Θέματα Μαθηματικῶν τῆς Ὑστεροβυζαντινῆς περιόδου

Μαρία Δ. Χάλκου
Δρ. Μαθηματικός- Συγγραφέας, τ. Σχολικός Σύμβουλος
mchalkou@gmail.com

Περίληψη

Ἀπὸ ἕνα ὀγκῶδες Βυζαντινό χειρόγραφο τοῦ 15ου αἰ. τῆς Ἐθνικῆς Βιβλιοθήκης τῆς Αὐστρίας στὴν παροῦσα ἐργασία ἐπελέγησαν νὰ μελετηθοῦν δύο θέματα. Τὸ πρῶτο θέμα ἀφορᾶ στὶς ἀναλογίες καὶ εἰδικώτερα σὲ συγκεκριμένες ἐφαρμογές τους, οἱ ὁποῖες δημιουργοῦν ἐρωτηματικὰ σχετικὰ μὲ τὴ χρησιμότητά τους στη διδασκαλία κατὰ τὸν 15ον αἰ. Τὸ δεύτερο θέμα σχετίζεται μὲ τὸ κεφάλαιο τῶν προόδων. Καὶ τὰ δύο αὐτὰ θέματα παρουσιάζονται ἀναλυτικὰ ὡς πρὸς τὶς μεθόδους ἐπίλυσης τῶν προβλημάτων τῶν σχετιζόμενων μὲ αὐτά, καθὼς καὶ ὡς πρὸς τὴν προέλευση ἀλλὰ καὶ τὴν ἐξέλιξη αὐτῶν τῶν μεθόδων μέχρι τὴ σύγχρονη ἐποχή.

Εἰσαγωγή

Τὸ χειρόγραφο ἀπὸ τὸ ὁποῖο ἀντλήθηκαν τὰ θέματα ποὺ περιγράφονται στὸ ἄρθρο αὐτὸ ὀνομάζεται Ἑλληνικὸς Βιενναῖος κώδικας 65 τοῦ 15ου αἰ[1]. Πρόκειται γιὰ ἕνα Βυζαντινὸ χειρόγραφο Μαθηματικῶν τὸ ὁποῖο ἐκδόθηκε τὸ 2006 ἀπὸ τὸ Ἀριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, καὶ ὀνομάστηκε Ἑλληνικὴ Βιενναία Μαθηματικὴ Πραγματεία (ἙλλΒιενΜαθΠραγμ). Περιέχει ὕλη ποὺ προοριζόταν νὰ διδαχθεῖ σὲ μαθητὲς τῆς σημερινῆς Πρωτοβάθμιας καὶ Δευτεροβάθμιας Ἐκπαίδευσης, καθὼς καὶ σὲ ἐμπόρους, ἀργυροχρυσοχόους, κτίστες, κρατικοὺς ὑπαλλήλους καὶ γενικὰ σὲ ἀνθρώπους διαφόρων εἰδικοτήτων σχετιζομένων μὲ ὑποθέσεις τῆς καθημερινῆς ζωῆς τῶν Βυζαντινῶν. Ἡ σπουδαιότητα τοῦ κώδικα 65 εἶναι εἰσέτι ἀξιόλογη, ἀφοῦ ὅπως κατέδειξε ἡ ἐπὶ σειρὰ ἐτῶν ἐρευνητικὴ μελέτη, πρόκειται οὐσιαστικὰ γιὰ τὴν πρώτη Μαθηματικὴ

[1] *Ἀνωνύμου, Ἀριθμητική*, Ἔκδοση Χάλκου Μ. (2006). [Τὸ Μαθηματικὸ περιεχόμενο τοῦ Codex Vindobonensis phil. Graecus 65 (φφ. 11- 126), Εἰσαγωγή, Ἔκδοση καὶ Σχόλια], Θεσσαλονίκη, Κέντρο Βυζαντινῶν Ἐρευνῶν Ἀριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης. Στὸ ἑξῆς: Χάλκου (2006).

Ἐγκυκλοπαίδεια τῶν Βυζαντινῶν, μὲ ἰσχυρὴ πιθανότητα νὰ εἶναι καὶ ἡ πρώτη παγκοσμίως Μαθηματικὴ Ἐγκυκλοπαίδεια.[2] Στὸ ἄρθρο αὐτὸ θὰ παρουσιάσουμε ἀναλυτικὰ δύο θέματα, ἀπὸ τὸ κεφάλαιο τῶν ἀναλογιῶν τὸ πρῶτο (Α), καὶ ἀπὸ τὸ κεφάλαιο τῶν προόδων τὸ δεύτερο (Β). Θὰ ἀναλύσουμε τὶς μεθόδους διδασκαλίας τοῦ συγγραφέα τοῦ 15ου αἰ. τὶς ὁποῖες θὰ ἐξετάσουμε ὡς πρὸς τὴν προέλευσή τους καθὼς καὶ τὴν ἐξέλιξή τους μέχρι τῶν ἡμερῶν μας, καταδεικνύοντας ταυτόχρονα τὴν ἀδιάσπαστη διὰ μέσου τῶν αἰώνων συνέχεια τῆς Ἐπιστήμης τῶν Μαθηματικῶν.

Τέλος παρατίθενται πίνακας ἀντιστοιχίας τῶν Ἑλληνικῶν καὶ Ἀραβικῶν ἀριθμῶν (Παράρτημα Ι), δύο κεφάλαια, ἕνα ἀπὸ τὸ κάθε θέμα, στὴ μορφὴ ποὺ προέκυψε μετὰ τὴν ἀκριβὴ μεταγραφὴ τοῦ χειρογράφου, ἡ ὁποία προηγήθηκε τῆς μελέτης τοῦ μαθηματικοῦ περιεχομένου καὶ τῆς ἔκδοσης τοῦ ὁλοκληρωμένου ἔργου ἀπὸ τὸ ΑΠΘ (Παράρτημα ΙΙΙ), καὶ τέλος ἕνα κεφάλαιο ὅπως ἀκριβῶς παρουσιάζεται γραμμένο στὸ χειρόγραφο (Παράρτημα ΙΙ).

