

Γ Λυκείου

4 ΓΛΧ

2013 - 2014

Μ.Ι.Παπαγρηγοράκης
Χανιά

[Μαθηματικά]

Θετικής – Τεχνολογικής Κατεύθυνσης

1 ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟ C

1.01 Να γράψετε σε «κανονική» μορφή τους μιγαδικούς $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, όταν

$$z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}, \quad z_2 = \frac{i}{2i\sqrt{3}-2}$$

1.02 Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ όταν:

A) ισχύει ότι $(\alpha + \beta) + (\alpha^2 - \beta^2)i = 5 + 5i$.

B) ισχύει ότι $(\alpha + \beta i)^2 = \frac{12 + 5i}{i}$

1.03 Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1+i^{-1}}{1-i} + \frac{1-i^{-1}}{1+i} + \frac{1+i}{1-i^{-1}} + \frac{1-i}{1+i^{-1}} = 4$$

1.04 Έστω οι αριθμοί $\kappa, \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{N}$ οι οποίοι αν διαιρεθούν με το 4 αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο. Να αποδείξετε ότι:

i) $i^\kappa = i^\lambda = i^\mu = i^\nu$ ii) $i^{\kappa+\lambda+\mu+\nu} = 1$.

1.05 Να δείξετε ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει

$$i^{2\nu} + i^{2\nu+1} + i^{2\nu+2} + i^{2\nu+3} = \frac{1}{i^{2\nu}} - \frac{1}{i^{2\nu+1}} + \frac{1}{i^{2\nu+2}} - \frac{1}{i^{2\nu+3}}$$

1.06 Να αποδείξετε ότι

$$(2\alpha + 3\beta i)^{30} + (3\beta - 2\alpha i)^{30} = 0, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

1.07 Αν $\nu \in \mathbb{N}^*$, να βρείτε τα αθροίσματα:

$$1 - i + i^2 - i^3 + \dots + (-1)^{100} i^{100} \quad \text{και}$$

$$i + (2 + 3i) + (4 + 5i) + \dots + ((2\nu - 2) + (2\nu - 1)i)$$

1.08 Να βρείτε τις τιμές του $\nu \in \mathbb{IN}$ για τις οποίες ισχύει κάθε μια από τις ισότητες:

A) $i^{3\nu+1} = 1$ B) $(1+i)^\nu = (1-i)^\nu$

1.09 Έστω z ένας μιγαδικός και $f(\nu) = i^\nu \cdot z$, $z \in \mathbb{C}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, τότε

A) να αποδείξετε:

$$f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = 0$$

B) να υπολογίσετε την παράσταση

$$f(8\kappa) + f(8\kappa + 1) + f(8\kappa - 1) + f(8\kappa + 4), \quad \forall \kappa \in \mathbb{N}^*$$

1.10 Αν $f(\nu) = i^\nu (1-i)$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ να αποδείξετε

ότι $f(4\nu) + f(4\nu + 1) + f(4\nu + 2) + f(4\nu + 3) = 0$ και $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(101) = 1 + i$.

1.11 Να αποδείξετε ότι :

$$(3+4i)^{4\nu} + (4+3i)^{4\nu} \in \mathbb{R} \quad \text{για κάθε } \nu \in \mathbb{N}^*.$$

1.12 Ο μιγαδικός $z = 2 + i$ να αναλυθεί σε άθροισμα δύο μιγαδικών u, w που οι εικόνες τους βρίσκονται στις ευθείες $y = x - 2$ και $y = 2x - 1$ αντίστοιχα.

1.13 Να λύσετε στο \mathbb{C} τις εξισώσεις:

A) $(3 - 2x)^2 + (4 + x)^2 = 0$

B) $2z(1-i) - z = z + 1 - i$

Γ) $\lambda^2 z - 4 = \lambda(-zi + 4\lambda)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$

1.14 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$ να λύσετε τα συστήματα:

A)
$$\begin{cases} 5iz - 18w = 7 \\ (2+i)z + 6iw = 5 - 4i \end{cases}$$

B)
$$\begin{cases} (1+i)z + 3iw = 5 + 6i \\ z + (2+i)w = 6 - i \end{cases}$$

1.15 Αν $z \in \mathbb{C}$ και $z^2 + z + 1 = 0$, να αποδείξετε

ότι: $z^{2004} + \frac{1}{z^{2004}} = 2$

1.16 Για το μιγαδικό $z \neq 0$ ισχύει ότι $z + \frac{1}{z} = -1$.

Να αποδείξετε ότι $z^{200} + z^{100} + 1 = 0$

1.17 Στο μιγαδικό επίπεδο να σημειώσετε το σύνολο των σημείων που είναι εικόνες των μιγαδικών z όταν:

A) $z = 2\kappa - 1 + 5(1 + \kappa)i, \kappa \geq 0,$

B) $z = 3 + (\alpha^2 + 4\alpha + 1)i, \alpha \in \mathbb{R}.$

Γ) $z = 3 + i \sin \theta, \theta \in [0, \pi),$

Δ) $z = \eta \mu \theta + \lambda^2 i$ για κάθε $\theta \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$

E) $z = 2\eta \mu^2 \theta - 2\eta \mu \theta \sin \theta i, \theta \in \mathbb{R}$

Στ) $z = 2\kappa - 1 + 5(1 + \lambda)i, \text{ αν } 2\kappa - 3\lambda = 2$

Z) $z = \frac{2}{\sin \theta} + i \epsilon \varphi \theta, \theta \neq \frac{\kappa \pi + \pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$

1.18 Έστω M_1, M_2 οι εικόνες των μιγαδικών

$$z_1 = 1 + \eta \mu \theta + i \sin \theta, \quad z_2 = 1 - \eta \mu \theta + i \sin \theta,$$

$$\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

A) Να δείξετε ότι τα M_1, M_2 ανήκουν στον ίδιο κύκλο

B) να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του μέσου M , του ευθύγραμμου τμήματος $M_1 M_2$,

1.19 Για τους $z, w \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι

$z^2 - w + 1 = 0$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας M του z όταν οι εικόνες $0, z, w$ είναι σημεία συνευθειακά

1.20 Αν οι εικόνες των μιγαδικών $z, 1, -iz$ βρίσκονται στην ίδια ευθεία, να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(z)$ είναι κύκλος

1.21 Να βρείτε τη γραμμή C στην οποία ανήκει η εικόνα του μιγαδικού z σε κάθε μια από τις περιπτώσεις

A) $z = \epsilon \varphi \theta - \frac{1}{\sin \theta} i, \theta \in \mathbb{R} - \left\{ \kappa \pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \right\}$

B) $z = \sigma \varphi \theta + \frac{1}{\eta \mu \theta} i, \theta \neq \kappa \pi, \kappa \in \mathbb{Z}$

1.22 Αν η εικόνα του μιγαδικού $z = \alpha + \beta i, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ανήκει σε κύκλο με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα 1, να βρεθεί η εξίσωση της γραμμής στην οποία κινούνται ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών w με $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$

1.23 Αν η εικόνα του w είναι στην ευθεία $x = 0$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του $z = \frac{w-1}{w+i}$

1.24 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων (x, y) αν ισχύει $x - \lambda(y-1)i = \lambda \left(\frac{3}{2} - i \right), x, y, \lambda \in \mathbb{R}$

1.25 Έστω ο $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$ και η ισότητα $(x^2 - 2x) + (4x - y^2)i = \alpha + (\alpha - 7)i$, η οποία είναι αληθής για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ τα σημεία $M(z)$ ανήκουν σε κύκλο

1.26 Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών $z = \frac{1}{\lambda} - \ln(\lambda) \cdot i, \lambda \in (0, +\infty)$

1.27 Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β , ισχύει ότι $\alpha^2 + \beta^2 = 16$. Αν $z = \frac{5}{4}\alpha + \frac{3}{4}\beta i$, να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι έλλειψη.

1.28 Έστω οι μιγαδικοί $z = \lambda - 1 + (2\lambda + 1)i, \lambda \in \mathbb{R}$ και $w = z - (2 - i)$

A) Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των z, w καθώς και τη σχέση τους

B) Να βρείτε τον μιγαδικό z που έχει την πλησιέστερη εικόνα στην αρχή $O(0,0)$

Γ) Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση των εικόνων των z και w για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

ΣΥΖΥΓΤΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ

1.29 Να βρεθούν οι $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι συζυγείς οι μιγαδικοί z, w όταν:

$$z = |\alpha + 2| + (|\gamma^2 - 4| + |\beta - 2|)i \quad \text{και} \quad w = 3 + |\gamma - 2|i$$

1.30 Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ να δείξετε ότι $(z_1 - z_2)(z_1 - \bar{z}_2) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2)$

1.31 Αν $z, w \in \mathbb{C}$ να αποδείξετε ότι
Α. είναι πραγματικοί οι αριθμοί οι:

$$\frac{\bar{z} + iz}{z + iz} \quad \text{και} \quad \frac{(z + \bar{z})(z - \bar{z})}{2zz} - \frac{z}{\bar{z}}$$

Β. είναι φανταστικοί οι αριθμοί οι:

$$\frac{(z+i)^2 - (\bar{z}-i)^2}{(z+i)^3 + (\bar{z}-i)^3} \quad \text{και} \quad \begin{vmatrix} z-u & \bar{z}-\bar{u} \\ w-u & \bar{w}-\bar{u} \end{vmatrix}$$

1.32 Έστω οι z, w με $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}, w \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$.

Να αποδείξετε ότι $\frac{\bar{z}w - z}{w - 1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow w = \frac{1}{\bar{w}}$.

1.33 Αν $w = \frac{\bar{z} - z_1 z_2 z - z_1 + z_2}{z_1 + z_2}$ με $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

$z_1 \bar{z}_1 = z_2 \bar{z}_2 = 1$ και $z_1 \neq -z_2$. Να αποδείξετε ότι $w \in \mathbb{I}$.

1.34 Να λύσετε την εξίσωση $z\bar{z} + i(z - \bar{z}) = 2$

1.35 Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} 3z + (1+i)\bar{w} = 2 + 3i \\ (2+i)\bar{z} + (1+i)w = 1 \end{cases}$$

1.36 Αν $z, w \in \mathbb{C}, w \neq 0$, να δείξετε ότι:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{\bar{w}z + w\bar{z}}{2ww} \quad \text{και} \quad \operatorname{Im}\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{\bar{w}z - w\bar{z}}{2iww}$$

1.37 Αν $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ να δείξετε ότι:

$$z_1 \operatorname{Im}(z_2 \bar{z}_3) + z_2 \operatorname{Im}(z_3 \bar{z}_1) + z_3 \operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_2) = 0$$

1.38 Για κάθε μιγαδικό z να αποδείξετε ότι:

$$\text{Α) } (z + \bar{z})^2 \geq 0 \quad \text{Β) } (z - \bar{z})^2 \leq 0.$$

1.39 Έστω ο μιγαδικός z με $z \neq 0$. Αν

$$w = \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}, \text{ να αποδείξετε ότι}$$

Α) ο w είναι πραγματικός

$$\text{Β) } -2 \leq w \leq 2$$

Γ) Αν $w = 2$ τότε $z \in \mathbb{R}$

Δ) Αν $w = -2$ τότε $z \in \mathbb{I}$

1.40 Να αποδείξετε ότι:

$$\text{Α) } (3+4i)^{4v} + (4+3i)^{4v} \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Β) } (1+i)^v + (1-i)^v \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in \mathbb{N}$$

Γ) $(-1+i)^{4v} = (-4)^v$ και να υπολογίσετε την παράσταση Α) για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$

1.41 Να αποδείξετε ότι

$$\left(\frac{2+i}{1-2i}\right)^{2004} + \left(\frac{i-2}{1+2i}\right)^{2006} = 0$$

1.42 Αν $f(v) = i^v(1-i), v \in \mathbb{N}^*$, να δείξετε ότι

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(101) = 1 + i$$

1.43 Έστω $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$ και $w = z \frac{4z-1}{4-z}$,

$z \neq 4$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(z)$ του μιγαδικού επιπέδου, όταν $w \in \mathbb{R}$.

1.44 Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z , όταν ισχύει

$$(\bar{z} - \alpha)(z + \alpha) = (\bar{z} + \alpha)(z - \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}_+^*$$

1.45 Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων που είναι εικόνες των ριζών κάθε μιας από τις εξισώσεις:

$$\text{Α) } z^2 + 4z = \bar{z}^2 + 4\bar{z} \quad \text{Β) } z^2 + \bar{z}^2 = z\bar{z}$$

Μ. Παπαγιαννοπούλης

1.46 Έστω $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ και $M(z)$ εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο. Αν είναι $w = 2z - \bar{z}$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του M , όταν $\operatorname{Re}(w^2) = 1$

1.47 Αν $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών \bar{z} , $\frac{1}{z}$ και $-\bar{z}$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημεία συνευθειακά.

