ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
83ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
11 Νοεμβρίου 2022

Ενδεικτικές λύσεις

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1,\ \frac{y}{x^2}+\frac{x}{y^2}=1.$$

Λύση

Για $x, y \neq 0$ θέτουμε $\frac{1}{x}=\varphi \neq 0, \frac{1}{y}=\omega \neq 0,$ οπότε το σύστημα παίρνει τη μορφή:

$$\left\{\begin{array}{c}\varphi+\omega=1\\ \frac{\varphi^2}{\omega}+\frac{\omega^2}{\varphi}=1\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\varphi+\omega=1\\ \varphi^3+\omega^3=\varphi\omega\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\varphi=1-\omega\\ (1-\omega)^3+\omega^3=(1-\omega)\omega\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\varphi=1-\omega\\ 1-3\omega+3\omega^2-\omega^3+\omega^3=\omega-\omega^2\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\varphi=1-\omega\\ 1-4\omega+4\omega^2=0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\varphi=1-\omega\\ (1-2\omega)^2=0\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\varphi=1-\omega\\ 1-2\omega=0\end{array}\right\} \Leftrightarrow (\varphi,\omega)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow (x,y)=(2,2).$$

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να διαιρέσουμε κατά μέλη τις εξισώσεις του συστήματος $\left\{\begin{array}{c}\varphi+\omega=1\\ \varphi^3+\omega^3=\varphi\omega\end{array}\right\}$, οπότε θα προέκυπτε η εξίσωση:

$$\frac{\varphi^3+\omega^3}{\varphi+\omega}=\varphi\omega \Leftrightarrow \frac{(\varphi+\omega)(\varphi^2-\varphi\omega+\omega^2)}{\varphi+\omega}=\varphi\omega \Leftrightarrow \varphi^2-\varphi\omega+\omega^2=\varphi\omega$$

$$\Leftrightarrow (\varphi-\omega)^2=0 \Leftrightarrow \varphi=\omega \text{ κλπ.}$$

2ος τρόπος

Κάνοντας απαλοιφή παρονομαστών, για $xy \neq 0$, παίρνουμε:

$$y+x=xy \quad \text{και} \quad y^3+x^3=x^2y^2.$$

Έτσι,

$$y^3+x^3=xy(y+x)=xy^2+x^2y,$$

η οποία γράφεται ισοδύναμα

$$y^2(y-x)+x^2(x-y)=0 \Leftrightarrow (y-x)^2(y+x)=0.$$

Αφού $y+x=xy\neq 0$, παίρνουμε $y=x$, και εύκολα από την πρώτη εξίσωση βλέπουμε ότι $x=y=2$.

Πρόβλημα 2

Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και Γ ένα σημείο στο εσωτερικό του, έτσι ώστε $\text{ΑΓ} > \text{ΑΒ}/2$. Σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς την ευθεία ΑΒ θεωρούμε τα σημεία Δ, Ε έτσι ώστε τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΑΒΕ να είναι ισοσκελή, με $\text{ΔΑ}=\text{ΔΓ}>\text{ΕΑ}=\text{ΕΒ}$ και $\text{ΔΑ}\parallel\text{ΕΓ}$. Η παράλληλη από το σημείο Δ προς την ευθεία ΕΑ τέμνει την ευθεία ΕΓ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\text{ΓΔ}=\text{ΕΖ}$ και $\text{ΔΖ}=\text{ΒΕ}$

(β) $\text{ΒΖ}\parallel\text{ΔΓ}$.

Λύση

(α) Το τετράπλευρο ΕΑΔΖ είναι παραλληλόγραμμο, αφού έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες. Επομένως, έχουμε:

$$\text{ΔΓ}=\text{ΔΑ}=\text{ΕΖ} \qquad (1).$$
$$\text{ΕΒ}=\text{ΕΑ}=\text{ΔΖ} \qquad (2)$$