(Α) Σχετικὰ μὲ τὸ πρῶτο θέμα (Ἀναλογίες)

Στὴ δεύτερη ἑνότητα τοῦ κώδικα 65 (κεφ. 40-56)[3] ὅπου περιέχονται τὰ κλάσματα, οἱ λόγοι καὶ οἱ ἀναλογίες, διαπιστώνουμε κατ' ἀρχὰς ὅτι ὁ τρόπος ὁρισμοῦ τοῦ κλάσματος (τζάκισμα), προϋποθέτει ὁ ἀριθμητὴς νὰ εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν παρανομαστή. Ὁ ὁρισμὸς τοῦ κλάσματος ὅμως ἐπεκτείνεται, καὶ ἀργότερα στὸ χειρόγραφό μας ἐμφανίζονται κλάσματα μὲ ἀριθμητὲς μεγαλύτερους ἀπὸ τοὺς παρανομαστές (φ. 62r, στ. 1- 5, φ. 76r, κεφ. 135). Τὸ ἀξιοπερίεργο εἶναι ὅτι στὴν *Ἀριθμητικὴ* τοῦ Pagani ποὺ γράφηκε 155 χρόνια μετὰ ἀπὸ το χειρόγραφό μας (1591 μ.Χ.), ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν παρανομαστὴ ἐνῶ τὸ ἀντίθετο θεωρεῖται ἀπὸ τὸν Pagani μεταγενέστερη ἀνακάλυψη!!![4]

Στὸν κώδικα 65 οἱ πράξεις μεταξὺ κλασμάτων ἐκτελοῦνται μὲ μεθόδους παρόμοιες μὲ τὶς σημερινές. Τοῦτο ἀποτελεῖ μία ἀκόμη ἔνδειξη τῆς ἀδιάσπαστης συνέχειας τῶν μαθηματικῶν μεθόδων ἕως σήμερα[5]. Ὁ

[2] Chalkou M.(2008). *The Mathematical Encyclopaedia of the 15th century*, Review of the National (Serbian) Center for Digitization, Faculty of Mathematics, 12, 119-130.

[3] Ὅ.π. 121

[4] Smith, *Hist. Math.*, II, 155.

[5] Hunger-Vogel, *Byz. Rechenb.*, Μοιρασμὸς τζακισμάτων, σελ. 78.

συγγραφέας χρησιμοποιεῖ τὸν ὅρο "ὀκτακαιδέκατον" καὶ ἄλλους συναφεῖς μὲ αὐτόν, γιὰ νὰ δηλώσει τὸ 1/18 καὶ ἄλλα παρόμοια κλάσματα. Ἐδῶ εἶναι ἐμφανὴς ἡ ἐπιρροὴ ἀπὸ τὴν ἀρχαιότητα, δηλαδὴ τοῦ Ἥρωνα τοῦ Ἀλεξανδρέα, ἡ ὁποία φθάνει ἕως τὸν Γεώργιο Παχυμέρη, καθὼς αὐτοὶ μεταχειρίζονταν τοὺς ἴδιους ὅρους γιὰ νὰ κατονομάσουν τὰ κλάσματα[6].

Ὅσον ἀφορᾶ στὴ μέθοδο τῶν τριῶν, ἡ ὁποία χρησιμοποιεῖται ἀκόμα καὶ σήμερα, ὡς πρὸς τὴν καταγωγή καὶ τὴν ὀνομασία της θεωρεῖται ἰνδικῆς προέλευσης, καὶ υἱοθετήθηκε ἀργότερα ἀπὸ τοὺς Ἄραβες καὶ τοὺς Λατίνους. Ὑπῆρξε ἐξαιρετικὰ δημοφιλὴς στὸν κόσμο τοῦ ἐμπορίου, λεγόταν δὲ "χρυσὸς κανόνας", ἢ "ἐμπόρων κλείς", ἢ "κανὼν τῶν ἐμπόρων"[7]. Στὸ χειρόγραφό μας χρησιμοποιεῖται συχνὰ αὐτὴ ἡ μέθοδος ὑπὸ τὸ ὄνομα ἡ "διὰ τῶν τριῶν μεταχείρισις" (κεφ. 53)[8], βασίζεται δὲ στὶς ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν (κεφ. 55). Ἀποτελεῖ ἕναν θαυμάσιο τρόπο γιὰ νὰ διδάξουν οἱ δάσκαλοι ἐκείνων ἀλλὰ καὶ τῶν παλαιοτέρων ἐποχῶν[9], τὶς ἰσότητες τῶν λόγων, οἱ ὁποῖες ἦταν γνωστὲς ἀπὸ τὴν ἀρχαιότητα[10], ἐφαρμόζοντάς τες καὶ σὲ προβλήματα τῆς καθημερινῆς ζωῆς τὰ ὁποῖα ἐνδιέφεραν ἀνθρώπους χωρὶς θεωρητικὴ κατάρτιση, π.χ. ἐμπόρους, τεχνίτες κ.ἄ. Σημειωτέον, ὅτι σὲ βιβλίο Ἀριθμητικῆς τοῦ 16ου αἰ. χρησιμοποιεῖται ἡ

[6] 1) «Καὶ ἐπεὶ ὀκτωκαιδέκατον καὶ τὸ τῆς ΔΕ διάστημα πρὸς τὸ τῆς ΑΒ ἔσται...». Vincent, *Géom. prat. gr.,* 204.
2) «Ὥστε καὶ Ἀνθεστηριῶνος ἑπτακαιδεκάτη ἐνταῦθα..» Pachymeris G. (1835) (2). *De Michaele et Andronico Palaeologis bonnae impensis,* Leyden Lipsie, Weberi., 233.
3) Κατὰ τὸν Ἥρωνα τὸν Ἀλεξανδρέα: «Μονάδων 74 λειψασῶν τεσσαρακαιδέκατον...» Heath, *Hist. Gr. Math.,* II, 452.

[7] Πιθανολογεῖται ὅτι ἡ προέλευση τῆς μεθόδου ἀνάγεται στὸν Brahmagupta (628 μ.Χ.), ἐνῶ ὁ Sridara (10ος αἰ. μ.Χ.) ἔγραψε σχετικὰ μὲ αὐτὴ τὴ μέθοδο, τὴν ὁποία χρησιμοποιοῦσε στὶς ἐργασίες του, ὅπως ἀργότερα ὁ Bhaskara (1150 μ.Χ.). Smith, *Hist. Math.,* II, 483, 486· I, 274.