1.48 Αν οι $z = 2(\alpha - 2\beta) + (\gamma - \alpha)i$ και $w = -\gamma + (\beta - \alpha)i$ ικανοποιούν τη συνθήκη $z = 2w$, να αποδείξετε ότι οι $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

1.49 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, με $z = w + \frac{1}{w}$. Αν η εικόνα του w ανήκει σε κύκλο με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 2$ τότε να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει σε έλλειψη, της οποίας να βρείτε τις εστίες.

1.50 Αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z κινείται στον κύκλο $x^2 + y^2 = 4$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $w = z + \frac{4i}{z}$ κινείται σε κύκλο.

1.51 Να λύσετε την εξίσωση $(3 + 2i)\bar{z} + (3 - 2i)z = 2$ και να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των ριζών της είναι μια ευθεία κάθετη στη διανυσματική ακτίνα του $w = 3 + 2i$.

1.52 Η εξίσωση $z^2 + az + \beta = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έχει ρίζα τον μιγαδικό $2 - i$. Να βρείτε την άλλη ρίζα και τα α, β .

1.53 Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης $\eta\mu^2\theta \cdot z^2 - 2\eta\mu\theta \cdot z + 5 - 4\eta\mu^2\theta = 0$ $\theta \in (0, \pi)$ ανήκουν σε υπερβολή για κάθε $\theta \in (0, \pi)$

1.54 Στην ισότητα: $z^2 + 2iz - \alpha = 0$, ο z είναι φανταστικός ενώ ο α πραγματικός. Να βρεθεί το διάστημα στο οποίο παίρνει τιμές ο α , και να βρεθεί ο z (συναρτήσει του α)

1.55 Να βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες των αριθμών Α) $z = -4$ Β) $z = 2i$ Γ) $z = 3 - 4i$

1.56 Έστω ότι $f(z) = \frac{(1+z)^v}{1+z^v}$ $v \in \mathbb{N}^*$

Α) Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{1}{z}\right) = f(z)$.

Β) Αν είναι $z\bar{z} = 1$, να αποδείξετε ότι $f(z) \in \mathbb{R}$.

Γ) Να βρείτε για ποιά v ορίζεται το $f(i)$.

Δ) Να αποδείξετε ότι το $f(i)$ είναι πραγματικός για κάθε επιτρεπτό v .

1.57 Αν $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $w = 1 + z$, να αποδείξετε

ότι

Α) $1 + z + z^2 = 0$, Β) $z^3 = 1$,

Γ) $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = 1$

Δ) $w^{2v} = z^v$ για κάθε φυσικό v ,

Ε) $w^{300} = 1$ και $w^{333} = -1$

Στ) $z^{2004} + \frac{1}{z^{2004}} = z^{2001} + \frac{1}{z^{2001}} = 2$

Μ. Παπαρηγοράκης
4 Γ Λ Χ

2 ΜΕΤΡΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ

2.01 Να βρείτε το μέτρο του z , όταν:

A) $z = \frac{(1+i)^2(1-i)^4}{2\sqrt{7}+6i}$ B) $z = \left(\frac{2+i\sqrt{5}}{3}\right)^9$

Γ) $8+z^2 = (\sqrt{3}z^2 - 6)i$

2.02 Αν $x, y \in \mathbb{C}$ να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$\frac{x|y|-y|x|}{xy+|xy|}$$
 είναι φανταστικός

2.03 Αν $x, y \in \mathbb{C}$ να αποδείξετε την συνεπαγωγή

$$\text{ή } |x|=|y|=1 \Rightarrow \frac{x+y}{1+xy} \in \mathbb{R}$$

2.04 Αν $z, w \in \mathbb{C}$ με $|z|=|w|$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{(z+w)^{2004}}{(z-w)^{2004}} \in \mathbb{R} \text{ ενώ ο } \frac{(z+w)^{2003}}{(z-w)^{2003}} \text{ είναι φανταστικός}$$

2.05 Δείξτε ότι $\frac{z}{|z|} + \frac{|z|}{z} \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C} - \{0\}$

2.06 Για κάθε $z \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι

A) $|\bar{z}^2 + i| = |i - z^2|$ B) $|z+|z|^2| = |z^2 + z|$

2.07 Για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$, να δείξετε ότι

A) $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$

B) $2|z|^2 = |z+u-w|^2 + |z-u+w|^2 \Leftrightarrow u=w$

Γ) $|z+|z|| + |z-|z|| = 2|z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

2.08 Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ και ισχύει

$$\operatorname{Re}(z_1) \cdot \operatorname{Im}(z_2) = \operatorname{Re}(z_2) \cdot \operatorname{Im}(z_1), \text{ να αποδείξετε}$$

$$\text{ότι } |z_1 z_2| = |\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)|$$

2.09 Να αποδείξετε ότι

A) $|z| = e \Leftrightarrow \ln|z+e^2| = 1 + \ln|z+1|$

B) $\log|z+100| = 1 + \log|z+1| \Rightarrow |z| = 10$

2.10 Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ και ισχύει $z^2 = z_1^2 - z_2^2$, να

$$\text{δείξετε ότι } |z_1 - z| + |z_1 + z| = |z_1 + z_2| + |z_1 - z_2|$$

2.11 Αν $z \in \mathbb{C}$ με να αποδείξετε ότι:

A) $|z+|z|| + |z-|z|| = 2|z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

B) $|z+|z|| + |z-|z|| > 2|z| \Leftrightarrow z \in (\mathbb{C} - \mathbb{R})$

2.12 Αν $z, w \in \mathbb{C}$ με $w \neq 1$ αποδείξετε ότι αν

$$\frac{z - \bar{z}w}{1-w} \in \mathbb{R} \text{ τότε } z \in \mathbb{R} \text{ ή } |w|=1$$

2.13 Αν $z, w \in \mathbb{C}$ και $|z+w| = |z| = |w|$, Να α-

$$\text{ποδείξετε ότι } |z-w| = \sqrt{3}|z|.$$

2.14 Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $\bar{z}_1 \cdot z_2 \neq 1$ και ισχύει

$$\left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right| = 1 \text{ να αποδείξετε ότι } |z_1| = 1 \text{ ή } |z_2| = 1$$

2.15 Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$ και ισχύει

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2, \text{ να αποδείξετε ότι}$$

A) $|z_1 - z_2| = |z_1 + z_2|$

B) $|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2|z_1^2 - z_2^2|$

2.16 Αν $|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2|z_1^2 - z_2^2|$ για

κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$ να αποδείξετε ότι:

A) $|z_1 - z_2| = |z_1 + z_2|$

B) $z_1 \bar{z}_2 \in \mathbb{I}$ και $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{I}$

2.17 Έστω $z, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ ώστε να ισχύει

$$\left(\frac{\bar{z} + z_1 \bar{z}_2}{\bar{z}_2}\right) \left(\frac{\bar{z} + z_1 \bar{z}_2}{\bar{z}_2}\right) = \frac{\bar{z}_1}{z_2} (z_1 + z_2) \quad \text{να δείξετε ότι}$$

$z \in \mathbb{R}$

2.18 Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $|z_1| = |z_2| = 1$, τότε:

A) Να αποδείξετε ότι

$$z_1 + z_2 + z_1 z_2 - 1 = 0 \Leftrightarrow z_1 + z_2 - z_1 z_2 + 1 = 0$$

B) να βρείτε το μέτρο του $\frac{z_1 z_2 + z_1 + z_2 - 1}{z_1 + z_2 - z_1 z_2 + 1}$

2.19 Έστω $z, w \in \mathbb{C}, \lambda \in \mathbb{R}$ με $|z| = |w| = 1$, να δείξετε ότι:

A) $|z - w| = |1 - \bar{z}w|$ B) $\frac{z + w}{1 + zw} \in \mathbb{R}$

Γ) $|z + w + \lambda zw - 1| = |z + w - zw + \lambda|$

2.20 Δίνεται ο $z \in \mathbb{C}$ με $|z| = 1$. Να αποδείξετε

ότι: A) $|1 + z|^2 + |1 - z|^2 = 4$ B) $\frac{z^2 + 1}{z} \in \mathbb{R}$

2.21 Να αποδείξετε ότι αν $z + u + w = 0$ και $zu + uw + wz = 0$ τότε $|z| = |u| = |w|$

2.22 Να αποδείξετε ότι

$$z^2 + z = -1 \Leftrightarrow |z| = |z + 1| = 1, z \in \mathbb{C}$$

2.23 Αν $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1, z_1 + z_2 + z_3 = 1$ και

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 1, \text{ να αποδείξετε ότι } \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 1$$

και να βρείτε τους z_1, z_2, z_3 .

2.24 Αν $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, |z_1| = |z_2| = |z_3|$ και οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 στο επίπεδο είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των $z_1 z_2, z_2 z_3, z_1 z_3$ είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

2.25 **Αν $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ διαφορετικοί ανά δύο

και ισχύει ότι $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$, να δείξετε ότι $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$

2.26 ** A) Αν $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ και

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0, \text{ να αποδείξετε ότι } z_1^3 = z_2^3 = z_3^3$$

και ότι $|z_1| = |z_2| = |z_3|$

B) Να αποδείξετε ότι

$$(z - u)^2 + (u - w)^2 + (w - z)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$|z - u| = |u - w| = |w - z|$$

2.27 Αν $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, με

$$z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, \text{ να αποδείξετε ότι } z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$$

2.28 Αν οι εικόνες των $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ στο επίπεδο σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο, να αποδείξετε ότι $(z_2 - z_1)^2 + (z_3 - z_2)^2 + (z_1 - z_3)^2 = 0$

2.29 Έστω ο θετικός αριθμός ρ και οι μιγαδικοί

z_1, z_2, z_3 τέτοιοι ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = \rho, |z_1 + z_2 + z_3| = \rho^2 \text{ και}$$

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0. \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

$$|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1| = 8$$

2.30 Έστω οι $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ για τους οποίους

$$\text{ισχύει } z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = 1,$$

$$|(z_1 + z_2)(z_2 + z_3)(z_3 + z_1)| = 10 \text{ να βρεθεί το}$$

$$\left| (1 + z_1^2)(1 + z_2^2)(1 + z_3^2) \right|$$

2.31 Αν $|z + w| = |z| = |w| = 1$, να δείξετε ότι

A) $\left(\frac{z}{w}\right)^2 + \frac{z}{w} + 1 = 0$ B) $\left|\frac{z}{w} - 1\right| = \sqrt{3}$

2.32 Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ να αποδείξετε ότι:

A) $|z_1 z_2| = |z_1 \bar{z}_2|$ B) $z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 \leq 2|z_1 z_2|$

Γ) $(z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2)i \leq 2|z_1 z_2|$

2.33 Για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$ να δείξετε ότι

- A) $(z\bar{w} + w\bar{z})^2 \geq 0$
 B) $(z\bar{w} - w\bar{z})^2 \leq 0$
 Γ) $-2|zw| \leq z\bar{w} + w\bar{z} \leq 2|zw|$

2.34 Για τους $\alpha, \beta, \gamma, w \in \mathbb{C}$ να δείξετε ότι

- A) $|\alpha| + |\beta| \leq |\alpha + \beta| + |\alpha - \beta|$
 B) $|\alpha - \beta| + |\beta - \gamma| + |\gamma - \alpha| \leq 2|w - \alpha| + 2|w - \beta| + 2|w - \gamma|$

2.35 Να αποδείξετε ότι :

Αν $|z| = |w| = 1$ τότε $\bar{z}w + z\bar{w} \leq 2$

2.36 Να αποδείξετε ότι:

- A) $|z - w|^2 \leq (1 + |z|^2)(1 + |w|^2)$
 B) $|z - i| + \left| \frac{1}{z} - i \right| \geq \left| z + \frac{1}{z} \right|, z \in \mathbb{C}^*$

2.37 Αν είναι $w = \frac{z+i}{z-i} + \frac{\bar{z}-i}{z+i}$, να αποδείξετε ότι $w \in \mathbb{R}$ και ότι $|w| \leq 2$.

2.38 Για κάθε $z, u, w \in \mathbb{C}$ να δείξετε ότι:

- A) $|z+1| + |z-2| - |z-1| - |z| \leq 2$
 B) $|z+2| + |z+3| \leq |z| + |z+5|$
 Γ) $\left| \frac{z+\bar{z}}{2} \right| + \left| \frac{z-\bar{z}}{2} \right| \leq \sqrt{2}|z|$

2.39 Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ να αποδείξετε ότι

- A) Αν $|1 - z| > |z|$ τότε $2\operatorname{Re}(z) < 1$
 B)** Αν $\left| z + \frac{1}{z} \right| = 1$ τότε $|z| + \frac{1}{|z|} \leq \sqrt{5}, z \in \mathbb{C}^*$

2.40 Έστω $z \in \mathbb{C}$ Να αποδείξετε ότι

- A) Αν $|z - 2 - i| \leq 5$ τότε $8 \leq |z - 14 - 6i| \leq 18$
 B) Αν $|z| \leq \sqrt{3} - 1$ τότε $|2z\eta\mu\theta + z^2| \leq 2, \theta \in \mathbb{R}$
 Γ) Αν $|z - 1| \leq 1$ και $|z - 2| = 1$ τότε $1 \leq |z| \leq \sqrt{3}$

2.41 Για τους $z, w \in \mathbb{C}$ ισχύουν ότι

$|w - 3 + 2i| \leq 3$ και $|(1+i)w + 2| \leq 2\sqrt{2}$. Να αποδείξετε ότι $|z - w| \leq 10$

2.42 Αν για τους $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι: $|z_1| < 1$ και $|z_2| < 1$ να αποδείξετε ότι: $|z_1 - z_2| < |1 - \bar{z}_1 z_2|$

2.43 Για τους μιγαδικούς z και w ισχύει ότι $\frac{z}{w} = \frac{1 - \bar{z}}{1 + \bar{z}}$. Δείξτε ότι $\operatorname{Im}(z) > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(w) < 0$.

