x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}$

13.25 Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει $xf(x)+e^{\eta\mu x}=f(x)\eta\mu x+e^{x}$ για κάθε $x\in R$. Να βρείτε το $f(0)$.

13.26 Έστω $f:R\to R$, συνεχής συνάρτηση, για την οποία ισχύει $(1-\sigma\upsilon\nu x)f(x)=\ln(1+x)-x$ για κάθε $x>-1$. Να βρείτε το $f(0)$. Η συνάρτηση f έχει συνεχή 2η παράγωγο στο R με $f''(0)=\dfrac{3}{2}$ και $f(0)=f'(0)=0$. Να δείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{1-\sigma\upsilon\nu x}=3$

13.27 Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο R. Αν για κάθε $x\in R$ ισχύει $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+4h)-2f(x+2h)+f(x)}{h^2}=24x-8$ και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1,f(1))$ έχει εξίσωση $y=5x-8$, να βρείτε τον τύπο της f

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

13.28 Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $h(x)=\frac{e^x}{x^3}$

$f(x)=\frac{\ln x}{x-1}$ $k(x)=xe^{\frac{1}{x^2}}$

13.29 Έστω οι συναρτήσεις $f,g:(0,+\infty)\to R$ με $g(x)=f(x)+x+\ln(x+1)-\ln x$ για κάθε $x>0$. Αν η ευθεία $y=x+3$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, να βρείτε την ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

13.30 Να αποδείξετε ότι η $y=2x-2\ln 2$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f(x)=2\ln(e^x+1)-2\ln 2$

13.31 Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ και η g με $g(x)=xf(e^{-x})$. Αν η ευθεία $y=2x+1$ εφάπτεται της C_f στο 0, να βρείτε την ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

13.32 Έστω συνάρτηση $f:R\to R$, τέτοια ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xf(x)-x^2}{\ln x+x}=2$.
Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=x+2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$

13.33 Να βρείτε τα $\alpha,\beta,\gamma\in R$ ώστε η γραφική παράσταση της f με $f(x)=\frac{(\alpha-1)x^2+\beta x+5}{3x+\gamma}$ να έχει ως ασύμπτωτες τις ευθείες $x=-2$ και $y=3$.

13.34 Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύει $e^{-x}\le xf(x)\le 1$ για κάθε $x>0$. Να αποδείξετε ότι ο άξονας $x'x$ είναι ασύμπτωτη της C_f.

13.35 Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\eta\mu x\ln x$, $x>0$ δεν έχει ασύμπτωτες.

ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

13.36 Να μελετήσετε τις συναρτήσεις

Α) $f(x)=x^3-12x$ Β) $f(x)=\eta\mu x+x$, $x\in[-\pi,\pi]$ Γ) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ Δ) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

13.37 Αν M το σημείο του διαγράμματος της f με $f(x)=x\ln x-\lambda x+3$ που αντιστοιχεί στο τοπικό της ελάχιστο, να βρεθεί η απόσταση OM όταν ο ρυθμός μεταβολής του OM ως προς λ γίνει μηδέν.

13.38 Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A=90^o$, για το οποίο ισχύουν τα εξής. Η κορυφή Γ έχει συντεταγμένες $(-4,0)$, η κορυφή Α είναι στο διάστημα $[0,4]$ του άξονα x'x και η κορυφή Β είναι σημείο της παραβολής $y=4x-x^2$. Για ποια τιμή των συντεταγμένων του Β το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ γίνεται μέγιστο;

14 ΓΕΝΙΚΕΣ – ΣΥΝΔΥΑΣΤΚΕΣ ΜΕ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ

14.01 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+12x$, όπου $\alpha,\beta\in R$, η οποία παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_o=2$ και η εφαπτόμενη της στο σημείο $A(1,f(1))$ διέρχεται από το $(3,5)$.

Α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in R$ και το σύνολο τιμών της f.

Β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$.

Γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2004$ έχει μόνο μία λύση.

Δ) Να βρεθούν τα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^\kappa}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x^\kappa}$, $\kappa\in Z$

14.02 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R για την οποία για κάθε $x>0$ ισχύει $f'(\ln x)=x+3$. Αν η γραφική παράσταση αυτής διέρχεται από το σημείο $M(1,3)$, τότε:

Α) Να βρεθεί ο τύπος της f.