[8] Στὸ κεφ. 53 τῆς ἙλλΒιενΜαθΠραγμ. ὁ συγγραφέας γράφει: «διὰ γὰρ τῶν γ καὶ δ καὶ ε, οἵτινες εἰσὶ τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνόμοιοι, εὑρίσκεται τὸ ζητούμενον. Ἐνεργοῦντες δὲ οἱ τρεῖς τὸ ζητούμενον, καλῶς ἂν καὶ διὰ τῶν τριῶν λέγεται».

[9] Προβλήματα τὰ ὁποῖα ἐπιλύονται μὲ τὴ "μέθοδο τῶν τριῶν μὲ τζακίσματα", Hunger-Vogel, *Byz. Rechenb.,* 16.

[10] *Εὐκλ. Γεωμ.,* II, 24-67. *Eucl. Elem.,* II, 2-71. Heath, *Euclid.,* II, 138-186.

ὀνομασία "ρέουλες", ἡ ὁποία δηλώνει ἐκτὸς ἀπὸ τὴ μέθοδο τῶν τριῶν, τὴ μέθοδο τῶν πέντε καὶ ἑπτά, δηλαδὴ τὴ σύνθετη μέθοδο[11].

Ἀπὸ τὴν Β ἑνότητα ἐπελέγησαν πρὸς παρουσίαση τὰ κεφάλαια ποὺ ἀκολουθοῦν.

Κεφάλαιο 53 (νγ). Ἐὰν τὰ γ γίνωνται δ, τὰ ε πόσα γίνονται;

Πρόκειται γιὰ κλασικὴ περίπτωση ἀναλογιῶν ὅπου ὁ συγγραφέας χρησιμοποιεῖ μάλιστα καὶ τὸν ὅρο "πολλαπλασίαζε σταυροειδῶς", προκειμένου νὰ διδάξει τὸν χιαστί πολλαπλασιασμὸ τεσσάρων ὅρων μίας ἀναλογίας. Ἐκτὸς δὲ ἀπὸ τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα, θέτει καὶ τὸ ἀκόλουθο: Ἐὰν τὰ ια γίνωνται ιε, τὰ κ πόσα γίνονται;

Σ' αὐτὰ τὰ προβλήματα χρησιμοποιεῖ γιὰ πρώτη φορὰ τὸν ὅρο: "μεταχείρισις διὰ τῶν τριῶν", καὶ ἐννοεῖ τὴν διὰ τῶν τριῶν μέθοδο τὴν ὁποία διδάσκουμε σήμερα στοὺς μαθητές. Γιὰ τὴν ἐπίλυση τοῦ προβλήματος τῆς ἐκφώνησης ὁ συγγραφέας πολλαπλασιάζει τὸ ε μὲ τὸ δ καὶ διαιρεῖ μὲ τὸ γ. Τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι ς β/γ. Προφανῶς στηρίζεται στὴν ἰσότητα τῶν λόγων γ/δ= ε/χ. Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο θὰ βρίσκαμε σήμερα ὅτι χ= ς β/γ.

Ὀφείλουμε ὅμως νὰ παρατηρήσουμε πὼς ἡ ἔκφραση ποὺ χρησιμοποιεῖ ὅταν διατυπώνει τὸ πρόβλημα, δημιουργεῖ ἐρωτηματικά. Αὐτὸ συμβαίνει γιατὶ ἡ ἔκφραση τοῦ συγγραφέα "ὅταν τὸ γ γίνει δ", σημαίνει τελικὰ "ὁ λόγος τοῦ γ πρὸς τὸ δ". Ἀναρωτιέται κανεὶς γιατί θέλει ὁ συγγραφέας νὰ γίνει τὸ γ, δ καὶ δὲν περιγράφει ἁπλῶς τὴν σχέση ποὺ ἔχουν οἱ δύο αὐτοὶ ἀριθμοί, ἡ ὁποία σχέση ὁρίζεται ἀπὸ τὸν λόγο αὐτῶν.

Κεφάλαιο 54 (νδ). Ἐὰν τὰ ιε ἐλαττούμενα γίνωνται ια, τὰ κ πόσα γίνονται;

Στηρίζεται ὅπως καὶ προηγουμένως στὴν ἀναλογία: ιε/ια= κ/χ, καὶ χρησιμοποιεῖ τὴν ἴδια μέθοδο.

Κεφάλαιο 55 (νε). Ἐὰν η-κις η γίνωνται ρ, ιβ-κις ιβ πόσα γίνονται;

Βασίζεται στὴν ἀναλογία ρ/ξδ= χ/ρμδ καὶ βρίσκει χ= σκε. Γράφει δέ: «Ὃν γὰρ λόγον ἔχοσιν τὰ ρ πρὸς τὰ ξδ, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοσιν καὶ τὰ σκε πρὸς τὰ ρμδ».

[11] Γεωργακόπουλος Ν. (2000). *Ἡ παιδεία στὴν Ἀρκαδία ἐπὶ τουρκοκρατίας*, Τρίπολη, Φύλλα, 132-135.

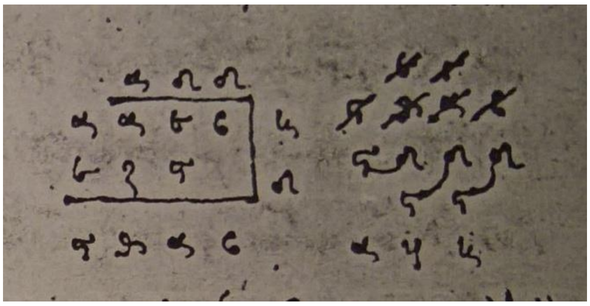
Χρησιμοποιεῖ καὶ ἄλλον τρόπο:

Ἀπὸ τὰ ξδ λείπουν λς μέχρι τὰ ρ. Ἀπὸ τὰ ρμδ λείπουν πα μέχρι τὰ σκε, ὁπότε: λς/ξδ= θ/ις καὶ πα/ρμδ= θ/ις. Ἔτσι λοιπὸν ἀποδεικνύει πὼς τὸ ζητούμενο εἶναι σκε.