2.44 Να αποδείξετε ότι

- A) $\left| \frac{z}{z+|z|} \right| + \left| \frac{z}{z-|z|} \right| \geq 1$
 B) $\frac{|3z+w|}{|2z-1| + |2w+1|} \leq \frac{1}{2} + \frac{|z|}{|z+w|}$
 Γ) $\left| \frac{z}{\eta\mu x} \right| + \left| \frac{w}{\sigma\upsilon\nu x} \right| \geq |z+w|, 0 < x < \frac{\pi}{2}$

2.45 Αν $|z| = |w| = 1$ να αποδείξετε ότι

- A) $|z+1| + |w+1| + |zw+1| \geq 2$
 B) $|z+1| + |z^2+1| + |z^3+1| \geq 2$

2.46 Για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, με $z_1 z_2 = 1$ να απο-

δείξετε ότι $\left| \frac{z_1 - z_2}{2} + i \right| + \left| \frac{z_1 - z_2}{2} - i \right| = |z_1| + |z_2|$

2.47 *Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w με

$|z| = |w| = 1$. Να αποδειχθεί ότι $\frac{(z-w)^2}{zw} \leq 0$

2.48 **Αν $z, w, z+w \in \mathbb{C} - \{-i\}$, να αποδείξετε

ότι $\frac{|z-i|}{|z+i|} + \frac{|w-i|}{|w+i|} < 1 \Rightarrow \frac{|z+w-i|}{|z+w+i|} < 1$

2.49 Για κάθε $z \in \mathbb{C}$, να λύσετε τις ανισώσεις

A) $z^2 - 4z > 0$ B) $z^2 - 4z + 3 < 0$

2.50 Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ να αποδείξετε ότι
 $|z-10| = 3|z-2| \Leftrightarrow |z-1| = 3$

2.51 Αν $(z+2+4i)^{15} = (2z+1+2i)^{15}$ τότε να προσδιορίσετε γεωμετρικά τις εικόνες του z

2.52 Να βρείτε το σύνολο των σημείων του επιπέδου που είναι εικόνες του $z \in \mathbb{C}$ αν
 $\log|z-5| \leq \log|z-1|$

2.53 Δίνονται οι μιγαδικοί z και w που συνδέονται με τη σχέση $w = \frac{\alpha}{z^2}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Αν ισχύει ότι $|z-1| = 1$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του w κινείται σε παραβολή.

2.54 Αν $|\alpha+\beta| = |\alpha| = |\beta| = 1$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, να δείξετε ότι: $\alpha^{2010} = \beta^{2010}$

2.55 Αν η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$, να αποδείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για την εικόνα του $w = \frac{\lambda z - i}{iz + \lambda}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

2.56 Α) Αν $|z+1| = 2|z-2|$, να βρείτε τη γραμμή που διαγράφει η εικόνα του z

Β) Αν $\frac{|z_1+1|}{|z_1-2|} = \frac{|z_2+1|}{|z_2-2|} = 2$, να αποδείξετε ότι

$$|z_1 - z_2|^2 \leq 16$$

2.57 Να αποδείξετε ότι: οι εικόνες των μιγαδικών $z = \frac{\lambda+2i}{1+\lambda i}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ανήκουν σε ένα ορισμένο κύκλο.

2.58 Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με $z \cdot w = 1$. Αν η εικόνα του z κινείται στον κύκλο $|z-3+4i| = 5$ να αποδείξετε ότι η εικόνα του w κινείται σε ένα κύκλο.

2.59 Δίνονται οι $z, w \in \mathbb{C}^*$ ώστε $z^2 + w^2 = 0$.

Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των z, w και η αρχή των αξόνων σχηματίζουν ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο.

2.60 Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z αν οι εικόνες των $1, z, 1+z^2$ στο επίπεδο είναι συνευθειακά σημεία.

2.61 Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με

$$|z_1| = |z_2| = |\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)| = 1.$$

Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των z_1, z_2 στο μιγαδικό επίπεδο και η αρχή των αξόνων είναι σημεία συνευθειακά.

2.62 Έστω ο μιγαδικός z για τον οποίο ισχύει $13(z^2 + \bar{z}^2) + 24|z|^2 - 50 = 0$. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας M του z είναι υπερβολή

2.63 Α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο C των εικόνων του $z \in \mathbb{C}$ στο επίπεδο, αν

$$\frac{1}{|z-3i|} + \frac{1}{|z+3i|} = \frac{10}{|z^2+9|}$$

Β) Αν οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 ανήκουν στη C και είναι συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων, να βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο του $|z_1 - z_2|$

2.64 Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 έχουν εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο τα σημεία A, B αντίστοιχα, που δεν ανήκουν στον κύκλο $(C): x^2 + y^2 = 1$, να αποδείξετε ότι ισχύει $|z_1 + z_2| > |1 + z_1 \bar{z}_2|$ αν και μόνο αν ένα μόνο από τα σημεία A, B είναι εσωτερικό σημείο του (C)

2.65 Αν για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z| = 3$, και $z \neq \pm 3i$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = |z-3i|^2 + |z+3i|^2$. Να δοθεί γεωμετρική ερμηνεία της

2.66 Να προσδιορίσετε στο μιγαδικό επίπεδο τα σύνολα των εικόνων των μιγαδικών z που αποτελούν τις γραφικές λύσεις των συστημάτων:

$$\begin{array}{ll} \text{A)} \begin{cases} |z+3| \leq |z+1| \\ |z+5| \geq |\bar{z}+2| \end{cases} & \text{B)} \begin{cases} |z|=1 \\ |z-1|=2|z+1| \end{cases} \\ \text{Γ)} 3 < |z-4i| \leq 5 & \text{Δ)} 1 < |\bar{z}-1+i| < 2 \end{array}$$

2.67 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z σε κάθε μια από τις επόμενες περιπτώσεις

$$\begin{array}{l} \text{A)} |z-3|+|z+3|=10 \\ \text{B)} |z-2i|+|z+2i|=6 \\ \text{Γ)} |z-2i|-|z+2i|=6 \end{array}$$

2.68 Για το μιγαδικό $z \neq 0$ ισχύει ότι $z + \frac{1}{z} = -1$. Δείξτε ότι $z^{200} + z^{100} + 1 = 0$

2.69 Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z για τον οποίο ισχύει κάθε μια από τις σχέσεις:

$$\text{A)} |1-z|^2 \leq 1-|z|^2 \quad \text{B)} \log|z-2| < \log|z|$$

2.70 Να δείξετε ότι οι εικόνες των $w_1 = (z_1 + z_2)^{2v}$, $w_2 = (z_1 - z_2)^{2v}$, $v \in \mathbb{N}^*$ με $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, $|z_1| = |z_2|$, $z_1 \neq z_2$, ορίζουν ευθεία που διέρχεται από το $(0,0)$

2.71 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + 2|z_1|x - |z_2|^2 = 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$ έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

2.72 Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 + \lambda z + 4 = 0$ με $-4 < \lambda < 4$ βρίσκονται σε κύκλο.

2.73 Αν για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύει $\frac{(1+z)(1-\bar{z})}{z-\bar{z}} \in \mathbb{R}$ να δειχθεί ότι οι εικόνες των $1, -1, z, \bar{z}$ είναι ομοκυκλικά σημεία.

2.74 Έστω οι διαφορετικοί μιγαδικοί z_1 και z_2 ώστε ο $w = \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ να είναι φανταστικός, να δεί-

ξετε ότι: A) $w^{2004} \geq 0$ B) $|z_1| = |z_2|$

2.75 Δίνεται η εξίσωση $z^2 - \Delta z - \Delta = 0$ όπου $\Delta \neq 0$ η διακρινουσα της. Να βρείτε τις ρίζες της καθώς και το είδος του τριγώνου που σχηματίζουν οι εικόνες των ριζών της και η αρχή των αξόνων

2.76 Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ και το πολυώνυμο $P(x) = x^2 + 2|z_1 - z_2|x + (1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $P(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

2.77 Να λύσετε στο \mathbb{C} τα συστήματα

$$\begin{array}{l} \text{A)} |z-i| = |iz-i| = |z-iz| \\ \text{B)} \left| \frac{z-4}{z-8} \right| = 1 \text{ και } \left| \frac{3z-1}{z-3} \right| = 1 \\ \text{Γ)} |z| = |w| = 1 \text{ και } z+w+1 = zw. \end{array}$$

2.78 Να λύσετε στο \mathbb{C} τις εξισώσεις:

$$\begin{array}{l} \text{A)} |z|^2 - 6\sqrt{z\bar{z}} + 9 = 0 \quad \text{B)} z^2 + |z| = 0 \\ \text{Γ)} z + |z+1| + i = 0 \quad \text{Δ)} z + \bar{z} - 3|z|^2 = 0 \end{array}$$

2.79 Να δείξετε ότι οι ρίζες των εξισώσεων $z^2 - z + 1 = 0$, και $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$ ορίζουν κορυφές ισοσκελούς τραπεζίου

2.80 Δίνονται οι $z, w \in \mathbb{C}$ με $w = \frac{z+9i}{iz-1}$ και $|z| = 3$

A) Να αποδείξετε ότι $|w| = 3$
B) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z-w|$

2.81 Να αποδείξετε ότι αν η εξίσωση $(iz-2)^v = w(z+2i)^v$ με άγνωστο το $z \in \mathbb{C}$ $v \in \mathbb{N}^*$, έχει πραγματική ρίζα τότε $|w| = 1$.

2.82 Να εξετάσετε αν η εξίσωση

$$(1+iz)^v = \frac{2+3i}{2\sqrt{3}-i}, \text{ έχει πραγματική ρίζα.}$$

2.83 Για τον $z \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι: $|z-1-2i| \leq 4$. Να βρείτε τις τιμές του z για τις οποίες η παράσταση $|z-13-7i|$ γίνεται μέγιστη ή ελάχιστη.

2.84 Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z , αν ισχύει ότι $|z+3| = |\bar{z}-5+3i|$. Από τους παραπάνω μιγαδικούς z , ποιος έχει το μικρότερο μέτρο;

2.85 Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με

$$w = \frac{3z+2i}{iz+6}. \text{ Η εικόνα του } z \text{ ανήκει στον κύκλο}$$

$$O(0,0) \text{ και } \rho=2$$

- A) να αποδείξετε ότι η εικόνα του w ανήκει σε ομόκεντρο κύκλο ακτίνας $r=1$
 B) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των z, w και η αρχή των αξόνων είναι συνευθειακά σημεία.
 B) Να υπολογίσετε την ελάχιστο και τη μέγιστη τιμή του $|z-w|$

2.86 Έστω ο μιγαδικός z με $|z+4i|=1$ και ο w με $w=2z-4+7i$. Να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή του $|z-w|$

2.87 Δίνονται οι μιγαδικοί z και w για τους οποίους ισχύουν $|(1+i)z-2-4i| = \sqrt{18}$ και $w=2z-11+5i$. Να βρείτε:

- A) Το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z
 B) Την μέγιστη και ελάχιστη τιμή του $|z|$
 Γ) Την εξίσωση της καμπύλης που βρίσκονται οι εικόνες του μιγαδικού w
 Δ) Τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή του $|z-w|$

2.88 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z αν ισχύει ότι $(z-i)(\bar{z}+i)-3|z-i|-4=0$

2.89 Έστω z, w μη μηδενικοί μιγαδικοί τέτοιοι ώστε $z \cdot 3^{|z|} + w \cdot 3^{|w|} = (z+w) \cdot 3^{|z+w|}$. Να αποδείξετε ότι $\frac{z}{w} \in \mathbb{R}$ ή $|z+w| = |z| = |w|$

2.90 Για τον $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση

$$z + \frac{1}{z} = 2011 \quad (1)$$

A) Να αποδείξετε ότι η εικόνα του z είναι σημείο κύκλου με κέντρο το $O(0,0)$

B) Αν z_1, z_2, z_3 ικανοποιούν την (1) να δείξετε

$$\text{ότι } (z_1 + z_2 + z_3) \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right) \leq 9$$

2.91 Έστω ο μιγαδικός $z \neq 1$ για τον οποίο ισχύει $3z^{2001} + 2001\bar{z}^{2001} = 2004$. Να δείξετε ότι

$$A) (\bar{z})^{2001} = z^{2001} = 1 \quad B) \bar{z}z = 1$$

Γ) αριθμός $w = \frac{1+z}{1-z}$ είναι φανταστικός.