(β) Σύμφωνα με το ερώτημα (α), τα τρίγωνα ΓΔΖ και ΖΕΒ, έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία. Θα αποδείξουμε ότι έχουν και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές ίσες, δηλαδή $\text{Ζ}\widehat{\text{Δ}}\text{Γ}=\text{Β}\widehat{\text{Ε}}\text{Ζ}$. Έχουμε:

$$\text{Ζ}\widehat{\text{Δ}}\text{Γ}=\text{Ζ}\widehat{\text{Δ}}\text{Α}-\text{Γ}\widehat{\text{Δ}}\text{Α}=\text{Α}\widehat{\text{Ε}}\text{Ζ}-\text{Γ}\widehat{\text{Δ}}\text{Α}$$

και

$$\text{Β}\widehat{\text{Ε}}\text{Ζ}=\text{Β}\widehat{\text{Ε}}\text{Α}-\text{Ζ}\widehat{\text{Ε}}\text{Α}.$$

Επομένως, για να αποδείξουμε ότι

$$\text{Ζ}\widehat{\text{Δ}}\text{Γ}=\text{Β}\widehat{\text{Ε}}\text{Ζ},$$

αρκεί να αποδείξουμε ότι :

$$\text{Β}\widehat{\text{Ε}}\text{Α}+\text{Γ}\widehat{\text{Δ}}\text{Α}=2\cdot\text{Ζ}\widehat{\text{Ε}}\text{Α} \qquad (3)$$

Από τα ισοσκελή ΒΕΑ, ΓΔΑ, παίρνουμε ότι

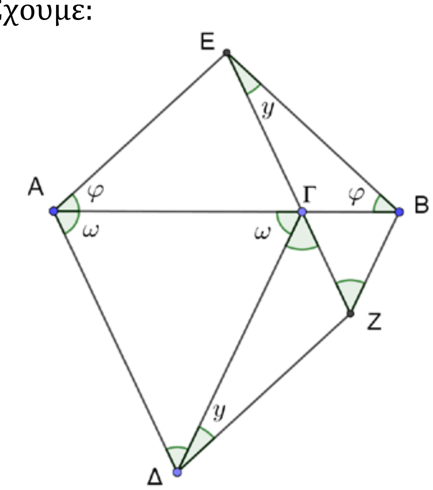
$$\text{Β}\widehat{\text{Ε}}\text{Α}=180^\circ-2\cdot\text{Ε}\widehat{\text{Α}}\text{Β}$$

και $$\text{Γ}\widehat{\text{Δ}}\text{Α}=180^\circ-2\cdot\text{Γ}\widehat{\text{Α}}\text{Δ}.$$

Επομένως

$$\text{Β}\widehat{\text{Ε}}\text{Α}+\text{Γ}\widehat{\text{Δ}}\text{Α}=2\cdot\left(180^\circ-\text{Γ}\widehat{\text{Α}}\text{Δ}-\text{Ε}\widehat{\text{Α}}\text{Β}\right)$$
$$=2\cdot\left(180^\circ-\text{Ε}\widehat{\text{Α}}\text{Δ}\right)=2\cdot\text{Α}\widehat{\text{Δ}}\text{Ζ}=2\cdot\text{Ζ}\widehat{\text{Ε}}\text{Α},$$

που είναι το ζητούμενο.



Σχήμα 1

Επομένως, τα τρίγωνα ΓΔΖ και ΖΕΒ είναι ίσα, οπότε θα έχουν και $\text{Δ}\widehat{\text{Γ}}\text{Ζ}=\text{Β}\widehat{\text{Ζ}}\text{Ε}$, δηλαδή οι ευθείες ΓΔ και ΒΖ τεμνόμενες από την ευθεία ΓΖ σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες τους ίσες. Άρα είναι $\text{ΒΖ}\parallel\text{ΔΓ}$.

