

Γ Λυκείου

4 ΓΛΧ

2013 - 2014

Μ.Ι.Παπαρηγοράκης
Χανιά

[Μαθηματικά]
και Στοιχεία Στατιστικής

13.08

1 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1.01 Να φέρετε σε «κανονική» μορφή τους. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

A) $f(x) = \log(9 - x^2)$ B) $f(x) = \sqrt{1 - |x|}$
Γ) $f(x) = \frac{4x - 2}{\sqrt{e^x + 1}}$ Δ) $f(x) = \frac{2\epsilon\phi x}{\eta\mu x + \eta\mu 2x}$
E) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ Στ) $g(x) = \frac{2x^2 + 5x}{\sqrt{x-4}}$
Ζ) $f(x) = \frac{5}{|x-3| - 1}$ Η) $f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$

1.02 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

$f(x) = \frac{1}{x^2 - x} + \ln(x - 2)$
 $k(x) = \sqrt{12 - x - x^2}$ $\phi(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$
 $r(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}}$ $t(x) = \log(2 - \log x)$

1.03 Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των:

A) $f(x) = -\frac{1}{x}$ B) $p(x) = -x + 1$
Γ) $f(x) = e^x - 2$ Δ) $g(x) = 1 - x^2$
E) $s(x) = -\ln x$ Ζ) $g(x) = 2\eta\mu x$

1.04 Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f + g$, $\frac{f}{g}$ όταν:

A) $f(x) = \ln(x + 1)$ και $g(x) = \sqrt{4 - |x|}$
B) $f(x) = 1 - x^2$ $x \in [-1, 4]$ και $g(x) = \sqrt{x}$

1.05 Να βρείτε τα κοινά σημεία των αξόνων με τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

A) $f(x) = 2x^3 - x^2 - 5x - 2$ B) $f(x) = e^{x-2} - 1$
Γ) $f(x) = \ln(2 - x)$ Γ) $f(x) = \eta\mu 2x$

1.06 Να βρεθούν τα κοινά σημεία των γραφ. παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x^3 - x$ και $g(x) = x^2 - 1$

1.07 Αν $f(x) = a\sqrt{x-3}$ τότε να βρεθεί το a ώστε η C_f να διέρχεται από το $M(4, 2)$

1.08 Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^3 - 5x^2 + \beta x + 1$, $a, \beta \in \mathbb{R}$, διέρχεται από τα σημεία $(2, 25)$ και $(1, 0)$. Να βρεθούν οι a, β και να λυθεί η ανίσωση $f(x) > 0$

1.09 Αν $f(x) = \frac{2}{x}$, να βρεθεί η απόσταση των σημείων $A(1, f(1))$ και $B(-1, f(-1))$

1.10 Αν $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ τότε να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ και $f\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{f(x)}$

1.11 Για μια συνάρτηση f ισχύει $f(x^2) + f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ να βρείτε τα $f(0)$, $f(1)$

1.12 Για μια συνάρτηση f ισχύει $2f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$, $x \neq 0$. Να βρείτε το $f(2)$

1.13 Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ αν οι ευθείες $y = (\lambda^2 - 2\lambda)x + 1$ και $y = -1$ είναι παράλληλες

1.14 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log \frac{1-x}{1+x}$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f και να αποδειχθεί ότι $f(\alpha) + f(\beta) = f\left(\frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}\right)$ για κάθε $\alpha, \beta \in D_f$

1.15 Να εξετάσετε την μονοτονία των συναρτήσεων $f(x) = -2x + 2$ $g(x) = \ln(1 - x)$
 $h(x) = e^{-2x+1}$ $k(x) = \frac{-2}{x}$, $x > 0$
 $\lambda(x) = x^2$ $\mu(x) = \sqrt{x} - 1$

Όρια - Συνέχεια**1.16** Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\begin{array}{ll} \text{A)} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} & \text{B)} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)^2}{x^2 - 9} \\ \text{Γ)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} & \text{Δ)} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 2x - 15} \end{array}$$

1.17 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\text{A)} \lim_{t \rightarrow -2} \frac{t^3 + 4t^2 + 4t}{(t+2)(t-3)} \quad \text{B)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$$

1.18 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\begin{array}{ll} \text{A)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x^3 - x^2 + 3x - 3} & \text{B)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 32}{x^4 - 16} \\ \text{Γ)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^2 - 1} & \text{Δ)} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 3x + 2}{x + 2} \end{array}$$

1.19 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\begin{array}{ll} \text{A)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{1 - \eta\mu^2 x} & \text{B)} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{x+5}}{x^2 - 16} \\ \text{Γ)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+1} - \sqrt{7-x}} & \text{Δ)} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 1 - \sqrt{x+5}}{x - 4} \end{array}$$

1.20 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\begin{array}{ll} \text{A)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2} & \text{B)} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x\sqrt{x} - x\sqrt{5}}{x^2 - 6x + 5} \\ \text{Γ)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - x}{2\sqrt{x+6} - 3\sqrt{x+1}} & \text{Δ)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - x^2} \end{array}$$

1.21 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\begin{array}{ll} \text{A)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x+1} - 1} & \text{B)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 4\sqrt{x} + 3} \\ \text{Γ)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - x - 1}{\sqrt{x+2} - x} & \text{Δ)} \lim_{x \rightarrow 20} \frac{\sqrt{x+5} - 5}{\sqrt{x-4} - 4} \end{array}$$

1.22 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\begin{array}{ll} \text{A)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}} & \text{B)} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{\sqrt{x} - \sqrt{5}} \\ \text{Γ)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{2-x} & \text{Δ)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-4}{2-\sqrt{2x}} \end{array}$$

1.23 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\begin{array}{ll} \text{A)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sqrt{x^2+3} - 2} & \text{B)} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16} \\ \text{Γ)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} & \text{Δ)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x} - 3} \end{array}$$

1.24 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\begin{array}{ll} \text{A)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x-2} & \text{B)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2} - 2} \\ \text{Γ)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+3} + 2x}{x+1} & \text{Δ)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1} - x + 1} \end{array}$$

1.25 υπολογίστε τα παρακάτω όρια:

$$\begin{array}{ll} \text{A)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} & \text{B)} \lim_{x \rightarrow \sqrt{7}} \frac{x^2 - \sqrt{7}x}{x^2 - 7} \\ \text{E)} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 8}}{2x^2 - 7x - 4} & \text{Στ)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} \end{array}$$

1.26 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\begin{array}{ll} \text{A)} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 3x - 10}{2(\sqrt{x+4} - 3)} & \text{B)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - \sqrt{2x}} \\ \text{Γ)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} & \text{Γ)} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x - 10}{5 - \sqrt{5x}} \end{array}$$

1.27 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\begin{array}{ll} \text{A)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{\sqrt{x^2 - 3x} + \sqrt{x-3}} & \text{B)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1} - 2} \\ \text{Γ)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - x + 1}{x^2 - 9} & \end{array}$$

1.28 Αν $f(x) = \begin{cases} 16 - x^2 & x \neq 4 \\ 4 - x & x = 4 \end{cases}$ τότε

- A) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης
 B) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός α ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο 4

Πράγωγος – Κανόνες παραγώγισης

1.29 Να βρείτε τις πρώτες παραγώγους των συναρτήσεων:

A) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + x + 112$

B) $f(x) = x - \ln x$ Γ) $f(x) = x^2 \ln x$

Δ) $f(x) = 3 - 2\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$ Ε) $f(x) = 2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$

Στ) $f(x) = x^2\eta\mu x + e^x\eta\mu x$ Ζ) $f(x) = \frac{x^2(x+1)}{x^2+1}$

Η) $f(x) = \frac{xe^x}{x+1} + \alpha^2, \alpha \in \mathbb{R}$ Θ) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

1.30 Να βρείτε τις πρώτες παραγώγους των συναρτήσεων:

A) $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2}$ Β) $f(x) = \frac{x - \ln x}{x^2 + 1}$

Γ) $f(x) = 3\eta\mu\sigma\upsilon\nu\theta - x^2, \theta \in \mathbb{R}$ Δ) $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$

Ε) $f(x) = x(x^2 + 1)(x^3 - 2x)$

Στ) $f(x) = \frac{x^2 + \alpha}{e^x}, \alpha \in \mathbb{R}$ Ζ) $f(x) = \frac{x\eta\mu x}{1 + \epsilon\phi x}$

1.31 Να βρείτε τις πρώτες παραγώγους των συναρτήσεων:

A) $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{3x} + 1}$ Β) $f(x) = \frac{e^x}{1 + 2e^{4x}}$

Γ) $f(x) = \sqrt{\ln(x^2 + e)}$ Δ) $f(x) = \sqrt{\epsilon\phi x}$

Ε) $f(x) = \frac{1}{3}\eta\mu^3 x - \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu^2 x$ Στ) $f(x) = x^2 \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}$

Ζ) $f(x) = \eta\mu(\sigma\upsilon\nu 2x)$ Η) $f(x) = \ln(\ln x)$

1.32 Να βρείτε τις πρώτες παραγώγους των συναρτήσεων:

A) $f(x) = \eta\mu(2x) - \sigma\upsilon\nu(2x + 3)$

B) $f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$ Γ) $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

Δ) $f(x) = xe^{\left(\frac{1}{x}\right)}$ Ε) $f(x) = \frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x}$

1.33 Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος των συναρτήσεων $f(x) = x^3 \ln x$ και $g(x) = \ln(\eta\mu x)$

1.34 Να αποδείξετε ότι αν $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$ τότε

$$xf''(x) + 2f'(x) + xf(x) = 0$$

1.35 Να αποδείξετε ότι αν $f(x) = e^x \eta\mu x$ τότε

$$f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$$

1.36 Να αποδείξετε ότι αν $f(x) = 2xe^{-x^2}$ τότε

$$\frac{f''(x)}{2x} + f'(x) + 4e^{-x^2} = 0$$

1.37 Αν f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις

στο \mathbb{R} και ισχύει: $\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{e^x}, x \in \mathbb{R}$, να απο-

δείξετε ότι $f^2(x)(g'(x) - g(x)) = g^2(x)(f'(x) - f(x))$

1.38 Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + e^{-2x}, x \in \mathbb{R}$

A) Να αποδείξετε ότι $f''(x) = 4f(x)$

B) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + \frac{1}{2}f'(x) = 2e^{x^2}$

1.39 Αν $f(x) = e^{\lambda^2 x}$, να υπολογιστεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$

ώστε: $f''(x) - 3f'(x) + f'(0)f(x) - 8f(x) = 0$

1.40 Δίνεται η συνάρτηση f με

$f(x) = e^{\alpha x}, \alpha \in \mathbb{R}$. Να βρείτε: Τις τιμές του α , ώστε

να ισχύει η σχέση

$f''(x) + 2f'(x) = 3f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1.41 Να βρείτε πολώνυμο $P(x)$ δευτέρου

βαθμού τέτοιο ώστε να είναι $P(0) = 1, P(1) = 6,$

$P'(0) = -3$

1.42 Η θέση ενός κινητού που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται συναρτήσει του χρόνου t από τον τύπο

$S(t) = 3t^2 - t$. Να βρείτε:

A) Τη μέση ταχύτητα του κινητού στο $[2, 4]$

B) Τη στιγμιαία ταχύτητα του όταν $t = 3$

Παράγωγος – Εφαπτομένη

1.43 Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στον $x'x$ όταν

A) $f(x) = x^2 - 6x + 1$ B) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ Γ) $f(x) = \frac{e^x}{x}$

1.44 Αν $g(x) = -x^2 + ax - \beta \ln(x+1)$, $x > -1$, να βρείτε τα a, β έτσι ώστε η γραφική παράσταση της g να έχει εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα των x στα σημεία με τετμημένες $x = 0$ και $x = 1,5$

1.45 Αν $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, να

βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f , που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = x + 3$.

1.46 Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 3x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f , που σχηματίζει με τον $x'x$ γωνία 135° .

1.47 Δίνεται η $f(x) = x^2 \ln x$. Να βρείτε :

A) Τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη (ϵ) της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$, με τον άξονα $x'x$.

B) Το σημείο όπου η εφαπτομένη είναι παράλληλη στο $x'x$

1.48 Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 10$

A) Να βρείτε τα σημεία όπου η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f , έχει κλίση ίση με το ρυθμό μεταβολής της παραγώγου f' στα σημεία αυτά.

B) Στο σημείο (του a ερωτ.) με τη μικρότερη τετμημένη να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης.

1.49 Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x) = ae^{-x} + \beta\sqrt{x+1} \quad x \in \mathbb{R}, \quad a, \beta \in \mathbb{R}.$$

A) τα a, β ώστε η εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(0, 1)$ να είναι παράλληλη στην $y = 2x - 1$

B) την εξίσωση της παραπάνω εφαπτομένης

1.50 Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x) = 2x^2 - ax + \beta, \quad a, \beta \in \mathbb{R}.$$

Να υπολογίσετε τα a, β ώστε η $y = 3x - 1$ να είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη 2.

1.51 Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της $f(x) = \frac{x-4}{x-2}$ στα σημεία που τέμνει τους άξονες είναι παράλληλες

1.52 Αν $f(x) = ax^3 + \beta x^2 + 9x - 12$, να προσδιορίσετε τα $a, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε το σημείο $A(2, -10)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση C της f και η εφαπτομένη της C στο σημείο A να έχει συντελεστή διεύθυνσης τον αριθμό -3 .

1.53 Έστω ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και είναι $f(1) = 2f'(1) = e$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γ.π. της $g(x) = f(\ln(x))$ στο $x_0 = e$

1.54 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x^2 + 4x) = x^3 + \ln x$. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(5, f(5))$.

1.55 Έστω η $f(x) = \ln(x^2 + 1)^2 + ax + \beta$. Να βρεθούν οι τιμές των a, β ώστε η $y = 21x + 35$ να είναι εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$

1.56 Έστω τα σημεία $A(\ln x, 0)$ και $B(0, e^x)$ $x > 0$. Αν η $f(x)$ εκφράζει την απόσταση των σημείων A και B , να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $M(1, f(1))$

Μ. Παπαρηγοράκης
4 ΓΛΧ

Μονοτονία - Ακρότατα

1.57 Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα κάθε μια από τις συναρτήσεις:

A) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$

B) $g(x) = \frac{2x - x^2}{e^x}$

Γ) $f(x) = x^2(1 - x)^2$

1.58 Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα κάθε μια από τις συναρτήσεις:

A) $f(x) = x\sqrt{6-x}$

B) $f(x) = \frac{\ln x - 2}{x}, x \in [10, 100]$

Γ) $f(x) = \frac{3x^2}{4x^2 + 5}$ Δ) $f(x) = x^2 e^{-x}$

1.59 Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = e^x(x^2 - 5x + \alpha), \alpha \in \mathbb{R}$$

A) Να αποδείξετε ότι $f'(x) + f(x) = 2(f'(x) + e^x)$

B) Να βρείτε το α ώστε η εφαπτόμενη στο σημείο $(1, f(1))$ να είναι παράλληλη στον $x'x$.

Γ) Για την τιμή του α που βρήκατε, να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

1.60 Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x) = kx^2 + \lambda x + 3, x \in \mathbb{R}, k, \lambda \in \mathbb{R}.$$

A) Να βρείτε τα k, λ ώστε η f να έχει στη θέση $x_0 = 1$ τοπικό ακρότατο ίσο με -2 .