2.92 Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί α, β, γ με $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 2$ και $\alpha + \beta + \gamma = 1$

A) Να δείξετε ότι $(\alpha + \bar{\beta})(\beta + \bar{\gamma})(\gamma + \bar{\alpha}) \in \mathbb{R}$

B) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$

Γ) Να αποδειχθεί ότι $|\alpha + \beta| + |\beta + \gamma| + |\gamma + \alpha| \geq 2$

2.93 Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2, w με

$$|z_1| = |z_2| = 2, \quad z_1^2 + z_2^2 \neq 0 \quad \text{και} \quad w = \frac{2z_1 \cdot z_2}{z_1^2 + z_2^2}$$

A) Να δείξετε ότι $\bar{z}_1 = \frac{4}{z_1} \quad \bar{z}_2 = \frac{4}{z_2}$

B) Να δείξετε ότι ο w είναι πραγματικός

Γ) Να δείξετε ότι ισχύει $\left| \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} \right| \leq 2$

Δ) Αν $w = 2$, να δείξετε ότι

$$\alpha) |z_1 - z_2| = 2$$

β) το τρίγωνο που έχει κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών O, z_1, z_2 είναι ισόπλευρο

3

ΣΥΝΔΙΑΣΤΙΚΕΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΜΕ ΑΝΑΛΥΣΗ (ΕΩΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

3.01 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$

- A) Να ορίσετε την f^{-1}
 B) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = 1$
 Γ) Αν z, w είναι μιγαδικοί τέτοιοι ώστε να ισχύει ότι $f^{-1}(\ln 1) + f^{-1}(\ln|z + \bar{w}|) = \frac{7}{6}$ να αποδείξετε ότι
 α) $|z + \bar{w}| = 2$
 β) $|\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(w)| \leq 2$

3.02 Έστω ο μιγαδικός $w = \frac{4z^2 - |z|}{4z^2 + |z|}$, $z \in \mathbb{C}$

- A) Να λυθεί στο \mathbb{C} η εξίσωση $4z^2 + |z| = 0$
 B) Αν ο w είναι φανταστικός, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο \mathbb{C} των εικόνων του z
 Γ) Αν οι εικόνες των μη μηδενικών μιγαδικών z_1, z_2, w_1, w_2 είναι εσωτερικά σημεία του γεωμετρικού τόπου \mathbb{C} , να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ ώστε να ισχύει $|x_0 z_1 - z_2| + |x_0 w_1 - w_2| = x_0$

3.03 Έστω $z = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ και η συνάρτηση $f(x) = \frac{|\bar{z} + iz|x^2 + 5x + 2|z + i\bar{z}|}{x^2 + 3x + 2}$. Αν $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 3$, να απο-

δείξετε ότι

- A) $|\bar{z} + iz| = 1$ και $|z + i\bar{z}| = 2$
 B) $|z| = \frac{\sqrt{5}}{2}$ Γ) $\alpha\beta = \frac{3}{8}$

3.04 Για τους μιγαδικούς z, w ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|z - 3 - 4i|x^2 - |w - 3 + 6i|x + 2|}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}$

- A) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z .
 B) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w .
 Γ) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του $|z - w|$.

3.05 Αν για τον μιγαδικό αριθμό $z = x + i \cdot f(x)$ ισχύει $|z| = 1$ για κάθε $x \in \Delta_f$, να αποδείξετε ότι:

- A) Το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f είναι υποσύνολο του διαστήματος $[-1, 1]$,
 B) Αν η f είναι συνεχής τότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-1, 1)$.

3.06 Έστω $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και οι μιγαδικοί $z = \alpha + \beta i$, $z_1 = \alpha + if(\alpha)$, $z_2 = \beta + if(\beta)$. Αν ισχύει $3(z^2 - \bar{z}^2) - 4iz\bar{z} = 4i \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$, να αποδείξετε ότι η C_f έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τον x' .

3.07 Δίνεται η συνάρτηση f , συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha) > \alpha > 0$.

Δίνεται και ο μιγαδικός $z = \frac{\beta + if(\beta)}{\alpha - if(\alpha)}$. Αν ο z είναι φανταστικός να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο (α, β) .

3.08 Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[0, 2]$ και οι μιγαδικοί $z_1 = f(0) + i$ και $z_2 = 1 + f(2) \cdot i$.

Αν ισχύει ότι $|z_1 - z_2| = |z_1 + z_2|$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[0, 2]$.

3.09 Δίνονται οι μιγαδικοί $z, w \in \mathbb{C}$ και η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = |z|x^3 + |w|x^2 - |z+w|$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[-1, 1]$.

3.10 Έστω συνάρτηση $f(x) = |2z+1|x^3 - |z|x - 1$ όπου z μιγαδικός με $z \neq 0$ και $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι αν $\operatorname{Re}(z) > \frac{1}{12}$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

3.11 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής στο \mathbb{R} για την οποία ισχύει ότι

$f^3(x) + |z_1 - z_2|f^2(x) + \frac{|1 - \bar{z}_1 z_2|^2}{4}f(x) = 2x^5 + x^4 - 2$, $x \in \mathbb{R}$, όπου z_1, z_2 μιγαδικοί που οι εικόνες τους είναι εσωτερικά σημεία του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$. Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$

3.12 Α. Να δείξετε ότι για τους μιγαδικούς z, w ισχύει $|z - w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{w})$

Β. Θεωρούμε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως μονότονη και οι μιγαδικοί αριθμοί

$z_1 = 3 + f(2) \cdot i$ και $z_2 = f^{-1}(2) + 3i$ για τους οποίους ισχύει η σχέση $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$. Να δείξετε ότι

Α) $z_1 = z_2$

Β) οι f, g όπου $g(x) = f(2x - f(x)) - x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσες

γ) αν η f είναι συνεχής, με σύνολο τιμών το \mathbb{R} , τότε η εξίσωση $2x - f(x) = f^{-1}(x)$ έχει μοναδική ρίζα η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(2, 3)$

3.13 Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z_{(\alpha)} = \frac{\alpha}{1 + \alpha i}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Α Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων M του $z_{(\alpha)}$

Β Βρείτε τους μιγαδικούς που απέχουν την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση από το $O(0, 0)$

Γ Αν οι εικόνες M του $z_{(\alpha)}$ ανήκουν σε κύκλο κέντρου $K\left(O, -\frac{1}{2}\right)$ και ακτίνας $\rho = \frac{1}{2}$, να δείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $z_{(\alpha)}$ $z_{\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$ είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου αυτού.

Δ Να δείξετε ότι το τρίγωνο που έχει ως κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών $z_{(1)}, z_{(-1)}, z_{(2012)}$ είναι ορθογώνιο (www.mathematica.gr)

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

4

ΤΥΠΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

4.01 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$

- A) Βρείτε το πεδίο ορισμού της
 B) Λύστε την εξίσωση $f(x) + 1 = 0$
 Γ) Λύστε την ανίσωση $f(x) < 0$
 Δ) Να δείξετε

$$\text{ότι } f\left(\sqrt{\frac{1}{2\sin^2 x - 1}}\right) + f(\sqrt{2}) = f\left(\frac{1}{\sin x}\right)$$

4.02 Αν $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$. Να αποδείξετε ότι $f(x)f(-x) = 1$

4.03 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$.
 Να αποδείξετε ότι $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$,
 $x, y \in \mathbb{R}$

4.06 Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |\ln|x||$ και να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 10^{-6}$

4.07 Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων

$$f(x) = \sqrt{|x|} \quad g(x) = -\sqrt{|x|} + 1 \quad k(x) = \frac{1}{|x|}$$

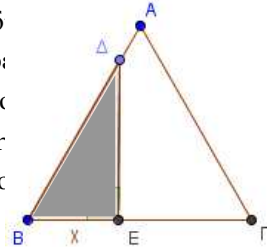
$$h(x) = \sqrt{1-x} \quad m(x) = \frac{1}{x-1} \quad n(x) = \frac{1}{|x+1|}$$

4.08 Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = \ln(-x), \quad x < 0 \quad g(x) = -\ln(-x), \quad x < 0$$

$$k(x) = \ln|x| \quad m(x) = -|\ln x| \quad t(x) = -\ln|x|$$

4.04 Στο δ σχήμα να βρείτε τη συνάρτηση που περιγράφει το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης



περιοχής που δημιουργείται από τη ΔΕ και τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ για τις διάφορες θέσεις του Ε πάνω στη ΒΓ. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο με μήκος πλευράς 1 η $BE = x$ και $\Delta E \perp BE$

4.05 Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} με $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$. Να υπολογίσετε το $f(x) + f(1-x)$ και το :

$$f\left(\frac{1}{2004}\right) + f\left(\frac{2}{2004}\right) + \dots + f\left(\frac{2002}{2004}\right) + f\left(\frac{2003}{2004}\right)$$

Γραφική Παράσταση

4.09 Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

A) $f(x) = x\sqrt{x^2}$

B) $g(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ \ln x, & 0 < x \leq e \\ (x-1)^2, & x > e \end{cases}$

Γ) $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2}$

Μ. Παπαρηγοράκης
 4 Γ ΛΥΚ

Πεδίο ορισμού

4.10 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων $f(x) = x \cdot \ln(x^2)$

$$g(x) = \frac{x+1}{x\sqrt{x-3x+2}\sqrt{x}} \quad t(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}\sqrt{x-1}}$$

$$h(x) = \frac{x-2}{1+x+\sqrt{1+x^2}} \quad k(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{(x-1)\sqrt{x+1}}$$

4.11 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

$$f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{2\eta\mu x + 1} \quad g(x) = \frac{2\epsilon\phi x}{\eta\mu x - \eta\mu 2x}$$

$$\varphi(x) = \frac{x^2+1}{e^{2x}-e^{-2x}} \quad t(x) = \frac{1}{2\sigma\upsilon\nu^2 x + 5\sigma\upsilon\nu x + 3}$$

4.12 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

$$f(x) = \frac{\sqrt{e-x}}{(2x-1)\ln x} \quad t(x) = \frac{1}{x-1} \ln x$$

$$g(x) = \sqrt{e^x-1} + \sqrt{1-\ln x} \quad k(x) = \sqrt{\ln(1-x^2)}$$

4.13 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{9^x-4 \cdot 3^{x+1}+27} \quad g(x) = \sqrt{x^3-x^2}$$

$$h(x) = \sqrt{\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x + 1} \quad f(x) = \sqrt{(e^x-1)\ln(x-1)}$$

4.14 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \ln|x| \quad g(x) = \frac{1}{x+1} \ln(-x)$$

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{4-x^2}} \quad k(x) = x^{\frac{1}{\ln x}}$$

4.15 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

$$k(x) = \frac{x^2+1}{e^{2x}-e^{-2x}}, \quad t(x) = \frac{x}{x-1} + \ln x$$

$$r(x) = \sqrt{\frac{x^2+x-2}{x-x^2}}, \quad k(x) = \frac{\sqrt{3-|x-2|}}{2x-4-|x-1|}$$

4.16 Να βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε μιας από τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$f(x) = \sqrt{e^x-1} + \sqrt{1-\ln x} \quad m(x) = \sqrt{\ln(x-1)}$$

4.17 Να βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε μιας από τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{4-x^2}} \quad g(x) = \log_x \frac{x+3}{3-x}$$

Κοινά Σημεία

4.18 Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f^2(x) - 2f(x) - 2 = x(x-1)$, $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$

4.19 Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(x)+9 = g(x)+x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η σχετική θέση των C_f, C_g

4.20 Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x^2+2) + f(3x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο τουλάχιστον σημεία

4.21 Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $f(x) = g(x) + x^2 - \kappa$ κάθε $x \in \mathbb{R}$, $\kappa \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί ο κ ώστε οι γραφικές παραστάσεις τους, να τέμνονται στην ευθεία $x = 1$ καθώς και τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι πάνω από την C_g

4.22 Να βρεθούν τα διαστήματα όπου η C_f είναι πάνω από τη C_g όταν:

A) $f(x) = 4^x - 2^{x+1}$ και $g(x) = 2^{x+2} - 8$

B) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν } x \geq 0 \\ -1-2x & \text{αν } x < 0 \end{cases}$ και $g(x) = x+2$

καθώς και η απόστασή τους.

Ισότητα Συναρτήσεων

4.23 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 1$.

A) Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι ίσες με τη συνάρτηση f .

$$f_1(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad f_2(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - x + 1}$$

$$f_3(x) = (\sqrt{x + 1})^2 \quad f_4(x) = x \left(\frac{1}{x} + 1 \right)$$

$$f_5(x) = \ln e^{x+1} \quad f_6(x) = e^{\ln(x+1)}$$

B) Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του \mathbb{R} στο οποίο οι παραπάνω συναρτήσεις είναι όλες ίσες.