Πρόβλημα 3

Έστω $n>2$ ένας περιττός ακέραιος. Έστω k ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος από την τετραγωνική ρίζα του $n+2$. Να αποδείξετε ότι, αν ο αριθμός $\frac{n}{k}$ είναι ακέραιος, τότε ο n είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

Λύση

Αφού ο k είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος από την τετραγωνική ρίζα του $n+2$, θα έχουμε ότι $k < \sqrt{n+2} \le k+1$, οπότε

$$k^2 < n+2 \le k^2 + 2k + 1.$$

Διαιρώντας με k, παίρνουμε $k < \frac{n}{k} + \frac{2}{k} \le k + 2 + \frac{1}{k}$, δηλαδή

$$k - \frac{2}{k} < \frac{n}{k} \le k + 2 - \frac{1}{k}.$$

Αφού ο $\frac{n}{k}$ είναι ακέραιος, από την παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{n}{k} \in \{k, \;\; k+1\}.$$

Όμως, αν $\frac{n}{k} = k+1$, τότε $n = k(k+1)$, οπότε ο n διαιρείται από το 2 (αφού κάποιος από τους $k, k+1$ διαιρείται από το 2). Αυτό είναι άτοπο, αφού από την υπόθεση ο n είναι περιττός ακέραιος. Επομένως, αναγκαστικά έχουμε $\frac{n}{k} = k$, οπότε $n = k^2$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\left\{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \neq 0,\; \frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3} = \frac{1}{9},\; xyz = 27\right\}.$$

Λύση

Για $xyz \neq 0$, θέτουμε $\frac{1}{x} = \alpha,\; \frac{1}{y} = \beta,\; \frac{1}{z} = \gamma$, οπότε το σύστημα γράφεται:

$$\left\{\alpha+\beta+\gamma \neq 0, \quad \alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = \frac{1}{9}, \quad \alpha\beta\gamma = \frac{1}{27}\right\}.$$

Από τη δεύτερη και την τρίτη εξίσωση έχουμε:

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right] = 0$$
$$\overset{\alpha+\beta+\gamma\neq 0}{\Longleftrightarrow} (\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2 = 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2 = (\beta-\gamma)^2 = (\gamma-\alpha)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha-\beta = \beta-\gamma = \gamma-\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma.$$

Από την τρίτη εξίσωση παίρνουμε:

$$\alpha^3 = \frac{1}{27} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{3}, \text{ οπότε έχουμε: } \alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3} \text{ και τελικά}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} = \frac{1}{z} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = y = z = 3.$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς x, y που ικανοποιούν τη σχέση:

$$2(x-1)(y-1) - 2(x-1)\sqrt{y-1} - 2(y-1)\sqrt{x-1} + x + y - 2 \leq 0.$$

Λύση

Η ανίσωση ορίζεται για $x \geq 1$ και $y \geq 1$. Θέτουμε

$$\alpha = \sqrt{x-1} \geq 0 \text{ και } \beta = \sqrt{y-1} \geq 0.,$$

οπότε η δεδομένη σχέση παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned}
&2\alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2 + \alpha^2 + \beta^2 \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\beta + \alpha^2\right) + \left(\alpha^2\beta^2 - 2\alpha\beta^2 + \beta^2\right) \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha^2\left(\beta^2 - 2\beta + 1\right) + \beta^2\left(\alpha^2 - 2\alpha + 1\right) \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha^2\left(\beta - 1\right)^2 + \beta^2\left(\alpha - 1\right)^2 \leq 0. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Αν ήταν κάποιος από τους όρους $\alpha(\beta-1)$, $\beta(\alpha-1)$ διάφορος του μηδενός, τότε θα είχαμε $\alpha^2(\beta-1)^2 + \beta^2(\alpha-1)^2 > 0$, άτοπο. Άρα η σχέση (1) είναι ισοδύναμη με το σύστημα

$$\begin{aligned}
&\alpha(\beta-1) = 0,\ \beta(\alpha-1) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0 \text{ ή } \alpha = \beta = 1 \\
&\sqrt{x-1} = 0 = \sqrt{y-1} \text{ ή } \sqrt{x-1} = 1 = \sqrt{y-1} \\
&x = y = 1 \ \acute{\eta}\ x = y = 2.
\end{aligned}$$