Β) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

Γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $e^x+3x=e$ έχει μόνο μία ρίζα στο $(0,+\infty)$.

14.03 Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$, δύο φορές παραγωγίσιμη ώστε να ισχύει $f''(x)\cdot f'(x)<0,\ x\in R$.

Α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο R.

Β) Να βρείτε την μονοτονία της συνάρτησης $g(x)=|f'(x)|,\ x\in R$.

Γ) Αν $\mu\in R$ και ισχύει $g(x^4+\mu)\le g(4x),\ x\in R$ να βρείτε την μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει ο μ.

14.04 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln x-\dfrac{\alpha}{x}+\alpha$ με $x>0$. Αν για κάθε $x>0$ είναι $f(x)\ge 0$ τότε

Α) να αποδείξετε ότι $\alpha=-1$,

Β) να λύσετε την εξίσωση $x^x=e^{x-1},\ x>0$

Γ) να λύσετε την ανίσωση $\ln\left(2x^2+2\right)-\dfrac{1}{x^2+3}>\ln\left(x^2+3\right)-\dfrac{1}{2x^2+2}$

14.05 Θεωρούμε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x)=e^{x-f(x)}+e^{2\ln x-f(x)}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και $f(0)=0$. Να αποδείξετε ότι:

Α) Η f δεν παρουσιάζει ακρότατο σε κανένα σημείο του διαστήματος $(0,+\infty)$.

Β) Το θεώρημα του Rolle δεν εφαρμόζεται σε κανένα διάστημα της μορφής $[0,x_o]$.

Γ) Ο τύπος της συνάρτησης f είναι $f(x)=\ln\dfrac{3e^x+x^3}{3}$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$

Δ) Η f δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

Ε) Η ευθεία (ε): $y=-\dfrac{3e+1}{3e+3}x+1$ είναι κάθετη στην εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $x_o=1$

14.06 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-\lambda-\ln x$, $\lambda\in R$

Α) Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της f

Β) Να αποδείξετε ότι $\ln x\le \frac{x}{e}$ για κάθε $x>0$

Γ) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

Δ) Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in R$ το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $xe^{\lambda}=e^{x}$

14.07 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\frac{x}{\alpha}\right)-\frac{x}{\alpha}+1$ με $\alpha>0$

Α) Να βρείτε το πρόσημο της f.

Β) Να λύσετε την εξίσωση $e\frac{x}{\alpha}=e^{\frac{x}{\alpha}}$ για κάθε $\alpha>0$

Γ) Αν ισχύει ότι $\ln\left(\frac{x}{\alpha}\right)\le\frac{\beta x}{\alpha}-\beta$ για κάθε $x>0$, να αποδείξετε ότι $\beta=1$.

14.08 *Εστω συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο R, που ικανοποιεί τις σχέσεις $f(x)-e^{-f(x)}=x-1$, $x\in R$ και $f(0)=0$

Α. Να εκφράσετε την f' συναρτήσεις της f και να αποδείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R

Β. Να αποδείξετε ότι $\frac{x}{2}<f(x)<xf'(x)<x$, για κάθε $x>0$.

Γ. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

14.09 * Έστω συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to R$ παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με, $g(1)=-2-\lambda$, $g'(1)=-8$, $g(x)+\lambda x+4\le\frac{2}{x}$ και $g(x)\ge -4-6x+\frac{1}{4x}$ για κάθε $x>0$

Α) Να βρείτε τον αριθμό λ

Β) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$ και να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)+\eta\mu x+4}{xg(x)+6x^2+\ln x}$

14.10 Έστω συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty,4)$ για την οποία ισχύουν: $e^{f(x)}=3f'(x)f''(x)$ για κάθε $x<4$, $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x<4$ και $f(1)=0$, $f'(1)=1$

Α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,4)$, να βρείτε το πρόσημο της f και να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον $x'x$ σε ένα μόνο σημείο.

Β) Να δείξετε ότι $3f''(x)=(f'(x))^2$ και ότι η C_f στρέφει τα κοίλα άνω στο $(-\infty,4)$

Γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x_o\in(0,1)$ ώστε $f(x_0)=-x_0f'(x_0)$ (3)

Δ) Να βρείτε τον τύπο της f για $x<4$

Ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\kappa$ έχει μοναδική λύση στο $(-\infty,4)$ για κάθε $\kappa\in R$

Στ) Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της f.