4.24 Να εξετάσετε αν είναι ίσες οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{1 + \sin x}{\eta \mu x} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{\eta \mu x}{1 - \sin x}$$

4.25 Να εξετάσετε αν είναι ίσες οι συναρτήσεις

$$f(x) = (1 + \sqrt{2})^x - (\sqrt{2} - 1)^{-x} \quad \text{και} \quad g(x) = 0$$

4.26 Να εξετάσετε αν είναι ίσες οι συναρτήσεις

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{-1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

4.27 Να εξετάσετε αν είναι ίσες οι συναρτήσεις στις παρακάτω περιπτώσεις.

$$A) f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{-1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$B) f(x) = \ln \left(\frac{1}{x} - 2 \right) \quad \text{και} \quad g(x) = \ln(1 - 2x) - \ln x$$

4.28 Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι ίσες οι

$$\text{συναρτήσεις} \quad f(x) = \frac{-\lambda x^3 + 3x - 4}{x^2 - \lambda x + 4} \quad \text{και}$$

$$g(x) = -\lambda x - 1$$

4.29 Να εξετάσετε αν είναι ίσες οι συναρτήσεις

$$f(x) = \ln \left(\frac{1}{x} - 2 \right) \quad \text{και} \quad g(x) = \ln(1 - 2x) - \ln x$$

Πράξεις Συναρτήσεων

4.30 Να βρεθούν οι συναρτήσεις $f + g$, και $\frac{g}{f}$

όταν

$$A) f(x) = \sqrt{4 - |x|} \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{x - 1}$$

4.31 Να βρεθούν οι συναρτήσεις $f + g$, και $\frac{g}{f}$

$$\text{αν} \quad f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq 2 \\ \sqrt{x}, & x > 2 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} \ln x, & 0 < x < 3 \\ -2x + 3, & x \geq 3 \end{cases}$$

4.32 Για τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$g(x) = f^2(x) - 2f(x) + x^2 + 3, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad \text{Να δείξετε}$$

ότι η C_g τέμνει τον θετικό ημιάξονα Oy

4.33 Να βρείτε τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αν

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$f^2(x) + g^2(x) + 1 = 2(\eta \mu x \cdot f(x) - \sigma \nu \nu x \cdot g(x))$$

4.34 Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση: $f^2(x) = x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$

4.35 Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση: $f^2(x) = 4e^x(f(x) - e^x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

4.36 Να προσδιορίσετε όλες τις γνήσια αύξουσες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι $f^2(x) = x^2$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$

4.37 Να βρείτε τις συναρτήσεις τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $(f(x) - 1)(f(x) - 2) = 0$

4.38 Να αποδείξετε ότι $f = g$, αν ισχύει ότι $(f^2 + g^2)(x) \leq 2(f + g)(x) - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άρτιες Περιττές

4.39 Να εξετάσετε αν είναι άρτιες ή περιττές οι συναρτήσεις

$$g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad , \quad f(x) = \begin{cases} 2x+3 & x < 0 \\ 3 & x = 0 \\ 2x-3 & x > 0 \end{cases}$$

4.40 Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $x[f(x) + f(-x) + 2] + 2f(-x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή και να βρείτε τον τύπο της.

4.41 ** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- A) Η C_f διέρχεται από το $(0,0)$
 B) η f είναι άρτια
 Γ) $f(|x|) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

4.42 Αν ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι η f είναι περιττή

4.43 Αν ισχύει $f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι η f είναι περιττή

4.44 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι περιττή και για την οποία ισχύει ότι $f(x)(x^2 + 2) \leq 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της

4.45 Δύο συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχουν τις ιδιότητες: $f^2(x) = f(x)f(-x)$ και $g^2(x) = -g(x)g(-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι άρτια και η g περιττή

4.46 Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $A_f = A_g \subseteq \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: Αν οι f, g είναι περιττές τότε η $f+g$ είναι περιττή ενώ οι $f \cdot g, f/g, (g(x) \neq 0)$ είναι άρτιες

Σύνολο Τιμών

4.47 Να βρείτε τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων: A) $f(x) = e^{1-x} + 3 \quad x \in [-1, 2]$

B) $f(x) = -3 \ln(1-2x) - 1, \quad x \in [-2, -1/2]$

4.48 Να βρείτε τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων: A) $f(x) = \frac{x+1}{x-1} \quad x \in [2, 5]$

B) $f(x) = \frac{6}{\sqrt{x^2 - 4} + 2} \quad x \in (-\infty, -2]$

4.49 Να βρείτε τα σύνολα τιμών των

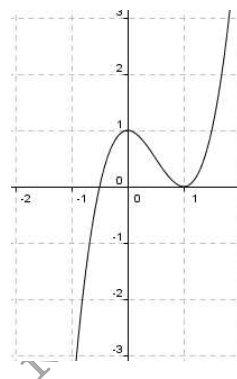
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{αν } 2 \leq x < 3 \\ x - 1 & \text{αν } 3 \leq x < 5 \end{cases}, \quad g(x) = 3 + 2|x - 1|$$

4.50 Να βρείτε τα σύνολα τιμών των

$$f(x) = \log\left(\frac{1}{x} - 1\right), \quad g(x) = \frac{5 + e^x}{5 - e^{x+1}} \quad f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$$

4.51 Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$. Να βρείτε το πλήθος των ριζών των εξισώσεων:

- A) $f(x) = -2$
 B) $f(x) = 0$
 Γ) $f(x) = 1$
 Δ) $f(x) = 2$
 E) $f(x) = \alpha, \alpha \in [-3, 3]$



Σύνθεση Συναρτήσεων

4.52 Να εκφράσετε τη συνάρτηση f ως σύνθεση δύο ή περισσότερων (μη ταυτοτικών) συναρτήσεων, αν:

$$f(x) = x^x \quad g(x) = \ln(x^2 + 1) - \ln(x^2 + 3)$$

$$k(x) = (\ln(x+1) - \ln x)^2$$

4.53 Να οριστεί η συνάρτηση $f \circ g$ αν

A) $f(x) = \sqrt{1-x}$ και $g(x) = \ln x$

B) $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{αν } x \in (0,2) \\ x+1 & \text{αν } x \in [2,4) \end{cases}$, $g(x) = |x-1|$

4.54 Αν $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $g(x) = 3\sqrt{x}-2$ να ορίσετε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$

4.55 Αν $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$,

$$g(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$
 να αποδείξετε ότι
$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

4.56 Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h , αν $h: f: [0,5) \rightarrow \mathbb{R}$ και

$$h(x) = f(x^2 - 4) + f(x+1)$$

4.57 Να βρεθεί ο τύπος μιας συνάρτησης f σε κάθε μια από τις περιπτώσεις:

A) Αν $f(\ln(2x)) = x+3, \quad \forall x > e$,

B) Αν $(f \circ g)(x) = x^2 + x + 1$ και $g(x) = x+1$

Γ) Αν $(g \circ f)(x) = \sin^2 x$ και $g(x) = x^2$

4.58 Έστω οι συναρτήσεις $f: A_f \rightarrow \mathbb{R}$, $g: A_g \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(A_f) \subseteq A_g$. Να αποδειχτούν οι προτάσεις:

A) Αν η f είναι άρτια, τότε και η $g \circ f$ είναι άρτια.

B) Αν η f είναι περιδική, τότε και η $g \circ f$ είναι περιδική με την ίδια περίοδο.

4.59 Να αποδειχτεί ότι δεν υπάρχει συνάρτηση που να ικανοποιεί τη σχέση $f(x) + f(2-x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

4.60 Αν $f(x) = x^2 + x + 2$ και $g(x) = x^2 - x + 2$ να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση h με $A_h = \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $h(f(x)) + h(g(x)) = g(f(x))$

4.61 Να βρείτε τη συνάρτησης $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f\left(\frac{x}{e}\right) \leq \ln x \leq f(x) - 1$ για κάθε $x > 0$.

4.62 Αν $f(f(x)) = e^{2x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι η f παίρνει την τιμή 2014

4.63 Αν ισχύει ότι $(f \circ f)(x) = 2x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε να υπολογίσετε το $f(1)$

4.64 Να προσδιορισθεί ο τύπος της f :

A) Αν $(1-x)f(x-1) + f(1-x) + x = 1, \quad x \in \mathbb{R}$

B) Αν ισχύει $2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$

4.65 Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ ισχύει ότι $f(x+y) = f(x) \cdot e^{f(y)-1}, \quad x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{f(x)-1}$ και $f(x) = e^{1-f(-x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε την f

4.66 Αν $f(x) = \frac{ax+3}{2-x}$ να βρεθεί ο $a \in \mathbb{R}$, αν ισχύει: $(f \circ f)(x) = x, \quad x \neq 2$

4.67 Να βρεθούν οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αν για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x) + f(y) + f(xy) = x + y + xy$

5 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

5.01 Εξεταστε τη μονοτονία των συναρτήσεων

A) $f(x) = \sqrt{5 - \sqrt{5 - x}}$ B) $f(x) = \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

Γ) $f(x) = (x-1)^3 - 2$ Δ) $f(x) = e^{\sqrt{4-x}} - 3$

E) $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$ Ζ) $f(x) = \begin{cases} 4x+3 & \text{αν } x < 2 \\ 1-2x & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$

5.02 Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με

$$f(x) = e^x + x^5 + x^3 + x - 1 \text{ και}$$

$$g(x) = 2 - x - x^3 - \ln x. \text{ Να λυθούν οι ανισώσεις}$$

$$f(x) > 0, g(x) > 0$$

5.03 A) Αν $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1, x \in \mathbb{R}$ τότε

να αποδειχθεί ότι η f είναι γν. φθίνουσα.

B) Να λυθεί η ανίσωση $3^x + 4^x > 5^x$.

5.04 Να λύσετε τις ανισώσεις:

A) $\ln x > 1 - x$ B) $e^x > \frac{1-x}{1+x}$

5.05 Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$2f^5(x) + f(x) = 3x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

A) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα

B) Να λυθεί η ανίσωση $f(x^2 + x - 1) < 1$

5.06 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = 2^x + x. \text{ είναι γνήσιως αύξουσα και να λύσετε}$$

$$\text{την ανίσωση } 2^{3x-x^2} - 2^{6-2x} > x^2 - 5x + 6$$

5.07 Δίνεται ότι η συνάρτηση f ορισμένη και είναι γνήσια αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Να λύσετε την

$$\text{εξίσωση } f(\sqrt{x}) + f(x^2) = f(x) + f(x^3)$$

5.08 Η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα

$$f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right) \text{ για κάθε } x, y > 0. \text{ Επιπλέον}$$

ισχύει ότι «αν $a > 1$ τότε $f(a) > 0$ ». Να δείξετε ότι η f είναι γν. αύξουσα στο $(0, +\infty)$

5.09 Έστω συναρτήσεις f, g με κοινό σύνολο

ορισμού το $[a, \beta]$, σύνολο τιμών το $[a, \beta]$ ώστε

$$g(x) > f(x), \forall x \in [a, \beta] \text{ και η } f \text{ είναι γνήσια φθίνουσα. Δείξτε ότι } f(g(x)) < g(f(x)) \forall x \in [a, \beta]$$

5.10 Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ περιττή και γνήσιως φθίνουσα στο \mathbb{R} με $f(f(x)) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να

$$\text{δείξετε ότι } f(x) = -x, x \in \mathbb{R}$$

5.11 Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, γνήσια φθίνουσα με την ιδιότητα

$$2f^2(x^2) - 2xf(6x-8) \leq 4 - 3x, \forall x \in \mathbb{R}$$

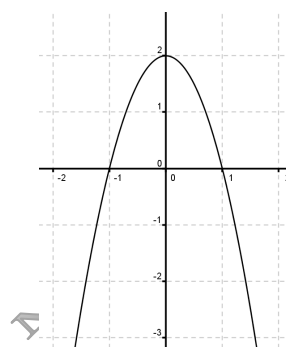
5.12 Η συνάρτηση f είναι γνήσιως αύξουσα και

$$\text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ ισχύει ότι: } f\left(\frac{2x+3f(x)}{5}\right) = x, \text{ να}$$

αποδείξετε ότι $f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

5.13 Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση του σχήματος, να βρείτε την μονοτονία της συνάρτησης

$$g(x) = f(f(x)) \text{ στο } [-1, 0]$$



5.14 Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x) + 2e^{f(x)} = x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- A) Να αποδειχτεί ότι η f είναι γνήσια αύξουσα
 B) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $g(x) = x + 2e^x$
 Γ) Να υπολογίσετε το $f(1)$
 Δ) Να βρείτε το πρόσημο της f

5.15 Έστω συνάρτηση f , ορισμένη στο \mathbb{R} , που είναι γνήσια μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $(-1, -1)$ και $(1, 2)$

- A) Να αποδείξετε ότι είναι γνήσια αύξουσα
 B) Να λύσετε τις ανισώσεις $f(2x-1) > -1$ και $f(1-x) < 2$
 Δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2) = 2$
 E) Πόσες ρίζες μπορεί να έχει η εξίσωση $f(x) = 2014$

5.16 A) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = x^5 + x^3 + x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι γνήσια αύξουσα.