Πρόβλημα 3

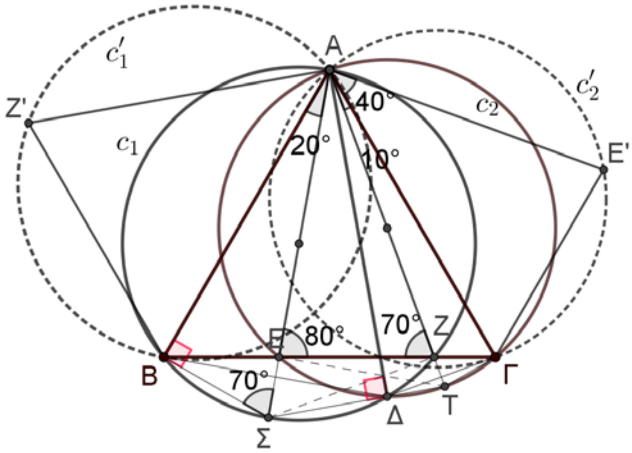
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ Να αποδείξετε ότι υπάρχει στο επίπεδό του μοναδικό σημείο Δ τέτοιο ώστε $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} = 70^0$ και $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma = 80^0$.

Στη συνέχεια να προσδιορίσετε το μέτρο της γωνίας $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta$.

Λύση

Θεωρούμε (τα μοναδικά) σημεία Ε και Ζ στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ τέτοια ώστε $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = 20°$ και $\mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 10°$. Τότε είναι $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Gamma = 80°$ και $\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B} = 70°$. Έστω c_1 ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΖ και c_2 ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΓΕ. Τότε οι κύκλοι c_1 και c_2 τέμνονται σε ένα μοναδικό σημείο Δ διαφορετικό του Α, για το οποίο ισχύει:

$$\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B} = 70° \text{ και } \mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma = \mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Gamma = 80°.$$



Σχήμα 2

Επίσης, έστω Ε' το συμμετρικό του Ε ως προς την ΑΓ και Ζ' το συμμετρικό του Ζ ως προς την ΑΒ. Έστω c_1' ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΖ' και c_2' ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΓΕ'. Τότε είναι:

$$\angle \mathrm{AE'\Gamma} = 80^\circ \text{ και } \angle \mathrm{AZ'B} = 70^\circ$$

Προφανώς το τόξο ΑΖ'Β του c_1' και το τόξο ΑΕ'Γ του c_2', δεν τέμνονται σε σημείο διαφορετικό από το Α. Το τόξο ΑΖ'Β του c_1' δεν τέμνει το τόξο ΑΕΓ του c_2, αφού το τελευταίο τέμνει την πλευρά ΑΒ σε εσωτερικό της σημείο. Επίσης, το τόξο ΑΕ'Γ του c_2', δεν τέμνει το τόξο ΑΖΒ του c_1, αφού το τελευταίο τέμνει την πλευρά ΑΓ σε εσωτερικό της σημείο. Συνεπώς, το Δ είναι μοναδικό.

Έστω Σ το σημείο τομής της προέκτασης της ΑΕ και του c_1, και έστω Τ το σημείο τομής της προέκτασης της ΑΖ και του c_2. Αφού τα σημεία Α, Β, Σ, Δ, Ζ είναι ομοκυκλικά και $\mathrm{B\hat{Z}\Sigma} = \mathrm{B\hat{A}\Sigma} = 20^\circ$ έχουμε

$$\mathrm{A\hat{\Delta}\Sigma} = \mathrm{A\hat{Z}\Sigma} = \mathrm{A\hat{Z}B} + \mathrm{B\hat{Z}\Sigma} = 70^\circ + 20^\circ = 90^\circ.$$

Ομοίως, αφού τα σημεία Α, Ε, Δ, Τ, Γ είναι ομοκυκλικά και $\mathrm{\Gamma\hat{E}T} = \mathrm{\Gamma\hat{A}T} = 10^\circ$ έχουμε

$$\mathrm{A\hat{\Delta}T} = \mathrm{A\hat{E}T} = \mathrm{A\hat{E}\Gamma} + \mathrm{\Gamma\hat{E}T} = 80^\circ + 10^\circ = 90^\circ.$$

Συνεπώς, τα σημεία Σ, Δ, Τ είναι συνευθειακά

Από τα εγγεγραμμένα τετράπλευρα ΑΒΣΖ και ΑΕΤΓ έχουμε

$$\mathrm{E\hat{T}A} = \mathrm{E\hat{\Gamma}A} = 60^\circ \quad \text{και } \mathrm{A\hat{\Sigma}Z} = \mathrm{A\hat{B}Z} = 60^\circ.$$