B) Για τις τιμές των k, λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

1.61 Αν $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + \frac{1}{2}$ τότε

A) Να βρείτε τους αριθμούς $a, b \in \mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει $f'(-1) = f'(1) = 0$.

B) Αν $a=1$ και $b=0$, τότε να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f .

1.62 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^x - 2e^x$

A) Να βρείτε τα ακρότατά της

B) Να αποδείξετε ότι $1 + xe^{x-1} \geq 2e^{x-1}, x \in \mathbb{R}$

1.63 Έστω $f(x) = ae^x + be^{-x}$, όπου a, b θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι $2\sqrt{ab}$.

1.64 Αν $V(r) = 100p(1 + \ln r) - 100qr$, όπου p και q θετικές σταθερές, να αποδείξετε ότι το V έχει τη μέγιστη τιμή του όταν $r = \frac{p}{q}$.

1.65 Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{\alpha x} - \beta x$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

A) Να βρείτε το α ώστε να ισχύει

$$4f'(x) - 4\beta(x-1) = 4f(x) + f''(x)$$

B) Να βρεθεί το β ώστε η εφαπτομένη της f στο σημείο $(0, f(0))$ να είναι παράλληλη στον $x'x$

Γ) Για τις τιμές των α, β που βρήκατε να μελετηθεί η $f(x)$ ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

1.66 Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + x + 1$ η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης;

1.67 Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x \ln^2 x$ η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης;

1.68 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x(x - \alpha) + \lambda, x \in \mathbb{R}, \alpha, \lambda$ σταθερές.

A) Βρείτε το α ώστε $f'(1) = 1$

B) Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο.

Γ) Αν το ελάχιστο της f είναι το $2\lambda - 1$ βρείτε το λ

Δ) Βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(1, f(1))$.

E) Βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της f στο $x_0 = -1$

Προβλήματα

1.69 Σώμα κινείται σε οριζόντιο άξονα ακουθώντας τη συνάρτηση θέσης

$$x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 5 \quad (t \text{ σε sec, } x \text{ σε m})$$

A Ποια η ταχύτητα και η επιτάχυνση όταν το σώμα βρίσκεται στη θέση 25m;

B Πότε το σώμα έχει μηδενική ταχύτητα. Ποια η θέση και η επιτάχυνση αυτή τη χρονική στιγμή;

Γ. Ποιο διάστημα διένυσε το σώμα τα πρώτα 2sec της κίνησης του;

1.70 Οι συνολικές πωλήσεις ενός μοντέλου αυτοκινήτου δίνονται από τη συνάρτηση

$$f(t) = \frac{10000}{1 + e^{-t+10}} + 10, \text{ όπου } t \in [0, 20] \text{ είναι ο χρόνος σε μήνες από την έναρξη των πωλήσεων. Να προσδιορίσετε τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός αύξησης των συνολικών πωλήσεων γίνεται μέγιστος καθώς και τη μέγιστη τιμή του.}$$

Να προσδιορίσετε τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός αύξησης των συνολικών πωλήσεων γίνεται μέγιστος καθώς και τη μέγιστη τιμή του.

1.71 Μία βιομηχανία καθορίζει την τιμή πώλησης $\Pi(x)$ κάθε μονάδας προϊόντος συναρτήσει του πλήθους x των μονάδων παραγωγής σύμφωνα με τον τύπο: $\Pi(x) = 195 - \frac{x^2}{3}$ €. Το κόστος παραγωγής ανά μονάδα προϊόντος είναι 20€ και επιπλέον η βιομηχανία πληρώνει φόρο 6 € για κάθε μονάδα προϊόντος. Να βρεθεί πόσες μονάδες προϊόντος θα πρέπει να παράγει η βιομηχανία ώστε να έχει το μέγιστο δυνατό κέρδος.

1.72 Ένα φορτηγό διανύει καθημερινά 100 km με σταθερή ταχύτητα x km/h. Τα καύσιμα κοστίζουν 0,8 € το λίτρο και καταναλώνονται με ρυθμό

$$2 + \frac{x^2}{400} \text{ lt/h. Αν τα υπόλοιπα έξοδα του φορτηγού ανέρχονται σε 9 € την ώρα, τότε:}$$

γού ανέρχονται σε 9 € την ώρα, τότε:

A) να εκφράσετε το κόστος της διαδρομής αυτής ως συνάρτηση της ταχύτητας x ,

B) να βρείτε την ταχύτητα που πρέπει να έχει το φορτηγό, ώστε τα έξοδά του να είναι τα ελάχιστα,

Γ) πόσα είναι τα ελάχιστα αυτά έξοδα;

1.73 Δίνεται η ευθεία $y = -2x - 3$. Να βρείτε το σημείο της ευθείας αυτής το οποίο απέχει από το σημείο $A(9,4)$ τη μικρότερη δυνατή απόσταση.

1.74 Απ' όλα τα ορθογώνια με εμβαδό 64m^2 ποιο είναι εκείνο που έχει τη μικρότερη περίμετρο.

1.75 Από όλα τα ορθογώνια με περίμετρο 24 cm να βρείτε εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.

1.76 Να βρεθεί το πλησιέστερο σημείο της παραβολής $y = x^2$ στην ευθεία $y = 3x - 5$.

1.77 Βρείτε την ευθεία που διέρχεται από το σημείο $(3,4)$ και σχηματίζει με τους ημιάξονες Ox και Oy τρίγωνο ελαχίστου εμβαδού.

1.78 Η θέση ενός υλικού σημείου που βάλλεται, με φορά προς τα πάνω, από το έδαφος δίνεται από τον τύπο $y(t) = 5t(20 - t)$ (t ο χρόνος σε sec)

A) Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σημείου όταν $t = 11$ sec. Τι συμπεραίνετε για την κίνησή του τη στιγμή αυτή;

B) Να βρείτε την αρχική ταχύτητα του σημείου και το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει.

Γ) Σε ποια στιγμή το ύψος του είναι 375 m

1.79 Δίνεται ορθή γωνία xOy και το ευθύγραμμο τμήμα AB μήκους 10 m του οποίου τα άκρα A και B ολισθαίνουν πάνω στις πλευρές Oy και Ox αντίστοιχα. Το σημείο B κινείται με ταχύτητα $u = 2 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ και η θέση του στον άξονα

Ox δίνεται από την συνάρτηση $S(t) = ut, t \in [0, 5]$ (t ο χρόνος σε sec)

A) Να βρεθεί το εμβαδό $E(t)$ του τριγώνου OAB ως συνάρτηση του t

B) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του $E(t)$ τη στιγμή κατά την οποία το μήκος του OA είναι 6 m;

Γενικές Ασκήσεις στις Συναρτήσεις

- 1.80** Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = e^{ax^2+bx}$ με $a, b \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία: $A(1, e^3)$ και $B(-1, e)$, τότε:
- A) Να βρεθεί ο τύπος της
 B) Να βρεθεί το σημείο τομής της C_f με τον άξονα yy'
 Γ) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο παραπάνω σημείο καθώς και το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζει αυτή με τους άξονες.
 Δ) Αποδείξτε ότι $f''(x) = f'(x) \cdot (4x+1)^2 + 4 \cdot f(x)$
 E) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτόμενης για $x = 2$

- 1.81** Αν η εφαπτομένη (ϵ) στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ στο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $x - y + 2 = 0$ τότε:
- A) Να βρείτε τον $f'(1)$
 B) Να αποδείξετε ότι η (ϵ) εφάπτεται στη C_g με $g(x) = f(x^2 + x + 1) - 1$ στο σημείο της $B(0, g(0))$

- 1.82** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(2x)$. Να βρείτε :
- A) Τα σημεία όπου η C_f τέμνει τους αξονες
 B) Να βρεθεί το διαστήμα στο οποίο η C_f είναι πάνω από την ευθεία $y=e$
 Γ) Να βρεθεί η $f'(x)$
 Δ) Να βρεθεί το $f'\left(\frac{e}{2}\right)$
 E) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη στην $y = \frac{2}{e}x + 3$

- 1.83** Έστω ότι $f(x) = 1 + x^2 \cdot e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$
- A) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$.
 B) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f .

- 1.84** Ένα σώμα κινείται ευθύγραμμα πάνω σε άξονα ώστε η θέση του την τυχαία χρονική στιγμή t (σε sec) να δίνεται από τον τύπο $x(t) = t^3 - 12t^2 + 45t$ σε μέτρα (m). Να βρείτε:
- A) την ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή t
 B) τις χρονικές στιγμές που το σώμα είναι ακίνητο
 Γ) την απόσταση των θέσεων του σώματος όταν αυτό είναι ακίνητο.

- 1.85** Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{-3x} + 1$
- A) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $f''(x) + 2f'(x) - 3f(x) + 3$
 B) Να υπολογίσετε το $f'(-1)$
 Γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη C_f , στο σημείο της με τετμημένη -1

- 1.86** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x^2 - x + 1)$ και $g(x) = x^2 - ax + \beta$, $a, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:
- A) την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$
 B) τα a, β ώστε η (ϵ) να εφάπτεται στη C_g στο σημείο της $B(2, g(2))$.

- 1.87** Θεωρούμε τη συνάρτηση g με τύπο $g(x) = f(\sqrt{x}) + \sqrt{f(x)}$, $x \in (0, +\infty)$, $f(x) \in (0, +\infty)$, $f(2) = f'(2) = f(4) = f'(4) = 4$.
- A) Αν η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία (ϵ): $y = 1$, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $B(1, g(1))$, είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
 B) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία εφάπτεται στη C_g της g στο σημείο $\Gamma(4, g(4))$.

2 ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

2.01 Να συμπληρωθούν οι πίνακες

ΠΙΝΑΚΑΣ 1

x_i	v_i	f_i	$f_i\%$
x_1			4
x_2	18		
x_3			
x_4	10	0,2	
x_5		0,16	
ΑΘΡ			

ΠΙΝΑΚΑΣ 2

x_i	v_i	f_i	$f_i\%$
-2			15
0			25
1			40
3			15
5			
ΑΘΡ	160		

ΠΙΝΑΚΑΣ 3

x_i	v_i	f_i	$f_i\%$
1	12		
2			
3	24		40
5		0,05	
ΑΘΡ			

ΠΙΝΑΚΑΣ 4

x_i	v_i	f_i	$f_i\%$
-5		0,05	
-3			
0			40
1	8	0,2	
ΑΘΡ			

ΠΙΝΑΚΑΣ 5

x_i	v_i	N_i	f_i	F_i	$f_i\%$	$F_i\%$
1	5					
2						16
3		25				
4	4					
5						60
6		50				
ΑΘ						

ΠΙΝΑΚΑΣ 6

x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	F_i
-1			4	0,1
0		30		
2				
3	6			
ΑΘΡ	40			

ΠΙΝΑΚΑΣ 8

x_i	v_i	f_i	N_i	$F_i\%$
2				20
5		0,4		
7	12			
8			60	
ΑΘΡ				

ΠΙΝΑΚΑΣ 9

x_i	v_i	f_i	$f_i\%$	N_i	F_i	$F_i\%$
0						10
10		0,15				
20					0,60	
30	5					
40				20		
ΑΘ						

ΠΙΝΑΚΑΣ 11

x_i	v_i	f_i	$f_i\%$	N_i	F_i	$F_i\%$
10	5					
20						
30	12		30		0,675	
40						
Σ						

ΠΙΝΑΚΑΣ 12

x_i	v_i	f_i	N_i	F_i	$f_i\%$	$F_i\%$
1	8	0,4				
2			10			
3	5	0,25	15			
4				0,9		
5						10
Σόβν						

2.02 Σε μια τάξη Λυκείου όπου δεν υπάρχουν συμμαθητές που να είναι αδέρφια:

Οι 20 μαθητές έχουν κανένα ή 1 ή 2 ή 3 ή 4 αδέρφια

Οι 18 έχουν τουλάχιστον 1 αδερφό

Οι 19 έχουν το πολύ 3 αδέρφια

Πέντε οικογένειες των μαθητών έχουν 3 ή 4 παιδιά

Το 15% των οικογενειών την μαθητών έχουν 4 τουλάχιστον παιδιά

Να κάνετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων: $v_i, f_i, f_i\%, N_i, F_i, F_i\%$

2.03 Σε μια πόλη η μικρότερη θερμοκρασία επί 20 συνεχείς ημέρες ήταν 10, 11, 15, 13 και 16

18 ημέρες είχαν θερμοκρασία το πολύ 15

Το 85% του πλήθους των ημερών η θερμοκρασία ήταν τουλάχιστον 11

Το πλήθος των ημερών με θερμοκρασία 13 ήταν διπλάσιο του πλήθους των ημερών με θερμοκρασία 11

Το 55% του πλήθους των ημερών η θερμοκρασία ήταν 13 ή 15

Να κάνετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων: $v_i, f_i, N_i, F_i, f_i\%, F_i\%$

2.04 Έστω x_1, x_2, \dots, x_4 οι τιμές μιας μεταβλητής X ως προς την οποία εξετάζουμε ένα δείγμα μεγέθους n

και $f_i = \frac{1}{2(i-1)}, i = 2, 3, 4$ να βρεθεί η f_1

2.05 Έστω x_1, x_2, x_3, x_4 οι τιμές μιας μεταβλητής X ενός δείγματος. Αν $f_1 = 2f_2 = 3f_3 = 4f_4$ να βρείτε τις

f_1, f_2, f_3, f_4

2.06 Έστω x_1, x_2, x_3 οι τιμές μιας μεταβλητής X ως προς την οποία εξετάζουμε ένα δείγμα μεγέθους n

A) Αν $v_i = i^2 + 2i, i = 1, 2, 3$ να βρεθεί ο v

B) Αν $f_i = \frac{1}{i^2 - 1}, i = 2, 3$ να βρεθεί την f_1

2.07 Έστω x_1, x_2, \dots, x_5 με $x_1 < x_2 < \dots < x_5$ οι τιμές μιας μεταβλητής X ως προς την οποία εξετάζουμε ένα

δείγμα μεγέθους n . Αν ισχύει $f_i = \frac{i}{2k}, i = 1, 2, \dots, 5$

A) Να βρεθεί ο k

B) Για $k = \frac{15}{2}$ να βρείτε την $F_3\%$

Γ) Αν $N_3 = 30$ να βρείτε το μέγεθος του δείγματος.