Κεφάλαιο 56 (νς). Ἐὰν η-κις η γίνωνται μη, ιβ-κις ιβ πόσα γίνονται; (Παράρτημα ΙΙ, καὶ ΙΙΙ)

Τὸ ἀντιμετωπίζει μὲ τὸν ἴδιο τρόπο χρησιμοποιώντας κατ' οὐσίαν τὴν ἀναλογία:

μη/ξδ= χ/ρμδ, ὅπου με χ συμβολίζουμε τὸν ζητούμενο ἀριθμό, ὁπότε χ = 108.



Στὴν πιὸ πάνω εἰκόνα παρατηροῦμε τὸν τρόπο μὲ τὸν ὁποῖο κάνει τὸν πολλαπλασιασμὸ τοῦ ρμδ μὲ τὸ μη. Ἐφόσον ἔχουμε ἀριθμητικὸ σύστημα θέσης (τὸ κάθε γράμμα λαμβάνει ἀξία ἀνάλογα μὲ τὴ θέση ποὺ καταλαμβάνει στὸν ἀριθμό), τὸ ρμδ γράφεται ὡς αδδ, τὸ μη ὡς δη, κ.λπ.

Εὔλογα γεννῶνται ἐρωτήματα σχετιὰ μὲ τη χρησιμότητα στὴ διδασκαλία προβλημάτων αὐτοῦ τοῦ εἴδους, τὰ ὁποῖα σήμερα δὲν διδάσκονται σὲ κάποια βαθμίδα τῆς Ἐκπαίδευσης. Βεβαίως δὲν μποροῦμε νὰ ἀποκλείσουμε τὴν περίπτωση ὁ διδάσκων νὰ ἐπιθυμοῦσε νὰ ἀσκήσει περαιτέρω τοὺς μαθητές του στὸ κεφάλαιο τῶν ἀναλογιῶν, ἀλλὰ ἴσως νὰ εἶναι ἐξίσου πιθανὸν νὰ ἀπέβλεπε καὶ στὴν ἐκτίμηση τῆς εὐφυίας τους.

(Β) Σχετικά μὲ τὸ δεύτερο θέμα (Πρόοδοι)

Στὴν τρίτη ἑνότητα (κεφ. 57-60)[12] ὁ συγγραφέας ἀσχολεῖται μὲ τὶς προόδους καὶ συγκεκριμένα μὲ ὁρισμένες μορφὲς ἀριθμητικῶν προόδων γιὰ τὶς ὁποῖες προτείνει ὁμαδοποιημένες μεθόδους λύσεων. Μολονότι ὁ ὅρος "ἀριθμητικὴ πρόοδος" ἀνάγεται στὸν Διόφαντο[13], τὸν ὁποῖο τὸν 13^{o} αἰ.

[12] Χάλκου (2006), 147.
[13] *Διοφ. Ἀριθμ.*, 45.

ἀντέγραφε καὶ σχολίαζε ὁ Μάξιμος Πλανούδης[14], ὁ συγγραφέας τῆς ἙλλΒιενΜαθΠραγμ. δὲν χρησιμοποιεῖ τὸν ὅρο ἀριθμητικὴ πρόοδος. Μὲ τὰ ἀθροίσματα τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου εἶχε ἀσχοληθεῖ ὁ Al-Karagī[15] τὸν 6ον αἰ., καὶ ὁ Πέρσης Ἀβικέννας (Avicenne) τὸν 11ον αἰ., ὁ ὁποῖος μάλιστα γιὰ τὸν ὑπολογισμό τους ἐφάρμοζε τὴν ἑξῆς μέθοδο[16]:

1+2= 3= 2+(1/2).2
1+2+3= 6= 2.3
1+2+3+4= 10= 2.4+(1/2).4
1+2+3+4+5= 15= 3.5
1+2+3+4+5+6=21=3.6+(1/2).6

Στὸ τέλος τῆς ἔκδοσης τῆς *Ἀριθμητικῆς Εἰσαγωγῆς*[17] τοῦ Νικομάχου τοῦ Γερασηνοῦ (2ος αἰ.), περιέχονται ὁρισμένα προβλήματα, τὰ ὁποῖα ἀποδίδονται σὲ κάποιον μοναχὸ ὀνόματι Ἰσαάκ, καὶ ἀναφέρονται στὸν ὑπολογισμὸ ἀθροισμάτων τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου. Πρόκειται γιὰ προβλήματα παρόμοια μὲ αὐτὰ τῆς ἙλλΒιενΜαθΠραγμ. καὶ οἱ προτεινόμενες λύσεις τους εἶναι ἐπίσης τοῦ ἰδίου τύπου μὲ αὐτὲς τοῦ χειρογράφου μας[18].

Στοὺς πρακτικούς ὑπολογισμοὺς λοιπὸν δὲν φαίνεται νὰ χρησιμοποιοῦσαν κάποιον γενικότερο κανόνα ὑπολογισμοῦ τῶν ἀθροισμάτων ὅλων τῶν μορφῶν ἀριθμητικῶν προόδων, ὅπως συμβαίνει σήμερα. Ἂν καὶ μπορεῖ νὰ γνώριζαν τὸν τύπο ποὺ δίνει τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου, καθὼς καὶ τὸν τύπο ποὺ δίνει τὸν

[14] Constantinides, *High. Ed. Byz.*, 73, 157.

[15] *L' Algèbre Al-Badī' d' Al-Karagī* (MS. de la Bibliothèque Vaticane Barberini Orientale 36, 1), Trad. Anbouba Adel (1964), Beyrouth, Université Libanaise, 34.

[16] Τὰ ἀθροίσματα αὐτὰ εὑρίσκονται στὸ ἔργο τοῦ Ἀβικέννα *Dânèsh-Nâma,* τὸ ὁποῖο γράφηκε στὰ περσικὰ τὸν 11ο αἰ. Avicenne (1986), *Le livre de science*, Paris, Les belles lettres, 195.

[17] Nicom., *Introd. Arithm.* 148-149.

[18] Σταμάτης, *Ἑλλ. Μαθ.,* 104. Βλ. ἐπίσης (Χάλκου 2006) τὰ σχόλια ἐπὶ τῶν κεφ. 57, 58, 59, 60. Πρβλ. Nicom., *Introd. Arith.*, 150: «Ἀριθμῶν ὅσωνδήποτε ἐκκειμένων ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ τὸν συγκεφαλαιούμενον ἐκ τῆς συνθέσεως αὐτῶν λαμβάνειν». Ὅπου ζητεῖται τὸ ἄθροισμα 1+4+7+10+13+16+19.