Άρα $\mathrm{E\hat{T}Z} = 60^\circ = \mathrm{E\hat{\Sigma}Z}$, που σημαίνει ότι το τετράπλευρο ΕΖΤΣ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, οπότε $\mathrm{A\hat{\Sigma}\Delta} = \mathrm{A\hat{Z}E} = 70^\circ$, και άρα $\mathrm{\Sigma\hat{A}\Delta} = 20^\circ$ στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΣ. Συνεπώς,

$$\mathrm{B\hat{A}\Delta} = \mathrm{B\hat{A}\Sigma} + \mathrm{\Sigma\hat{A}\Delta} = 20^\circ + 20^\circ = 40^\circ.$$

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Έστω a, b μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $a + b = 2$. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$A = 8(a^3 + b^3) - 3(a^4 + b^4).$$

Λύση

Θέτουμε $p = ab$ Τότε έχουμε:

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 8 - 6p. \quad (1)$$

$$a^4 + b^4 = \left(a^2 + b^2\right)^2 - 2a^2b^2 = \left((a+b)^2 - 2ab\right)^2 - 2a^2b^2$$

$$= (4 - 2p)^2 - 2p^2 = 16 - 16p + 2p^2. \quad (2)$$

Επομένως, η δεδομένη παράσταση γίνεται:

$$A = 8(8 - 6p) - 3(16 - 16p + 2p^2) = -6p^2 + 16$$

Επειδή $0 \leq p = ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 1$, έπεται ότι:

$$0 \leq p^2 \leq 1 \Rightarrow -6 \leq -6p^2 \leq 0 \Rightarrow 10 \leq A = -6p^2 + 16 \leq 16$$

Η ισότητα στο αριστερό μέλος ισχύει όταν $p^2 = 1 \Leftrightarrow ab = 1 \overset{a+b=2}{\Longleftrightarrow} a = b = 1$.

Η ισότητα στο δεξιό μέλος ισχύει όταν

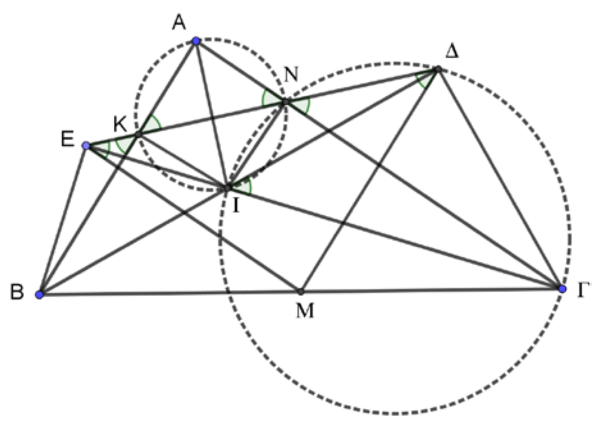
$$p^2 = 0 \Leftrightarrow ab = 0 \overset{a+b=2}{\Longleftrightarrow} (a,b) = (2,0) \text{ ή } (a,b) = (0,2).$$

Επομένως, η ελάχιστη τιμή της παράστασης A είναι 10 και η μέγιστη 16

Πρόβλημα 2

Έστω Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ. Έστω Δ σημείο στη διχοτόμο της γωνίας Β τέτοιο ώστε ΜΔ = ΜΒ και έστω Ε σημείο στη διχοτόμο της γωνίας Γ τέτοιο ώστε ΜΕ = ΜΓ. Έστω Ι το σημείο τομής των διχοτόμων ΒΔ και ΓΕ, έστω Κ το σημείο τομής των ευθειών ΑΒ και ΕΔ, και έστω Ν το σημείο τομής των ευθειών ΑΓ και ΕΔ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Κ, Ι, Ν είναι ομοκυκλικά.

Λύση



Σχήμα 3

Επειδή η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$ και ΜΒ = ΜΔ, έπεται ότι: $\mathrm{M}\hat{\Delta}\mathrm{B} = \mathrm{M}\hat{\mathrm{B}}\Delta = \Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A}$, οπότε θα είναι $\mathrm{M}\Delta \parallel \mathrm{BA}$.