2.08 Έστω x_1, x_2, \dots, x_5 με $x_1 < x_2 < \dots < x_5$ οι τιμές μιας μεταβλητής X ως προς την οποία εξετάζουμε ένα

δείγμα μεγέθους n . Αν ισχύει $F_i\% = \frac{i}{k}, i = 1, 2, \dots, 5$ τότε:

A) Να βρεθεί ο k

B) Για $k = \frac{1}{20}$ να βρείτε την f_2

Μ. Παπαρηγοράκης
4 Γ ΛΥΚ

Γραφική παρασταση κατανομής συχνοτήτων

2.09 Η βαθμολογία μιας ομάδας φοιτητών σε ένα μάθημα φαίνεται στο διπλανό πίνακα. Να κάνετε το διάγραμμα συχνοτήτων και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων

Βαθμός	Πλήθος φοιτητών
4	2
5	3
6	7
7	5
8	3

2.10 Στο διπλανό πίνακα φαίνονται τα βιβλία που έχει μια βιβλιοθήκη. Να κατασκευάσετε ραβδόγραμμα συχνοτήτων και κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων

Είδος βιβλίων	Πλήθος βιβλίων
Ιστορικά	2
Λογοτεχνικά	30
Μαθηματικά	36
Ταξιδιωτικά	24
Εγκυκλοπαιδικά	18

2.11 Σε ένα κυκλικό διάγραμμα παριστάνονται οι εξαγωγές της χώρας μας αξίας 97.000.000 euro κατά το έτος 1980 ανάλογα με το μέσο μεταφοράς. Η γωνία του κυκλικού τομέα για μέσο μεταφοράς “θαλασσίως” είναι 180° . Το 14% της αξίας των εξαγωγών έγινε “σιδηροδρομικώς”. Οι μεταφορές που έγιναν “οδικώς” ήταν τετραπλάσιες σε αξία από αυτές που έγιναν “αεροπορικώς”. Να μετατρέψετε το κυκλικό διάγραμμα σε ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

2.12 Σε ένα κυκλικό διάγραμμα παριστάνεται το μορφωτικό επίπεδο των 400 εργαζομένων μιας επιχείρησης σε τέσσερις κατηγορίες. Α' Κατηγορία: Απόφοιτοι Γυμνασίου Β' Κατηγορία: Απόφοιτοι Λυκείου Γ' Κατηγορία: Πτυχιούχοι Ανωτάτης Εκπαίδευσης Δ' Κατηγορία: Κάτοχοι Μεταπτυχιακού Τίτλου. Κάθε εργαζόμενος ανήκει σε μία μόνον από τις κατηγορίες αυτές.

Στην Α' κατηγορία ανήκει το 25% των εργαζομένων της επιχείρησης. Η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στους εργαζόμενους της Δ' κατηγορίας είναι 18° . Οι εργαζόμενοι της επιχείρησης της Β' κατηγορίας είναι εξαπλάσιοι των εργαζομένων της Γ' κατηγορίας.

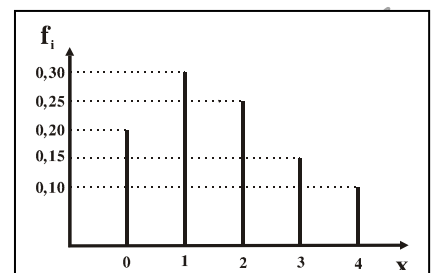
- A. Να υπολογίσετε τον αριθμό των εργαζομένων κάθε κατηγορίας.
B. Να μετατρέψετε το κυκλικό διάγραμμα σε ραβδόγραμμα συχνοτήτων.

2.13 Σε ένα κυκλικό διάγραμμα, παριστάνεται το χρώμα μαλλιών 900 ατόμων. Το 30% των ατόμων έχουν μαύρα μαλλιά. Η γωνία του κυκλικού τομέα για τα καστανά μαλλιά είναι $\alpha_3 = 144^\circ$. Τα άτομα με ξανθά μαλλιά είναι διπλάσια από αυτά με κόκκινα μαλλιά. Να συμπληρώσετε τον διπλανό πίνακα και να κατασκευάσετε το ραβδόγραμμα συχνοτήτων.

Χρώμα μαλλιών	v_i	$f_i\%$	α_i
Κόκκινα			
Μαύρα			
Καστανά			
Ξανθά			
Σύνολο:			

2.14 Ο αριθμός των ετήσιων επισκέψεων ενός δείγματος 80 μαθητών μιας περιοχής στα διάφορα μουσεία της χώρας δίνεται από το διπλανό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων. Να βρείτε:

- A το ποσοστό επί τοις εκατό των μαθητών που κάνει ακριβώς δύο επισκέψεις ετησίως,
B τον αριθμό των μαθητών που κάνει δύο τουλάχιστον επισκέψεις ετησίως.



Ομαδοποίηση Παρατηρήσεων

2.15 Να συμπληρώσετε τους παρακάτω πίνακες στους οποίους έχουμε ομαδοποιήσει τρία δείγματα σε κλάσεις ίσου πλάτους

Κλάσεις [..-..)	x_i
...-...	6
...-...	...
...-...	...
...-...	18

Κλάσεις [..-..)	x_i
5-..	
..-..	
...-23	
..-..	

Κλάσεις [..-..)	x_i
...-....	...
...-...	11
...-...	...
17-...	...

2.16 Η βαθμολογία 40 μαθητών σε ένα διαγώνισμα φαίνεται στο διπλανό πίνακα:

A) Να κατασκευάσετε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων %

B) Να βρείτε το βαθμό κάτω από το οποίο έχει:

α) Το 20% των μαθητών

β) Το 40% των μαθητών.

Γ) Το ποσοστό των μαθητών που έχει γράψει: τουλάχιστον 14

Βαθμός [,)	μαθητές
[0,4)	4
[4,8)	8
[8,12)	16
[12,16)	10
[16,20)	2

2.17 Στο σχήμα είναι το πολύγωνο συχνοτήτων των ομαδοποιημένων πωλήσεων σε δεκάδες χιλιάδες euro που έγιναν από τους πωλητές μια εταιρείας σε ένα έτος.

i) Πόσοι είναι οι πωλητές;

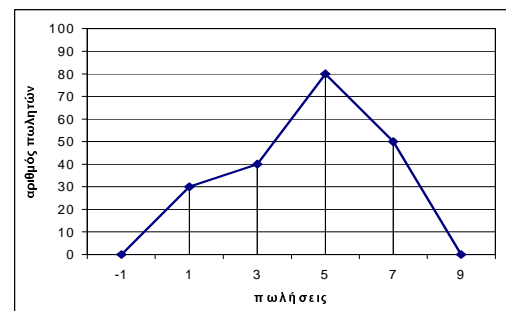
ii) Να κατασκευάσετε:

α) το ιστόγραμμα συχνοτήτων

β) το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων

iii) Πόσοι πωλητές έκαναν πωλήσεις κάτω από:

α) 60000 euro; β) 50000 euro; γ) 45000 euro;

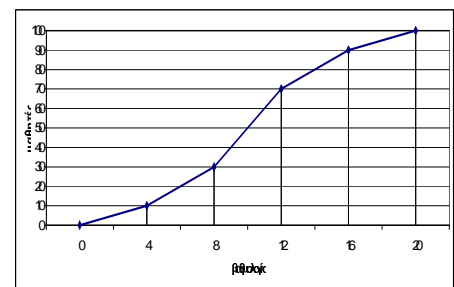


2.18 Στο σχήμα έχουμε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων μιας βαθμολογίας μαθητών. Να βρείτε:

i) Το βαθμό κάτω από τον οποίο πήρε:

α) το 70% των μαθητών β) το 30% των μαθητών

ii) Το ποσοστό των μαθητών που πήρε βαθμό μέχρι 13



2.19 Το πολύγωνο συχνοτήτων μιας ομαδοποιημένης κατανομής με 5 ισοπλάτεις κλάσεις αποτελείται από τις ευθείες $y = x - 1$ και $y = -x + 13$. A) Να βρεθεί το πλήθος του δείγματος.

B) Να βρεθεί το πλάτος και τα άκρα κάθε κλάσης. Γ) Να βρεθεί η συχνότητα κάθε κλάσης.

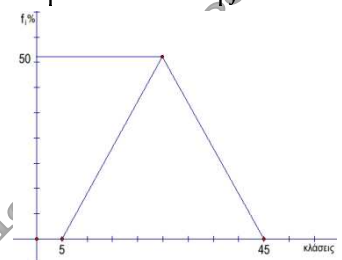
2.20 Ένα δείγμα ομαδοποιήθηκε σε k κλάσεις, ίσου πλάτους c .

Δίνεται το πολύγωνο $f_i\%$ το οποίο έχει σχήμα τριγώνου.

A) Να εκφράσετε το c συναρτήσει του k .

B) Να βρείτε τα c , k .

Γ) Αν $f_1\% = 25$, να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα $f_i\%$.



Μέση τιμή

2.21 Οι χρόνοι που κάνουν οι μαθητές ενός σχολείου να πάνε από το σπίτι στο σχολείο είναι από 4 έως 20 λεπτά. Το 20% κάνει χρόνους κάτω από 8 λεπτά το 50% κάνει χρόνους κάτω από 12 λεπτά και το 15% τουλάχιστον 16 λεπτά. Να βρείτε το μέσο χρόνο των μαθητών.

2.22 Στο διπλανό πίνακα φαίνεται η βαθμολογία 20 φοιτητών σε ένα μάθημα. Να βρείτε τα α , β αν η μέση βαθμολογία είναι 5,9

Βαθμός	Φοιτητές
4	2
5	α
6	8
8	β

2.23 Μια βιοτεχνία έχει 10 εργαζόμενους με μέσο μηνιαίο μισθό 1200 €.

A) Να βρείτε το μέσο μισθό όταν:

α) ένας εργαζόμενος με 1200 € μισθό πάρει σύνταξη.

β) προσληφθούν δύο εργαζόμενοι ακόμη με μισθό 850 € ο καθένας.

γ) πάρει σύνταξη ένας με μισθό 1190 € και προσληφθούν τρεις με μισθό 850 € ο καθένας

B) Αν προσληφθεί ένας εργαζόμενος, ποιος πρέπει να είναι ο μηνιαίος μισθός του ώστε ο μέσος μηνιαίος μισθός όλων να είναι 1210 €

ΑΠ: 1200, 1141,66, 1113,33, 1310

2.24 Σε 20 παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X βρήκαμε μέση τιμή $\bar{x} = 60$. Διαπιστώθηκε όμως στο τέλος ότι οι 10 παρατηρήσεις από αυτές είχαν εσφαλμένα υπερεκτιμηθεί κατά 5 μονάδες κάθε μια ενώ οι 9 από τις υπόλοιπες είχαν υποεκτιμηθεί κατά 10 μονάδες η κάθε μια. Να βρείτε τη σωστή μέση τιμή των παρατηρήσεων αυτών.

2.25 Μια τάξη έχει 12 αγόρια και άγνωστο αριθμό κοριτσιών. Σε ένα διαγώνισμα η μέση τιμή των βαθμών των αγοριών ήταν 14, ενώ των κοριτσιών ήταν 14,875. Αν η μέση τιμή των βαθμών όλων των παιδιών ήταν 14,5, να βρεθεί το πλήθος των κοριτσιών.

2.26 Σε μια επιχείρηση είναι 50 εργαζόμενοι στα τμήματα A και B. Οι εργαζόμενοι στο τμήμα A πήραν αύξηση στο μηνιαίο μισθό 100 € ο καθένας, ενώ στο τμήμα B πήραν αύξηση στο μισθό, 50 € ο καθένας. Αν η μέση τιμή όλων των μηνιαίων μισθών αυξήθηκε κατά 70 €, να βρείτε πόσοι είναι οι εργαζόμενοι του κάθε τμήματος.

2.27 Σε μια εταιρία οι 200 υπάλληλοι έχουν μέσο μισθό 2500 €.

A) Το 20% των υπαλλήλων έχει μέσο μισθό 1800 €. Αν ο μισθός αυτών των υπαλλήλων αυξηθεί ώστε να γίνει ίσος με τη μέση τιμή, ποια θα είναι η νέα μέση τιμή του μισθού;

B) Για λόγους μείωσης του κόστους απολύεται το 15% των υπαλλήλων της εταιρίας. Οι υπάλληλοι αυτοί έχουν μέσο μηνιαίο μισθό 2800 €. Να βρεθεί η νέα μέση τιμή του μισθού.

Γ) Αν σε όλους τους υπάλληλους δοθεί αύξηση 3,5% ποια η νέα μέση τιμή του μισθού;

2.28 Ένα εργοστάσιο απασχολεί 5 υπαλλήλους στο Τμήμα A με μέσο μηνιαίο μισθό 2490 €, 6 υπαλλήλους στο Τμήμα B με μέσο μηνιαίο μισθό 2800 € και 4 υπαλλήλους στο Τμήμα Γ με μέσο μηνιαίο μισθό 3600 €. Να βρεθεί ο μέσος μηνιαίος μισθός όλων των υπαλλήλων.

Αν προσληφθούν 2 υπάλληλοι στο Τμήμα A, 4 στο Τμήμα Γ και οι μέσες τιμές των μισθών στα δύο αυτά τμήματα δεν μεταβληθούν, να βρεθεί η νέα μέση τιμή.

2.29 Η μέση τιμή 100 αριθμών είναι 24 και η μέση τιμή των 60 πρώτων από αυτούς είναι 16. Να βρεθεί η μέση τιμή των υπολοίπων.;

2.30 Σε ένα Λύκειο τα τρία τμήματα της Πρώτης Τάξης έχουν: Το πρώτο 25 μαθητές και μέση βαθμολογία 17,5 το δεύτερο 27 μαθητές και μέση βαθμολογία 18,2 το τρίτο 23 μαθητές και μέση βαθμολογία 17,1 Να βρεθεί η μέση βαθμολογία των μαθητών της Πρώτης τάξης

2.31 Ο μέσος όρος βαθμολογίας 1^{ου} τετραμήνου 20 μαθητών ενός τμήματος στη στατιστική είναι 14,4. Επειδή συγκριτικά με τους μέσους όρους άλλων μαθημάτων η βαθμολογία θεωρήθηκε χαμηλή, ο καθηγητής αποφάσισε να δώσει μια μονάδα σε όλους τους μαθητές, εκτός από δυο μαθητές που είχαν εικοσάρια. Ποια είναι τώρα η νέα μέση τιμή της βαθμολογίας

2.32 Οι αριθμοί $\alpha, \beta, 17, \gamma$ έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά και είναι οι βαθμοί ενός μαθητή σε τέσσερα διαγωνίσματα. Δίνεται ότι το εύρος των βαθμών είναι 2, η διάμεσος και η μέση τιμή 16.

A) Να βρείτε τους βαθμούς του μαθητή.

B) Αν οι συντελεστές βαρύτητας των βαθμών είναι 0,5 0,7 1 και 0,8 αντίστοιχα να βρείτε το μέσο όρο των βαθμών του μαθητή.

2.33 Η μέση τιμή των παρατηρήσεων t_1, t_2, \dots, t_v μιας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους v είναι \bar{x} . Να βρείτε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων:

A) $t_1 + \lambda, t_2 + \lambda, \dots, t_v + \lambda$

B) $\lambda t_1, \lambda t_2, \dots, \lambda t_v$

Γ) $\lambda t_1 + \kappa, \lambda t_2 + \kappa, \dots, \lambda t_v + \kappa$

2.34 Σ' ένα Λύκειο φοιτούν 300 μαθητές και η μέση βαθμολογία τους στα Μαθηματικά στο Α' τετράμηνο ήταν 15. Στο Β' τετράμηνο, ένας ορισμένος αριθμός μαθητών αύξησε τη βαθμολογία του κατά 4 μονάδες ο καθένας, ενώ οι υπόλοιποι μείωσαν τη βαθμολογία τους κατά 2 μονάδες ο κάθε μαθητής. Να βρείτε πόσοι μαθητές βελτίωσαν τη βαθμολογία τους και πόσοι την χειροτέρευσαν, αν γνωρίζουμε ότι η μέση βαθμολογία όλων στο Β' τετράμηνο έγινε 17.

2.35 Ένα δείγμα έχει μέγεθος $v = 8$, $\sum_{i=1}^8 (2x_i + 6) = 752$ και $S = 2$. Να βρείτε η \bar{x} και το $\sum_{i=1}^8 x_i^2$.