- B) Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο \mathbb{R} ώστε να ισχύει $f^5(x) + f^3(x) + f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 Να αποδείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα
 Γ) Να λύσετε την εξίσωση $h(x) = 3$ και να υπολογίσετε το $f(3)$

5.17 Έστω η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = 0$ για κάθε $x > 0$. Θεωρούμε τη

συνάρτηση $g(x) = f(h(x))$ όπου $h(x) = \frac{1-x}{1+x}$. Το-

τε:

- A) Να αποδείξετε ότι η g είναι περιττή.
 B) Να αποδείξετε ότι η h είναι γνήσια φθίνουσα στο $(-1, 1)$
 Γ) Να λύσετε την εξίσωση $h(e^x) + h(e^{2x}) = h(e^{11x}) + h(e^{111x})$ στο $(-1, 1)$

Ακρότατα

5.18 Να βρεθούν τα ακρότατα κάθε μιας από τις παρακάτω συναρτήσεις

$$v(x) = 1 - \sqrt{2x+3} \quad g(x) = 4 - |x-2|$$

$$t(x) = 4 - (x^3 - 4x)^4 \quad r(x) = x^2 - 4x + 5$$

$$f: [-1, 4] \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = 2x - 1$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} x+1 & \text{αν } x \leq 2 \\ 3x-1 & \text{αν } x > 2 \end{cases}$$

5.19 Να βρεθούν τα ακρότατα κάθε μιας από τις παρακάτω συναρτήσεις

- A) $f(x) = 1 - 2\ln(x-1)$, $x \in [2, 3]$
 B) $f: [-1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x - 1$

5.20 Να βρεθούν τα ακρότατα κάθε μιας από τις παρακάτω συναρτήσεις

- A) $f(x) = x^2 - 4x + 5$
 B) $f(x) = e^{2x} - 2e^x + 3$

5.21 A) Να δείξετε ότι $x + \frac{1}{x} \geq 2$ αν $x > 0$

B) Έστω $f(x) = (9 + \sqrt{80})^x + (9 - \sqrt{80})^x$. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο

5.22 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με $f(0) = 1$

- A) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{2f(x)}{1+f^2(x)}$ έχει μέγιστη τιμή το 1.
 B) Να βρείτε την μέγιστη τιμή της συνάρτησης $\Phi(x) = \frac{2e^x}{1+e^{2x}} + 2013$

5.23 Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = x^2 - (\lambda+1)x + 2$ να έχει ελάχιστο το -2

Συνάρτηση 1:1

5.24 Να εξεταστεί ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις, είναι 1-1 και ποιες όχι:

A) $f(x) = 2 \ln x - 3$

B) $f(x) = 3e^{x-1} + 2$

Γ) $f(x) = x(x-3)(x-4) + 2004$

5.25 Δίνεται η συνάρτηση $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(f(x)) = 2x^2 - 3x + 2$, για κάθε $x \in [1, +\infty)$. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1

5.26 Δίνεται ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1. Να αποδείξετε ότι η $F(x) = f^3(x) + 2f(x) - 3$ είναι 1-1.

5.27 Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $(f \circ f)(x) + 3f(x) - x^{2003} = 0$, $x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι είναι 1-1

5.28 Να αποδειχτεί ότι δεν είναι 1-1 η συνάρτηση f αν ισχύει $6f(x^2) - f^2(x) \geq 9 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

5.29 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 - x - \ln x$

A) Να μελετήσετε τη μονοτονία της f

B) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f(1)$

Γ) Να λύσετε την ανίσωση $x + \ln x > 1$

5.30 Να λύσετε τις εξισώσεις .

A) $e^{x-1} + \ln x = 2 - x$ B) $x^7 + 2x^5 + 3x^3 + x = 6$

5.31 Να λύσετε την εξίσωση

$$\log(\lambda^2 + 1) - \log|5\lambda - 5| = (5\lambda - 5)^4 - (\lambda^2 + 1)^4$$

5.32 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $(f \circ f)(x) = x^2 - 5x + 9$ και $g(x) = x^2 - xf(x) + 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(3) = 3$ και ότι η g δεν είναι 1-1

5.33 Δίνεται η $f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1)$, $x > 0$

A) Να μελετήσετε τη μονοτονία της f

B) Να λύσετε την εξίσωση:

$$2(x^2 - 3x + 2) = \ln \left[\frac{(3x-2)^2 + 1}{x^4 + 1} \right] \text{ στο } [2, +\infty)$$

5.34 Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι 1-1 η

$$\text{συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{αν } x < 0 \\ x + \lambda - 8 & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

5.35 Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι αν $B \subseteq f(A)$ και η $g \circ f$ είναι 1-1 τότε η g είναι 1-1

5.36 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το \mathbb{R} και $f^3(x) + 3f(x) - x = 0$, $x \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε η f αντιστρέφεται και να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$

5.37 Αν είναι $x + e^x = y + e^y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ τότε

A) Να αποδείξετε ότι $x = y$.

B) Να λυθεί η εξίσωση $x^2 - 3x + 2 = e^{3x} - e^{x^2+2}$

5.38 Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $e^a - e^b = \beta^3 - \alpha^3$ τότε $\alpha = \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

5.39 Αν $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x + \frac{4}{3} - 2^x$ τότε:

A) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1

B) Να λύσετε την εξίσωση $3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x = 3 \cdot 6^x$

5.40 Αν $f(x) = e^x + x^3 + x + 1$ τότε

A) Να δείξετε ότι είναι 1-1

B) Να λύσετε την εξίσωση:

$$e^{x^2-x} + (x^2 - x)^3 + x^2 - 2x = e^{x+3} + (x+3)^3 + 3$$

Αντίστροφη

5.41 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης
 $f(x) = x^3 + 1$

5.42 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης
 $f(x) = 2 + (x-3)^2, x < 3$

5.43 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης
 $f(x) = 5 + \sqrt{x-2}$

5.44 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης
 $f(x) = \log \sqrt{3-10^x}$

5.45 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης
 $f(x) = \frac{3+e^{3x}}{3-e^{3x}}$

5.46 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$.

5.47 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης
 $f(x) = \log \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

5.48 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης
 $f(x) = \ln(2+e^x) - x$

5.49 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης
 $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

5.50 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης
 $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 9x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

5.51 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης $f(x) = \frac{\Delta}{\chi} = \frac{(2+|x|)\eta\mu^2 x}{1+|x|} = \eta\mu^3 x + \eta\mu^2 x + \eta\mu x + 2$ και τις ανισώσεις: $f^{-1}(x) < 3$, και $f^{-1}(x+1) \geq x+5$

5.52 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης
 $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$

5.53 Να βρείτε τα κοινά σημεία των $C_{f^{-1}}, C_f$ αν
 $f(x) = \sqrt{1-x}, x \in [-1,0]$

5.54 Έστω συνάρτησης f ώστε να ισχύει
 $f(f(f(x))) = 2x - 7$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δίνεται ακόμη ότι
 $f(1) = 3, f(3) = 9$. Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$ '
και να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 9$.

5.55 Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
ισχύει ότι $f^3(x) + 3f(x) - x = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να
αποδείξετε η f αντιστρέφεται και να βρείτε την
 f^{-1}

5.56 Αν για τις συναρτήσεις f, g ορισμένες
στο \mathbb{R} , υπάρχουν οι συναρτήσεις $(f \circ g)^{-1}$ και
 $(g \circ f)^{-1}$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν και οι g^{-1} ,
 f^{-1} αντιστοίχα.

5.57 Έστω η f με $f(x) = 2x^3 + x - 2$.
Α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
Β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$.
Γ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(5x+6) < 1$.

5.58 Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 2$
Α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται
Β) Να λύσετε τις εξισώσεις $f(x) = 12, f^{-1}(x) = -2$
Γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της $C_{f^{-1}}$ με τους άξονες και με την ευθεία $y = x$
Δ) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{\Delta}{\chi} = \frac{(2+|x|)\eta\mu^2 x}{1+|x|} = \eta\mu^3 x + \eta\mu^2 x + \eta\mu x + 2$ και τις ανισώσεις: $f^{-1}(x) < 3$, και $f^{-1}(x+1) \geq x+5$

6 ΓΕΝΙΚΕΣ

6.01 Για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(\underbrace{f(f(\dots(x)\dots)))}_{\text{v } \acute{\alpha}\rho\alpha\iota}) = 2x - 1$ να βρείτε το $f(1)$

6.02 Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι αντιστρέψιμες και ισχύει $f \circ g = g \circ f$ να αποδείξετε ότι: A) $f \circ g^{-1} = g^{-1} \circ f$ B) $f^{-1} \circ g^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

6.03 Δίνεται η 1-1 συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει ότι $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: $f^{-1}(xy) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$, $x, y \in f(\mathbb{R})$

6.04 Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $(1, +\infty)$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f^2(x) - 2f(x) = e^{2x} - 1. \quad \text{A) Να βρείτε την } f$$

B) Να δείξετε ότι η f είναι "1-1" και να βρείτε την αντίστροφη της.

6.05 Έστω συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$ για κάθε $x, y > 0$ Αν η εξίσωση

$f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα, τότε

A) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

B) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(x^2 + 3) = f(x^2 + 1) + f(x + 1)$

6.06 Για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x+y) = f(x) + f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αν $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι:

A) η f είναι περιττή και γνήσια αύξουσα

B) Να λύσετε την εξίσωση: $f(4x^2 + 2005) + f(4x^2 - 2005) = 2f(8x - 4)$

6.07 Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνήσια μονότονη και η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(5,9)$ και $B(2,3)$ τότε:

A) Να αποδείξετε ότι η f είναι γν. αύξουσα

B) Να λυθεί η εξίσωση $f(3 + f^{-1}(x^2 + 2x)) = 9$

6.08 Για την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι $e^{f(x)} + f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

A) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη. B) Να βρείτε το $f(1)$.

Γ) Να λύσετε την εξίσωση $e^{x-4} - e^{2x+1} = x + 5$

6.09 Να αποδείξετε ότι η C_f της $f(x) = \frac{5x+2}{2x-5}$, έχει άξονα συμμετρίας την $y = x$

6.10 Έστω ένα ισοσκελές και οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) εγγεγραμμένο σε κύκλο με ακτίνα 2 και έστω ότι $\widehat{BAG} = \Theta$ (rad).

- A) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του $AB\Gamma$ είναι $E(\theta) = 4(1 + \sin\theta)\eta\mu\theta$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
- B) Αν η γωνία θ μεταβάλλεται στο χρόνο, σύμφωνα με τη συνάρτηση $\theta = f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{4}$, $0 < t < 2\pi$, να εκφράσετε το εμβαδόν E σε συνάρτηση με το χρόνο, να βρείτε σε ποια χρονική στιγμή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοπλευρο καθώς και το εμβαδόν του τη στιγμή εκείνη.

6.11 A) Αν f γν. αύξουσα στο \mathbb{R} και $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε $f(f(x_0)) = x_0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$

B) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x^3 - 1}{3}$ αντιστρέφεται, να βρείτε την f^{-1} καθώς και τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.

6.12 Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x+y) = f(x)f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$, ώστε $f(\xi) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι:

- A) $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$
- B) $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$ και $f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$
- Γ) $f(nx) = f^n(x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x \in \mathbb{R}$

6.13 *Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x) = \frac{3e^x}{2 + f^2(x)}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- A. Να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- B. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- Γ. Να λύσετε την ανίσωση: $\ln f(x) > 0$.

6.14 * Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(f(x)) = x^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- A) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη
- B) Να αποδείξετε ότι $f(x^3) = f^3(x)$
- Γ) Αν είναι $f(8) = 27$ να αποδείξετε ότι $f(2) = 3$
- Δ) Αν η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x$.
- E) Να αποδείξετε ότι $f^3(-1) + f^3(1) = f(0)$

6.15 Έστω η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ με $f(1) = 1$ και η συνάρτηση $g(x) = xf(x) - 1$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα.