νιοστὸ ὅρο της, δὲν πρότειναν ἴσως τὴν ἐφαρμογή τους, διότι ἔτσι θὰ ὁδηγοῦσαν τοὺς μαθητὲς σὲ περισσότερες πράξεις[19].

Κεφάλαιο 57 (νζ). Πόση γίνεται ἡ ποσότης μεμονωμένων ἀριθμῶν ἀπ' ἀρχῆς μέχρι τέλους ἑνούμενοι;

Ζητεῖ στὴν ἀρχὴ τὸ ἄθροισμα α+γ+ε+......+ιζ. Προσθέτει ἕναν ἕνα καὶ βρίσκει πα. Παραθέτει ὅμως καὶ τὸν γενικὸ τρόπο, σύμφωνα μὲ τὸν ὁποῖο:

ιζ= η+θ, θ.θ= πα καὶ αὐτὸ εἶναι τὸ ζητούμενο ἄθροισμα καθὼς ἰσχυρίζεται.

Ἐμεῖς γνωρίζουμε ὅτι πρόκειται γιὰ ἀριθμητικὴ πρόοδο μὲ πρῶτο ὅρο τὸν ἀριθμὸ 1, διαφορὰ τὸν 2, καὶ τελευταῖο ὅρο τὸν 17. Συνεπῶς ἐφαρμόζοντας τὸν τύπο

$α_ν= α_1+(ν-1)ω$ ἔχουμε:

17= 1+(ν-1).2, δηλαδὴ 16= (ν-1).2, καὶ ν= 9

Τὸ ζητούμενο ἄθροισμα θὰ εἶναι: $Σ_ν= [(α_1+α_ν)/2].ν$, δηλαδὴ

(1/2+17/2).9= (18/2).9= 81.

Παρατηροῦμε τὴν συντόμευση ποὺ ἔχει κάνει στὶς πράξεις, καθὼς συγκρίνουμε τὶς δύο μεθόδους.

Κεφάλαιο 58 (νη). Ὑπολογισμὸς τοῦ ἀθροίσματος β+δ+....+κ

Ἡ μέθοδός του εἶναι ἡ ἑξῆς:

κ/β= ι, ι/β= ε, ι+α= ια, ια.ε= νε, νε.β= ρι.

Σύμφωνα μὲ τὸν τύπο τοῦ ν-οστοῦ ὅρου ἀριθμητικῆς προόδου ἔχουμε:

20= 2+(ν-1).2, δηλαδὴ ν= 10

Ἐπίσης ἀπὸ τὸν τύπο τοῦ ἀθροίσματος ν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου ἔχουμε: (2/2+20/2).10= 11.10= 11.2.5= 110.

Ὑπολογισμὸς τοῦ β+δ+.....+κβ.

Γράφει τὰ ἑξῆς: κβ/β= ια, ια= ε+ς, ια.ς= ξς, ξς.β= ρλβ

Αὐτὰ στηρίζονται ὅπως ἔχουμε δεῖ μέχρι τώρα, στοὺς τύπους τῶν προόδων, δηλαδὴ στὴν συγκεκριμένη περίπτωση:

22= 2+(ν-1).2 δηλαδὴ ν= 11, καὶ (2/2+22/2).11= 12.11= 6.2.11.

[19] Χάλκου Μ. (2014). *Ἱστορία Μαθηματικῶν: Τὰ Βυζαντινὰ Μαθηματικά. The codex vindobonensis phil. Gr. 65 of the 15th century (ff.11r-126r),* I, [3]Ἀθήνα, 41-43.

Ἀκολουθοῦν καὶ ἄλλα παραδείγματα μὲ τὴν ἴδια μέθοδο.

Κεφάλαιο 59 (νθ). Ζητεῖ τὸ σύνολο τῶν Φ ποὺ θὰ ἔχει δώσει ἕνας πατέρας στὸ παιδί του, ἂν κάθε χρόνο ἀπὸ τὴν στιγμὴ τῆς γέννησής του τοῦ δίνει τόσα Φ ὅσα εἶναι καὶ τὰ χρόνια τοῦ παιδιοῦ μέχρι αὐτὸ νὰ γίνει 30 χρονῶν.

Στὸ Β μέρος τοῦ κώδικα, τὸ ὁποῖο ἐξέδωσαν οἱ H. Hunger καὶ K. Vogel, τὸ νόμισμα μὲ τὴν ὀνομασία φλωρίνιον ἰσοδυναμεῖ μὲ 2 ὑπέρπυρα (χρυσά), ἢ 48 καράτια ἢ 384 τουρνέσια[20]. Ἐπειδὴ στὸ χειρόγραφό μας, ἡ ἀναφερόμενη ἰσοτιμία εἶναι ἡ ἰσχύουσα στὴν Κωνσταντινούπολη, τὸ συμβολιζόμενο μὲ τὸ Φ νόμισμα πιθανότατα εἶναι τὸ φλωρίνιον[21], καὶ τὸ νόμισμα μὲ τὴν ὀνομασία μεγάλο χρυσὸ τῆς Κωνσταντινούπολης (1 ΙΙ= 24 καράτια) εἶναι τὸ ὑπέρπυρο[22]. Τοῦτο ἴσως νὰ ἰσχύει καὶ γιὰ τὸ μικρὸ χρυσό (1 μικρὸ ΙΙ= 20 καράτια), διότι κατὰ τὴν Παλαιολόγεια περίοδο (1261-1453) τὸ νομισματικὸ σύστημα δὲν εἶναι καθόλου σταθερό, ἐφόσον κυκλοφοροῦν ὑπέρπυρα, τὰ ὁποῖα ἰσοδυναμοῦν μέχρι καὶ μὲ 11 καράτια[23]. Δὲν εἶναι λοιπὸν διόλου ἀπίθανο, νὰ πρόκειται γιὰ τὸ ἴδιο νόμισμα, τὸ ὁποῖο ἰσοδυναμεῖ ὀνομαστικῶς μὲ 24 καράτια στὴν Κωνσταντινούπολη, ἀλλὰ στὶς συναλλαγὲς ἡ ἀξία του εἶναι 20 καράτια.