2.36 Αν είναι $\sum_{i=1}^5 x_i = 3$ και $\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 23$, να υπολογίσετε τα $\sum_{i=1}^5 (x_i + 10)$ και $\sum_{i=1}^5 (2x_i + 3)^2$

2.37 Στη διπλανή κατανομή να υπολογίσετε τη μέση τιμή

x_i	v_i
3	3
4	2
5	
9	2

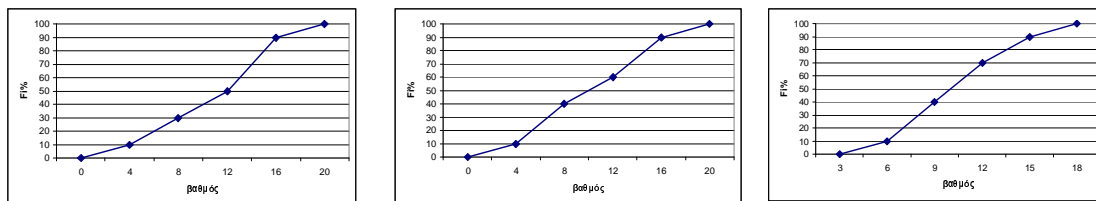
2.38 Να υπολογίσετε το πλήθος v των παρατηρήσεων $x_1 = \ln 2$, $x_2 = \ln \frac{3}{2}$, $x_3 = \ln \frac{4}{3}$, ..., $x_v = \ln \frac{v+1}{v}$, αν

η μέση τιμή τους είναι $\bar{x} = \frac{\ln 2004}{v}$

Διάμεσος

ΠΙΝΑΚΑΣ 1		ΠΙΝΑΚΑΣ 2		ΠΙΝΑΚΑΣ 3		ΠΙΝΑΚΑΣ 4	
Χρόνος	Μαθητές	Χρόνος	Μαθητές	Χρόνος	Μαθητές	Χρόνος	Μαθητές
8	5	8	7	8	30	8	30
9	7	9	6	9	25	9	20
10	8	10	10	10	35	10	40
11	7	11	3	11	10	11	10

2.39 Να βρείτε τη διάμεσο των χρόνων φαίνονται στους παραπάνω πίνακες.



2.40 Να βρείτε τη διάμεσο των βαθμών των μαθητών της Α' Λυκείου του κάθε τμήματος που πήραν σε ένα διαγώνισμα αν τα πολύγωνα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων είναι τα παρακάτω

2.41 Αν η μέση τιμή πέντε αριθμών είναι διπλάσια της διαμέσου δ με $0 < \delta < 5$ και οι τέσσερις από αυτούς είναι οι 0, 1, 5, 21, να βρείτε τον πέμπτο αριθμό.

2.42 Στο διπλανό πίνακα φαίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής X με τις αντίστοιχες αθροιστικές σχετικές συχνοτήτες τους. Να βρείτε τους α , β , γ αν η διάμεσος είναι 6 και η μέση τιμή 5,5

x_i	$F_i\%$
2	10
3	30
5	α
7	β
9	γ

2.43 Σ' ένα τεστ πήραν μέρος 100 μαθητές προκειμένου ο καθένας να απαντήσει σε 200 ερωτήσεις. Η βαθμολογία είναι 1 ή 0, ανάλογα αν ο μαθητής απαντάει ή όχι στην ερώτηση. Ο επόμενος πίνακας δείχνει τα αποτελέσματα της βαθμολογίας

Βαθμοί	Συχνότητα
[60 80)	5
[80 100)	20
[100 120)	26
[120 140)	30
[140 160)	15
[160 180)	4

A) Να εκτιμήσετε γραφικά τη διάμεσο.

B) Να εκτιμήσετε το ποσοστό των μαθητών που έγραψαν από 80 ως 110

2.44 Οι παρατηρήσεις ενός δείγματος είναι 4, 8, 3, \bar{x} , α , $24 - 2\bar{x}$, 5 και έχουν $\delta = 8$. Βρείτε τη \bar{x} και το α

2.45 Το μέσο ύψος των 30 μαθητών και μαθητριών μιας τάξης είναι 170 cm Υποθέτουμε ότι κανένας μαθητής δεν έχει ανάστημα μικρότερο των 160 cm. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος του δείγματος δεν υπερβαίνει τα 180 cm.

2.46 Δίνεται ο αριθμός $\alpha \in \mathbb{R}$ και επιπλέον 8 διαδοχικοί περιττοί ακέραιοι. Αν η μέση τιμή του δείγματος (των 9 αριθμών) είναι $\bar{x} = 64$ και ισχύει $\alpha \in (50, 80)$, να βρεθεί η διάμεσος του δείγματος

2.47 Το μέσο ύψος των 30 μαθητών μιας τάξης είναι 170 cm Υποθέτουμε ότι κανένας μαθητής δεν έχει ανάστημα μικρότερο των 160 cm. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος του δείγματος δεν υπερβαίνει τα 180 cm.

2.48 Να βρείτε το $\alpha \in \{0, 1, 2\}$ ώστε οι αριθμοί $\alpha - 2$, $\alpha + 1$, $\alpha^2 - 1$, $\alpha^3 + 1$, να έχουν διάμεσο $\delta > 1$

Τυπική Απόκλιση

2.49 Οι χρόνοι αναμονής σε στάση λεωφορείων 20 ατόμων φαίνεται στο διπλανό πίνακα. Να βρείτε την τυπική απόκλιση.

Χρόνος	Μαθητές
[1,3)	6
[3,5)	8
[5,7)	4
[7,9)	2

2.50 Ένα δείγμα μεγέθους $n = 35$ έχει μέση τιμή \bar{x} και τυπική απόκλιση s . Παίρνουμε την μέση τιμή ως μία νέα τιμή της μεταβλητής και δημιουργούμε ένα δείγμα μεγέθους $n = 36$. Να βρεθεί η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση του νέου δείγματος.

2.51 Ρωτήθηκαν 40 μαθητές ενός Λυκείου πόσα λογοτεχνικά βιβλία έχουν διαβάσει. Οι απαντήσεις κυμαίνονταν από 0 έως και 20. Οκτώ μαθητές απάντησαν κάτω από 4, είκοσι μαθητές κάτω από 8, τέσσερις μαθητές πάνω από 16 και δέκα πάνω από 12. Αν για τους 2 που διαβάζουν ποιο πολύ τους δοθεί μια λογοτεχνική σειρά δωρεάν, πόσα τουλάχιστον βιβλία πρέπει να έχει διαβάσει κάποιος για να κερδίσει;

2.52 Η μέση τιμή και η διακύμανση των 20 τιμών ενός δείγματος είναι $\bar{x} = 6$ και $s^2 = 4$, αντίστοιχα. Αν

για τις δεκαεννέα τιμές ισχύει $\sum_{i=1}^{19} (x_i - \bar{x})^2 = 79$, να βρεθεί η εικοστή τιμή.

2.53 Αν για ένα σύνολο παρατηρήσεων ισχύει ότι $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 88$, $s = \sqrt{7}$, $\bar{x} = 2$, να βρεθεί το n

2.54 Η τυπική απόκλιση μιας μεταβλητής X είναι ίση με το μηδέν. Αν t_1, t_2, \dots, t_n είναι οι τιμές της x και \bar{x} η μέση τιμή, δείξτε ότι $t_1 = t_2 = \dots = t_n = \bar{x}$.

2.55 Έστω t_1, t_2, \dots, t_{100} οι τιμές μιας μεταβλητής. Οι πρώτες 20 παρατηρήσεις έχουν μέση τιμή $\bar{x}_1 = 10$ με τυπική απόκλιση $s_1 = 2$, ενώ οι υπόλοιπες έχουν μέση τιμή $\bar{x}_2 = 20$ και $s_2 = 5$. Να βρείτε:

- A) τη μέση τιμή του συνόλου,
B) την τυπική απόκλιση s του συνόλου.

2.56 Θεωρούμε α_1 το πλήθος αριθμών που έχουν διακύμανση s_1^2 και μέση τιμή \bar{x} . Όμοια θεωρούμε α_2 το πλήθος αριθμών που έχουν διακύμανση s_2^2 και την ίδια μέση τιμή \bar{x} . Να αποδείξετε ότι:

A. Η μέση τιμή των $\alpha_1 + \alpha_2$ αριθμών είναι \bar{x} και η διακύμανση τους είναι $s^2 = \frac{\alpha_1 s_1^2 + \alpha_2 s_2^2}{\alpha_1 + \alpha_2}$

2.57 Τέσσερις αριθμοί x, y, z, w με $x < y < z < w$ έχουν μέση τιμή 3, διάμεσο 3 και εύρος 4.

A) Να αποδείξετε ότι $x = 1$ και $w = 5$

B) Αν η διακύμανση των τεσσάρων αριθμών είναι $\frac{5}{2}$ να βρείτε τους αριθμούς y και z .

Γ) Αν στους παραπάνω τέσσερις αριθμούς προσθέσουμε και άλλους 6 αριθμούς τους

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ τέτοιους ώστε $\sum_{i=1}^6 x_i = 38$ και $\sum_{i=1}^6 x_i^2 = 244$ να βρείτε την μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των 10 αριθμών.

CV

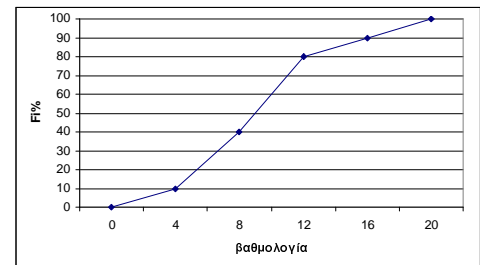
2.58 Σε ένα δείγμα ισχύει ότι $\bar{x} + 4s = 0$. Να βρείτε το συντελεστή μεταβολής.

2.59 Ένα σύρμα μήκους $\ell = 20$ cm κόβεται σε δέκα κομμάτια με μήκη $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{10}$. Αν $\sum_{i=1}^{10} (\ell_i - 2)^2 = 90$, να βρείτε το συντελεστή μεταβολής των $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{10}$.

2.60 Οι βαθμοί των μαθητών ενός τμήματος έχουν μέση τιμή 12 και $CV = 0,25$. Αν $\sum_{i=1}^v x_i^2 = 3060$ πόσοι είναι οι μαθητές του τμήματος;

2.61 Στο διπλανό σχήμα δίνεται το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων της βαθμολογίας μιας ομάδας μαθητών σε ένα μάθημα. Η βαθμολογία κυμαίνεται από 0 έως 20. Δίνεται ότι 20 μαθητές έχουν βαθμό μικρότερο του 6.

- A) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός των μαθητών είναι 80
 B) Να βρείτε τη διάμεσο.
 Γ) Να εξετάσετε αν το δείγμα των 80 μαθητών είναι ομοιογενές ως προς την βαθμολογία.



2.62 Σε μια εταιρεία ο μηνιαίος μισθός των εργατών είναι 750 € ενώ των στελεχών είναι 1100 €

A. Αν οι εργάτες είναι τετραπλάσιοι σε αριθμό από τα στελέχη της εταιρείας, να βρείτε το μέσο μισθό των υπαλλήλων (εργατών και στελεχών) της εταιρείας.

B. Θεωρούμε ότι η εταιρεία έχει v υπαλλήλους με μισθούς x_i , όπου $i = 1, 2, \dots, v$.

α) Αν η τυπική απόκλιση των μισθών είναι 140 ευρώ και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι 34600000 ευρώ, τότε να βρείτε τον αριθμό των υπαλλήλων που απασχολεί η εταιρεία.

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει ομοιογένεια στους μισθούς των υπαλλήλων.

γ) Η εταιρεία αποφασίζει να αυξήσει κατά a ευρώ τους μισθούς των εργατών, έτσι ώστε ο νέος μέσος μισθός των υπαλλήλων, να μην υπερβαίνει τα 900 ευρώ. Να βρείτε την μέγιστη αύξηση, που μπορεί να κάνει η εταιρεία.

2.63 Τα δύο τμήματα της Γ' τάξη ενός λυκείου έχουν: το τμήμα A έχει 18 μαθητές και το τμήμα B 22 μαθητές. Σε ένα κοινό διαγώνισμα, η τυπική απόκλιση της βαθμολογίας των μαθητών του τμήματος A είναι $S_\alpha = 2,5$ και του B είναι $S_\beta = 1,5$, ενώ η μέση βαθμολογία των δύο τμημάτων είναι η ίδια.

- A) Από τις βαθμολογίες των δύο τμημάτων, ποια έχει τη μεγαλύτερη ομοιογένεια;
 B) Να βρείτε την τυπική απόκλιση της βαθμολογίας όλων των μαθητών της τάξης αυτής.

2.64 Θεωρούμε το δείγμα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\alpha \leq \beta \leq \gamma \leq \delta$. Ονομάζουμε μ τον αριθμητικό μέσο του δείγματος, M τον σταθμικό μέσο του δείγματος με αντίστοιχους συντελεστές στάθμισης $0,1\alpha, 0,1\beta, 0,1\gamma, 0,1\delta$ και s τη τυπική απόκλιση του δείγματος. Αν $\mu \cdot M = 21$ και $21 - s^2 = \alpha + \beta + \gamma + \delta$ να βρείτε τα μ, s, CV

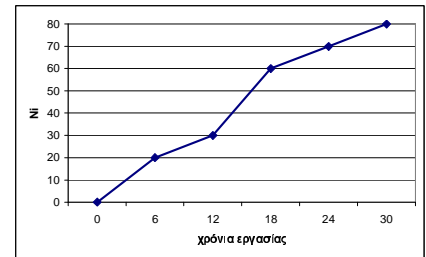
$$Y = cX + c'$$

2.65 Οι παρατηρήσεις x_1, x_2, \dots, x_n ενός δείγματος μεγέθους n έχουν μέση τιμή $\bar{x} = 3$ και διασπορά $s^2 = 4$. Να βρείτε το συντελεστή μεταβολής των παρατηρήσεων y_1, y_2, \dots, y_n που προκύπτουν από τις x_1, x_2, \dots, x_n αν ελαττώσουμε κάθε μια κατά 20% και μετά προσθέσουμε σε κάθε μια το 1,6

2.66 Έστω ευθεία (ϵ): $y = -3x + 2$ και τα σημεία της A_1, A_2, \dots, A_9 με τετμημένες x_1, x_2, \dots, x_9 που έχουν μέση τιμή -8 και τυπική απόκλιση 2. Να βρείτε το συντελεστή μεταβολής των τεταγμένων των σημείων A_1, A_2, \dots, A_9 .

2.67 Έστω x_1, x_2, \dots, x_n οι παρατηρήσεις ενός δείγματος που έχουν μέση τιμή και διακύμανση 4. Να βρείτε πόσες μονάδες -τουλάχιστον- πρέπει να αυξησουμε την κάθε μια από τις παρατηρήσεις ώστε το δείγμα να είναι ομοιογενές.

2.68 Τα χρόνια εργασίας ενός δείγματος εργαζομένων σε ένα εργοστάσιο σχηματίζουν το διπλανό πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων. Να βρείτε: τη διάμεσο, τη μέση τιμή, την τυπική απόκλιση, και τον συντελεστή μεταβολής ύστερα από 5 χρόνια.