Ομοίως, προκύπτει και ότι: $\mathrm{ME} \parallel \Gamma\mathrm{A}$.

Άρα έχουμε:

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{N}}\mathrm{K} = \Delta\hat{\mathrm{N}}\Gamma = \Delta\hat{\mathrm{E}}\mathrm{M} \quad \text{και} \quad \mathrm{A}\hat{\mathrm{K}}\mathrm{N} = \mathrm{E}\hat{\mathrm{K}}\mathrm{B} = \mathrm{E}\hat{\Delta}\mathrm{M} \ .$$

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΕΜΔ έχουμε $\Delta\hat{\mathrm{E}}\mathrm{M} = \mathrm{E}\hat{\Delta}\mathrm{M}$, οπότε από τις προηγούμενες σχέσεις προκύπτει η ισότητα $\mathrm{A}\hat{\mathrm{N}}\mathrm{K} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{K}}\mathrm{N}$. Άρα το τρίγωνο ΑΚΝ είναι ισοσκελές με ΑΚ = ΑΝ, οπότε η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$ είναι κάθετη προς την πλευρά ΚΝ. Επομένως, έχουμε:

$$\Delta\hat{\mathrm{N}}\Gamma = 90 - \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} = \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \Delta\hat{\mathrm{I}}\Gamma,$$

αφού η γωνία $\Delta\hat{\mathrm{I}}\Gamma$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΒΙΓ. Επομένως, το τετράπλευρο ΔΝΙΓ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Το τρίγωνο ΔΒΓ είναι ορθογώνιο, αφού $\mathrm{M}\Delta = \mathrm{BM} = \mathrm{M}\Gamma = \frac{\mathrm{B}\Gamma}{2}$, οπότε θα είναι και $\mathrm{I}\hat{\Delta}\Gamma = 90^0$, Άρα είναι και $\mathrm{I}\hat{\mathrm{N}}\Gamma = 90^0 \Rightarrow \mathrm{I}\hat{\mathrm{N}}\mathrm{A} = 90^0$. Ομοίως προκύπτει ότι $\mathrm{I}\hat{\mathrm{K}}\mathrm{A} = 90^0$. Επομένως, $\mathrm{I}\hat{\mathrm{N}}\mathrm{A} + \mathrm{I}\hat{\mathrm{K}}\mathrm{A} = 180^0$, οπότε το τετράπλευρο ΑΚΙΝ είναι εγγράψιμο.

Πρόβλημα 3

Η συνάρτηση $f:\mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών $f\left(\mathbb{N}^*\right) \subseteq \mathbb{N}^*$ και ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f\left(6n+7\right) = 6f\left(n\right)+7 \qquad \text{και} \qquad f\left(7n-1\right) = 7f\left(n\right)-1 \ ,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Να προσδιορίσετε την τιμή $f\left(2029\right)$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} 2029 &= 6\cdot 338+1 = 6\cdot 337+7 \\ 337 &= 6\cdot 56+1 \;\;= 6\cdot 55+7 \\ 55 &= 6\cdot 9+1 \quad\; = 6\cdot 8+7 \end{aligned}$$

και επίσης ότι

$$7n-1 = 6n+7 \Leftrightarrow n = 8.$$

Με $n=8$ στις δεδομένες σχέσεις λαμβάνουμε:

$$f\left(55\right) = 6f\left(8\right)+7 \quad \text{και} \quad f\left(55\right) = 7f\left(8\right)-1,$$

από τις οποίες προκύπτει η ισότητα

$$7f\left(8\right)-1 = 6f\left(8\right)+7\,,$$

οπότε $f\left(8\right)=8$. Άρα έχουμε:

$$\begin{aligned} f\left(55\right) &= 6f\left(8\right)+7 = 6\cdot 8+7 = 55 \\ f\left(337\right) &= 6f\left(55\right)+7 = 6\cdot 55+7 = 337 \\ f\left(2029\right) &= 6f\left(337\right)+7 = 6\cdot 337+7 = 2029. \end{aligned}$$