Στὸ συγκεκριμένο πρόβλημα ὁ συγγραφέας ζητεῖ τὸ ἄθροισμα α+β+....+λ. Κάνει τὸ ἑξῆς:

λ/β= ιε, λ+α= λα, λα.ιε= υξε.

Αὐτὸ εἶναι τὸ ἀποτέλεσμα. Ἂν ζητοῦσε τὸ ποσὸν μέχρι τὰ λα χρόνια τοῦ παιδιοῦ, τότε:

λα= ιε+ις, λα.ις= υϟς.

Αὐτὸ τὸ ἐπαληθεύει ὡς ἑξῆς: υξε+λα= υϟς.

Μὲ τοὺς τύπους τῶν προόδων θὰ γράφαμε:

30= 1+(ν-1).1, δηλ. ν= 30.

Καὶ τὸ ζητούμενο ἄθροισμα θὰ ἦταν: (30/2+1/2).30= 31.15= 465, γιὰ τὰ 30 χρόνια.

Γιὰ τὰ 31 θὰ γράφαμε:

31= 1+(ν-1).1, ν= 31 ὁπότε τὸ ἄθροισμα θὰ ἦταν: (1/2+31/2).31= 16.31= 496

[20] Σταμάτης, *Κριτ. Βυζ. βιβλ. Ἀριθμ.*, 13.

[21] Τὸ "χρυσὸ φλωρίνι" εἶναι νόμισμα τῆς περιόδου 1354-1376, τοῦ ὁποίου ἡ πραγματικὴ ὀνομασία εἶναι ἄγνωστη. Βαλασιάδης, *Ὁδ. βυζ. νομ.*, 149.

[22] Hendy, ***Stud. Byz. mon.***, 536, 541.

[23] *ὅ. π.,* 547. Βαλασιάδη, *Ὁδηγὸς βυζ. νομ.*, 18.

Κεφάλαιο 60 (ξ). Πόσαι ὧραι σημαντικαὶ κρούονται εἰς τὰς κδ ὥρας τοῦ νυχθημέρου;

Μὲ τὴν ἴδια μέθοδο ὑπολογίζει πρῶτα τὸ ἄθροισμα α+β+.....+κγ, ὡς ἑξῆς:

Γράφει: κγ= ια+ιβ, κγ.ιβ= δος

Μετὰ ὑπολογίζει τὸ α+β+......+κδ:

κδ/β= ιβ, κδ+α= κε, κε.ιβ= τ, καὶ ἐπαληθεύει: σος+κδ= τ.

Οἱ μέθοδοι τοῦ συγγραφέα τῆς ἙλλΒιενΜαθΠραγμ. αἰτιολογοῦνται μαθηματικῶς ὡς ἑξῆς:

Ι) Ἄν $\omega = \alpha_1$, τότε

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$, τότε $\alpha_\nu/\alpha_1 = 1 + \nu - 1 = \nu$, καὶ

$\Sigma_\nu = \nu.[2\,\alpha_1 + (\nu - 1)\,\alpha_1]/2 = \nu.[\,\alpha_1\,(1+\nu)]/2$, ὁπότε

Α) Ἐὰν $\nu = 2\kappa$, $\kappa \in N$, τότε $\Sigma_\nu = 2\kappa.[\,\alpha_1\,(1+2\kappa)]/2 = \alpha_1\,(1+2\kappa)\kappa$, ἤ

Β) Ἐὰν $\nu = 2\kappa+1$, $\kappa \in N$, τότε $\Sigma_\nu = (2\kappa+2)\,\alpha_1\,(2\kappa+1)/2 = \alpha_1\,(\kappa+1)(2\kappa+1)$.

ΙΙ) Ἄν $\alpha_1 = 1$, $\omega = 2$, τότε

$\alpha\nu = 1 + (\nu - 1)2$, δηλαδὴ $\alpha_\nu = 2\nu - 1$, ὁπότε

$\nu = (\alpha_\nu + 1)/2$, συνεπῶς $\nu = (\alpha_\nu + 1)/2$, καὶ

$\Sigma_\nu = \nu.(\,\alpha_1 + \alpha_\nu)/2 = [(1+\alpha_\nu)/2].[(\,\alpha_\nu + 1)/2]$.

Συμπεράσματα

Στὸ ἄρθρο αὐτὸ μελετήσαμε συγκεκριμένες εφαρμογὲς τῶν ἀναλογιῶν καὶ τῶν προόδων, ὅπως ἐμφανίζονται στὸν κώδικα 65 τοῦ 15ου αἰ., ἕνα βυζαντινὸ χειρόγραφο εὑρισκόμενο στὴν Ἐθνικὴ Βιβλιοθήκη τῆς Αὐστρίας στὴ Βιέννη. Ἐξετάσαμε λεπτομερῶς τὶς χρησιμοποιούμενες ἀπὸ τὸν συγγραφέα μεθόδους ἐπίλυσης, καθὼς καὶ τὴν πιθανὴ χρησιμότητα τῆς διδασκαλίας ὁρισμένων ἐξ αὐτῶν τῶν προβλημάτων. Ἐξετάσαμε ἐπίσης τὴν ἱστορικὴ προέλευση τῶν μεθόδων, ἀλλὰ καὶ τὴν ἐξέλιξή τους μέχρι τὴ σύγχρονη ἐποχή. Διαπιστώσαμε τὴν ἀδιάσπαστη συνέχεια τῶν Μαθηματικῶν, ἀλλὰ καὶ τὴν διαχρονικὴ εὑρηματικότητα τῶν δασκάλων στὸν τομέα τῶν μεθοδολογιῶν ἐπίλυσης.