- A) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
- B) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) - \ln(e \cdot x) = 0$
- Γ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) + f(x^7) = f(x^5) + f(x^9)$

Μ. Παπαργιωρόπουλος
4 Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

7

ΟΡΙΟ ΣΤΟ X_0

7.01 Να υπολογίσετε τα όρια

A) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{3}{x^3 - 1} \right)$

B) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{vx^{v+1} - (v+1)x + 1}{x-1}$ με $v \in \mathbb{N}^*$

7.02 Να υπολογίσετε τα όρια

A) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{6-x} - \sqrt{x+6}}{x+2}$

B) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^3 - x^2}$

Γ) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 81}{2x\sqrt{x} - 6x + 3\sqrt{x} - 9}$

7.03 Να υπολογίσετε τα όρια

A) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{x - 2\sqrt{x} + 1}$

B) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{x} - 4x^2 + 3}{x-1}$

7.04 Να υπολογίσετε τα όρια

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - |x+1|}{\sqrt{-x-1}}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1| + x - 1}{|2-x| - 1}$

7.05 Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ αν

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x-2| + |x+2|}{4x} & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

7.06 Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - 3\eta\mu x}{x + 2\eta\mu x}$

7.07 Να βρείτε το $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin\theta} - \varepsilon\phi\theta \right)$

7.08 B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x - 2\sigma\upsilon\nu^2 x + 2}{\sqrt{x^2 + 4} - 2}$

7.09 Να υπολογίσετε τα όρια

A) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1} \eta\mu \left(1 - \frac{1}{x} \right)$

B) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} \eta\mu \left(\pi \frac{x-1}{2} \right)$

7.10 Να υπολογίσετε τα όρια:

A) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\eta\mu(\pi x)}{\sqrt{x+1} - 2}$

B) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x - \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu x}}$

7.11 Να υπολογίσετε τα όρια:

A) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(\sqrt{x+3} - 2)}{\eta\mu(x-1)}$

B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\eta\mu^2 x)}{x^2}$

Γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu(1 - \sigma\upsilon\nu x)}{x^2}$

7.12 Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα όρια

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\eta\mu x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \eta\mu \frac{1}{x}}{x^2 + x}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\sqrt{x^2 + 9} - 3 \right) \eta\mu \left(\frac{x^3 + 7}{x} \right) \right]$

7.13 Να βρεθεί ο $v \in \mathbb{N}$ αν

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x + \eta\mu 2x + \dots + \eta\mu vx}{x} = 28$

7.14 Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ να βρείτε το

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(3x) - f(-x) \eta\mu 2x}{3x^2 - \eta\mu^2 x}$

7.15 Αν $\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = 7$, να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) |2 - g(x)| - g(x) + x^2 + x}{x^2 - 4}$$

7.16 Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 5}{f(x) - 2} = 0$ να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -5$$

7.17 Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)g(x)]$ αν

$$\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)(x-1)] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{g(x)}{\sqrt{x}-1} \right] = 3$$

7.18 Έστω συνάρτηση f με $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$

A) Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(vx)}{x} = 3v$, $v \neq 0$

B) Αν $f^2(vx) + \eta \mu^2 x \leq 2f(vx) \cdot \eta \mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι $3v = 1$

7.19 Να αποδείξετε ότι αν $\lim_{x \rightarrow \alpha} f^2(x) = 0$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = 0.$$

7.20 Η συνάρτηση f είναι άρτια στο \mathbb{R} και ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow -3} (f(x) + 2x - 5) = 4$. Να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

7.21 Αν $\lim_{x \rightarrow 3} (12f(x) - 4f^2(x)) = 9$, να βρεθεί το

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

7.22 Αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + 4}{x - 2} = 1$ και ισχύει

$$f(x) = f(1-x), \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{βρείτε το} \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

7.23 Να βρεθούν τα $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)]$ και $\lim_{x \rightarrow 1} [g(x)]$, αν

$$\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) - g(x)] = 5 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1} [2f(x) + g(x)] = 4$$

7.24 Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + x}{x - 1} = 2, \quad \text{να βρείτε τα όρια}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 1}{f^2(x) - x^2} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - f(x) - 2}{\sqrt{f^2(x) + 3} - 2x}$$

7.25 Αν $f^2(x) - 2f(x) + \sin^2 x \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 1$.

7.26 Η συνάρτηση f έχει πραγματικό όριο στο $x_0 = 2$ και ισχύει $(x-2)f(x) \leq x^2 - 7x + 10$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

7.27 Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $x^2 + 2xf(x) \leq f^2(x) + \eta \mu^2(x) \leq 2xf(x) + \eta \mu^2(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$.

7.28 Αν η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή με $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x-1) - f(1-x)]$

7.29 Αν $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|f(x) + x|}{x - 3} = 2$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

7.30 Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

A) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή

B) Αν ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = f(\alpha) \quad \text{για κάθε} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Γ) Αν ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2012$ να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-2)}{x-2} = 2012 \quad \text{και ότι}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta \mu(x)) - \eta \mu(f(x))}{x} = 0$$

Μ. Παπαρηγοράκης
4 Γ ΛΥΚ

8 ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ X_0

8.01 Να βρεθούν(αν υπάρχουν)τα όρια

A) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2-x}{x-3\sqrt{x}+2}$ B) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-2x+1}$

Γ) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5-2x}{x\sqrt{x}-2x+2\sqrt{x}-4}$ Δ) $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{5-x^2}{\eta\mu x}$

E) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-5x+4}{x^3-3x^2+3x-1}$ Στ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{(x-1)^3}$

8.02 Να βρεθούν(αν υπάρχουν)τα όρια

A) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x^2-2|x|+1}$ B) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sqrt{x+16}-4}{x|x|} \right)$

Γ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-5x}{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1}$ Δ) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x^2-2}{\sigma\upsilon\nu x-1}$

E) $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x+5}{|x+1|} - \frac{x+3}{(x+1)^2} \right)$ Z) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3-2x^2}{1-\sigma\upsilon\nu^3 x}$

8.03 A) Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x)}{|x-2|} = -\infty$ να βρεθεί το

$\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$

8.04 Αν $\lim_{x \rightarrow -1} [(x^2-4)f(x)-3x+2] = +\infty$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

8.05 Αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+3}-5}{f(x)} = +\infty$ να βρεθεί το

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

8.06 Αν $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -3$ να βρεθεί το

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|g(x)+2x|+g(x)-6+4x}{x\sqrt{x}-x-\sqrt{x}+1}$

Όρια Παραμετρικών Συναρτήσεων στο X_0

8.07 Αν $f(x) = \begin{cases} \eta\mu(ax) & \text{αν } x < 0 \\ x & \\ \sqrt{x-x} & \text{αν } x > 0 \\ x^2+2\sqrt{x} & \end{cases}$ να βρεί-

τε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$

8.08 Αν $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{αν } x < \lambda \\ x^2-x+\lambda & \text{αν } x \geq \lambda \end{cases}$ να

βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

8.09 Να βρείτε τους $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε :

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - (\lambda - \mu)x^2 - (2\lambda - \mu + 1)x + 3 - \mu}{x^3 - 3x + 2} = \ell \in \mathbb{R}$

8.10 Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-5\lambda}{(x-\lambda^2)^2} = -\infty$

8.11 Να βρείτε τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ αν

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lambda x - \mu\sqrt{x} + 2}{\sqrt{\sqrt{x}+3}-2} = 8$

8.12 Να αποδειχτεί ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η συ-

νάριση $f(x) = \frac{x^2 - \lambda x + 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$ δεν έχει πραγματικό όριο στο 1.

Να βρεθούν για κάθε $a \in \mathbb{R}$ τα όρια:

A) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-ax}$ B) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-a}{(x-4)(\sqrt{x}-2)}$

Μ. Παλαγρηγοράκης
4 ΓΛΧ

Όριο συναρτησης στο απειρο**8.13** Να υπολογίσετε τα όρια

A) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}})$

B) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x\sqrt{x^2+3} - x^2)$

Γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+2} + 2x)$

8.14 Να υπολογίσετε τα όρια

A) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+2} - x}{\sqrt{x} - \sqrt{x+2}}$

B) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 3^{x+1}}{e^{x+2} + 3^{x+3}}$

Γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2 - 2x - 3| - 4}{|x^2 + 2x + 5|}$

Δ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - 2 \log x}{1 + 2 \log x}$

8.15 Να υπολογίσετε τα όρια

A) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2\eta\mu x}{x^2 + \sqrt{x^2 + 3}}$

B) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\chi\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x^2}{x^3}$

8.16 Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$ **8.17** Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu(\sqrt{x^2+1} - x)$ **8.18** Να βρείτε το $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t + \sqrt{t^2+1})}{\ln t}$ **8.19** Για την συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \in (0, +\infty)$$
 Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(f(x))}{\ln x}$

Παραμετρικά όρια στο απειρο**8.20** Αν $f(x) = \frac{(\lambda-1)x^3 - (\lambda-\mu)x^2 + \mu x - 3}{x+1}$ ναβρεθεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ **8.21** Αν $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x+1} - \alpha x - \beta$ να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3\beta + 11$ **8.22** Αν $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3} - \lambda x$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ **8.23** Αν $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} + \chi\eta\mu\varphi - \sigma\upsilon\nu\omega$ με $0 < \varphi, \omega < \pi$. Να βρείτε τα φ, ω ώστε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **8.24** Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2 + 2x + 3} + \alpha x + \beta] = 12$$

8.25 Για κάθε $\alpha > 0$, να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\alpha^x + 2^x - 1}{\alpha^x - 2^x + 1},$$

8.26 Για κάθε $\alpha > 0$, να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^x + 2^{x+1}}{\alpha^{x+1} + 2^x}$$

8.27 Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $f(x) = \alpha\sqrt{x^2+1} + \beta\sqrt{x^2+2} + \gamma\sqrt{x^2+3}$ **8.28** Έστω η $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 + \kappa^2}{x}\right)$ $\kappa > 0$ Να βρεθεί τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln(x))$.Μ. Παπαργαλιανάκης
4 Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

...

8.29 Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει:
 $2\sqrt{2x} \leq f(x) \leq x+2$, για κάθε $x \geq 0$. Να βρείτε τα

A) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-4}{x-2}$ B) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-4}{\sqrt{x+2}-2}$

Γ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x)-16}{x-2}$ Δ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|f(x)-1|-3}{x^2-4}$

8.30 Να βρείτε τα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ αν
 $f^2(x) + g^2(x) + 2f(x) - 4g(x) + 5 \leq \sqrt{x}$, για κάθε
 $x \in \mathbb{R}$.

8.31 Αν ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} (f^2(x) + g^2(x)) = 0$, τότε
να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$

8.32 Αν $f^2(x) - 2f(x) + \sin^2 x \leq 0$ για κάθε
 $x \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

8.33 Αν $\lim_{x \rightarrow 3} (12f(x) - 4f^2(x)) = 9$ να βρείτε το
 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

8.34 Η συνάρτηση f έχει πραγματικό όριο στο
 $x_0 = 2$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει
 $(x-2)f(x) \leq x^2 - 7x + 10$. Βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

8.35 Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \eta \mu \frac{1}{x}}{x^2 + x}$

8.36 **Έστω η συνάρτηση f για την οποία ι-
σχύει $2f(x) + \eta \mu f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να απο-
δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$

8.37 Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, h ώστε να
ισχύουν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2g(x)-4}{x-2} = 2$

$$g(x) \leq f(x) + |x-2| + \frac{\eta \mu(x-2)}{(x-2)} \leq h(x) + 2 \text{ και}$$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{h(x)} = 1$ και για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{2\}$. Να βρείτε

τα $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

8.38 Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x - \sin^2 x}{x + \eta \mu x}} = 1$

8.39 Βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + \eta \mu x + 1} - x)$

8.40 Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \eta \mu x}{x - \eta \mu x}$

8.41 Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\eta \mu x - \sin 2x}{\sqrt{x}}$

8.42 Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2\eta \mu x}{x^2 + \sqrt{x^2 + 3}}$

8.43 Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sin x - \eta \mu x^2}{x^3}$

8.44 Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3}{3 + \eta \mu x + \sin x}$

8.45 Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{4\eta \mu x}{3 + \sin x} \right)$

8.46 Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\eta \mu x + 3\sin x}{x^2 + 2x + 2}$

Μ. Παλαγρηγοράκης
4 Γ ΛΥ Κ

9

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

9.01 Να βρεθεί ο τύπος της συνεχούς συνάρτησης f αν ισχύει ότι

$$xf(x) + 5x^2 + 2 = \eta\mu x + (x-1)(x-2), \forall x \in \mathbb{R}$$

9.02 Αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-2x}{x-2} = 1$ και η f είναι συνεχής,

$$\text{βρείτε το } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(x)-2x^2+3f(2)-6x}{x-2}$$

9.03 Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και ισχύει ότι

$$f(xy) = f(x) + f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \text{ τότε είναι}$$

συνεχής στο \mathbb{R}

9.04 Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\eta\mu^2 x + 2xf(x) \leq f^2(x) \leq \eta\mu^2 x + x(x + 2f(x)). \text{Να αποδείξετε ότι η } f \text{ είναι συνεχής στο } x_0 = 0.$$

9.05 Για τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$f^2(x) + g^2(x) + 2f(x) + 5 \leq 4g(x) + \sin^2 x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι οι f, g είναι συνεχείς στο

$$x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

9.06 Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα

$$f^5(x) + f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

9.07 ** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0

και ισχύει $xf(x) \geq e^x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $f(0)$

9.08 Αν $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$ και η f^{-1} είναι συνεχής,

$$\text{να δείξετε ότι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(x) - x^2}{x + f^{-1}(x)} = 1$$

$$\text{9.09} \quad \text{Έστω } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 \eta\mu \frac{1}{x}, & \text{αν } x < \alpha \\ x^3 + x, & \text{αν } x \geq \alpha \end{cases}$$

A) Να αποδείξετε ότι αν $\alpha \neq 0$ τότε η f είναι α-συνεχής στο $x_0 = \alpha$.