Ζ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

14.11 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$.

Α) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $g(x) = |f(x)|$

Β) Αν επιπλέον είναι $0 < f(x) \neq 1$ για κάθε $x \in R$ και $f(1) = e$, $f'(1) = 1$ τότε:

α) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $g(x) = |\ln(f(x))|$

Β) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = |\ln(f(x))|$ στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$

14.12 Έστω η συνάρτηση $f : R \to R$ η οποία είναι έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο IR.
Αν ισχύει ότι $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2f(x-3h) - 5f(x) + 3f(x+2h)}{h^2} = \dfrac{60}{x^3}$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - \sqrt{4x^2+9}\right) = 2004$, να δείξετε ότι

Α) $f''(x) = \dfrac{4}{x^3}$

Β) η ευθεία $y = 2x + 2004$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Γ) $f(x) = \dfrac{2}{x} + 2x + 2004$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

14.13 ** Δίνεται συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία γνωρίζουμε ότι: $f(0) = 0$ και $f'(x) = \dfrac{1}{3f^2(x)+1}$ για κάθε $x \in R$.

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = f^3(x) + f(x) - x$, $x \in IR$ είναι σταθερή.

Β) Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$

Γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $x_o = 0$

Δ) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x^3} = 0$

14.14 **Η συνάρτηση f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει ότι $f(f'(x)) + f(x) = 0$ για κάθε $x > 0$. Να αποδείξετε ότι:

Α) η f είναι $1-1$

Β) $f'(f'(x)) = x$ για κάθε $x > 0$

Γ) αν $f(1) = 1$ τότε $f(x) = \ln x$.

14.15 Έστω f συνεχής στο   , παραγωγίσιμη στο (α, β)) με $f(\alpha) = \alpha$, $f(\beta) = \beta$

Α) Να δείξετε ότι υπάρχει   τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 1$

Β) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοια ώστε $2f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 3$

Γ) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_o \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_o) = \dfrac{2\alpha + \beta}{3}$.

Δ) Αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοια ώστε $\dfrac{1}{f'(x_1)} + \dfrac{2}{f'(x_2)} = 3$

14.16 * Έστω συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ παραγωγίσιμη στο (α,β) και κυρτή στο $[\alpha,\beta]$. Αν $f(\alpha)<f(\beta)$ να αποδείξετε ότι:

Α) υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $f(x_0)=\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$.

Β) υπάρχουν $x_1\in(\alpha,\beta)$ και $x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1\neq x_2$ τέτοια ώστε: $\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}=2\cdot\dfrac{\beta-\alpha}{f(\beta)-f(\alpha)}$

Γ) το x_o του (Α) ερωτήματος βρίσκεται πλησιέστερα στο β απ' ότι στο α.

14.17 Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1,e]$ με $f(1)=2$, $f(e)=e+1$ και σύνολο τιμών το $[-1,4]$. Να αποδείξετε ότι :

Αα) Υπάρχουν $x_1,x_2\in(1,e)$ με $x_1\neq x_2$ ώστε $f'(x_1)=f'(x_2)=0$

β) Υπάρχει $\xi\in(1,e)$ ώστε $f''(\xi)=0$

γ) Υπάρχει $x_o\in(1,e)$ ώστε $f(x_o)\left(f'(x_o)-4f^4(x_o)\right)=x_o$

Βα) Η ευθεία $y=-x+e+2$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο $(1,e)$

β) Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,e)$ με $\xi_1\neq\xi_2$ ώστε να ισχύει ότι $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=1$

14.18 Μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και για κάθε $x\in R$ ισχύει: $f^2(3x+1)+4\leq 4\,f(2x^2+x+1)$. Να αποδείξετε τα εξής:

Α Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,4)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi)=0$

Β Η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται

Γ $f'(1)=f'(4)$

Δ Η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο R

****

14.19 Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z=e^x+(x-\alpha)i$, $x\in R$ και $\alpha\in R$. Αν για κάθε $x\in R$ ισχύει $\text{Re}(z)+x\,\text{Im}(z)\geq 1$, τότε

Α. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$.