Παράρτημα

(Ι) Πίνακας ἀντιστοίχισης Ἑλληνικῶν καὶ Ἀραβικῶν ἀριθμῶν

Ελλ	Αραβ	Ε	Α	Ε	Α	Ελλ	Αραβ
α	1	ι	10	ρ	100	͵α	1000
β	2	κ	20	σ	200	͵β	2000
γ	3	λ	30	τ	300	͵γ	3000
δ	4	μ	40	υ	400	͵δ	4000

ε	5	ν	50	φ	500	͵ε	5000
ς	6	ξ	60	χ	600	͵ς	6000
ζ	7	ο	70	ψ	700	͵ζ	7000
η	8	π	80	ω	800	ч	0
θ	9	ϟ	90	ϡ	900	Κατὰ τὴ μεταγραφὴ καὶ τὴν ἔκδοση τοῦ χειρογράφου, γιὰ τὸν ἀριθμὸ 0 χρησιμοποιήθηκε ἀντὶ τοῦ συμβόλου **ч**, τὸ σύμβολο **u.** Αὐτὸ ἔγινε μὲ τὴ σύμφωνη γνώμη 12 Καθηγητῶν τοῦ Ἐθνικοῦ καὶ Καποδιστριακοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν, καὶ τοῦ Ἀριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης.	

Παραδείγματα γραφῆς ἀριθμῶν

ρξε (165), ϡ ϟδ (994), ͵δτοβ (4372), υπ (480), καὶ ἐφόσον ἐφάρμοζαν τὸ ἀριθμητικὸ σύστημα θέσης: φξ =εςu =560, ͵δρκ =δαβu =4120 κ.λπ.

(ΙΙ) Τὸ κεφάλαιο 56 ὅπως παρουσιάζεται στὸ χειρόγραφο

(ΙΙΙ) Τὰ κείμενα τῶν κεφαλαίων 56 καὶ 60 ὅπως προέκυψαν μετὰ τὴ μεταγραφή τους

κεφάλαιο νς' Καὶ τὸ ἀνάπαλιν: Ἐὰν η-κις η οὐ γίνωνται ξδ ἀλλὰ φθειρόμενα γίνωνται νη, ιβ-κις ιβ πολλαπλασιαζόμενα, πόσα γίνονται φθειρόμενα κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον;

Ἀληθῶς οὖν η-κις η γίνονται ξδ καὶ ιβ-κις ιβ γίνονται ρμδ. Πολλαπλασίασόν δε τὰ ρμδ μετὰ τῶν μη, ὧν εἴπομεν ὅτι η-κις η οὐ γίνονται ξδ ἀλλὰ μη.

αδδ εγ

αaεβ η   ςθαβ
εζς   δ   ςδδδ
ςθαβ   ςς
              αυη

Μέρισόν δε τὰ πολλαπλασιασθέντα μετὰ τῶν ξδ καὶ γίνεται ὁ τούτων διαμερισμὸς ρη. Καὶ ἰδού, ἐὰν η-κις η οὐ γίνωνται ξδ, ἀλλὰ φθειρόμενα γίνωνται μη, ιβ-κις ιβ κατὰ τὸν ὅμοιον λόγον εὗρες, ὅτι οὐ γίνονται ρμδ, ἀλλὰ φθειρόμενα γίνονται ρη· ὃν γὰρ λόγον (10) ἔχοσιν τὰ μη πρὸς τὰ ξδ, τὸν αὐτὸν ἔχοσιν καὶ τὰ ρη πρὸς τὰ ρμδ.

Ἵνα δὲ εἰδῇς, ὅτι οὕτως ἐστὶ ὡς ἡ πρόχειρος δεδήλωκεν μεταχείρισις, ἐκ τῶν μη λείπονται ις μέχρι τῶν ξδ καὶ ἐκ τῶν ρη λείπονται λς μέχρι τῶν ρμδ. Τὰ ις δὲ μετὰ τῶν ξδ συγκρινόμενα, ἐστὶ τέταρτον μέρος· δ-κις γὰρ ις, ξδ γίνονται. Ὡσαύτως καὶ τὰ λς πρὸς τὰ ρμδ συγκρινόμενα ἐστὶ τέταρτον μέρος· δ-κις γὰρ λς, ρμδ γίνονται. Ὥσπερ γὰρ η-κις η οὐ γίνονται ξδ ἀλλὰ μη, τὰ δὲ μη ἐστὶ γ/δ τῶν ξδ, οὕτως καὶ ιβ-κις ιβ οὐ γίνονται ρμδ, ἀλλὰ ρη, τὰ δὲ ρη ἐστὶ γ/δ τῶν ρμδ. Καὶ αὐτὴ ἐστὶ ἡ ἀπόδειξις ὅτι ἐγένετο καλῶς τὸ ζητούμενον. Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶν ἕτερον ὅμοιον ζήτημαν διὰ τῆς ὁμοίας ταύτης μεταχειρίσεως τῆς διὰ (15) τῶν τριῶν, ἔχεις εἰδέναι καλῶς τὸ ζητούμενον.

κεφάλαιο ξ' Περὶ τοῦ πῶς ἐστὶ εἰδέναι προχείρως, πόσαι ὧραι σημαντικαὶ κρούονται εἰς τὰς κδ ὥρας τοῦ νυχθημέρου.

Αἱ κδ ὧραι τοῦ νυχθημέρου κρούονται, πρῶτον μὲν α ἐπὶ τὰ β, ἅπερ ἐστὶ τὰς β ὥρας, ὧραι σημαντικαὶ καὶ γ καὶ ἑξῆς ὁμοίως. Ζητεῖς δὲ εἰδέναι ἐπειδ' ἂν σημανθῶσιν ὧραι κγ, πόσα ἀπηχήματα ὡρῶν ἐσημάνθησαν τὰς κγ ὥρας. Ἐστὶ δὲ τοῦτο ὅμοιον ζήτημαν ὡς καὶ τοῦ παιδίου καὶ τῶν Φ. Μέρισον τὰς κγ ὥρας εἰς μέρη δύο, ια δὲ καὶ ιβ γίνονται κγ. Ἐπεὶ δὲ τὰ ιβ ἐστὶ πλείονα τῶν ια, οὐκ ἔστι χρεία προσθῆναι α ἐπὶ τῶν κγ. Πολλαπλασίασόν δε τὰς κγ ὥρας μετὰ τῶν ιβ· ιβ-κις οὖν κγ γίνονται σος. Καὶ ἰδοὺ τὰς κγ ὥρας κρούονται ἀπηχήματα ὡρῶν σος.

(10) Ζήτει δὲ πάλιν τὰς κδ ὥρας τοῦ νυχθημέρου πόσα ἀπηχήματα ὡρῶν κρούονται. Μέρισόν δε τὰς κδ ὥρας εἰς μέρη δύο καὶ γίνεται ἕκαστον μέρος τῶν δύο ἀνὰ ιβ. Ἐπεὶ δὲ ὁ διαμερισμὸς τῶν κδ ἐστὶ ἴσος, ιβ καὶ ιβ, πρόσθες α ἐπὶ τῶν κδ ὡρῶν καὶ γίνονται ὧραι κε.