2.69 Η μέση τιμή και ο συντελεστής μεταβολής των 10 τιμών ενός δείγματος είναι $\bar{x} = 80$ και $CV = 25\%$

αντίστοιχα. Αν για τις εννέα τιμές ισχύει ότι: $\sum_{i=1}^9 (x_i - \bar{x})^2 = 3975$ να βρείτε: Α) τη δέκατη τιμή

Β) πόσες μονάδες τουλάχιστον πρέπει να αυξηθεί κάθε τιμή του δείγματος ώστε να γίνει ομοιογενές

2.70 Οι σημερινές ηλικίες κάποιων ατόμων έχουν $CV_1 = 0,05$ ενώ πριν από 16 χρόνια είχαν $CV_2 = 25\%$

Α) να βρεθεί η μέση σημερινή τους ηλικία

Β) πριν πόσα χρόνια από σήμερα το δείγμα των ηλικιών τους ήταν για πρώτη φορά ομοιογενές;

Γ) αν το άθροισμα των τετράγωνων των σημερινών ηλικιών είναι 1604 να βρεθεί το πλήθος των ατόμων

2.71 Δείγμα μεγέθους 10 έχει εύρος R , μέση τιμή μ , τυπική απόκλιση s και οι τιμές του κατά αύξουσα σειρά είναι: 3, $s+1$, 5, μ , μ , $\mu+1$, $\mu+1$, 10, 11, $\mu-5+R$

Α) Να αποδείξετε ότι $\mu < \delta$

Β) Να βρείτε τα μ, s, R

Γ) Να βρείτε τον ελάχιστο φυσικό k που αν προστεθεί σε κάθε μια από τις παρατηρήσεις του παραπάνω δείγματος αυτό θα μετατραπεί σε ομοιογενές.

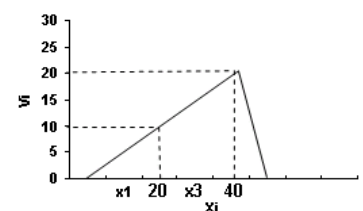
2.72 Δίνεται ότι $F_2\% = 30$ και το παρακάτω πολύγωνο συχνοτήτων από ιστόγραμμα

Α) Να συμπληρωθεί ο πίνακας κατανομής.

Β) Να βρεθούν μέτρα απόλυτης διασποράς.

Γ) Να βρεθούν μέτρα σχετικής διασποράς.

Δ) Να εξετασθεί αν το δείγμα είναι ομοιογενές.



Κανονική κατανομή

2.73 Οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X ακολουθούν την κανονική κατανομή. Αν το 2,5% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες του 30 και το 84% μεγαλύτερες του 15 να βρείτε το ποσοστό των παρατηρήσεων από 20 έως 35

2.74 Η βαθμολογία 200 μαθητών σε ένα διαγώνισμα είναι περίπου κανονική. Εκατό μαθητές έχουν βαθμό το πολύ 12 και 5 μαθητές τουλάχιστον 16. Να βρείτε πόσοι μαθητές έχουν βαθμό από 8 έως 16 και να εξετάσετε αν το δείγμα των βαθμών είναι ομοιογενές.

2.75 Τα νούμερα των παπουτσιών ενός δείγματος 400 ατόμων ακολουθούν περίπου την κανονική κατανομή. Δέκα άτομα φοράνε παπούτσια με νούμερο τουλάχιστον 43 και 64 άτομα το πολύ 37. Να βρείτε πόσα άτομα φοράνε παπούτσια από νούμερο 37 έως 43

2.76 Οι παρατηρήσεις μια μεταβλητής X μεγέθους 800 ακολουθούν την κανονική κατανομή. Είκοσι παρατηρήσεις είναι μικρότερες του 18 και 128 μεγαλύτερες του 36.

- A) Να βρείτε κατά προσέγγιση το εύρος του δείγματος.
B) Να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.

2.77 Έστω μεταβλητή X η οποία παίρνει θετικές τιμές, ακολουθεί την κανονική κατανομή και έχει εύρος – περίπου- $R = 36$ και $CV = 20\%$

- A) Να υπολογίσετε το ποσοστό των ατόμων που η τιμή τους είναι μεταξύ 24 και 42
B) Να αποδείξετε ότι αν οι τιμές της X αυξηθούν κατά $\omega > 0$, ο CV θα μειωθεί
Γ) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του ω , ώστε το δείγμα να γίνει ομοιογενές.

2.78 Ένα δείγμα έχει μέγεθος $n=10$ και η μεταβλητή ακολουθεί την κανονική κατανομή.

Αν $\sum_{i=1}^{10} x_i = 2,4$ και $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 4,86$ τότε να βρείτε το συντελεστή CV

2.79 Η διάρκεια ζωής (σε χιλιάδες ώρες) ενός δείγματος 8000 ηλεκτρικών συσκευών που παράγει μια μηχανή, όταν λειτουργεί κανονικά, ακολουθεί κανονική ή περίπου κανονική κατανομή. Η διάμεσος του δείγματος είναι 20 και 200 ηλεκτρικές συσκευές έχουν ζωή τουλάχιστον 22

- A) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.
Γ) Θεωρούμε μια συσκευή ελαττωματική όταν έχει διάρκεια ζωής κάτω από 17. Αν στο δείγμα βρέθηκαν 15 ηλεκτρικές συσκευές που έχουν διάρκεια ζωής κάτω από 17, να εξετάσετε αν η μηχανή έχει βλάβη.

2.80 Ένα μηχάνημα κατασκευάζει βίδες. Όταν το μηχάνημα λειτουργεί σωστά, η κατανομή συχνοτήτων των βιδών ως προς το μήκος τους, είναι κανονική με μέση τιμή \bar{x} (σε cm) και τυπική απόκλιση s (σε cm). Αν το 95% περίπου των βιδών που κατασκευάζει το παραπάνω μηχάνημα έχουν μήκος μεταξύ 5,6 cm και 6,4 cm τότε

- A) Να βρείτε το ποσοστό των βιδών που έχει μήκος μεταξύ 5,8 cm και 6 cm
B) Αν μία βίδα έχει μήκος μικρότερο ή ίσο των 5,4 cm ή μεγαλύτερο ή ίσο των 6,6 cm τότε θεωρείται ελαττωματική. Να βρείτε το ποσοστό των ελαττωματικών βιδών.
Γ) Σε ποιοτικό έλεγχο 10000 βιδών που κατασκευάζει το μηχάνημα, 45 βίδες βρίσκονται ελαττωματικές. Η πρόταση: «Το μηχάνημα παρουσιάζει πρόβλημα λειτουργίας» είναι Σωστή ή Λάθος;

3 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Δειγματικός χώρος - Ενδεχόμενα

3.01 Σ' ένα κουτί υπάρχουν 4 ομοιόμορφα μολύβια 1 κόκκινο (Κ), 1 πράσινο (Π), 1 μαύρο (Μ), 1 λευκό (Λ). Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος στις ακόλουθες περιπτώσεις: (μας ενδιαφέρει το χρώμα)

- A) Επιλέγουμε τυχαία ένα μολύβι.
 B) Επιλέγουμε τυχαία ένα μολύβι, το τοποθετούμε ξανά στο κουτί και μετά επιλέγουμε άλλο ένα
 Γ) Επιλέγουμε τυχαία ένα μολύβι και μετά επιλέγουμε άλλο ένα (χωρίς επανατοποθέτηση).

3.02 Μια δισκογραφική εταιρεία ελέγχει τα compact disks (CD) που παράγει. Ο έλεγχος σταματά όταν βρεθούν 2 ελαττωματικά CD ή όταν έχουν ελεγχθεί 4 CD. Να βρείτε:

- A) Το δειγματικό χώρο Ω.
 B) Τα ενδεχόμενα: α) Ακριβώς 2 ελαττωματικά CD,
 β) τουλάχιστον 2 ελαττωματικά CD,
 γ) το πολύ 2 ελαττωματικά CD.

3.03 Δύο ομάδες O_1, O_2 παίζουν μεταξύ τους σε μια σχολική ποδοσφαιρική συνάντηση (οι αγώνες δεν τελειώνουν ποτέ με ισοπαλία). Νικήτρια θεωρείται η ομάδα που θα νικήσει σε δύο αγώνες στη σειρά ή σε δύο αγώνες ανεξαρτήτως σειράς. Να βρείτε:

- α) Το δειγματικό χώρο Ω των αποτελεσμάτων των αγώνων της συνάντησης.
 β) Τα ενδεχόμενα: i) Ακριβώς μία νίκη της ομάδας O_1 ,
 ii) τουλάχιστον μία νίκη της ομάδας O_1 .
 γ) Πόσους αγώνες το πολύ θα είχε μία τέτοια ποδοσφαιρική συνάντηση;
 δ) Τι παρατηρείτε για τα ενδεχόμενα β(ii) και β(iii);

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

3.04 * Ρίχνουμε μια φορά έναν κύβο ο οποίος έχει καθέναν από τους αριθμούς 1, 2, 3 γραμμένους αντίστοιχα ανά δύο έδρες του και καταγράφουμε το αποτέλεσμα. Ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος αυτού είναι:

- A. $\Omega = \{3\}$. B. $\Omega = \{1, 2, 3\}$. Γ. $\Omega = \{1,1, 2,2, 3,3\}$.
 Δ. $\Omega = \{1,1, 1,2, 1,3, 2,1, 2,2, 2,3, 3,3\}$. E. $\{1,2, 2,1, 1,3, 3,1\}$.

3.05 * Ελέγχουμε διαδοχικά βιβλία μέχρι να βρούμε ένα κακοτυπωμένο (Κ) ή δύο σωστά τυπωμένα (Σ). Ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος είναι

- A. $\Omega = \{Κ, Σ\}$. B. $\Omega = \{ΚΚ, ΚΣ\}$. Γ. $\Omega = \{ΚΚ, ΣΣ\}$. Δ. $\Omega = \{Κ, ΣΚ, ΣΣ\}$. E. $\{Κ,ΣΣ\}$.

3.06 * Έστω $A = \{1, 3, 5\}$ και $B = \{2, 4, 6\}$ δύο ενδεχόμενα της ρίψης ενός ζαριού μια φορά. Αν το αποτέλεσμα της ρίψης είναι ο αριθμός 3 τότε πραγματοποιείται το ενδεχόμενο

- A. $A \cup B$. B. A' . Γ. B . Δ. $A \cap B$. E. $B' \cap A'$.

3.07 * Τα A και B είναι ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης και α ένα αποτέλεσμα του πειράματος αυτού. Η φράση «το A πραγματοποιείται» διατυπωμένη σε γλώσσα συνόλων είναι ισοδύναμη με την

- A. $\alpha \in A'$. B. $\alpha \in A' - B$. Γ. $\alpha \in A' \cup B$. Δ. $\alpha \in A$. E. κανένα από τα παραπάνω.

Ερωτήσεις «Σωστό - Λάθος»

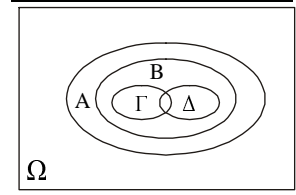
3.08 Οι παρακάτω σχέσεις αναφέρονται στο διπλανό διάγραμμα του Venn.

Χαρακτηρίστε κάθε μια από αυτές ως (Σ) ή (Λ)

$$A \subseteq B \quad B \subseteq A \quad \Gamma \subseteq B \quad \Delta \subseteq \Gamma \quad \Gamma \cup \Delta \subseteq A \quad \Gamma \cup \Delta \subseteq B$$

$$\Gamma \cap \Delta \subseteq A \quad B \cup \Gamma = B \quad B \cup \Gamma \cup \Delta = A \quad A \cup B = B \quad A \cap B = B$$

$$(\Gamma \cap \Delta) \cup A = A \quad (\Gamma \cap \Delta) \cap A = B \quad B \cap \Delta = \Delta \quad (\Gamma \cap B) \cap A = \Gamma$$



Ερωτήσεις συμπληρωσης

3.09 Συμπληρώστε τον πίνακα βάζοντας στη στήλη Β τον χαρακτηρισμό Σ (σωστό) ή Λ (λάθος). Όπου βάλτε Λ (λάθος) συμπληρώστε στη στήλη Γ τη σωστή σχέση διορθώνοντας το δεξιό μέλος της αντιστοιχίας ισότητας.

$A \cup A = A$		
$A \cup \emptyset = A$		
$A \cap \emptyset = A$		
$A' \cap A = \Omega$		
$A' \cup A = \emptyset$		
$\Omega' = \Omega$		
$(A')' = \Omega$		
$A \cap B = B \cap A$		
$\emptyset' = \Omega$		
$\text{Αν } A \subseteq B \text{ τότε } A \cup B = B$		
$A' \cup A = \Omega$		
$A' \cap A = \emptyset$		
$(A')' = A$		
$\text{Αν } A \subseteq B \text{ τότε } A \cap B = A$		

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

3.10 Στη στήλη Α του πίνακα γράφονται ισχυρισμοί για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός πειράματος. Στη στήλη Β γράφονται ισοδύναμοι ισχυρισμοί διατυπωμένοι στη γλώσσα των συνόλων (w ένα αποτέλεσμα του πειράματος αυτού). Αντιστοιχίστε κατάλληλα κάθε στοιχείο της στήλης Α με ένα μόνο της στήλης Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1 Το Α δεν πραγματοποιείται.	Α) $w \in A$
2 Ένα τουλάχιστον από τα Α και Β πραγματοποιείται.	Β) $w \in (A \cup B)$
3 Πραγματοποιούνται συγχρόνως και το Α και το Β.	Γ) $w \in (A' - A)$
4 Το Α πραγματοποιείται.	Δ) $w \in (A \cap B)$
5 Κανένα από τα Α και Β δεν πραγματοποιείται.	Ε) $w \in (A \cup B)$
6 Πραγματοποιείται μόνο το Α ή μόνο το Β.	Ζ) $w \in A'$
7 Το Β πραγματοποιείται	Η) $w \in (A \cup B)'$
8 Πραγματοποιείται μόνο το Α.	Θ) $w \in (A \cap B') \cup (A' \cap B)$
9 Πραγματοποιείται μόνο το Β.	Ι) $w \in B$
	Κ) $w \in (A \cap B')$
	Λ) $w \in (B \cap A')$
	Μ) $w \in (B \cap A)'$
	Ν) $w \in (A \cap B)'$
	Ξ) $w \in (A' \cup B)$

Μ. Παιδαγωγική
4 Γ ΛΥΚ

4 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Ισοπίθανα ενδεχόμενα

4.01 Έστω τα σύνολα: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{\omega \in \Omega / \omega < 4\}$, $B = \{\omega \in \Omega / \omega \text{ περιττός}\}$. Αν εκλέξουμε τυχαία ένα στοιχείο του Ω , να βρείτε τις πιθανότητες να ανήκει:

A) στο A και όχι στο B B) σε ένα το πολύ από τα A και B

4.02 Ρίχνουμε δύο ζάρια μαζί. Να βρείτε την πιθανότητα να φέρουμε 6 στο ένα και 5 στο άλλο

4.03 Έστω το σύνολο $\Omega = \{-1, 0, 1, 2\}$. Εκλέγουμε τυχαία ένα $\lambda \in \Omega$, να βρείτε την πιθανότητα του $P(A)$ όπου: A το ενδεχόμενο η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda = 0$ έχει δύο ρίζες άνισες

4.04 Σε ένα Λύκειο οι μαθητές της A τάξης είναι 54. Αν εκλέξουμε τυχαία ένα μαθητή του Λυκείου η πιθανότητα να είναι μαθητής της A τάξης είναι 0,36 και η πιθανότητα να είναι της B τάξης είναι 0,34. Να βρείτε: A) το πλήθος όλων των μαθητών του Λυκείου

B) το πλήθος των μαθητών της B τάξης

Γ) την πιθανότητα να είναι ένας μαθητής που εκλέξαμε τυχαία μαθητής της Γ τάξης.