Β. Να αποδείξετε ότι $\text{Re}(z)>\text{Im}(z)$ για κάθε $x\in R$

Γ. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,1)$ ώστε ο $w=z^2+z+2i$ να είναι πραγματικός

Δ. Να βρείτε το μιγαδικό z του οποίου το μέτρο γίνεται ελάχιστο.

14.20 Έστω οι μιγαδικοί $w=x+yi$ και $\overline{z}=\overline{w}(3+4i)+w(3-4i)$ όπου $x,y\in R$.

Α) Να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός

Β) Να βρεθεί ο μιγαδικός w αν ισχύει ότι $|w|^2=z-25$.

Γ) Έστω $z=50$ τότε:

α) Να βρείτε το σύνολο των σημείων $M(w)$ που είναι εικόνες των w

β) Να βρεθεί ο μιγαδικός w με το μικρότερο μέτρο.

14.21 Έστω συνάρτηση f, συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, (α>0), παραγωγίσιμη στο (α,β). Αν για τους μιγαδικούς $z=\alpha+if(\alpha)$ και $w=\beta+if(\beta)$ ισχύει η σχέση $|z+iw|=|z-iw|$, να αποδειχτεί ότι υπάρχει (τ.ε) $x_0\in(\alpha,\beta)$, ώστε $f'(x_0)=\dfrac{f(x_0)}{x_0}$

14.22 Α) Αν για τους μιγαδικούς z_1,z_2 ισχύει η σχέση: $\left||z_1|-|z_2|\right|=|z_1+z_2|$, (1) να δείξετε ότι $\operatorname{Im}\left(z_1\overline{z}_2\right)=0$

Β) Έστω η συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1=f(\alpha)+if(\beta)$ και $z_2=f(\beta)-if(\alpha)$, για τους οποίους ισχύει η ισότητα (1) του ερωτήματος (Α). Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1\neq\xi_2\in(\alpha,\beta)$ ώστε να ισχύει $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$

14.23 Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to R$, ισχύει ότι $2\cdot\dfrac{f(x)}{\ln x}+x\cdot f'(x)=0$. Αν $f(e)=1$ τότε Α) Να βρεθεί ο τύπος της f.

Β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z αν ισχύει ότι $z\cdot\overline{z}-\left(z^2+\overline{z}^2\right)+\lim\limits_{x\to e}\left(f'(x)+\dfrac{2}{e}\right)=-1$

14.24 Δίνονται οι συναρτήσεις f και g, συνεχείς το $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμες στο (α,β) με $g(x)g'(x)\neq0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ και οι μιγαδικοί $w=2f(\alpha)-ig(\beta)$, $z=g(\alpha)-2if(\beta)$ ώστε να ισχύει ότι $|2w+\overline{z}|=|2\overline{w}-z|$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}+\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=0$

14.25 Δίνονται οι συναρτήσεις f,g παραγωγίσιμες στο $(0,+\infty)$ για τις οποίες ισχύει: $f(x)=g(x)+\alpha\cdot x\cdot e^{\frac{1}{x}}$ για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x. Ο αριθμός α είναι ένας αρνητικός πραγματικός και ο β ο θετικός πραγματικός για τον οποίο ισχύει: $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\beta$.

Α. Να αποδείξετε ότι η $y=\alpha x+\alpha+\beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

Β. Αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z=\alpha+\beta i$, $\alpha,\beta\in R$ βρίσκεται στην ασύμπτωτη ευθεία της γραφικής παράστασης της f όταν $x\to+\infty$ και το μέτρο του είναι $\sqrt{2}$ να γράψετε τους $w_1=\dfrac{z^2}{2}$ και $w_2=\dfrac{z^{2003}}{2^{1001}}$ στη μορφή x+ψi.

Γ. Να αποδείξετε ότι: $f(x)\leq g(x)+\alpha\cdot e$ για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x.

14.26 Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $f(0)=0$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1]$. Να αποδείξετε ότι:

Α) Υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε $(1-\xi)\cdot f'(\xi)=f(\xi)$.

Β) Υπάρχουν α,β με $0<\alpha<\beta<1$, ώστε $\operatorname{Re}(z_1\cdot z_2)<0$ με $z_1=\beta+i$, $z_2=f'(\alpha)+i\cdot f'(\beta)$