βγ   βθ
δς β   εη β
βγ α   βε α
βζς   γυυ

Πολλαπλασίασόν δε τὰ κε μετὰ τῶν ιβ· ιβ-κις οὖν κε γίνονται τ. Καὶ ἰδοὺ τὰς κδ ὥρας τοῦ νυχθημέρου κρούονται ἀπηχήματα ὡρῶν τ. Εὕρομεν ὅτι εἰς τὰς κγ ὥρας κρούονται ἀπηχήματα σος. Πρόσθες καὶ κδ ὑπὲρ τῶν κδ ὡρῶν καὶ γίνονται ὁμοῦ τ. Καθὼς οὕτως εὗρες καὶ διὰ τῆς προχείρου ταύτης μεταχειρίσεως, ὡσαύτως δὲ διὰ τῆς ὁμοίας ταύτης μεταχειρίσεως καὶ ἐπὶ ἄλλων ὡρῶν οὕτως ποιῶν εὑρίσης καλῶς (15) τὸ ζητούμενον.

Πηγές

Ἀνωνύμου, Ἀριθμητική, Ἔκδοση Χάλκου Μ. (2006). [Τὸ Μαθηματικὸ περιεχόμενο τοῦ Codex Vindobonensis phil. Graecus 65 (φφ. 11- 126), Εἰσαγωγή, Ἔκδοση καὶ Σχόλια], Θεσσαλονίκη, Κέντρο Βυζαντινῶν Ἐρευνῶν Ἀριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης.

http://id.lib.harvard.edu/aleph/010301697/catalog (Ἡμερομηνία προσπέλασης: 22/01/2017).

Χάλκου Μ. (2014). *Ἱστορία Μαθηματικῶν: Τὰ Βυζαντινὰ Μαθηματικά. The codex vindobonensis phil. Gr. 65 of the 15th century (ff.11r-126r)*, I, [3]Ἀθήνα.

http://id.lib.harvard.edu/aleph/014084958/catalog (Ἡμερομηνία προσπέλασης: 22/01/2017)

Βιβλιογραφία

L' Algèbre Al-Badī' d' Al-Karagī (MS. de la Bibliothèque Vaticane Barberini Orientale 36, 1), Trad. Anbouba Adel (1964), Beyrouth, Université Libanaise.

Avicenne, *Le livre de Science*, trad. Achena M. et Massé Th. (1986). Paris, Les belles lettres.

Βαλασιάδη, *Ὁδ. βυζ. νομ....* Βαλασιάδης Χ. ([2]1995). *Ὁδηγὸς Βυζαντινῶν Νομισμάτων*, Ἀθήνα, Βιβλιοθήκη τῶν Ἑλλήνων, Γεωργιάδης.

Γεωργακόπουλος Ν. (2000). *Ἡ παιδεία στὴν Ἀρκαδία ἐπὶ τουρκοκρατίας*, Τρίπολη, Φύλλα.

Chalkou M. (2008). *The Mathematical Encyclopaedia of the 15th century*, Review of the National (Serbian) Center for Digitization, Faculty of Mathematics.

Constantinides, *High. Ed. Byz....* Constantinides C. N. (1982). *Higher Education in Byzantium in the thirteenth and early fourteenth centuries (1204-1310)*, Nicosia Cyprus Research Center.

Διοφ. Ἀριθμ.... Διοφάντου Ἀριθμητικά, ἐκδ. Σταμάτη Ε. (1963). Ἀθῆναι, ΟΕΔΒ.

Εὐκλ. Γεωμ., II..... *Εὐκλείδου γεωμετρία*, II *(θεωρία ἀριθμῶν)*, ἐκδ. Σταμάτη Ε. (1958). Ἀθῆναι, ΟΕΣΒ.

Heath, *Euclid.*, II.... *Euclid: The thirteen books of the Elements.* Translated with introduction and commentary Heath Th. (1956). II, N. York, Dover.

Heath, *Hist. Gr. Math.*, I- II..... Heath Th. I (1921), II (1981). *A History of Greek Mathematics,* Oxford, Oxford UP.

Eucl. Elem., II..... *Euclidis Elementa,* ed. Heiberg I. L. (1884). II, Lipsiae, Teubner.

Hendy, *Stud. Byz. mon.....* Hendy M. F. (1985). *Studies in the Byzantine monetary,* Cambridge, Cambridge UP.

Hunger-Vogel, *Byz. Rechenb.....* Hunger H.-Vogel K. (1963). *Ein Byzantinisches Rechenbuch des 15 Jahrhunderts. 100 Aufgaben aus dem Codex Vindobonensis Phil. Gr. 65,* Wien, Österr. Acad. D. Wissenschaften.

Nicom., *Intr. arith.....* Nicomachi Geraseni Pythagorei, *Introductionis arithmeticae,* libri II, Recensvit Ricardus Hoche (1866). Lipsiae in Aedibus B. G. Teubneri.

Pachymeris G. (1835) (2). *De Michaele et Andronico Palaeologis bonnae impensis,* Leyden Lipsie, Weberi.

Smith, *Hist. Math.,* I- II..... Smith D. E. (1958). *History of Mathematics,* I- II, New York, Dover.

Vincent, *Géom. prat. gr.....* Vincent J. H. (1858). *À la Géomètrie Pratique des Grecs*. Extrait des notices des Manuscrits, XIX pt. 2, Paris, Imr. Impériale.

Σταμάτης, *Ἑλλ. Μαθ.....* Σταμάτης Ε. ²(1979). *Ἑλληνικὰ Μαθηματικά,* Ἀθήνα, Ἑταιρεία τῶν φίλων τοῦ λαοῦ.

Σταμάτης, *Κριτ. Βυζ. βιβλ. Ἀριθμ......* Σταμάτης Ε. (1965). *Κριτικὴ Βυζαντινοῦ βιβλίου Ἀριθμητικῆς* Hunger H. und Vogel K. (Ein byzantinisches Rechenbuch des 15. Jahrhunderts), Ἀθήνα, Σίδερης.