4.05 Η Α' τάξη Λυκείου έχει 50 αγόρια και κορίτσια. Το 20% των αγοριών και τα $\frac{2}{5}$ των κοριτσιών επέλεξαν το βόλεϋ. Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο. Αν η πιθανότητα να είναι αγόρι και να μην επέλεξε το βόλεϋ είναι 0,4 να βρείτε: Την πιθανότητα να είναι κορίτσι και να μην επέλεξε βόλεϋ

4.06 Ένα κουτί περιέχει 2 άσπρες και 3 κόκκινες σφαίρες. Βγάζουμε διαδοχικά δύο σφαίρες. Να βρεθεί η πιθανότητα:

A) να είναι δύο κόκκινες

B) να είναι η πρώτη άσπρη και η δεύτερη κόκκινη

Γ) να είναι και οι δύο άσπρες

4.07 Στο διπλανό πίνακα έχουμε τη βαθμολογία μιας ομάδας φοιτητών σε ένα μάθημα. Αν εκλέξουμε τυχαία ένα φοιτητή να βρείτε την πιθανότητα να έχει βαθμό:

A) 8

B) Το πολύ 6

Γ) Τουλάχιστον 5

Δ) 5 ή 7

Βαθμός	Φοιτητές
4	2
5	6
6	8
7	4

4.08 Στο διπλανό πίνακα έχουμε τις απουσίες των μαθητών ενός τμήματος. Αν εκλέξουμε τυχαία ένα μαθητή του τμήματος να βρείτε την πιθανότητα να έχει:

A) λιγότερο από 20 απουσίες B) Τουλάχιστον 10 απουσίες

Γ) Κάτω από 15 απουσίες Δ) Τουλάχιστον 23 απουσίες.

Απουσίες	Μαθητές
[0, 10)	5
[10, 20)	10
[20, 30)	20
[30, 40)	15

Λογισμός Πιθανοτήτων

4.09 Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Να αποδειχθεί ότι:

i) $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$, $P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$.

ii) η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα μόνο από τα ενδεχόμενα A, B είναι $P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$.

4.10 Αν A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και ισχύουν $A \subseteq B$, $P(A) \cdot P(B) = \frac{5}{12}$ και

$$P(B) \cdot P(A') = \frac{1}{3} \text{ να βρεθούν οι πιθανότητες } P(A), P(B), P(A \cap B) \text{ και } P(A \cup B).$$

4.11 Αν A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και ισχύουν $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{2}{3}$, τότε βρείτε τις πιθανότητες $P(A \cap B')$ και $P(A' \cap B)$.

4.12 Θεωρούμε τα ενδεχόμενα A, B ενός πειράματος τύχης, με πιθανότητες τέτοιες ώστε: $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$,

$$P(A') = \frac{2}{3}, P(A \cap B) = \frac{1}{4}. \text{ Να βρείτε τις πιθανότητες: } P(A), P(B), P(A \cap B').$$

4.13 Αν για δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν: $P(A \cap B) = \frac{2}{5}$, $P(A') + P(B') = \frac{11}{10}$

να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(A \cup B)$

4.14 Αν για δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν: $P(A') = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ να υπο-

λογίσετε την πιθανότητα $P(B \cap A')$

4.15 Αν $\frac{3}{P(A')} - \frac{2}{P(A)} = \frac{25}{6}$ να βρείτε τις $P(A)$ και $P(A')$

4.16 Αν για δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει: $3P(A \cup B) = 1 + 3P(A - B)$ να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(B')$

4.17 Αν για δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι: $P(A') = 3P(A)$,

$$P(A) + 2P(B) = 1 \text{ και } 2P(A \cup B) = 1 \text{ να υπολογίσετε τις πιθανότητες } P(A \cap B), P(B - A), P(A \cup B')$$

4.18 Δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου έχουν γινόμενο πιθανοτήτων $\frac{2}{9}$. Να βρεθεί η πιθανότητα του καθενός

4.19 Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύουν $A \cup B = \Omega$, $P(A) = \alpha$, και $P(B) = \beta$. Να βρεθούν οι πιθανότητες:

$$P(A' \cup B'), P(A' \cap B'), P(A' \cup B), P(A' \cap B)$$

4.20 Αν A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και ισχύουν $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$ και

$P((A' \cap B) \cup (A \cap B')) = \frac{1}{6}$, να βρείτε την πιθανότητα $P(A' \cup B')$.

4.21 Αν A, B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και ισχύουν οι ισότητες $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{6}$

και $P(A \cap B) = \frac{2}{15}$, να βρείτε τις

A) $P(A \cup B)$ B) $P(A')$ Γ) $P(B')$ Δ) $P(A \cap B')$ E) $P(A' \cap B)$

4.22 Δίνονται δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύουν:

$P(A - B) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{20}$ και $P(B' - A) = \frac{1}{2}$. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα ενδεχόμενα A και B .

4.23 Δίνονται τα ενδεχόμενα A, B, Γ του ίδιου δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει:

$P(A \cap B) + P(A \cup B) = 0,5$ και $P(A') = 0,8$. Να βρείτε την $P(B)$.

4.24 Να αποδείξετε ότι αν οι πιθανότητες $P(A), P(A \cup B), P(B)$, είναι με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε τα ενδεχόμενα A, B είναι ισοπίθανα.

4.25 Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με μη μηδενικές πιθανότητες, για τα οποία ισχύει ότι: $P(A)P(A') = P(A') + P^2(B)$. Να αποδείξετε ότι το A είναι βέβαιο ενδεχόμενο και το B αδύνατο.

4.26 Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει ότι η πιθανότητα:

Να πραγματοποιείται το A είναι $\frac{1}{5}$, Να μην πραγματοποιείται το B είναι $\frac{3}{5}$ και να πραγματοποιούνται

συγχρόνως και τα δύο είναι $\frac{1}{6}$. Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιείται:

A) ένα τουλάχιστον από τα A και B B) το πολύ ένα από τα A και B
 Γ) κανένα από τα A και B Δ) μόνο το A
 E) μόνο ένα από τα A και B ΣΤ) Το A ή να μην πραγματοποιείται το B

4.27 Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τέτοια, ώστε $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ και

$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$. Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων.

A) Γ. «Πραγματοποιείται ένα μόνο από τα A και B ».
 B) Δ: «Δεν πραγματοποιείται ούτε το A ούτε το B ».

4.28 Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει ότι $P(A - B) = \frac{1}{4}$ και

$P(B') = \frac{1}{2}$. Να βρείτε την πιθανότητα να μην πραγματοποιείται κανένα από τα A και B

4.29 Αν A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τέτοια, ώστε $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, να αποδειχθεί ότι:

A) $P(A' \cap B) = P(A')P(B)$ B) $P((A \cup B)') = P(A')P(B')$

4.30 Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει ότι η πιθανότητα:

Να μην πραγματοποιείται κανένα από τα A και B είναι $\frac{1}{4}$

Να πραγματοποιείται μόνο ένα από τα A και B είναι $\frac{2}{3}$

Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιείται ένα το πολύ από τα A και B

4.31 Στη Γ τάξη ενός Λυκείου το 40% των μαθητών ασχολείται με το ποδόσφαιρο, το 30% με το μπάσκετ και το 20% με το ποδόσφαιρο και με το μπάσκετ. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή, να βρεθεί η πιθανότητα:

- A) Να μην ασχολείται με το μπάσκετ
 B) Να μην ασχολείται ούτε με το ποδόσφαιρο ούτε με το μπάσκετ
 Γ) Να ασχολείται με το μπάσκετ και να μην ασχολείται με το ποδόσφαιρο
 Δ) Να ασχολείται με ένα το πολύ από τα παραπάνω αθλήματα.

4.32 Από τους 50 μαθητές της Γ τάξης ενός Λυκείου οι 20 ασχολούνται με το ποδόσφαιρο, οι 40 με το μπάσκετ και καθένας ασχολείται με το ποδόσφαιρο ή το μπάσκετ. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή, να βρεθεί η πιθανότητα:

- A) Να μην ασχολείται με το ποδόσφαιρο
 B) Να ασχολείται με το ποδόσφαιρο και με το μπάσκετ
 Γ) Να ασχολείται με το ποδόσφαιρο αλλά όχι με το μπάσκετ

4.33 Στη Γ τάξη ενός Λυκείου υπάρχουν 15 αγόρια και 20 κορίτσια. Τα $\frac{4}{5}$ των αγοριών συμμετείχαν

στην πενήμερη εκδρομή της τάξης τους. Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο. Να βρείτε την πιθανότητα:

- A) Να είναι αγόρι και να μην έχει πάει εκδρομή
 B) Να είναι κορίτσι ή να μην έχει πάει εκδρομή.

4.34 Σε ένα σχολείο το 50% των μαθητών έχει κινητό τηλέφωνο ή δεν έχει Η/Υ και το 25% των μαθητών έχει κινητό και Η/Υ. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Αν η πιθανότητα να έχει κινητό και να μην έχει Η/Υ είναι $\frac{1}{5}$, να βρείτε την πιθανότητα να μην έχει Η/Υ ούτε κινητό.

4.35 Η Β τάξη ενός Λυκείου έχει 40 αγόρια και κορίτσια. Τα $\frac{2}{5}$ των αγοριών και το 20% των κοριτσιών πήγαν την προηγούμενη μέρα σε μια συναυλία. Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο. Αν η πιθανότητα να είναι κορίτσι και να μην έχει πάει στην συναυλία είναι 30%, να βρείτε την πιθανότητα να είναι αγόρι και να μην έχει πάει στην συναυλία.

Μ. Παπαρηγόπουλος
 4 Γ ΛΥΚ

Παραμετρικές

4.36 Αν Ω δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα με $N(\Omega) = 30$ και $N(A) = \frac{x^2 + 4}{2}$, $P(B) = \frac{x}{6}$, με A, B συμπληρωματικά ενδεχόμενα, να βρεθούν τα $P(A)$ και $P(B)$.

4.37 Αν A, B ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = \lambda^2$, $P(B) = 7\lambda^2 - 6\lambda + 2$, να αποδείξετε ότι $\frac{1}{4} \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$

4.38 Ένα μη αμερόληπτο ζάρι είναι έτσι φτιαγμένο ώστε η εμφάνιση κάθε αριθμού (κ) να είναι ανάλογη του (κ) με $\kappa = 1, 2, 3, \dots, 6$. Να βρείτε τη πιθανότητα εμφάνισης κάθε αριθμού.

4.39 Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος και A, B, Γ ενδεχόμενά του ξένα ανά δύο, ώστε $P(A) + P(B) + P(\Gamma) = 1$ όπου $P(A), P(B), P(\Gamma)$ οι πιθανότητες των ενδεχομένων A, B, Γ και υπάρχει $\theta > 0$ τέτοιος ώστε $P(A) + P(B) = \frac{1}{3\theta}$, $P(B) + P(\Gamma) = \frac{5\theta}{4}$ και $P(\Gamma) + P(A) = \theta$, να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A), P(B), P(\Gamma)$ και $P(A \cup B')$.

4.40 Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ ένας δειγματικός χώρος του οποίου οι πιθανότητες P_{ω_i} , $i = 1, 2, 3$ των απλών ενδεχομένων του ικανοποιούν τις σχέσεις $P_{\omega_1} - 2P_{\omega_2} + 7P_{\omega_3} = \theta$ και $6P_{\omega_1} + 3P_{\omega_2} + 4P_{\omega_3} = 5\theta$, όπου θ φυσικός αριθμός. Να βρεθούν:

- A) οι πιθανότητες $P_{\omega_1}, P_{\omega_2}, P_{\omega_3}$,
 B) οι πιθανότητες των ενδεχομένων $A = \{\omega_1, \omega_2\}$, $B = \{\omega_2, \omega_3\}$, $A' \cup B'$ και $A' \cup B$.

4.41 Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και τα ενδεχόμενά του $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ και $B = \{\omega_1, \omega_3\}$. Αν ισχύουν: $P(A) = \frac{1}{\kappa}$, $P(B) = \frac{2\kappa - 1}{2\kappa}$ και $P(\omega_4) = \frac{1 - \kappa}{3\kappa}$, να βρεθεί ο $\kappa \in \mathbb{R}^*$ και οι πιθανότητες $P(\omega_2), P(\omega_4)$.

4.42 Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$ και οι πιθανότητες $P(\kappa) = \left(\frac{1}{3}\right)^\kappa$, $\kappa = 1, 2, \dots, 10$

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες: $P(0)$ και $P(A)$, όπου $A = \{0, 2, 4, \dots, 10\}$

4.43 Έστω n θετικός ακέραιος και ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Δίνονται οι πιθανότητες

$P(\kappa) = \frac{3}{7} \left(\frac{4}{7}\right)^{\kappa-1}$ $\kappa = 1, 2, 3, \dots, n$. Να υπολογίσετε A) την πιθανότητα $P(0)$,

B) την πιθανότητα $P(A)$ όταν $A = \{1, 2\}$,

Γ) την πιθανότητα $P(B)$ του ενδεχομένου $B = \{x \in \Omega \mid x \geq 3\}$

Ανισότητες

4.44 Αν A, B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , να αποδείξετε ότι:

A) $0 \leq P(A)P(A') \leq \frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2} \leq [P(A)]^2 + [P(A')]^2 \leq 1$ Γ) $P(A \cap B) \leq P(A)P(B) + P((A \cup B)')$.

Δ) $P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B) \leq P(A) + P(B) \leq 1 + P(A \cap B)$

E) $2P(A \cap B) \leq P(A) + P(B) \leq 2P(A \cup B)$

4.45 Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{3}$.

A) Να αποδείξετε ότι τα ενδεχόμενα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα

B) Να αποδείξετε ότι: $1 \leq 6P(A \cap B) \leq 3$

4.46 Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , ενός πειράματος τύχης για τα οποία ισχύει

$P(A \cup B) = \frac{33}{35}$, $P(A') + P(B') = \frac{6}{7}$. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων $A \cap B$, $A' \cup B'$

4.47 Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = 0,32$, $P(B) = 0,78$.

A) Να εξετάσετε αν τα A, B είναι ασυμβίβαστα B) Να αποδείξετε ότι: $0,1 \leq P(A \cap B) \leq 0,32$

4.48 Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου με $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$. Δείξτε ότι $\frac{5}{12} \leq P(B) \leq \frac{3}{4}$

4.49 Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) > \frac{1}{2}$, $P(B') < \frac{1}{2}$. Να αποδείξετε ότι τα A, B δεν είναι ασυμβίβαστα

4.50 Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B') = \frac{2}{3}$. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{6} \leq P(A - B) \leq \frac{1}{2}$$

4.51 Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $2P(A) = 3P(B)$ και $2P(A') = 3P(B)$. Να

αποδείξετε ότι: $\frac{1}{6} \leq P(A \cup B) \leq \frac{5}{6}$

4.52 Έστω A, B, Γ ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τέτοια, ώστε $\Gamma \subseteq A \cap B$. Να αποδειχθεί ότι

A) $3P(\Gamma) \leq 2P(A \cap B) + P(A \cup B) \leq 3P(A \cup B)$ B) $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B \cap \Gamma')$

4.53 Αν A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και ισχύουν $P(A') \leq \alpha$ και $P(B) \leq \beta$, όπου $0 < \alpha < \beta < 1$, να αποδειχθεί ότι $\beta - \alpha \leq P(A \cap B) - P(A' \cap B')$.