B) Να εξετάσετε τη συνέχεια της f στο $\alpha = 0$

9.10 Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^3(x) + 3f(x) = e^{2x} - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

A) Να δείξετε ότι $|f(x)| \leq |e^{2x} - 1|$, $x \in \mathbb{R}$

B) Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο μηδέν

9.11 Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $(f(x))^2 - 2f(x) + \sin^2 x = 0$, $x \in \mathbb{R}$

A) Να αποδείξετε ότι $|f(x) - 1| \leq |x|$

B) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0

Γ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \left(xf\left(\frac{1}{x}\right) \right)$

$$\text{9.12} \quad \text{Δίνεται η } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^x} + 2, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2^x} + 1, & \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$$

A) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

B) Υπάρχει τιμή του α ώστε η f να είναι συνεχής;

9.13 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και ισχύει ότι $f(xy) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο \mathbb{R}

9.14 Έστω συνάρτηση f τέτοια ώστε :

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - 1, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι αν η f είναι συνεχής στο σημείο $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

Βασικά Θεωρήματα

9.15 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{x-1}{x-2x^2} = \varepsilon \varphi x \text{ έχει στο διάστημα } \left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ τουλάχιστον}$$

στον μια ρίζα

9.16 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{\kappa^2}{x} + \frac{\lambda^2}{x+1} + \frac{\mu^2}{x-1} = 0 \text{ με } \kappa, \lambda, \mu \neq 0 \text{ έχει ακριβώς}$$

δύο ρίζες, τις $\rho_1, \rho_2 \in (-1, 1)$ και ισχύει ότι

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{\mu^2 - \lambda^2}{\kappa^2}$$

9.17 Έστω η εξίσωση $x^3 + ax^2 + b = 0$, με $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $a + b + 1 < 0$. Να αποδειχτεί ότι έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(-1, 1)$

9.18 Έστω $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής συνάρτηση, ώστε $f(\alpha) \geq \alpha^2$ και $f(\beta) \leq \beta^2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$, ώστε $f(x_0) = x_0^2$.

9.19 Έστω $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, ώστε $f(0) = f(\pi)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει

$$x_0 \in [0, \pi], \text{ ώστε } f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{\pi}{2}\right).$$

9.20 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R} και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) + f(x+2) = 0$. Να αποδείξετε ότι:

- A) Η f είναι περιοδική
B) Υπάρχουν άπειροι $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε $f(\alpha) = f(\alpha+2)$

9.21 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1, 2]$ με $f(-1) \neq f(2)$, δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (-1, 2)$ ώστε $3f(-1) + 4f(2) = 7f(x_0)$

9.22 Έστω $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής και γνήσια φθίνουσα συνάρτηση με $f(\alpha) - f(\beta) \neq 0$, $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{N}^*$ και $\gamma \in (\alpha, \beta)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$, ώστε

$$(\kappa + \lambda + \mu)f(x_0) = \kappa f(\alpha) + \lambda f(\gamma) + \mu f(\beta)$$

9.23 Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους $f(x) = 20 \cdot a \cdot x \cdot e^x$, $g(x) = 21 \cdot b \cdot (\eta \mu x + \sigma \nu x)$. Αν το (α, β) είναι σημείο της ευθείας $21y = 20x$, με $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$

9.24 Αν $\alpha, \beta > 0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $a \eta \mu x + \beta = x$ έχει (μία τουλάχιστον) ρίζα της οποίας η απόλυτη τιμή δεν υπερβαίνει τον $\alpha + \beta$.

9.25 Αν η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} και ισχύει ότι $f(x) + f(2-x) = 0$ για κάθε x , να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο \mathbb{R} .

9.26 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1, 2]$ με $f(2) \neq 6$, και ακόμη $f(1) + f(2) = 8$, να αποδείξετε ότι υπάρχει, $x_0 \in (1, 2)$ ώστε $f(x_0) = x_0 + x_0^2$.

9.27 Η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ είναι συνεχής και υπάρχουν $0 < \alpha < \beta < \gamma$ ώστε

$$f\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) f\left(\frac{\beta}{\gamma}\right) f\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right) = 1. \text{ Να δείξετε ότι υπάρχει } x_0 \text{ ώστε } f(x_0) = x_0^{2010}$$

9.28 Να βρείτε τη συνάρτηση f , συνεχής στο \mathbb{R} αν ισχύει $e^{f(x)} - 4x - 4e^{-f(x)} = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = \ln 2$

9.29 Αν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{1994} \in [0, 1]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει, ένα τουλάχιστον $x_0 \in [0, 1]$ ώστε $|x_0 - \alpha_1| + |x_0 - \alpha_2| + \dots + |x_0 - \alpha_{1994}| = 997$.

9.30 Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αν ισχύει ότι $f^2(x) - 2f(x)\eta\mu x = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$

9.31 *Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $f^2(x) \neq 9$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) > 3$. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

9.32 Ν βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{4-x} - \sqrt{2+x}$ και να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$

9.33 Έστω η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι $4x^2 + 9[f(x)]^2 = 36$ για κάθε $x \in (-3, 3)$.

Να βρείτε τον τύπο της αν $f(0) = -2$

9.34 Να βρείτε τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων

A) $f(x) = \frac{1-x^2}{x}, 0 < x \leq 1$

B) $f(x) = x^3 - \sigma\upsilon\nu x, x \in [0, \pi/2]$

9.35 Μια συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση: $f(1) + f(2) = f(3) + f(4)$. Θα μπορούσε η f να είναι αντιστρέψιμη;

9.36 Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ώστε

$$\eta\mu^2(x_0 + \alpha) + \eta\mu^2(x_0 + \beta) + \eta\mu^2(x_0 + \gamma) = \frac{3}{2}$$

9.37 Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$ τέμνονται σε ένα μόνο σημείο του διαστήματος $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

9.38 Οι συναρτήσεις $f, g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ είναι συνεχείς και ισχύει $f \circ g = g \circ f$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Έστω ακόμα ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει (τε) $x_0 \in [0, 1]$ ώστε $f(x_0) = x_0$ και $g(x_0) = x_0$

9.39 Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f αν $f(x) = (4x^2 - 5\pi x + \pi^2)\eta\mu x, 0 \leq x \leq 2\pi$

9.40 Έστω συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ και $f(1) = 2$, να αποδείξετε ότι $f(x) = 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

9.41 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ με $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \gamma \in \mathbb{R}$ και

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \delta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο ένας αριθμός $x_0 > 0$ ώστε $f(x_0) + e^{x_0+1} + \ln(x_0) = 1$.

9.42 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R} και ισχύει $f(f(x)) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε $f(\alpha) = \alpha$

9.43 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $f(10) = 9$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x)f(f(x)) = 1$. Να βρείτε το $f(5)$

9.44 Έστω $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$ (S. Banach)

Γενικές Ασκήσεις

9.45 Α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x + 2(x-1) = 0$ έχει μοναδική ρίζα

Β) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2(\alpha-1)x^2 - 1 & \text{αν } x < 1 \\ x^2 - x \ln \alpha - 1 & \text{αν } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{με } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Αν η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} , να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$

9.46 Για τη συνεχή συνάρτηση f , ισχύει ότι:

$$2(\sqrt{x+4} - \sqrt[3]{2x+8}) \leq xf(x) \leq \eta\mu \frac{x}{6} + x^6, \quad \forall x \geq -4.$$

Να υπολογίσετε το $f(0)$ και να αποδείξετε ότι υπάρχει, ένα τουλάχιστον $\kappa \in (0,1]$ ώστε

$$f(\kappa) = \eta\mu \frac{\kappa}{6} + \kappa^6.$$

9.47 Έστω $g(x) = x^2 + x\eta\mu x$ και

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 \sin x}{g(x)}, & \text{αν } g(x) \neq 0 \\ \alpha & \text{αν } g(x) = 0 \end{cases} \quad \text{Να βρείτε το}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$ αν η f είναι συνεχής

9.48 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση, ώστε

$$f^2(x) + \eta\mu^2 x = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0

Β) Αν η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} και ισχύει $f(\alpha)f(\beta) < 0$ να δείξετε ότι $\alpha\beta < 0$.

9.49 Έστω συνεχής συνάρτηση f στο $[1,4]$ για την οποία ισχύουν: $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [1,4]$,

$f(1) > 0$, $f(1)f(2) = f(3)f(4)$ Να αποδείξετε ότι:

Α) $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [1,4]$,

Β) Η συνάρτηση $g(x) = f^2(x) - f(1)f(2)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[1,2]$.

Γ) Η f δεν είναι αντιστρέψιμη.

9.50 Έστω η συνάρτηση $g(x) = x + \frac{\beta - \alpha}{5}$ ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$. Αν ισχύει $f\left(g\left(\frac{4\alpha + \beta}{5}\right)\right) = f(\alpha)$ όπου

f είναι μία συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο \mathbb{R} , να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$ ώστε

$$f(x_0) = f(g(x_0))$$

9.51 Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις

$f, g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(0) = 1$ και

$$x[f(x) - g(x)] = \sqrt{x}[3f(x) + g(x)]$$

Α) Να βρείτε το $f(0)$

Β) Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0,4]$ να δείξετε

ότι: α) Η εξίσωση

$(x-2)f(x) + xf(x+2) = x(x-2)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,2)$.

β) $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [0,4]$.

9.52 Έστω η συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 3}{x} = 3 \quad \text{και} \quad 2\eta\mu(x-1) \leq (x-1)f(x) \leq x^2 - 1$$

για κάθε $x \in (0,1)$

Α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της

$$h(x) = f(x) - \ln x - 3$$

Β) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = e^{f(x)-3}$ τέμνει την ευθεία $y = x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$

9.53 Α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και $1-1$ σε διάστημα Δ . Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ με $\alpha < \beta < \gamma$, να αποδείξετε ότι θα είναι είτε $f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma)$ είτε $f(\gamma) < f(\beta) < f(\alpha)$

Β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και $1-1$ στο Δ , να αποδείξετε ότι είναι γνησίως μονότονη στο Δ .

9.54 Έστω συνάρτηση f , συνεχής στο \mathbb{R} και ισχύει η σχέση $f^3(x) + 4f^2(x) + 6f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$

9.55 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R} , και ισχύει $f(f(x)) + x = 4 - 2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

- A. η f είναι $1-1$
- B. Αν η f είναι γνήσια μονότονη τότε είναι γνήσια φθίνουσα
- Γ. υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x_0) = x_0$
- Δ. $f(1) = 1$

9.56 Η ανάβαση - όπως και η κατάβαση - στην ψηλότερη κορυφή του Ολύμπου διαρκεί 6 ώρες. Ένας ορειβάτης ξεκινάει την ανάβαση στις 6 το πρωί και χωρίς να σταματήσει βρίσκεται σε 6 ώρες στην κορυφή. Την άλλη μέρα ξεκινάει στις 6 το πρωί την κατάβαση, σε 6 ώρες, ακολουθώντας την ίδια διαδρομή, επιστρέφει στη βάση. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της διαδρομής όπου βρίσκεται την ίδια ώρα και τις δύο ημέρες

9.57 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geq 0$, $x \in [\alpha, \beta]$. Για κάθε $x_1, x_2, x_3, \dots, x_v \in [\alpha, \beta]$ να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in [\alpha, \beta]$ ώστε

$$f(\xi_1) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_v)}{v}$$

$$f(\xi_2) = \sqrt[v]{f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot f(x_3) \cdot \dots \cdot f(x_v)}$$

9.58 Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f^2(x) + f(f(x)) = 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(2) = 1$

A) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$, να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - 3) \eta \mu \frac{1}{x-1}$$

B) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $[1,2]$

9.59 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με $f(x) = \ln x - \ln(x-1)$

A) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε την f^{-1}

B) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g(x) = f(x) - e^x$

Γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)e^{-x} - 1 = 0$ έχει μοναδική λύση μεγαλύτερη του ένα

9.60 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f^3(x) + xf(x) + x^3 = 0 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

A) Να αποδείξετε ότι $-x^3 < f(x) < 0$

B) Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} f(x) \eta \mu \frac{2}{x} + \frac{f(x)}{x} - 1 & , x > 0 \\ -1 & , x = 0 \\ \frac{f(-x)}{x^2} & , x < 0 \end{cases}$$

9.61 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^x} + 2 & , x \neq 0 \\ \alpha & , x = 0 \end{cases}$

A) Να υπολογίσετε τα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

B) Υπάρχει τιμή του α ώστε η f να είναι συνεχής;