4.54 Αν A, B συμπληρωματικά ενδεχόμενα και $25P^2(A) + 8 \leq 29P(A) - P(B)$, να βρεθούν οι $P(A)$ και $P(B)$.

Γενικές ασκήσεις στις πιθανότητες

4.55 Ένα κουτί περιέχει 3 άσπρες και 2 κόκκινες σφαίρες. Βγάζουμε διαδοχικά δύο σφαίρες. Να βρεθεί η πιθανότητα

A) να είναι δύο κόκκινες B) να είναι η πρώτη άσπρη και η δεύτερη κόκκινη Γ) να είναι και οι δύο άσπρες

4.56 Σε μια έρευνα που έγινε μεταξύ των μαθητών μιας τάξης έδειξε ότι Το 50% θα πάει το καλοκαίρι διακοπές σε «νησί», Το 50% θα πάει το καλοκαίρι διακοπές σε «βουνό» Το 10% θα πάει διακοπές το καλοκαίρι σε «νησί» και σε «βουνό» ενώ τρεις μαθητές δεν θα πάνε πουθενά. Πόσα άτομα έχει η τάξη;

4.57 Μέσα σε ένα κουτί υπάρχουν 5 μπάλες από τις οποίες οι 3 είναι άσπρες και οι 2 κόκκινες. Επιλέγουμε την μία μπάλα μετά από την άλλη μέχρι να μείνουν στο κουτί μπάλες του ίδιου χρώματος. Να βρείτε :

A) Τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

A: "Οι μπάλες που επιλέξαμε ήταν του ίδιου χρώματος."

B: «Στο κουτί έμεινε μόνο μία μπάλα.»

Γ: "Από τις μπάλες που επιλέξαμε οι κόκκινες ήταν περισσότερες από τις άσπρες."

Δ: "Από τις μπάλες που επιλέξαμε οι κόκκινες ήταν περισσότερες από τις άσπρες."

B) Τις πιθανότητες των ενδεχομένων : $A \cup B, B \cap \Gamma, \Gamma \cup A', (A \cap B)'$.

4.58 Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Αν οι πιθανότητες $P(A), P(A \cap B), P(A \cup B)$ είναι ρίζες της εξίσωσης: $(2 - 3x)(2x - 1)(3x - 1) = 0$, να βρείτε την πιθανότητα $P(B)$

4.59 Σε ένα εκτροφείο αλόγων υπάρχουν $4n$ θηλυκά και $n^2 + 2n + 4$ αρσενικά άλογα με $n \in \mathbb{N}^*$. Επιλέγουμε στην τύχη ένα άλογο. Να βρείτε πόσα θηλυκά και πόσα αρσενικά άλογα υπάρχουν στο εκτροφείο έτσι ώστε η πιθανότητα το άλογο που επιλέξαμε να είναι θηλυκό, να είναι η μέγιστη. Ποιά η πιθανότητα αυτή;

4.60 Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A \cup B) = 1$ και $P(A) + P(B) \leq 1$. Να δειχθεί ότι $P(A \cap B) = \emptyset$ και ότι ισχύει $P(A') = P(B)$.

4.61 Έστω A, B ενδεχόμενα ενός πεπερασμένου δειγματικού χώρου Ω , ενός πειράματος τύχης με μη μηδενικές πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων. Αν $P(A) = P(A \cup B')$ και $P(B) = P(A' \cap B)$, να αποδείξετε ότι τα ενδεχόμενα A και B είναι συμπληρωματικά.

4.62 Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω ώστε: $|2P(A) + 1| - |P(A) - 3| = 4\lambda$ και

$P(B) = 1 - \ln(k + 1)$ όπου $k \in \mathbb{N}^*, \lambda \in \mathbb{N}$. Να αποδείξετε ότι $k = 1, \lambda = 0$ και ότι $\ln \frac{e}{2} \leq P(A \cup B) \leq \ln \frac{e \cdot \sqrt[3]{e^2}}{2}$

4.63 Έστω A, B ενδεχόμενα ενός πεπερασμένου δειγματικού χώρου Ω , ενός πειράματος τύχης με μη μηδενικές πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων. Αν $P(B) = P(A' \cap B)$ και $P(B') = P(A \cap B')$. Να αποδείξετε ότι τα ενδεχόμενα A και B είναι συμπληρωματικά.

4.64 Έστω A, B ενδεχόμενα ενός πεπερασμένου δειγματικού χώρου Ω , ενός πειράματος τύχης. Να αποδείξετε ότι αν $P(A \cup B) = P(A \cap B)$ τότε $P(A) = P(B)$

5

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5.01 Η ανάλυση των δεδομένων που προέκυψαν από στατιστική έρευνα η οποία είχε ως αντικείμενο τον αριθμό των παιδιών των υπαλλήλων μια εταιρείας έδειξε ότι:

Δεν υπήρχαν υπάλληλοι με πέντε ή περισσότερα παιδιά

Η μέση τιμή των παιδιών που είχαν οι υπάλληλοι της εταιρείας υπολογίστηκε ότι ήταν 1,65

Το ποσοστό των υπαλλήλων που είχαν ως και δύο παιδιά ήταν 80%

Το ποσοστό των υπαλλήλων με ένα παιδί ήταν ίσο με αυτό των υπαλλήλων που δεν είχαν κανένα παιδί

Οι υπάλληλοι που είχαν τρία παιδιά ήταν τριπλάσιοι από αυτούς που είχαν τέσσερα παιδιά

Να συμπληρωθεί ο πίνακας σχετικών και σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων.

5.02 Μια βιομηχανία παράγει τα προϊόντα Α, Β, Γ, Δ σε ποσοστό 10%, 20%, 30%, 40% επί του συνόλου της παραγωγής της με αντίστοιχο κόστος 14, 12, 10, 8 € ανά μονάδα προϊόντος.

A) Να βρείτε το μέσο κόστος ανά μονάδα προϊόντος της παραγωγής.

B) Να βρείτε αν υπάρχουν τιμές του α , για τις οποίες, αν το κόστος κάθε προϊόντος αυξηθεί κατά α το δείγμα της παραγωγής γίνεται ομοιογενές.

5.03 A) Να αποδείξετε ότι $s^2 = \sum_{i=1}^k x_i^2 f_i - \bar{x}^2$.

B) Ένα σχολείο έχει δύο τμήματα στην Γ τάξη τα Α και Β με 10 και 5 μαθητές αντίστοιχα. Ο μέσος όρος των βαθμών στο Α τμήμα είναι 9 ενώ ο μέσος όρος των βαθμών και στα δύο τμήματα είναι 10.

α) Να βρείτε το μέσο όρο των βαθμών του τμήματος Β

β) Αν φύγουν δύο μαθητές από το τμήμα Α με βαθμό 11 και ο ένας πάει στο τμήμα Β, να βρείτε τους νέους μέσους των βαθμών των τμημάτων.

γ) Αν για τα τμήματα Α και Β ισχύουν αντίστοιχα ότι $\sum_{i=1}^k x_i^2 f_i = 85$, $0 \leq k \leq 10$ και $\sum_{i=1}^{\lambda} x_i^2 f_i = 148$,

$0 \leq \lambda \leq 5$, να βρείτε ποιο από τα δύο τμήματα έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια βαθμών.

5.04 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (t_1 - x)^3 + (t_2 - x)^3 + \dots + (t_v - x)^3$, $x \in \mathbb{R}$ όπου t_1, t_2, \dots, t_v οι παρατηρήσεις ενός δείγματος με τυπική απόκλιση $s > 0$ και μέση τιμή \bar{x} .

A) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = -3v(x^2 - 2\bar{x} \cdot x + s^2 + (\bar{x})^2)$

B) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνήσια φθίνουσα στο \mathbb{R}

Γ) Να βρείτε το σημείο x στο οποίο η f έχει το μέγιστο ρυθμό μεταβολής.

5.05 Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + \alpha x^2 + \alpha^2 x + \alpha^3}{x + \alpha}, & x \neq -\alpha \\ \beta, & x = -\alpha \end{cases}$ με $\alpha < 0$, $\beta > 1$ και η μεταβλητή x με

τιμές τις $\alpha, 0, \gamma, \beta, 3$. Αν η f είναι συνεχής στο $-\alpha$ και η μεταβλητή X έχει μέση τιμή και διάμεσο ίσες με 1, να βρεθούν οι αριθμοί α, β, γ και ο συντελεστής μεταβολής των παρατηρήσεων της μεταβλητής x .

5.06 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\bar{x}}{2} \cdot x^2 - s \cdot x + 1$ όπου \bar{x} και s η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση αντίστοιχα ενός δείγματος με $\bar{x} > 0$. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το $A(1,1)$ τότε:

- A) Να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής CV του δείγματος και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.
 B) Να βρείτε τα ακρότατα της f στο \mathbb{R} .
 Γ) Αν είναι γνωστό ότι $\lim_{x \rightarrow s} f(x) = 1$ να υπολογίσετε τη μέση τιμή \bar{x} και την τυπική απόκλιση s του δείγματος.
 Δ) Να βρείτε το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που περιέχονται στο διάστημα $(1,5)$ εάν υποθέσουμε ότι η καμπύλη κατανομής του δείγματος είναι περίπου κανονική καθώς και το εύρος R των τιμών του δείγματος.

5.07 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 10 \cdot s \cdot x^2 + \bar{x} \cdot x + 11$, $x \in \mathbb{R}$ όπου \bar{x} η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων ενός δείγματος μεγέθους n (με $\bar{x} \neq 0$, $s \neq 0$). Αν η εφαπτομένη της καμπύλης της f στο σημείο $B(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 1821$, τότε:

- A. Να δείξετε ότι το δείγμα είναι ομοιογενές και ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο.
 B. Αν η συνάρτηση f έχει ελάχιστη τιμή ίση με 1 τότε:
 α. Να βρείτε την μέση τιμή και την τυπική απόκλιση.
 β. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο B .

5.08 Δίνονται οι αριθμοί 13, 19, 21, 27. Συμπληρώνουμε το σύνολο των αριθμών με k παρατηρήσεις με τιμή 20.

- A) Αποδείξτε ότι η μέση τιμή \bar{x}' των $k+4$ αριθμών είναι ίση με τη μέση τιμή των τεσσάρων αριθμών

B) Να αποδείξετε ότι
$$\sum_{i=1}^{k+4} (t_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^4 (t_i - \bar{x})^2$$

- Γ) Αν s^2 είναι η διακύμανση των τεσσάρων αριθμών και s'^2 είναι η διακύμανση των $k+4$ αριθμών, να βρείτε την s'^2 και να αποδείξετε ότι $s'^2 = \frac{4 \cdot s^2}{k+4}$

- Δ) Να αποδείξετε ότι το σύνολο 13, 19, 21, 27, δεν είναι ομοιογενές και να βρείτε πόσες παρατηρήσεις με τιμή 20 χρειάζεται να προσθέσουμε σε αυτό, ώστε να γίνει ομοιογενές με συντελεστή μεταβολής 10%.

5.09 Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = \frac{5}{2}x^2 + \ln 2$ και τα σημεία $M_1(x_1, f(x_1)), M_2(x_2, f(x_2)), \dots,$

$M_v(x_v, f(x_v))$ της γραφικής της παράστασης, με $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_v$. Αν η μέση τιμή των τετμημένων των M_1, M_2, \dots, M_v είναι 401.

- A) Βρείτε τη μέση τιμή των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f στα σημεία M_1, M_2, \dots, M_v
 B) Αν $(x_1 - 401)^2 + (x_2 - 401)^2 + \dots + (x_v - 401)^2 = 2500v$, να βρείτε την τυπική απόκλιση των τετμημένων των σημείων M_1, M_2, \dots, M_v .
 Γ) Αν $x_v^2 - x_1^2 = 802$ να βρείτε το εύρος του δείγματος των τεταγμένων των σημείων M_1, M_2, \dots, M_v

6

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΕΣ: ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΜΕ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

6.01 Ρίχνουμε δύο ζάρια και σημειώνουμε τις ενδείξεις τους σε ένα διατεταγμένο ζεύγος. Αν Ω ο δειγματικός χώρος αυτού του πειράματος τύχης, θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

$$X = \{(x, y) \in \Omega / \text{το σημείο } (x, y) \text{ ανήκει στην ευθεία } y = 2x - 1\}$$

$$Y = \{(x, y) \in \Omega / \text{το σημείο } (x, y) \text{ ανήκει στην γραφική παράσταση της } y = x^2\}$$

Να βρείτε τις πιθανότητες: $P(X)$, $P(Y)$, $P(X - Y)$

6.02 Αν $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ είναι ο δ.χ. ενός πειράματος τύχης με $P(2) = 2P(1)$ και $P(k) = \frac{1}{k}$ για $k > 2$, τότε

A) Να βρείτε τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω

B) Αν $E = \{\lambda \in \Omega / \lambda \text{ θέση τοπικού ακροτάτου της } f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2\}$, να βρεθεί η $P(E)$.

6.03 Έστω ο δειγματικός χώρος Ω και δύο ενδεχόμενά του A, B , με $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$. Θεωρούμε τις παρατηρήσεις $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$.

A) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσό τους.

B) Να αποδείξετε ότι η διακύμανσή τους είναι $s^2 = \frac{1}{2}[P(A \cap B)]^2 - \frac{1}{2}P(A \cap B) + \frac{1}{8}$

Γ) Να αποδείξετε ότι η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο A είναι ίση με $\sqrt{2}$

6.04 Σε κάποια σχολική τάξη πήραμε ένα δείγμα μαθητών και το εξετάσαμε ως προς το βάρος τους. Διαπιστώσαμε ότι το βάρος τους κυμαίνεται από 45 kg έως 75 kg και η κατανομή των βαρών τους είναι περίπου κανονική.

A. Να βρείτε τη μέση τιμή, τη διάμεσο, το εύρος και τη διασπορά των βαρών

Γ. Να εξετάσετε εάν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Δ. Αν το άθροισμα όλων των βαρών είναι 1800kg να βρείτε το μέγεθος του δείγματος.

E. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή, ποια η πιθανότητα το βάρος του να είναι μεταξύ 50kg και 60kg ;

6.05 Σε μια βιοτεχνία έχουμε 200 ρούχα άσπρα και μαύρα από τα οποία μερικά είναι παντελόνια και τα άλλα είναι σακάκια και δεν υπάρχει άλλο είδος ρούχου. Αν υπάρχουν 50 άσπρα σακάκια, η πιθανότητα να επιλέξουμε στην τύχη σακάκι είναι 40% και η γωνία του κυκλικού διαγράμματος που αντιστοιχεί στα μαύρα ρούχα είναι 90° , τότε:

A) Να κάνετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων για τη μεταβλητή X : «είδος ρούχου ως προς το χρώμα και την κατηγορία» και να παραστήσετε γραφικά

B) Να βρείτε τις πιθανότητες να αγοράσει:

α) σακάκι ή μαύρο ρούχο.

β) σακάκι και άσπρο ρούχο.

γ) ή μόνο παντελόνι ή μόνο άσπρο ρούχο.

Μ. Παπαρηγοράκης
4 Γ ΛΥΚ

6.06 Έστω $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ένας δειγματικός χώρος που αποτελείται από ισοπίθανα ενδεχόμενα. Εκλέγουμε ένα απλό ενδεχόμενο $\lambda \in \Omega$. Αν $f(x) = x^3 - 2\lambda x^2 + \lambda^2 x + 1 + 2\lambda$, να βρείτε τη πιθανότητα η γραφική παράσταση της να έχει στο σημείο της με τετμημένη, εφαπτόμενη παράλληλη στον άξονα $x'x$.

6.07 Θεωρούμε ένα δειγματικό χώρο Ω και τις πιθανότητες P_1, P_2 . Ορίζουμε μια συνάρτηση f τέτοια ώστε: $f(A) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} P_1(A) + \frac{\beta}{\alpha + \beta} P_2(A)$ για κάθε $A \subseteq \Omega$ με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

- A) $0 \leq f(A) \leq 1$ για κάθε $A \subseteq \Omega$
 B) $f(\Omega) = 1$
 Γ) $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$ όταν $A \cap B = \emptyset$.

6.08 A) Να εξετάσετε τη συνάρτηση $f(x) = e^x - x$, $x \in \mathbb{R}$ ως προς τη μονοτονία.

B) Έστω τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω . Να αποδείξετε ότι:

- α) $f(P(A \cup B)) \leq e - 1$
 β) Αν $A \subseteq B$ τότε $P(B) + e^{P(A)} \leq P(A) + e^{P(B)}$
 γ) Αν $P(A') = \frac{1}{2}$ τότε $1 + 2f(P(A - B)) \leq 2\sqrt{e}$

6.09 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$

A) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

B) Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης, με μη μηδενικές πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων του και A, B δύο ενδεχόμενά του για τα οποία ισχύει η σχέση $f(P(A)) = P(B)$. Να αποδείξετε ότι το B είναι βέβαιο ενδεχόμενο και το A αδύνατο ενδεχόμενο.

6.10 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - x$, $x > 0$ και τα ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω .

A. Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία.

B. Αν $A \neq \emptyset$ και $A \subseteq B$ να αποδείξετε ότι: $\ln \frac{P(A)}{P(B)} \leq P(A) - P(B)$

Γ. Αν η εφαπτομένη στη καμπύλη της f στο $x_0 = P(A)$ είναι παράλληλη στη διχοτόμο της γωνίας των θετικών ημιαξόνων τότε:

- α) να βρείτε την πιθανότητα $P(A)$.
 β) να αποδείξετε ότι $f(P(A \cap B)) \leq -\frac{\ln(4e)}{2}$ για $A \cap B \neq \emptyset$.

6.11 Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και η συνάρτηση

$$f(x) = 4x^2 P(A \cup B) - \ln^2 x + P(A \cap B), \text{ με } x > 0$$

A) Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της f

B) Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f' στο σημείο $x_0 = 1$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ να βρείτε την πιθανότητα $P(B - A)$

6.12 Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου και η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - xP(A') - P(A)}{x-1} & \text{αν } x \neq 1 \\ \frac{3}{2} - P(B) & \text{αν } x = 1 \end{cases} \quad \text{η οποία είναι συνεχής στο } x_0 = 1.$$

- A) Να αποδείξετε ότι $P(A) + P(B) = \frac{1}{2}$
 B) Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των αριθμών: $P(A), P(B), P(A \cup B), P(A \cap B)$

6.13 Έστω A ένα ενδεχόμενο του δ.χ. Ω και $P(A), P(A'), P(\emptyset), P(\Omega)$ οι παρατηρήσεις ενός δείγματος.

- A. Να βρείτε την μέση τιμή και τη διάμεσο των παρατηρήσεων.
 B. Να αποδείξετε ότι: $s^2 = \frac{1}{8}(2P(A) - 1)^2 + \frac{1}{8}$
 Γ. Αν $P(A) = \frac{4 - \sqrt{2}}{8}$ να αποδείξετε ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

6.14 Έστω τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω με $A, B \neq \emptyset$ και η συνάρτηση

$$f(x) = xP(A) - \frac{P(B)}{x-1}$$

- A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
 B) Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$
 Γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$
 Δ) Αν ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x για $x = 2$ είναι 1, να αποδείξετε ότι $P(A) = P(B')$

6.15 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x}{x-2}$ με $x \in \mathbb{R} - \{2\}$.

- A) Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(3, f(3))$ είναι η ευθεία $\varepsilon: y = -7x + 12$, να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$.
 B) Έστω $\Omega = \{-\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2}, \frac{3\alpha - \beta}{3}, \frac{8\alpha - \beta}{2}\}$, δειγματικός χώρος που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, όπου τα α, β έχουν τις τιμές που προκύπτουν από το ερώτημα α). Θεωρούμε την συνάρτηση

$$g(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}(\lambda - 1)x^3 + 2x^2 + 2001 \quad \text{με } x \in \mathbb{R}, \lambda \in \Omega, \text{ και το ενδεχόμενο}$$

$E = \{\lambda \in \Omega / \text{η συνάρτηση } g' \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}\}$. Να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου E .

6.16 Θεωρούμε τα ασυμβίβαστα ανά δύο ενδεχόμενα A, B και Γ , διάφορα του κενού, του ίδιου δειγματικού χώρου Ω , ώστε $P(A) + P(B) + P(\Gamma) = 1$. Οι πιθανότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων A, B και Γ , ικανοποιούν τις σχέσεις $P(A)(P(B))^2 = P(B)(P(A))^2$ και $P(A \cup B) = P(\Gamma) - 0,2$.

- A) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων A, B και Γ .
 B) Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 20P(B)x + 3}{x - 5P(A)}$.

Μ. Παπαρηγόπουλος
4 Γ ΛΥΚ

6.17 Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} τέτοια ώστε $f(x \cdot P(A)) + f(x \cdot P(B)) = x \cdot P(A \cup B) + P(A - B)$ με A, B μη κενά ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x + 1$ τότε:

- A) Να αποδείξετε ότι $P(A \cap B) = 0$
- B) Αν το σημείο $K\left(0, \frac{1}{4}\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f , να αποδείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{2}$
- Γ) Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x \cdot P(A)) + f(x \cdot P(B))}{x \cdot P(A)} = \frac{8}{3}$, να αποδείξετε ότι $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ και $P(B) = \frac{1}{3}$

6.18 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}(x-2)^3 - x$,

- A) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- B) Αν οι τετμημένες των σημείων $A_1(x_1, f(x_1)), A_2(x_2, f(x_2)), \dots, A_{10}(x_{10}, f(x_{10}))$ έχουν μέση τιμή $\bar{x} = 2$ και τοπική απόκλιση $s = 3$ να βρείτε τη μέση τιμή των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτόμενων στην καμπύλη της f στα σημεία A_1, A_2, \dots, A_{10}
- Γ) Αν A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου με $P(A) = \frac{1}{2}$ να αποδείξετε ότι $8f(P(A - B)) + 13 \leq 0$.

6.19 Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και η συνάρτηση

$f(x) = \frac{x^3}{3}P(A) + \frac{x^2}{2}P(B) - xP(A \cup B) + 1$. Αν η εφαπτομένη στη καμπύλη της f στο $x_0 = 1$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

- A) Να αποδείξετε ότι $P(A \cap B) = 0$.
- B) Να αποδείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - x} = 2P(A) + P(B)$

6.20 Έστω το ενδεχόμενο A και A' το αντίθετο του, με $P(A) > P(A')$. Δίνεται ακόμα η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\lambda}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{3}{16} \cdot x + 2, \quad \text{με } \lambda \neq 0$$

- A) Να αποδείξετε ότι $P(A) > \frac{1}{2}$ και $P(A') < \frac{1}{2}$.
- B) Να βρείτε την $f'(x)$ και την f .
- Γ) Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατα για $x_1 = P(A)$ και $x_2 = P(A')$ να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$.
- Δ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα να βρείτε το είδος της μονοτονίας της παραγώγου της συνάρτησης f καθώς επίσης και τα ακρότατα της παραγώγου.
- Ε) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(A')$.

6.21 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \alpha - \beta & \text{αν } x = 1 \\ 2\alpha x^3 - 3\beta x^2 + x - 1 & \text{αν } x \neq 1 \end{cases}$ όπου α, β είναι τα αποτελέσματα

δύο διαδοχικών ριψεων ενός αμερόληπτου ζαριού, αντίστοιχα. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου, η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$

6.22 Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύουν $P(A) = 1 - x$,

$$P(B) = \frac{x}{x+1}, P(A \cap B) = \frac{x}{x+1}, x \in (0,1).$$

A) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων $A - B, B - A, (A \cup B)'$.

B) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της $P(A - B)$ όταν $x = \frac{1}{2}$

Γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της $P(A \cup B)$.

6.23 Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = 4x^3 - \frac{7}{2}x^2 + x + 2001$ και $g(x) = 3x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 11x + 2009$ και ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος τύχης.

A) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων των C_f, C_g στο κοινό τους σημείο.

B) Αν τα A, B είναι ενδεχόμενα του Ω με $P(A) < P(B)$, με πιθανότητες τις θέσεις των τοπικών ακροτάτων της f και $P(A \cup B) \geq \frac{7}{12}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $P(A \cap B) = 0$.

β) Να βρείτε την πιθανότητα να μην πραγματοποιείται κανένα από τα A, B .

γ) Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα A, B .

6.24 Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2, x \in \mathbb{R}$

A) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ), της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$

B) Έστω το σημείο $B(10, 0)$. Να βρείτε το σημείο M της εφαπτομένης (ϵ) το οποίο απέχει ελάχιστη απόσταση από το B

Γ) Έστω $K_1(x_1, y_1), K_2(x_2, y_2), \dots, K_n(x_n, y_n)$ σημεία της εφαπτομένης (ϵ). Αν η μέση τιμή \bar{y} των τεταγμένων των σημείων είναι 11, να βρείτε τη μέση τιμή \bar{x} των τεταγμένων τους.

Δ) Έστω η ευθεία (η) παράλληλη στην εφαπτομένη (ϵ) η οποία διέρχεται από το σημείο $(0, -k^2 - 4)$, όπου k είναι στοιχείο του δειγματικού χώρου $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, 20\}$ ο οποίος αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου Δ : η ευθεία (η) να διέρχεται από το σημείο $B(10, 0)$.

6.25 Έστω X μια ποσοτική μεταβλητή ως προς την οποία εξετάζουμε ένα δείγμα μεγέθους n και x_1, x_2, \dots, x_n οι παρατηρήσεις με μέση τιμή \bar{x} και τυπική απόκλιση s . Θεωρούμε τη συνάρτηση

$g(x) = 4x^2 - (\bar{x})^3 \cdot x + 10 \cdot s, x \in \mathbb{R}$. Αν η $g(x)$ παρουσιάζει για $x = 1$ ελάχιστο με ελάχιστη τιμή $g(1) = -1$ τότε:

A) Να βρείτε τη μέση τιμή \bar{x} και την τυπική απόκλιση s .

B) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Γ) Επιλέγουμε στην τύχη μια παρατήρηση από τις n παρατηρήσεις. Ποια η πιθανότητα να βρίσκεται μεταξύ 1,7 και 2,3 αν η κατανομή θεωρηθεί κανονική;

Δ) Αυξάνουμε κάθε παρατήρηση κατά την ίδια ποσότητα $\lambda > 0$. Να βρείτε την μικρότερη τιμή του λ ώστε το δείγμα να είναι ομοιογενές.

Μ. Παπαγιαννοπούλης
4 Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

6.26 Στο σχήμα είναι το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων που αναφέρεται σε ομαδοποίηση των βαθμών σε κλάσεις ίσου πλάτους c .

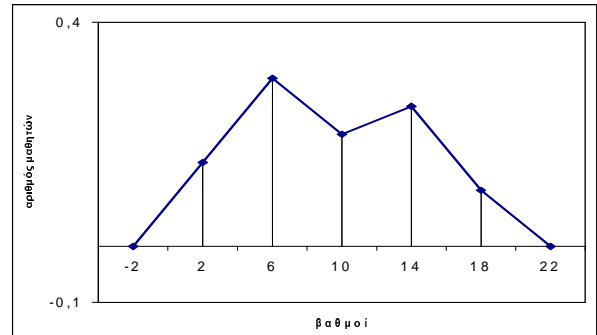
- A) Να βρείτε το c
 B) Να κατασκευάσετε:
 α) το ιστόγραμμα συχνοτήτων
 β) το κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων

$f_i\%$

γ) Να βρείτε τη διάμεσο

δ) Αν δοθεί έπαινος στο 2,5% των μαθητών με την καλύτερη βαθμολογία, τι βαθμό πρέπει να έχει ένας μαθητής για να πάρει έπαινο;

ε) Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή, ποια είναι η πιθανότητα να έχει βαθμό από 10 έως 17;



6.27 Έστω $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ένας δειγματικός χώρος που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Εκλέγουμε ένα απλό ενδεχόμενο $\lambda \in \Omega$. Αν $f(x) = x^3 - 2\lambda x^2 + 6x + \lambda$, να βρείτε την πιθανότητα η f να μην έχει τοπικά ακρότατα.

6.28 A) Να αποδείξετε ότι $s^2 = \sum_{i=1}^v t_i^2 - \bar{x}^2$.

B) Οι μαθητές της Γ τάξης ξόδεψαν ετησίως κατά μέσο όρο 100 euro αγοράζοντας διάφορα είδη από το κυλικείο. Δίνεται ότι το δείγμα των ποσών που ξόδεψε κάθε μαθητής είναι ομοιογενές.

A) να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή της τυπικής απόκλισης

B) Για $s = 10$ i) αν t_1, t_2, \dots, t_v είναι τα ποσά του ξόδεψαν οι v μαθητές του σχολείου και ισχύει ότι $t_1^2, t_2^2, \dots, t_v^2 = 404000$ να βρείτε πόσους μαθητές έχει η τάξη.

ii) Έστω ότι τα ποσά που ξόδεψαν οι μαθητές της Γ τάξης ακολουθούν περίπου την κανο-νική κατανομή. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή, να βρείτε την πιθανότητα αυτός να ξόδεψε τουλάχιστον 120 euro

6.29 Τις ελάχιστες θερμοκρασίες για 200 συνεχείς ημέρες τις ομαδοποιήσαμε σε πέντε κλάσεις πλάτους c όπως φαίνεται στο διπλανό πίνακα.

Έστω ότι η διάμεσος είναι 13 και η μέση τιμή 11.

A) να βρείτε το πλάτος c των κλάσεων

B) Να συμπληρώσετε τον πίνακα

Γ) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές

Δ) Επιλέγουμε τυχαία μια ημέρα. Να βρείτε την πιθανότητα να είχε ελάχιστη θερμοκρασία μικρότερη από 15°C

$[,)$	x_i	v_i	$f_i\%$	$F_i\%$
	6	30		
				40
12-				
Σύνολο				